Prof. Dr. -Ing. Dr. phil. Frank Müller-Römer
Ägyptologe.

Hamburg, 25.09.2016

Die Mathematik im alten Ägypten

Einführung

Gleichzeitig mit der Hieroglyphenschrift entwickelten sich im Alten Ägypten im ausgehenden vierten Jahrtausend v.Chr. auch die ersten Zahlenzeichen und die Mathematik. Mit dem Entstehen des Zentralstaates musste das Festhalten von Vorgängen in Verwaltung und Wirtschaft durch Aufzeichnungen sichergestellt werden. Das Festlegen von Abgaben und Steuern sowie das Führen von entsprechenden Listen erforderte das Beherrschen entsprechender Rechenleistungen. So besaßen die Ägypter mathematische Kenntnisse und Methoden zur Bewältigung tagtäglicher Anforderungen, welche die quantitativen Verhältnisse und räumlichen Beziehungen in der objektiven Realität betrafen. So sind zugleich mit den ersten Belegen für die Benutzung der Hieroglyphenschrift auch die ersten Zahlenzeichen nachweisbar. Die Planung und Errichtung der Pyramiden im alten Reich wären ohne mathematische Kenntnisse nicht möglich gewesen.

Das Zahlensystem

Für die ganzzahligen Zahlenwerte 1, 10, 100. 1000, 10.000, 100.000 und 1.000.000 gab es jeweils ein Zeichen. Eine Ziffer „0“ wurde für die Darstellung beliebiger Zahlenwerte nicht benötigt. Dennoch musste immer wieder ein „Nichtvorhandensein“ von Dingen ausgedrückt werden.[1]

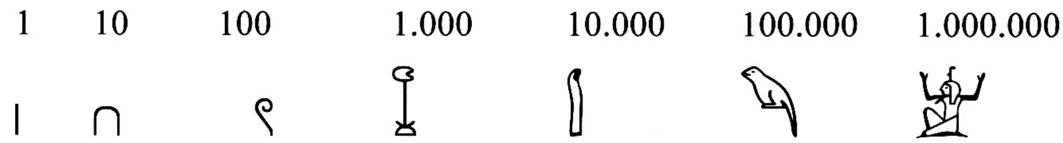
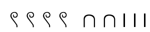


Bild 1 Hieroglyphische Zahlzeichen

Einzelne Summen bzw. Zahlenwerte wurden in rein additiver Weise geschrieben:

z. B.: 423 

Die Zahlenzeichen kennzeichnen das ägyptische Zahlensystem als voll ausgebildetes Dezimalsystem – allerdings ohne eine Positionswertbeschreibung und ohne den Wert 0. Das ägyptische Zahlensystem mit der Basis 10 erleichterte zwar das Rechnen, aber das Fehlen des Positionssystems führte zu einer schwerfälligen Rechentechnik – insbesondere mit Brüchen. Im Gegensatz zu den nach einem dezimalen System aufgebauten Zahlen werden diese immer als Brüche ausgeführt. So wird beispielsweise der Bruch $\frac{1}{5}$ immer in dieser Form geschrieben und nicht in dezimaler Schreibweise als 0,2 ausgedrückt.

---

[1] Hoffman, F. Planeten, Hausrat und Orakel – Ägyptologisches zur Null, http://www.collegium-aegyptium.de/Thots-6.pdf.

Ein Bruch wurde durch das Voranstellen der Hieroglyphe , der Buchstabe r, gebildet. Folgende Darstellung zeigt dies beispielhaft:

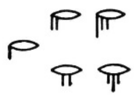
$\frac{1}{5}$ $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{15}$

Allerdings gelten für verschiedene Brüche andere Darstellungsformen, oft als Individualbezeichnungen bezeichnet:

$\frac{1}{2}$; Zeichen gs (Seite, Hälfte) und

$\frac{1}{4}$ × ; Zeichen x, auch als Determinativ für „Zerbrechen“ verwendet.

Weiterhin gibt es noch drei gesonderte Zeichen für die Brüche $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{4}$:



$\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$

Die Zeichen für $\frac{1}{3}$ und $\frac{3}{4}$ kamen sehr bald außer Gebrauch und wurden durch

für $\frac{1}{3}$ und mit × , d.h. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

für $\frac{3}{4}$ abgelöst.

Außer der der Möglichkeit, einen Bruch mit dem Zähler 1 auszudrücken, gab es bei Rohstoffen wie Getreide, Erz o.ä. noch die Möglichkeit, Bruchteile des Volumenmaßes hekat (4,8 Liter) durch verschiedene Teile des Horusauges zu schreiben. Die Werte lauten $\frac{1}{2}$ bis $\frac{1}{64}$. Zusammen ergeben diese Werte allerdings nur $\frac{63}{64}$. Bei den Brüchen handelt es sich um eine geometrische Reihe mit dem Quotienten $\frac{1}{2}$.

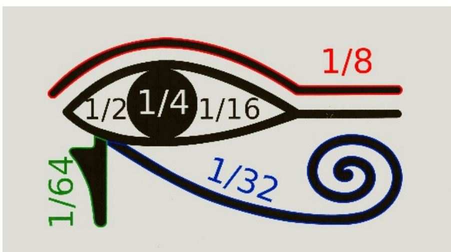


Bild 2 Horusauge

Auf die ägyptischen Maße und Gewichte wird in diesem Beitrag nicht näher eingegangen.

Die Quellen mathematischer Aufgabenstellungen

Im Gegensatz zu Funden derselben Zeitepoche aus Mesopotamien sind aus Ägypten aus dem Alten Reich nur wenige mathematische Berechnungen belegt. So ist in einer Inschrift im Grab des Metjen in Saqqara aus dem Übergang von der 3. zur 4. Dynastie die Berechnung der Fläche eines Rechtecks überliefert.[2]

pRhind	British Museum (BM 10057 und 10058)	gefertigt um 1590-1549 v.Chr. unter dem Hyksos König Apophis, als Abschrift eines Papyrus aus der Zeit Amenemhets III. 1853-1806 v.Chr.
pMoskau	(GMII Moskva 4674)	Kopie eines älteren Dokuments, angefertigt im Mittleren Reich
pBerlin	(6619)	Mittleres Reich
pKahun		Mittleres Reich, 12. Dyn.
Mathematische Lederrolle	(BM 10250)	Mittleres Reich
pAnastasi I.	(BM 10247)	Zeit Ramses' II.
Demotische Papyri London (Mathematische Aufgabensammlung)	(BM)	Ptolemäische Zeit

Tabelle 1

Unserer Kenntnis der altägyptischen Mathematik liegen hauptsächlich zwei längere Texte zugrunde: Einmal der Papyrus Moskau (E4676) und zum anderen der im Britischen Museum liegende Papyrus Rhind (BM 10057-8) – genannt nach seinem ursprünglichen Besitzer, der ihn 1858 in Ägypten kaufte, nachdem er wahrscheinlich bei einer Raubgrabung im Bereich des Rameseums, eines Tempel Ramses II. in Theben – West, gefunden wurde. Angefertigt wurde das Papyrus um 1650 v. Chr. von dem Schreiber Ahmes. Dieser hatte einen etwa 200 Jahre älteren Text kopiert. Hinzu kommen kleinere Textfragmente in Berlin (pBerlin 6619), Kairo (CG 25367-8) und die mathematische Lederrolle (BM 10250) sowie das pAnastasi I. (BM 12247) - ebenfalls im Britischen Museum:

Der pRhind hat eine Länge von etwa 5,5 m und eine Höhe von 32 cm. Er beinhaltet 87 Rechenbeispiele sowie eine Tabelle und übertrifft damit den pMoskau mit etwas mehr als 25 Rechenaufgaben bei weitem. Diese Texte sind der Zeit des Mittleren Reiches (2100 – 1800 v.Chr.) zuzuordnen. Sie sind in hieratischer Schrift geschrieben.

[2] Lexikon der Ägyptologie, Band IV, S.118ff.

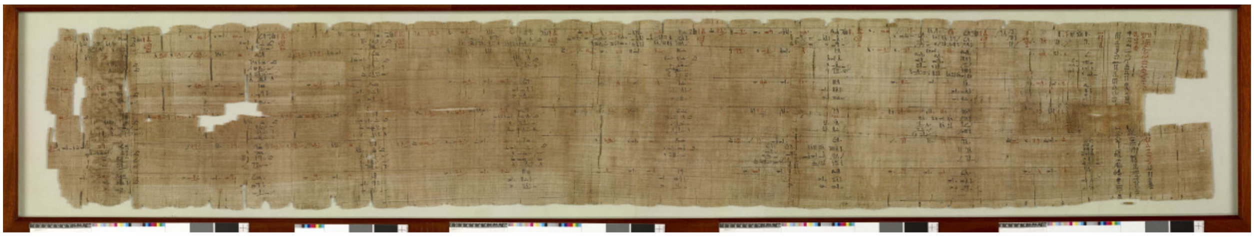


Bild 3 pRhind

Die Papyri aus dem späten Mittleren Reich beinhalten auch Aufgabenstellungen aus Rechenaufgaben des Alten Reichs. Da sehr viel an Unterlagen in der Ersten Zwischenzeit verloren ging, ist davon auszugehen, dass die genannten mathematischen und geometrischen Kenntnisse schon im Alten Reich zumindest in den Grundzügen bekannt waren. Nach der Reichseinigung etwa bis zur dritten Dynastie wurden aufgrund der Anforderungen seitens der Staatsverwaltung die für die ägyptische Mathematik erforderlichen Entdeckungen gemacht. Die entsprechenden Rechenverfahren bildeten sich heraus. Später erfolgten nur noch Verfeinerungen.

Die regelmäßig wiederkehrenden Überschwemmungen des Fruchtlandes im Niltal erforderten ausgedehnte Landvermessungen und großartige Wasserbauten. Dazu sind mathematische Kenntnisse unerlässlich, auch wenn uns heute darüber keine urkundlichen Nachweise vorliegen.

Grundrechenarten

<u>Addition</u> und <u>Subtraktion</u> werden durch einfaches Abzählen der Werte der Zahlzeichen vorgenommen.

Die <u>Multiplikation</u> wird als Addition einzelner und verdoppelter Werte des zweiten Faktors durchgeführt. Die entsprechenden Werte für das Bilden der Ergebnissumme (hier für 4 und 8) werden mit einem Merkstrich versehen und dann addiert. Ihre Summe (48 + 96 = 144) bildet das Ergebnis.

12 • 12		1	12
		2	24
	/	4	48
	/	8	96
zusammen			144

Dieses Verfahren wird ggf. durch Einsatz einer Verzehnfachung abgekürzt. Dies wird aus der Aufgabe 69 des pRhind deutlich: „Multipliziere die Zahl 14 mit der Zahl 80“:[3]

Für die Lösung der Aufgabe werden die Zahlenwerte für 10 mal 80 und 4 mal 80 (nach der Verdopplung der Werte 1 mal 80 und 2 mal 80) mit einem Merkstrich versehenen und anschließend wie folgt addiert:

	1	80	
/	10	800	
	2	160	
/	4	320	Summe 1120

3 Neugebauer, O., Vorlesungen über Geschichte der antiken mathematischen Wissenschaften, Erster Band Vorgriechische Mathematik, in: Hrsg. Doob, J.l. u.a. Die Grundlagen der mathematischen Wissenschaften, Bd. 43, Springer Verlag Berlin 1969, S.114.

Das Verfahren für die Multiplikation wird immer nur additiv und nie Subtraktiv verwendet. Eine Multiplikation mit der Zahl 9 wird stets durch 2 → 4 → 8 + 1 und nie durch 10 – 1 ausgeführt.

Während beim Multiplizieren nur eine einzige Methode, nämlich die der schrittweisen Verdoppelns Anwendung findet, existieren für die Division zwei getrennte Verfahren:

Die „$\frac{1}{2}$ Reihe“ ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ u.s.w.) und die „$\frac{2}{3}$ Reihe“ ($\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$ u. s. w.).

Die Division erfolgt jeweils durch Halbierung.

Beispielhaft für das Verfahren mit der „½ Reihe“ ist die weiter unten geschilderte Aufgabe des pRhind zur Berechnung einer Unbekannten x aus einer linearen Gleichung:

Mathematische und inhaltliche Aufgabenstellungen

Eine Analyse der in den Papyri enthaltenen Aufgaben zeigt, dass es nur relativ wenige unterschiedliche Typen gibt:

Berechnung einer unbestimmten Größe (Unbekannten) x aus einer linearen Gleichung (Haufen- oder Mengenaufgaben). In der Literatur werden diese Aufgaben oft als „Hau-Rechnungen“ bezeichnet. Dieser Begriff leitet sich aus dem ägyptischen Wort ᶜḥᶜ (aha) für Haufen ab, der für die unbekannte Größe, unser „x“, steht. Derartige Aufgaben befassen sich beispielsweise mit der Verteilung von Rationen. Hinzu kommt noch die Berechnung von Problemen 2. Grades.

Berechnung von Verhältnissen wie Aufgaben zur Brot- und Bierherstellung (psw – Rechnungen). Psw heißt „backen“ oder „kochen“. Entsprechende Aufgaben bilden den größten Teil der in den Texten vorkommenden Aufgaben. Dabei geht es um die Verhältnisse der aus einem Scheffel Getreide herstellbaren Brote bzw. Krüge Bier. Der psw – Wert ist somit auch ein Maß für den Anteil des Getreides am Brot und Bier.

Geometrische Aufgaben zur Flächen- und Volumenberechnung

Rechnen mit Brüchen ohne konkreten Bezug.

Generell gilt, dass viele der Rechenaufgaben sich mit konkreten praktischen Anwendungen aus den unterschiedlichen Gebieten der staatlichen Verwaltung befassen:

Feldvermessung zur Abschätzung der Erntemengen

Füllen der Getreidespeicher

Entnahme von Getreide

Registrieren der unterschiedlichen Produkte und

Ausgabe von Rationen.

Im Folgenden soll anhand einiger typischer Rechenaufgaben gezeigt werden, wie diese erfolgten.

Berechnung einer Unbekannten x aus einer linearen Gleichung (Haufen- oder Mengenaufgabe)

Aufgaben mit Gleichungen 1. Grades beinhalten im pRhind sogenannte Haufen- oder Mengenaufgaben, bei der nach einer Gesamtmenge gefragt wird, von der ein Teil bekannt ist. Als Beispiel dafür sei die Aufgabe 24 des pRhind (nach Chase u.a., 1927) erläutert:

"Ein Haufen und sein 1/7 zusammen genommen ergeben 19. Wie groß ist der Haufen?"

Für den Lösungsweg wird angenommen, dass der Haufen das Volumen 7 habe.

/	1	7
/	$\frac{1}{7}$	1

Das Gesamtvolumen nach Aufgabenstellung beträgt dann 8.

Die Aufgabe wird wie folgt gelöst: So oft wie der Wert 8 multipliziert werden muss, um die Zahl 19 zu ergeben, so oft muss dieses Ergebnis anschließend mit 7 multipliziert werden, um die gewünschte Gesamtmenge des Haufens zu erhalten:

	1	8
/	2	16
	$\frac{1}{2}$	4
/	$\frac{1}{4}$	2
/	$\frac{1}{8}$	1
Summe 1	$2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$	16+2+1 = 19

Nun erfolgt die Multiplikation der Summe 1 mit der Zahl 7:

/	1	$2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$		
/	2	$4+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$		
/	4	$9+\frac{1}{2}$		
Ergebnis	7	$16+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$	=	Gesamtmenge des Haufens

Beweis:

Die Gesamtmenge des Haufens ist	$\frac{7}{7}$	$16+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$
zuzüglich	$\frac{1}{7}$	$2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$
insgesamt ergibt sich der Wert		19.

Bei dieser Berechnung handelt es sich aus heutiger Sicht um ein recht umständliches – allerdings zu einem richtigen Ergebnis führenden – Verfahren. Heute schreiben Schüler die Gleichung

$$x + \frac{x}{7} = 19$$

mit dem Ergebnis, dass sich der Wert x als gesuchte Menge des Haufens mit 16,625 ergibt, was der Darstellung in Brüchen mit $16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$ entspricht.

Aufgaben zur Brot- und Bierherstellung (psw – Rechnungen)

Wie bereits erwähnt, bilden die psw –Rechnungen den größten Teil der in den Texten vorkommenden Aufgaben. Dabei steht die Frage der Verhältnisse, wie viele Brote bzw. welche Menge von Bier (Anzahl der Krüge) aus einem Scheffel Getreide hergestellt werden können. Das Maß für die Getreidemenge ist das hekat (4,8 Liter). Der psw – Wert ist somit auch ein Maß für den Getreidegehalt des Brotes bzw. des Bieres. Er liegt beim Brot zwischen 5 und 45, bei Kuchen erreicht sein Wert 160. Der psw – Wert des Bieres liegt zwischen 1 und 6.

Im Folgenden soll die Aufgabe 69 des pRhind als Beispiel genannt werden:

> *3* $\frac{1}{2}$ *hekat Mehl, die zu 80 Broten verarbeitet sind.*
>
> *Du sollst mich den Gehalt von einem davon an Mehl wissen lassen. Du sollst mich ihren psw – Wert* (also das Backverhältnis) *wissen lassen.*

Rechnung:

> Der psw – Wert ergibt sich aus der Division der Anzahl der Brote mit der Getreide- (Mehl-) menge:
>
> 80 geteilt durch $3\,\frac{1}{2}$
>
> Das Backverhältnis ist $22\ \frac{2}{3}\ \frac{1}{7}\ \frac{1}{21}$

Geometrische Aufgaben zur Flächen- und Volumenberechnung

<u>Flächeninhalt eines Dreiecks und eines Vierecks.</u>

Vor der Errichtung des alten und neuen Assuan Staudamms kam es trotz gewisser Uferböschungen jedes Jahr im Herbst in der ägyptischen Jahreszeit Achat (3ḫt) zu einer Überflutung des Fruchtlandes beidseitig des Nils. Grund waren die starken Niederschläge im äthiopischen Hochland, die den Wasserstand des Nils stark anschwellen ließen. Nach Rückgang der Flut waren die überfluteten Gebiete mit einer dicken Schlammschicht überzogen. Land- und Feldmarkierungen der einzelnen Felder waren nicht mehr vorhanden. Nach Rückgang der Flut mussten diese neu vermessen werden. Neben einem Katasterschreiber als verantwortlichem Beamten waren daran Feldschreiber sowie Strickträger und Strickspanner beteiligt.

Der für die Feldvermessung benutzte Strick, der durch Knoten als Markierungen in Maßeinheiten unterteilt war, hatte vermutlich eine Länge von 100 Ellen. Mittels eines Messstricks mit insgesamt 12 Knoten war so die Konstruktion rechtwinkliger Dreiecke möglich.

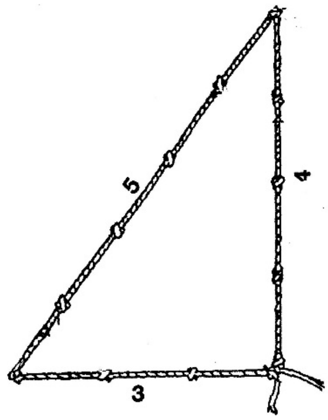


Bild 4 Knotenstrick

Aufgaben mit der Berechnung von Dreiecken und auch Vierecken einschließlich von Trapezen kommen in verschiedenen mathematischen Papyri wie beispielsweise im pRhind und im Demotischen Papyri London vor:

Beispielhaft im Folgenden soll die Berechnung des Flächeninhalts eines dreieckigen Grundstücks nach pRhind (Aufgabe 51) gezeigt werden:

Die Aufgabenstellung lautet: *Wie groß ist die Fläche eines Dreiecks mit 1000 Ellen „meret“* (Seite oder Höhe?) *und einer Basis von 400 Ellen Länge?*

Lösung: Nimm ½ von 400, das ist 200, um es rechteckig zu machen. Multipliziere 1000 mal 200, das ist die Fläche.

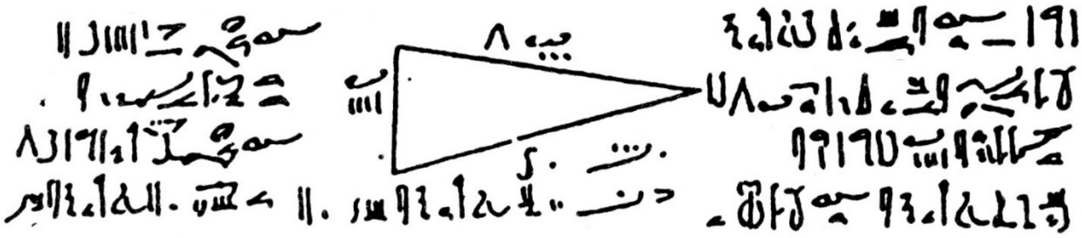


Bild 5 Aufgabe 51 aus dem pRhind

Je nach Form des Dreiecks kommt es, wenn anstelle der Höhe des Dreiecks mit der Seitenlänge gerechnet wird, zu mehr oder weniger großen Ungenauigkeiten gegenüber der richtigen Flächen. So gab es auch reine Approximationsformeln. Aus den Tempelinschriften von Edfu ist bekannt, dass die Größe von Feldern (Fläche) unter Angabe der vier Seiten a, b c und d nach der Formel

$$\frac{a+b}{2} \cdot \frac{c+d}{2} = \mathrm{F}$$

berechnet wurde. Eine Anzahl der Felder in der Auflistung sind dreieckig. Die Angabe der Längen erfolgte dann so: „Die westliche Seite ist a, die östliche b, die südliche c, die nördliche „nichts“. Für die Berechnung wurde dann die Formel

$$\frac{a+b}{2} \cdot \frac{c}{2} = \mathrm{F}$$

verwendet. Diese Näherungsrechnungen ermöglichten offensichtlich eine in der Praxis ausreichende Flächenermittlung.

Als weiteres Beispiel sei die Berechnung des Flächeninhalts eines Feldes in Rechteckform nach dem Demotischen mathematischen Papyrus London (Aufgabe 64) angeführt:

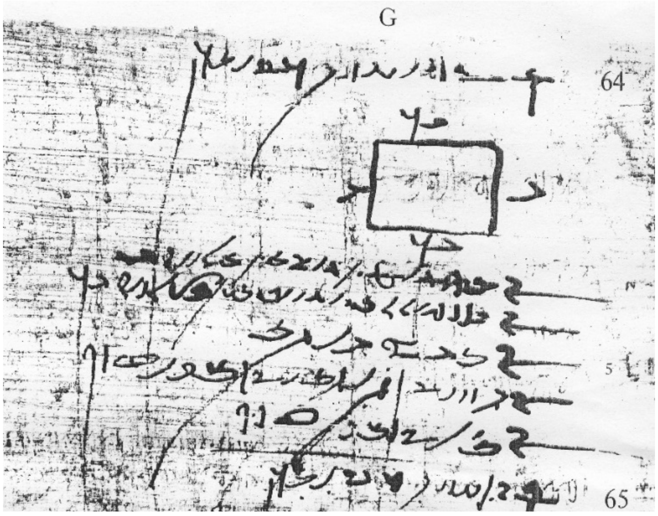


Bild 6 Demotischer mathematischer Papyrus London, Plate 24

Zwei Seitenlängen des Feldes sind mit der Länge 10 bezeichnet, die beiden anderen mit 12. Die Fläche berechnet sich nun nach unserem mathematischen Verständnis ganz einfach: 10 mal 12 gleich 120. Das ägyptische Rechenverfahren geht jedoch einen anderen Weg: (10 + 10):2 mal (12+12):2. Das Ergebnis ist natürlich das gleiche. Handelt es sich jedoch um ungleiche Längen eines Rechtecks, so werden sofort die Vorteile der ägyptischen Rechenmethode sichtbar.

Aus dem Berliner Papyrus ist uns eine Aufgabe zur Lösung von zwei Unbekannten überliefert:[4]

> *Eine Fläche von 100 Quadrat Ellen ist in zwei Quadrate aufzuteilen, deren Seiten sich wie 1 zu $\frac{3}{4}$ verhalten sollen.*

Der Schreiber nimmt als Rechenansatz die Länge der beiden Quadrate mit 1 und $\frac{3}{4}$ an. Die Gesamtfläche ermittelt er dann zu $1^2 + (\frac{3}{4})^2 = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16}$. Dann zieht er die Quardratwurzel – leider, ohne uns zu veraten, nach welcher Regel, und erhält den Wert $\frac{5}{4}$. Nun zieht er die Quadratwurzel aus der Zahl 100 und teilt diesen Wert durch $\frac{5}{4}$. Das Ergebnis ist 8. Jetzt multipliziert er die anfangs willkürlich angenommen Werte 1 und $\frac{3}{4}$ mit der Zahl 8 und erhält die Längen der beiden Quadrate mit 8 und 6 Ellen. Die beiden Flächen ergeben sich zu 64 und 36 Quadratellen – insgesamt 100.

Flächeninhalt des Kreises: Eine sehr gute Näherungsformel zur Berechnung des Kreisinhalts ergibt sich aus Aufgaben der pRind und pMoskau. So wird in Aufgabe 50 des pRhind die Frage nach der Berechnung der Fläche eines runden Feldes mit dem Durchmesser 9 gestellt *Was ist ihr Betrag als Fläche?*

Die Antwort lautet:
Dann subtrahierst du sein $\frac{1}{9}$ als 1, indem der Rest 8 ist. Dann multiplizierst du 8 mit 8. Dann resultiert 64. Sein Betrag als Fläche ist 64:

[4] Pichot, A., Die Geburt der Wissenschaft, Wissenschaftliche Buchgesellschaft Darmstadt, 2000, S.183.

$$F = \left(\frac{8}{9} \cdot 9 \right)^2 = 8^2 = 64.$$

Bei der Lösung dieser Aufgabe wird die Kreisfläche der Fläche eines Quadrats mit der Seitenlänge 8/9 des Kreisdurchmessers gleichgesetzt.

Allgemein geschrieben lautet die Formel

$$F = \left(\frac{8}{9} d \right)^2 = \frac{64}{81} \cdot 4\, r^2 = \frac{256}{81} \cdot r^2 = 3{,}1605 \,.\, r^2$$

Der sich so für ein „ägyptisches π" ergebende Wert beträgt 3,1605 (anstelle des exakten Werts von 3,1416) und stellt eine sehr gute Näherung dar. Die mit „unserem" Wert für π berechnete Fläche beträgt 63,617. Der Fehler beträgt somit lediglich 0,6 %.

Der Koeffizient $x = \left(\frac{8}{9} \right)^2$ scheint ein unveränderlicher Faktor zu sein, da er auch bei der Berechnung des Kreisumfangs

$$U = 4\, x\, d$$

Verwendung findet. Es ist daher anzunehmen, dass die Formel für die Fläche den Ausgangspunkt gebildet hat.[5]

Unklar war bisher, wie die Schreiber im Alten Ägypten zu dieser Formel kamen, die doch für die allermeisten Anwendungsfälle eine völlig ausreichende Genauigkeit bei der Flächenberechnung von Kreisen besitzt. Mathematiker haben vergeblich versucht, die Formel abzuleiten. Verschiedene Wissenschaftler vertreten die Meinung, dass sie auf ein Achteck, wie es in der Aufgabe 48 des pRhind dargestellt ist, zurückzuführen sei. Dem widersprochen hat kürzlich Uwe Dorka und die Lösung veröffentlicht:[6]

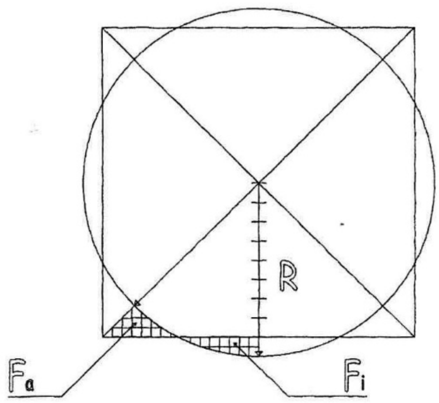


Bild 7 Überschneidungsflächen Rechteck und Kreis

Er geht bei seinem Lösungsansatz von einem ingenieurmäßigen Denkansatz aus, nachdem numerische Approximationen zur Lösungsfindung heute verstärkt in Wissenschaft und Praxis eingesetzt werden. Die meisten Probleme seien zu komplex, als dass sie sich noch in mathematisch geschlossener Form lösen ließen. Für die Ermittlung einer gleich großen Fläche zwischen einem Quadrat und einem Kreis benötigt man eine numerische Approximation für den Flächenausgleich zwischen beiden Figuren. In nachfolgender Abbildung ist dies dargestellt: Wenn sich die inneren (Fi) und äußeren (Fa)

---

[5] Neugebauer, O., Vorlesungen über Geschichte der antiken mathematischen Wissenschaften, Erster Band Vorgriechische Mathematik, in: Hrsg. Doob, J.l. u.a. Die Grundlagen der mathematischen Wissenschaften, Bd. 43, Springer Verlag Berlin 1969, S.124.

[6] Dorka, U. E., Zur altägyptischen Quadratur des Kreises in: Göttinger Miszellen (GM) 246 (2015), S.17-23.

Überschneidungsflächen eines Quadrats und eines Kreises ausgleichen, haben beide Figuren dieselbe Fläche.

Wird in einer anschließenden Betrachtung der Radius des Kreises in unterschiedliche Einheiten geteilt, ergeben sich Quadrate, die den Kreis an unterschiedlichen Stellen schneiden. Die sich auf diese Weise ergebenden Rasterflächen können leicht ermittelt, d.h. ausgezählt werden. Stimmt die Summe der inneren und äußeren Quadrate überein, ist die Lösung gefunden.[7]

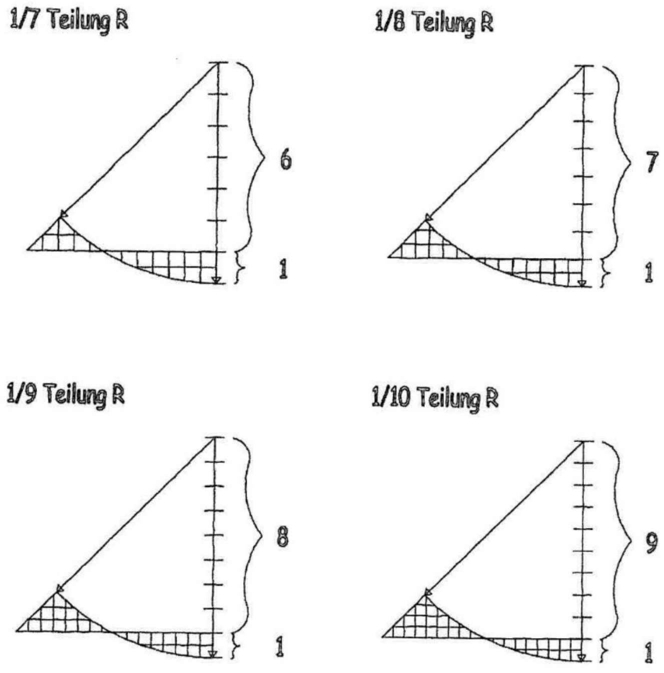


Bild 8 Quadratur des Kreises durch Teilung von R ($\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$ und $\frac{1}{10}$

Dorka wertet die sich bei den Rasterteilungen 1/7 Radius bis 1/10 Radius ergebenden Differenzen zwischen den Überschneidungsflächen aus und kommt zu dem Ergebnis, dass das Raster mit der Teilung 1/9 mit großem Abstand zu den anderen untersuchten Rastern das beste Ergebnis liefert, wie aus folgender Tabelle ersichtlich wird.

Teilung	Kästchenzählung			Fehlerschätzung bezogen auf die Quadratfläche		
R	F_a	F_i	Differenz	absoluter Fehler	im Verhältnis	in %
1/7	5	10	-5	-5x8=-40	$-40/24^2$= -40/576	-8,4
1/8	8	10,5	-2,5	-2,5x8=-20	$-20/28^2$= -20/784	-2,6
1/9	11,5	11,5	0 (0,5)	0 (0,5x8=4)	0 ($4/32^2$= 4/1024)	0 (0,4)
1/10	16,5	11,5	5	5x8=40	$40/36^2$= 40/1296	3,1

Tabelle 2 Auswertung

[7] Die Verwendung von Rasterflächen findet im alten Ägypten z.B. auch bei der Übertragung einer Skizze für eine Skulptur auf den entsprechenden Steinblock Anwendung.

Dorka zeigt mit seiner Lösung des alten Rätsels, dass im alten Ägypten eine ingenieurmäßige Denkweise vorgeherrscht hat, die mit ihrer Einfachheit und akzeptablen Genauigkeit Vorrang vor exakten mathematischen Lösungen hatte.

Aufgaben zur Volumenberechnung

Aus verschiedenen anderen Aufgaben des pRhind ergibt sich, dass die Berechnung der Volumina von Zylindern (Aufgabe 41) und Würfeln (Aufgabe 44) als Getreidespeicher sowie Neigungswinkeln von Pyramiden (Aufgaben 56 und 57) Stand der damaligen Rechentechnik war.

Das Rechenbeispiel für die Volumenberechnung eines zylinderförmigen Getreidespeichers (Aufgabe 41) sei kurz dargestellt:

> *Nimm $\frac{1}{9}$ von 9, das ist 1. Der Rest ist 8. Multiplizier 8 mit 8, das Ergebnis ist 64. Mach die Multiplikation 64 mal 10, das Ergebnis ist 640.*

Der Durchmesser des Speichers beträgt 9, die Höhe 10. Der Schreiber wendet also die weiter oben erläuterte Formel für die Berechnung der Fläche des Kreises $F = (\frac{8}{9}d)^2$ an und multipliziert diese dann mit der Höhe. Das Volumen ergibt sich nach der Formel $V = h \cdot (\frac{8}{9}d)^2$. Anschließend wird das Resultat noch in verschiedene Maßeinheiten für Getreide azsgedrückt.

In dem pMoskau, der 19 mathematische Problemstellungen, darunter 4 aus dem Gebiet des Geometrie, enthält, ist auch eine Aufgabe (Nr. 14) enthalten, die sich mit der Volumenberechnung eines quadratischen Pyramidenstumpfes befasst. Daraus ist zu folgern, dass auch das Volumen einer Pyramide berechnet werden konnte, wenn die Länge der oberen Seite gleich Null wird.

Nach Touraeff 1917 stellt sich die Aufgabe (Übersetzung) wie folgt dar:[8]

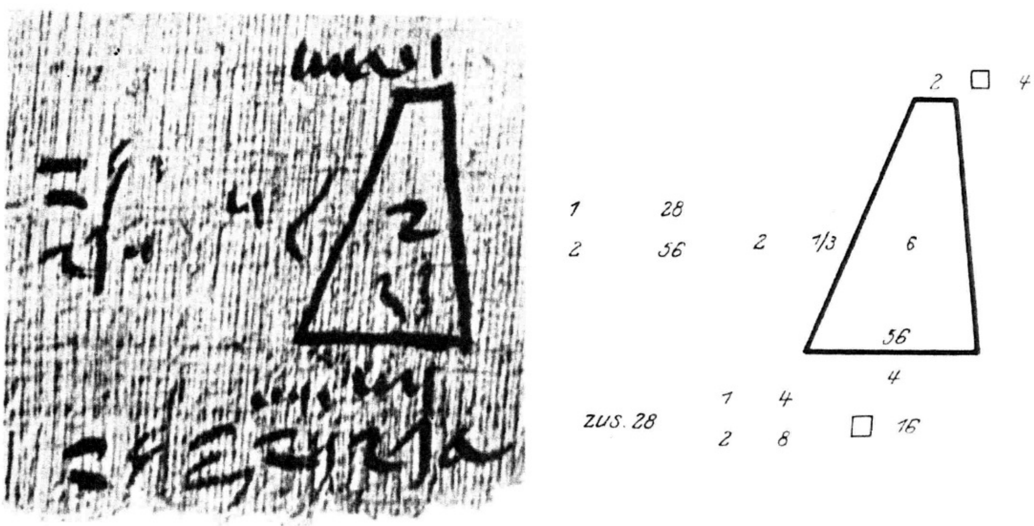


Bild 9 pMoskau, Aufgabe 14, Volumenberechnung eines quadratischen Pyramidenstumpfes

[8] Pichot, A., Die Geburt der Wissenschaft, Wissenschaftliche Buchgesellschaft Darmstadt, 2000, S.194/95. Zeichnung nach Neugebauer, O., Vorlesungen über Geschichte der antiken mathematischen Wissenschaften, Erster Band Vorgriechische Mathematik, in: Hrsg. Doob, J.l. u.a. Die Grundlagen der mathematischen Wissenschaften, Bd. 43, Springer Verlag Berlin 1969, S.127.

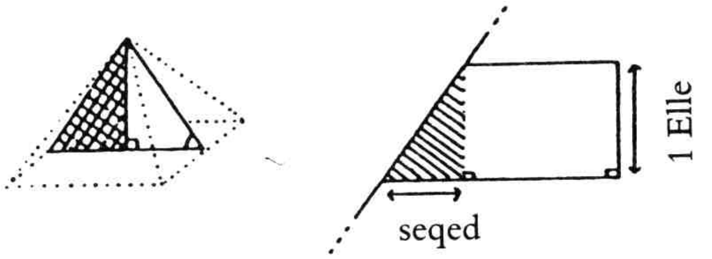
„Die Aufgabe ist, einen Pyramidenstumpf (Volumen) *zu machen. Wenn man dir sagt (…) 4 unten, 2 oben, mache Folgendes: Rechne mit dieser 4 quadriert, es entsteht 16; verdopple 4, es entsteht 8. Mache Folgendes: Rechne mit dieser 2 quadriert, es entsteht 4. Addiere diese 16 und diese 8 und diese 4, es entsteht 28. Mache Folgendes: Berechne 1/3 von 6* (Höhe der Pyramide)*, es entsteht 2. Mache Folgendes: Rechne mit 2mal 28, es entsteht 56. Was du gefunden hast, ist richtig.“*

Diese Formel

$$V = (a^2 + ab + b^2) \cdot \frac{h}{3}$$

ist völlig korrekt. Diese Formel zur Volumenberechnung eines Pyramidenstumpfes quadratischer Grundfläche kann als Glanzstück ägyptischer Mathematik bezeichnet werden. Neugebauer weist daraufhin, dass an dieser Formel einerseits die symmetrische Gestalt, andererseits die mathematische Korrektheit überrascht. Die korrekte Ableitung dieser Formel verlange die Notwendigkeit von Infinitesimalbetrachtungen, die weit über dem Rahmen der Elementargeometrie lägen.

Ein weiteres Beispiel im Zusammenhang mit dem Pyramidenbau stellt die Aufgabe 56 des pRhind dar. Dabei soll der Rücksprung (seked), das heißt Neigung der Außenfläche der Pyramide berechnet werden.



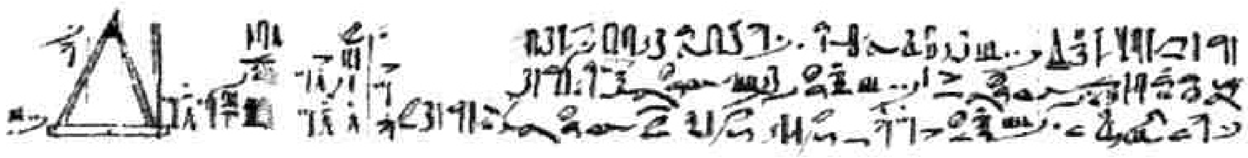


Bild 10 pRhind 56: Berechnung der Pyramidenneigung

Der pRhind enthält ebenso eine Aufgabe zur Berechnung der Höhe einer Pyramide.

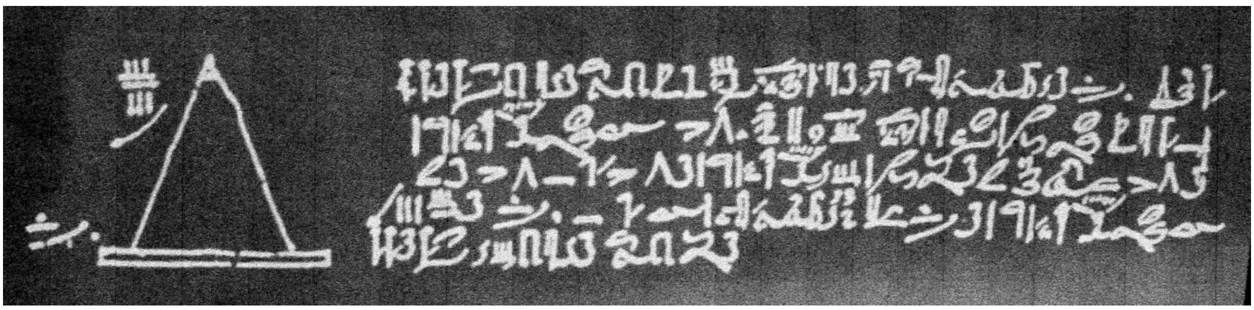


Bild 11 pRhind: Berechnung der Höhe einer Pyramide

Verblüffend ist auch die Aufgabenstellung 10 im pMoskau, über die zwischen Ägyptologen und Mathematikern seit vielen Jahren gestritten wird. Handelt es sich dabei um die Berechnung einer Halbkugeloberfläche oder um die eines Halbzylinders?[9] Diesem Disput kommt eine besondere Bedeutung zu. Haben die alten Ägypter gewusst, dass die Halbkugeloberfläche den doppelten Wert der Fläche des größten Kreises der Kugel ausmacht? Mehr als tausend Jahre vor den Griechen?

Fläche einer Halbkugel $F = \pi/2 \cdot d^2 = 2 \pi r^2$

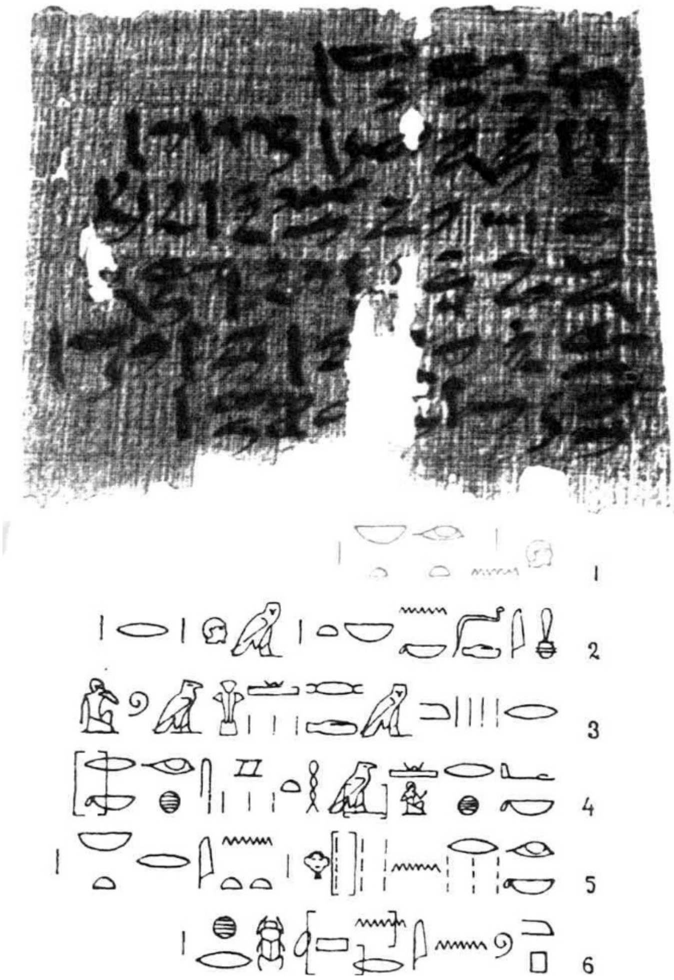


Bild 12 pMoskau 10 Berechnung der Oberfläche einer Halbkugel (?)

Die Aufgabe 10 des pMoskau lautet nun:

Beispiel zur Berechnung einer nb.t: Wenn man Dir sagt: eine nb.t mit einer tp–r3 von 4½ gibt. Lass mich wissen ihre Fläche. Nimm 9 von 9, weil die nb.t die Hälfte des i [p.t] ist. Das macht t.

Der wissenschaftliche Streit entzündet sich an der Übersetzung des Wortes nb.t bzw. der Auslegung des nicht mehr komplett lesbaren Wortes am Ende der Kolumne 18.6. Ist damit der Begriff

[9] Neugebauer, O., Vorlesungen über Geschichte der antiken mathematischen Wissenschaften, Erster Band Vorgriechische Mathematik, in: Hrsg. Doob, J.l. u.a. Die Grundlagen der mathematischen Wissenschaften, Bd. 43, Springer Verlag Berlin 1969, S.129 ff.
Hoffmann, F., Die Aufgabe 10 des Moskauer mathematischen Papyrus in: ZÄS 123 (1996), S.19ff.

„i[nr]“, also eine Halbkugel, wie Struwe meint[10], oder nach der Auffassung von Peet[11] ein Halbzylinder i[p.t] gemeint? Der Begriff *tp–r3* bezeichnet die Basis, Grundlinie in einem rechtwinkligen Dreieck[12] und steht hier für Grundlinie als Rand eines Halbkreises (Durchmesser).

Struve hat die Rechenschritte im Einzelnen nachvollzogen und kommt unter Berücksichtigung „ägyptischen π“ (siehe weiter oben) zu der auch heute noch verwendeten Formel für die Fläche einer Halbkugel $F = \pi/2 \cdot d^2 = 2\pi r^2$.

Dem widersprechen Neugebauer und vor allem Hoffmann entschieden. Sie weisen auf unterschiedliche Art und auf Hinweise auf verschiedene Quellen und Vergleiche nach, dass mit dem Wort nb.t nur die Oberfläche für einen kuppelförmigen Speicher (Neugebauer) bzw. die Fläche eines Halbzylinders (Hoffmann) gemeint sein könne. Die Formel für Berechnung der Fläche in der Aufgabe 10 des pMoskau lautet nach Neugebauer:

$$F = a\left(\frac{8}{9}\right) 2\,d \approx a\frac{d\pi}{2}$$

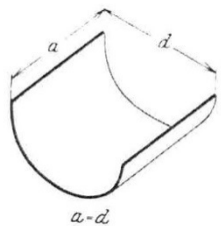


Bild 13 Fläche eines Halbzylinders

<u>Massenberechnung</u>: Im pAnastasi I befasst sich eine der drei technischen Aufgaben mit der Ermittlung der Ziegelmenge, die für den Bau einer großen Rampe erforderlich sind. Borchardt hat die Rampe aufgrund der Angaben im Papyrus wie folgt dargestellt:[13]

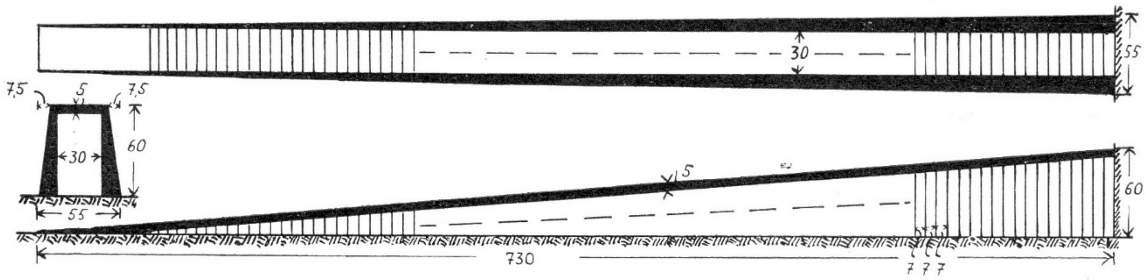


Bild 14 pAnastasi I, Berechnung der Ziegelmenge für den Bau einer Rampe

Ermann übersetzt die entsprechende Textstelle des Papyrus wie folgt:[14]

---

[10] Struve, W. W., Mathematischer Papyrus des Staatlichen Museums der Schönen Künste in Moskau, Springer Berlin 1930.
Hannig, H. Großes Handwörterbuch Deutsch – Ägyptisch, S.577.
[11] Peet, T.E., A Problem in Egyptian Geometry, in: JEA 17 (1931), p.100 ff.
[12] Hannig, H. Großes Handwörterbuch Deutsch – Ägyptisch, S.927.
[13] Borchardt, L., Die Entstehung der Pyramide. An der Baugeschichte der Pyramide von Meidum nachgewiesen, in: Beiträge zur Ägyptischen Bauforschung und Altertumskunde, Heft 1, Kairo 1937, S.22.
[14] Erman, A., Eine literarische Streitschrift, in: Die Literatur der Ägypter, Hinrich´sche Buchhandlung Leipzig 1923, S.282.

Es soll eine Rampe gemacht werden, 730 Ellen lang und 55 Ellen breit, die 120 Kästen enthält (um Ziegel zu sparen, bestand die Rampe aus vielen Kammern, die mit Sand bzw. Geröll gefüllt wurden) *und mit Rohr und Balken gefüllt ist* (große Ziegelmauern erhielten Einlagen von Schilfmatten und Balken)*; oben 60 Ellen hoch, in der Mitte 30 Ellen, mit einem …von 15 Ellen und sein … hat 5 Ellen.* (Zuordnung der Maßangaben siehe Querschnittszeichnung der Rampe nach Borchardt) *Ein jeder Kasten hat 30 Ellen und ist 7 Ellen breit. Wie viele Ziegel braucht man?*

Bei dieser Aufgabenstellung ist aus heutiger Sicht nicht so sehr das Ergebnis von Interesse, sondern die Tatsache, dass für Baumaßnahmen offensichtlich derartig große Ziegelrampen mit einem Neigungswinkel von ca. 5° (Länge der Basis verhält sich zu Höhe wie 8:1) verwendet wurden. Diese geringe Steigung führte dazu, dass die Haftreibung einer gezogenen Last größer als die Gleitreibung ist und so beim Ziehen der Last jederzeit eine Pause eingelegt werden konnte, ohne dass die Last rückwärts rutscht.[15]

Zu der oft behandelten Frage, ob der Lehrsatz des Pythagoras bereits im AR bzw. im MR bekannt war und angewandt wurde, ist anzumerken, dass es keinen eindeutigen Beweis dafür gibt. Weder sprechen Texte dafür, noch dagegen. Der pKahun aus der Zeit der 12. Dynastie[16] enthält eine Tabelle, die aus vier Quadratzahlen besteht, die jeweils als Summe zweier anderer Quadratzahlen dargestellt sind:

$6^2 + 8^2 = 10^2$	$(36 + 64 = 100)$
$12^2 + 16^2 = 20^2$	$(144 + 256 = 400)$
$(1\frac{1}{2})^2 + 2^2 = (2\frac{1}{2})^2$	$(2{,}2 + 4 = 6{,}26)$
$(\frac{3}{4})^2 + 1^2 = (1\frac{1}{4})^2$	$(0{,}5625 + 1 = 1{,}5625$

Dabei handelt es sich offensichtlich um die Quadratreihe der jeweils verdoppelten Zahlen 3, 4 und 5, bzw. deren erneute Verdopplung. Die Zeilen 3 und 4 enthalten Divisionen. Es liegt der Gedanke nahe, an ein rechtwinkliges Dreieck mit 3 Längeneinheiten als Basis, mit 4 als Höhe und mit 5 als Hypotenuse und einer Verdopplung bzw. Halbierung zu denken. Leider gibt es auch dafür keinerlei textliche Hinweise.

Rechnen mit Brüchen

Das Rechnen mit Brüchen nimmt in den uns überlieferten Rechenbeispielen einen breiten Raum ein. Oft sind es auch Aufgaben ohne einen Bezug zu konkreten Anwendungsfällen. Diese Rechenart musste – wie gleich dargestellt werden wird – besonders intensiv geübt werden.

In unserer heutigen Bruchrechnung erscheinen uns die Brüche

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{20} \text{ und } \frac{11}{12}$$

grundsätzlich als gleichwertig. Unsere einheitliche Bezeichnung durch Zähler und Nenner unterstreicht diesen Sachverhalt. Im Ägyptischen gibt es jedoch für den Bruch $\frac{11}{12}$ keinerlei Bezeichnung. Abgesehen von den genannten Individualzeichen kennt die ägyptische Bruchrechnung im Grundsatz nur Brüche mit $\frac{1}{n}$, wobei n irgendeine ganze Zahl ist. Der Bruch $\frac{11}{12}$ wird daher – wie später auch in

[15] Müller-Römer, F. Der Bau der Pyramiden im Alten Ägypten, Utz Verlag München 2011, S.80/81.
[16] Pichot, A., Die Geburt der Wissenschaft, Wissenschaftliche Buchgesellschaft Darmstadt, 2000, S.197.

der alten griechischen Mathematik – in die Bruchfolge $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}$ zerlegt. Nur im Sexagesimalsystem der Babyloner lässt sich der Wert als 0;55 ausdrücken.

Eines der Hauptprobleme der ägyptischen Bruchrechnung besteht also darin, Brüche mit einem anderen Zähler als 1 in eine Summe von Stammbrüchen aufzulösen. Das bedeutet, die vom Bruch dargestellte Division durchzuführen und das Ergebnis in Brüchen mit dem Zähler 1 auszudrücken. Um den Schreibern das Rechnen zu erleichtern, wurden verschiedene Tabellen entwickelt und benutzt. Besondere Bedeutung kam dabei der sogenannten $\frac{2}{n}$ Tabelle zu.[17] Sie drückt den Wert eines Bruches mit dem Zähler 2 als Summe von Brüchen mit den Zählern 1 aus. Beispielhaft sei für n = 3 genannt:

$$\frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$$

Eine derartige Tabelle mit der Division von 2 durch die ungeraden Zahlen von 5 bis 101 ist im pRhind enthalten (nachfolgend nur bis zur Zahl n = 19 aufgeführt):[18]

n	$\frac{2}{n}$
5	$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$
7	$\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$
9	$\frac{1}{6}+\frac{1}{18}$
11	$\frac{1}{6}+\frac{1}{66}$
13	$\frac{1}{8}+\frac{1}{52}+\frac{1}{104}$
15	$\frac{1}{10}+\frac{1}{30}$
17	$\frac{1}{12}+\frac{1}{51}+\frac{1}{68}$
19	$\frac{1}{12}+\frac{1}{76}+\frac{1}{114}$

Soll beispielsweise der Bruch $\frac{3}{11}$ so umgewandelt werden, dass er nur aus Brüchen mit dem Zähler 1 besteht, wird er zuerst in $\frac{1}{11}+\frac{2}{11}$ zerlegt. Mit dem Wert für $\frac{2}{11}$ aus der Tabelle ergibt sich dann

$$\frac{3}{11}=\frac{1}{11}+\frac{1}{6}+\frac{1}{66}.$$

[17] Neugebauer, O., Vorlesungen über Geschichte der antiken mathematischen Wissenschaften, Erster Band Vorgriechische Mathematik, in: Hrsg. Doob, J.l. u.a. Die Grundlagen der mathematischen Wissenschaften, Bd. 43, Springer Verlag Berlin 1969, S. 147ff.

[18] Ebenda, S.153.

In der Tabelle ist die Zahl 3 nicht aufgeführt, da $\frac{2}{3}$ zu den Brüchen gehört, mit denen standardmäßig gerechnet wurde. Alle geraden Zahlen waren automatisch teilbar. Vermutlich wurden die in der Tabelle aufgeführten Werte aufgrund von Erfahrungen gewonnen bzw. durch Probieren ermittelt.

Darüber hinaus sind zwei weitere Tabellen bekannt: Eine Tabelle für die Zerlegung von Brüchen aus der Lederrolle Britisches Museum London[19] und eine weitere ist bruchstückhaft aus dem pRhind bekannt.[20]

Im Folgenden sollen die Schwierigkeiten bei der Division mit Brüchen anhand zweier Beispiele dargestellt werden. Die Rechenaufgaben zur Bruchrechnung im pRhind weisen unter den mit der üblichen schwarzen Tusche geschriebenen Zahlzeichen für die Brüche auch noch rot geschriebene Zahlen auf. Als Beispiel sei die Aufgabe 22 genannt:

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{30} = 1$$

20 6 3 1

Wenn man 30 als kleinsten gemeinsamen Nenner annimmt, bedeuten die roten Zahlen die Zähler der einzelnen Summanden:

$$\frac{20}{30} + \frac{6}{30} + \frac{3}{30} + \frac{1}{30} = 1$$

Die rot geschriebenen Zahlen stellen somit eine Hilfestellung zur Ermittlung der richtigen Lösung bzw. zu deren Kontrolle dar.

Andere Aufgaben des pRhind zeigen, dass diese roten Hilfszahlen jedoch keineswegs generell als Einführung eines gemeinsamen Nenners dienen, was anhand eines zweiten Beispiels gezeigt werden soll:[21]

„Teile $\frac{2}{(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{4})}$“

Die Lösung beinhaltet folgende Schritte: Der Divisor $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ wird mit 1 angenommen:

$$1 \qquad 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

Im Folgenden wird von der „$\frac{2}{3}$ Reihe“ Gebrauch gemacht. Dies entspricht einer Regel für die ägyptische Bruchrechnung:

Zur Berechnung von $\frac{2}{3}$, im vorliegenden Fall vom Wert $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$, werden folgende Summanden gebildet:

---

[19] Pichot, A., Die Geburt der Wissenschaft, Wissenschaftliche Buchgesellschaft Darmstadt, 2000, S.170.
[20] ebenda , S.171.
[21] Neugebauer, O., Vorlesungen über Geschichte der antiken mathematischen Wissenschaften, Erster Band Vorgriechische Mathematik, in: Hrsg. Doob, J.l. u.a. Die Grundlagen der mathematischen Wissenschaften, Bd. 43, Springer Verlag Berlin 1969, S.115ff.

$$\frac{2}{3} \text{ von } 1 = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{3} \text{ von } \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

$$\frac{2}{3} \text{ von } \frac{1}{4} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

somit ergibt sich $\frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{1}{6}$.

Weiter werden anstelle von $\frac{2}{9} = \frac{4}{18}$

die Werte $\frac{1}{6}$ (anstelle von $\frac{3}{18}$) und $\frac{1}{18}$

verwendet, sodass sich als Summe des o.g. $\frac{2}{3}$ Bruchs ergibt:

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18} + \frac{1}{6}.$$

Durch Umwandlung erhalten wir

$$\frac{2}{3} + \frac{2}{6} + \frac{1}{18} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{18} = 1 + \frac{1}{18}.$$

Die weiteren Schritte ergeben sich durch Teilung des „ganzzahligen“ Bruchs $\frac{1}{18}$ auf einfache Weise. Dabei werden „geradzahlige“ Hilfszahlen für den Wert 1 ausprobiert; die Addition der Teilsummen muss dann den doppelten Wert des kleinsten Nenners ergeben. Für die Hilfszahl 36 ergeben sich beispielsweise folgende Werte:

1	$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$	57	(36 + 12 + 9)
/ $\frac{2}{3}$	$1 + \frac{1}{18}$	38	
/ $\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{36}$	19	
/ $\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4} + \frac{1}{72}$	$9 + \frac{1}{2}$	

Um die gebrochene Hilfszahl $9 + \frac{1}{2}$ zu vermeiden, muss die Hilfszahl $2 \cdot 36 = 72$ ausprobiert werden. Auch diese reicht noch nicht aus, sodass die Zahl 144 getestet werden muss:

1	$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$	228	(144 + 48 + 36)
/ $\frac{2}{3}$	$1 + \frac{1}{18}$	152	
/ $\frac{1}{3}$	½ + 1/36	76	
/ $\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4} + \frac{1}{72}$	38	

/	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}+\frac{1}{144}$	19	

Damit ergibt sich als Hilfszahlensumme **285**

Diese liegt von der Zuordnung 1 zu 144 bzw. 2 zu 288 nur noch um drei Zähler entfernt. Diese Differenz wird nun aufgrund der Zahl 144 der ersten Zeile aufgefüllt:

/	$\frac{1}{114}$	$\frac{1}{72}$	2	
/	$\frac{1}{228}$	$\frac{1}{144}$	1	**288**

Ergebnis: $$\frac{2}{(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{4})} = 1+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{114}+\frac{1}{228}.$$

An diesen Beispielen wird der Unterschied zwischen der ägyptischen und babylonischen Mathematik sehr deutlich. Die babylonische Rechentechnik ist ein in sich abgeschlossenes System ohne besondere Problematik bei der Bruchrechnung. Die ägyptische Mathematik hingegen steht auf einer rein additiven Stufe, bei welcher die Multiplikation auf eine stufenweise Addition zurückgeführt wird. Das Beispiel vorstehend geschilderter Aufgaben hat den damit verbundenen Rechenaufwand und die „Umständlichkeit des Rechenverfahrens“ gezeigt. Die ägyptische Rechentechnik ist also kein in sich geschlossenes mathematisches Verfahren.

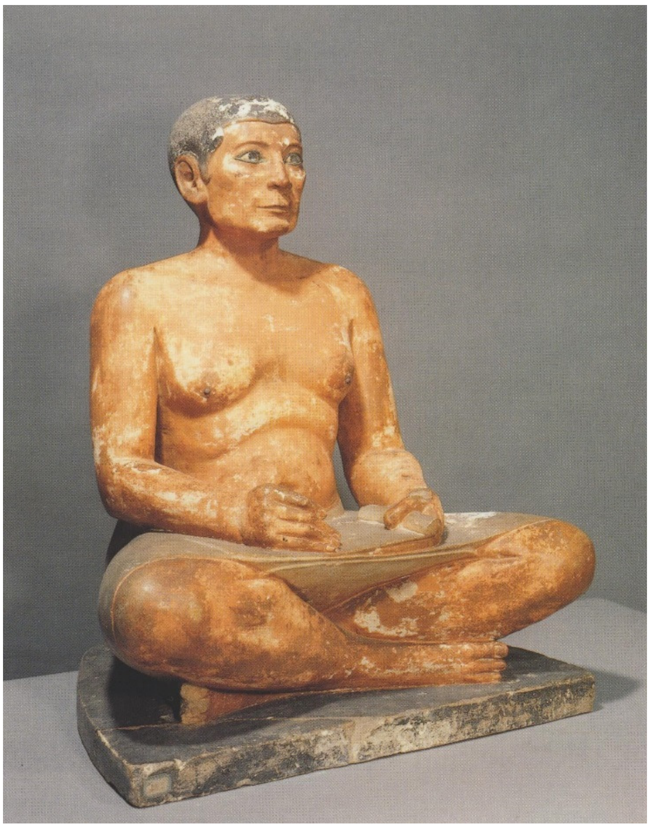


Bild 15 Schreiberfigur

Ausbildung der Schreiber im Alten Reich

Entsprechend der Anforderungen aus Verwaltung und Wirtschaft umfasste die Ausbildung der Schreiber in erster Linie die Kenntnisse der Schrift. Darüber hinaus besaßen sie Spezialkenntnisse, die für das Wirtschaftsleben notwendig waren, wie für das Verfassen von Schriftstücken (Musterbriefe) und Grundregeln der Mathematik sowie das Berechnen von Flächen und Volumina. Der ägyptische Ausdruck sbꜣ (𓋴𓃀𓇼𓄿𓀜) „jemanden etwas lehren“[22] konnte auf ganz unterschiedliche Wissensgebiete bezogen sein. Im Alten Reich war die Ausbildung der Schreiber in der Weise organisiert, dass ein oder mehrere Schüler zu einem Schreiber in die Lehre gingen und so dieses Handwerk erlernten. Oft ergriffen auch Kinder eines Schreibers später dessen Beruf.

Schreiberschulen im Mittleren und Neuen Reich

Durch den Verfall Zentralstaats und dessen Verwaltung zu Beginn der 1. Zwischenzeit kam es über einen Zeitraum von fast 140 Jahren zu einem Rückgang der Anzahl der Schreiber, sodass mit Beginn des Mittleren Reichs eine andere, rationellere Methode für die Ausbildung fehlender, für den Wiederaufbau der Zentralregierung jedoch unbedingt notwendiger, Schreiber eingeführt werden musste, um für Verwaltung und Wirtschaft sowie Außenhandel eine genügend große Zahl von Fachkräften zur Verfügung stellen zu können: Die Einzelausbildung wurde durch Gruppenunterricht in Schulen abgelöst. Dabei bezeichnet der Begriff ꜥt sbꜣ die Einrichtung. Es können damit sowohl ein Platz wie auch ein Gebäude gemeint sein.[23] Archäologisch sind nur wenige Schulplätze belegt (Ramesseum, in der Nähe der Magazine, Deir el-Medine, Mut-Tempel).

Aus der Zeit des Endes der 11. oder des Beginns der 12. Dynastie ist das erste „Schulbuch“ Kemit bekannt, welches auch später im Neuen Reich noch Verwendung fand. Bruchstücke davon sind als Schreibübungen der Schüler auf vielen Ostraka erhalten. Posener konnte daraus etwa die Hälfte des Originaltextes rekonstruieren. Dabei handelt es sich um eine Zusammenstellung für die Verwaltung wichtiger Begriffe und Sätze. Das Buch teilt sich in drei Teile (Begrüßungsformeln, Erzählung und Sentenzen). Bartha nimmt an, dass das Schulbuch Kemit die damaligen Briefeinleitungsformeln möglichst vollständig aufführte, um dem Schüler für seinen späteren Beruf entsprechende Auswahlmöglichkeiten zu bieten.[24] Unmittelbar an die Begrüßungsformeln schließt sich eine Erzählung an. Der dabei exemplarisch aufgeführte Stil der Erzählung gehörte ganz offensichtlich zum Lehrstoff. Die Sentenzen im dritten Abschnitt des Schulbuchs enthalten neben Auszügen aus den Lebenslehren auch Beispielsätze aus einer Idealbiografie, welche der Schreiber später verwenden konnte. Der Schüler musste also lernen, wie man Briefe schrieb, Anreden formulierte, Sachverhalte darstellen konnte (Erzählungen) und wie Werdegänge (Biografien) beschrieben werden mussten.

Es gab keinen Beruf des „Lehrers“. Die „lehrenden“ Schreiber kamen sowohl aus der staatlichen Verwaltung wie aus der Tempelverwaltung. Im Neuen Reich entsandte auch die Militärverwaltung Schreiber. Die Schüler scheinen aus verschiedenen Bevölkerungsschichten gekommen zu sein und traten im Alter zwischen 5 und 10 Jahren ihre Ausbildung an.

[22] Hannig, H. Großes Handwörterbuch Deutsch – Ägyptisch, S.790.
[23] Lexikon der Ägyptologie, Band V, S.742 – Schule.
[24] Bartha, W., Das Schulbuch Kemit, Zeitschrift für Ägyptische Sprache und Altertumskunde (ZÄS), 105 (1978), S.6-14.

Der Unterrichtsstoff weitete sich bis zum Neuen Reich hin ständig aus und umfasste neben Schreib- und Leseübungen die klassischen Lebenslehren, selbst erstellte Schultexte (Schülerhandschriften), Musterbriefe und das Lernen von Ortsnamen aufgrund erstellter Listen. Hinzu kam zumindest teilweise die Aus- bzw. Weiterbildung der Schreiber als Dolmetscher. So gab es in zur Zeit Amenophis´III. und unter Echnaton auch Schreiber, die den internationalen Schriftverkehr in Keilschrift verfassen konnten. Das Lernen geschah durch Niederschreiben und wiederholtes Aufsagen bzw. Abfragen. Die Schulung des Gedächtnisses war in einer Welt des sehr begrenzten schriftlichen Festhaltens das einzige Mittel, um später im Berufsleben alle wichtigen Informationen schnell verfügbar zu haben.

Mit Beginn der Saitenzeit (26. – 31. Dynastie, 7. Jh. V.Chr.) begann sich in ganz Ägypten die Demotische Schrift auszubreiten. Schreiber waren in dieser Zeitepoche gezwungen, hieratisch und Demotisch parallel zu beherrschen.

Die altägyptischen Schulen wurden ab dem 4. Jahrhundert v.Chr. durch die sich im gesamten Mittelmeerraum verbreitenden griechischen Schulen sowie durch die hellenistische Bildung abgelöst. Die klassische ägyptische Schule zog sich als Priesterschule in die Tempelbereiche zurück.

Da für sehr viele Beamte der Verwaltung das Zählen, Messen, Vermessen und Berechnen von Flächen und Volumina zur täglichen Arbeit gehörte, nahmen die Rechnungsführung und die dafür erforderlichen mathematischen Kenntnisse bei der Ausbildung der Schreiber einen breiten Raum ein. Aus dem Schulbetrieb sind Anfängerübungen und Handbücher für Fortgeschrittene bekannt. Im pAnastasi V, 22-23 (Zeit Ramses II), ebenfalls einer Schülerhandschrift, heißt es u.a.

> *Mathematikunterricht – wozu?*
>
> *Was folgendes betrifft: Ich habe Dich zur Schule geschickt (…), um Dich für dieses bedeutende Amt zu unterrichten. (…) Sei nicht müßig. Sie (sagen): 3 und 4. Du beherrschst die anderen Ding auch (…). Du beginnst die Rechnung. Du wirst Rechnungen still ausführen, ohne dass ein Ton gehört wird (…). Lerne vom Verhalten Deines Lehrers. Höre seine Lehre, werde ein Schreiber!*

Schlussbemerkung

Die ägyptische Geometrie orientiert sich stets an der Praxis. Die mathematischen Kenntnisse beruhten ausschließlich auf Erfahrungswerten. Es wurden nicht irgendwelche abstrakten Figuren, sondern dreieckige oder quadratische Felder sowie Volumina berechnet. Den Ägyptern ging es nicht um mathematische Beweise, sondern immer um Rechenvorschriften, um „Rechenrezepte“ mit mehr oder weniger guten Näherungswerten. Die Entwicklung der Geometrie war eng mit den Bedürfnissen der Praxis verknüpft und an den Erfordernissen der Feldeinteilung und -vermessung, der Architektur und des Bauwesens sowie an der Messung von Rauminhalten orientiert. Heute würde man sagen, dass ingenieurmäßiges Denken diese Entwicklung entscheidend geprägt hat.

Das ägyptische Zahlensystem mit der Basis 10 erleichterte zwar das Rechnen, aber das Fehlen des Positionssystems führte zu einer schwerfälligen Rechentechnik – insbesondere mit Brüchen. Es konnten viele Teilungsmöglichkeiten verwendet werden, um auch kleine Einheiten und Winkelunterschiede darzustellen. Die mit der damaligen Rechentechnik gefundenen Lösungen sind bewundernswert. Obwohl der Wissenschaft über die ägyptische Geometrie nicht allzu viel Quellenmaterial zur Verfügung steht, schneidet diese im Vergleich zur mesopotamischen Geometrie besser ab, als dies umgekehrt bei der Arithmetik der Fall ist.

Die genannten Mathematikaufgaben sind nur ein kleiner Teil der bekannten Aufgabenstellungen. Sie zeigen jedoch, welche Bedeutung der Mathematikunterricht bei der Ausbildung der Schreiber hatte. Gleichzeitig belegen sie die Bedeutung der Lösung mathematischer Problemstellungen für die Verwaltung des Alten Ägypten. Es wäre jedoch falsch, die „mathematischen" Texte von den anderen Papyri getrennt zu betrachten. Sie gehören zum praktischen Handwerkszeug der Schreiber. Die Aufgaben dürften lediglich eine Zusammenstellung von Musterbeispielen für die Durchführung derartiger Aufgaben gewesen sein. Der Schreiber hatte diese Aufgaben durchzurechnen, um in der Wirklichkeit dann solche Aufgaben lösen zu können.

Die ägyptische Mathematik und Rechentechnik haben offensichtlich einen beachtlichen Einfluss auf die Herausbildung einer mathematischen Wissenschaft in der griechischen Welt ausgeübt. Sie wurden von den griechischen Historikern hoch gerühmt und als Quelle ihrer eigenen Kenntnisse betrachtet. Bereits Herodot berichtete im 5. Jahrhundert v.Chr., dass die Griechen die Geometrie von den Ägyptern und die Astronomie von den Babyloniern erlernten.

Platon, griechischer Philosoph im 4. Jahrhundert v.Chr., befasste sich eingehend mit dem Zusammenhang zwischen Mathematik und Musiktheorie, den er δεσμός – das Band – nannte. In seinen „Nomoi" führte er dazu aus, dass die drei Wissensgebiete Arithmetik, Geometrie und Musiktheorie miteinander als eine Einheit verbunden seien. Platon hielt sich einige Monate zu Studien in Heliopolis auf und sprach von den mathematischen Kenntnissen im damaligen Ägypten voller Hochachtung.[25]

<u>Literatur (Auswahl)</u>

Chase, A. B u.a., The Rhind Mathematical Papyrus I-II, Ed. Mathematical Association of America, Oberlin, Ohio 1927.

Imhausen, A., Ägyptische Algorithmen. Eine Untersuchung zu den mittelägyptischen mathematischen Aufgabentexten, Harrassowitz 2003.

Neugebauer, O., Vorlesungen über Geschichte der antiken mathematischen Wissenschaften, Erster Band Vorgriechische Mathematik, in: Hrsg. Doob, J. L. u.a. Die Grundlagen der mathematischen Wissenschaften, Bd. 43, Springer Verlag Berlin 1969.

Pichot, A., Die Geburt der Wissenschaft, Wissenschaftliche Buchgesellschaft Darmstadt, 2000.

Roccati, A., Der Schreiber in (Hrsg. Donadoni) Der Mensch im alten Ägypten, Campus 1992.

Schlott, A., Schrift und Schreiber im Alten Ägypten, Beck, München 1989.

Struve, W. W., Mathematischer Papyrus des Staatlichen Museums der Schönen Künste in Moskau, Springer Berlin 1930.

Vogel, K., Vorgriechische Mathematik Band 1: Vorgeschichte und Ägypten, Herrmann Schroedel, Hannover

[25] Horneffer, A., Herodot Historien – Deutsche Gesamtausgabe, Kröner Stuttgart, Historien IV, Kapitel 27.

Bildernachweis

Bild 1	Kemet, Jahrgang 20, Heft 4 Oktober 20122, S.27
Bild 2	Wikipedia, „Horusauge“
Bild 3	pRhind, British Museum BM 10057-8; ©Trustees of the British Museum
Bild 5	Pichot, A., Die Geburt der Wissenschaft, Wissenschaftliche Buchgesellschaft Darmstadt, 2000, S.186.
Bild 6	Parker, Richard A., Demotic mathematical papyri, Brown Univers. Press, 1972, pl.24.
Bild 7	Dorka, U.E., Zur Altägyptischen Quadratur des Kreises, GM 246 (2015), S. 21.
Bild 8	ebenda, S.22
Bild 9	Neugebauer, O., Vorlesungen über Geschichte der antiken mathematischen Wissenschaften, Erster Band Vorgriechische Mathematik, in: Hrsg. Doob, J. L. u.a. Die Grundlagen der mathematischen Wissenschaften, Bd. 43, Springer Verlag Berlin 1969, S.127.
Bild 10	Pichot, A., Die Geburt der Wissenschaft, Wissenschaftliche Buchgesellschaft Darmstadt, 2000, S.196. British Museum, London (BM 10058). ©Trustees of the British Museum
Bild 11	British Museum, London (BM 10057). ©Trustees of the British Museum
Bild 12	Neugebauer, O., Vorlesungen über Geschichte der antiken mathematischen Wissenschaften, Erster Band Vorgriechische Mathematik, in: Hrsg. Doob, J. L. u.a. Die Grundlagen der mathematischen Wissenschaften, Bd. 43, Springer Verlag Berlin 1969, S.129.
Bild 13	ebenda, S.136.
Bild 14	aus: Borchardt, L., Die Entstehung der Pyramide. Aus der Baugeschichte der Pyra mide von Meidum nachgewiesen, in: Beiträge zur ägyptischen Bauforschung und Altertumskunde, Heft 1, Kairo, 1937, S.22.
Bild 15	Schreiberfigur, Paris, Musée du Louvre, E 3023.

Tabellennachweis

Tabelle 1	Kemet, Jahrgang 20, Heft 4 Oktober 20122, S.27
Tabelle 2	Dorka, U.E., Zur Altägyptischen Quadratur des Kreises, GM 246 (2015), S. 22.