Originalveröffentlichung in: Sandro Petruccioli (Hrsg.), Storia della scienza. Vol. 1: La scienza antica, Rom 2001, S. 97-100

3. La matematica demotica

I testi demotici di matematica – dove il termine 'matematica' va inteso nella sua accezione più ampia – nella maggioranza dei casi proseguono la tradizione egizia più antica, anche se è possibile riscontrarvi una serie di innovazioni, in parte riconducibili a influssi stranieri. La funzione più importante della matematica demotica è stata quella di fungere da tramite nella trasmissione dell'antico patrimonio di conoscenze orientali ai Greci e, quindi, all'Occidente. I testi che ci sono pervenuti risalgono sia all'epoca tolemaica sia a quella romana. Accanto alle notevoli raccolte su papiro di scritti che possono essere considerati veri e propri lavori scientifici, a volte molto ricchi, si conserva un gran numero di testi di varia natura, dove si riscontra l'uso delle diverse tecniche aritmetiche. Si tratta di conti, ricevute, elenchi e altri documenti stilati dall'amministrazione statale e da quella religiosa, oppure di scritti che rientravano nella sfera privata, conservati su papiro, graffiti o *óstraka*. Sebbene queste fonti non rivelino niente di nuovo sulle conoscenze della matematica demotica, dimostrano che, in linea di principio, non vi era alcuna differenza tra le procedure di calcolo utilizzate nella vita quotidiana e quelle seguite nelle scuole dei templi: non esistono, dunque, elementi che autorizzino l'ipotesi di una scienza 'superiore' che fosse appannaggio della classe sacerdotale.

Il testo di matematica demotica più completo che ci sia pervenuto è una raccolta di esercizi scritta sul verso di una collezione di leggi. I quaranta esercizi, che risalgono approssimativamente al III sec. a.C., sembrano ordinati in base al grado di difficoltà, a partire dal più semplice, anche se mantengono un criterio tematico (Parker 1972). Poiché in questa raccolta, concepita come libro di testo, sono indicati l'ordine degli esercizi, le soluzioni e le prove, essa è particolarmente adatta a studiare la matematica demotica e la sua specifica terminologia. Come nella matematica egizia più antica, non si era soliti formulare delle regole generali; era inoltre sconosciuto il calcolo con le variabili e di regola si lavorava sulla base di un esercizio concreto e con dati numerici particolari.

Sistema numerico e metrologia

Il sistema numerico demotico non mostra differenze sostanziali rispetto a quello delle scritture più antiche. Come in precedenza, è usato un sistema decimale ma non posizionale, nel quale per ciascuna unità, decina, centinaio, ecc., esiste una cifra apposita (v. precedente fig. 1); lo stesso accade per singole frazioni numeriche, per frazioni di unità di area, per i numeri che servono a indicare le date e per le unità utilizzate per misurare quantità di grano. Non sono attestati numeri negativi. Le espressioni in uso per indicare lo zero non hanno un particolare significato nella tecnica aritmetica, poiché il sistema numerico egizio non conosce un metodo di scrittura posizionale delle cifre. La principale innovazione attestata nelle fonti demotiche è l'uso di frazioni proprie. Si suppone che i calcoli con i cosiddetti numeri ausiliari della matematica egizia, sopra ricordati, abbiano alla fine portato all'elaborazione di nozioni corrispondenti a quelle di numeratore e denominatore, anche se hanno continuato a restare in uso le frazioni unitarie e quelle complementari.

Il sistema di misurazione dei testi demotici è chiaramente semplificato rispetto al sistema di epoca faraonica, poiché le misure sono collegate più strettamente le une alle altre. Come è stato detto in precedenza, la base delle misure di lunghezza è il cubito, o cubito reale o cubito divino, pari a 525 mm ca., dal quale sono dedotte tutte le altre: 1 cubito (*mḥ-nṯr*)=7 palmi (*šp*), di 75 mm ca. ognuno; 1 palmo=4 dita (*ḏbʿ*), di 18,8 mm ca. ognuno. Per lunghezze relativamente grandi era usata la 'fune di misurazione' (*ẖ-nwḥ*) pari a 100 cubiti, ossia pari a 52,5 m ca., mentre per misure itinerarie era usato l''iteru' (*ỉtrw*), poi detto anche 'miglio egizio', pari a 20.000 cubiti, vale a dire 10,5 km ca.

Dal cubito sono dedotte anche le misure dell'area di superfici: 1 'cubito di terreno' (*mḥ-itn*)=100 cubiti quadrati=27,56 m^2 ca.; 1 arura (*stȝ*)=1 canna quadrata =10.000 cubiti quadrati =2756 m^2 ca.=0,2756 ettari ca.

Anche le misure di capacità derivavano dal cubito: 1 cubito cubico (144,7 dm^3 ca.)=343 palmi cubici (*hỉn*) pari a 0,422 dm^3 ca. ognuno. Per i cereali sono però adottate misure non omogenee: 1 artaba (*rtb*)=28 o 29 o 30 o 40 *choinikes* oppure=64 *hỉn*; 1/12 artaba=1 *mḏʿt*. Inoltre, vasi e brocche di vario tipo e di varia capacità erano usati come unità di misura dei liquidi e anche degli aridi.

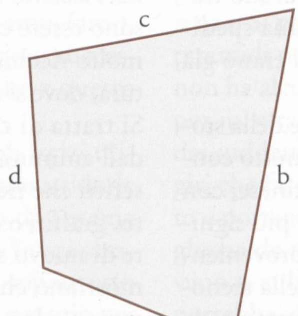

Fig. 5 - Superficie quadrangolare irregolare.

Probabilmente si riferisce ad appezzamenti di terreno di forma simile, come lascerebbe pensare la lista dei campi del tempio di Edfu.

Per quanto riguarda i pesi, unità fondamentale era il deben (*tbn*), pari a 91 g ca.; seguiva il multiplo talento (*krkr*), pari a 300 deben, ossia a 27,3 kg ca. In particolare, per le misure di peso riguardanti le monete e i metalli preziosi, sulle quali si basava anche il sistema monetario tolemaico, l'unità fondamentale era il kite (*qt*, pari a 1/10 di deben e quindi pari a 9,1 g ca.); seguiva: 2 kite=1 statere=4 dracme=24 oboli. Tuttavia, nel corso del tempo la materia e i pesi, e quindi il valore, delle monete in Egitto furono ripetutamente ritoccati attraverso apposite riforme.

Aritmetica e geometria

L'addizione e la sottrazione erano normalmente risolte in modo banale; per lo meno, nei documenti pervenutici non vi sono indizi di tecniche particolari per i casi più complessi. Era invece applicato il tradizionale procedimento egizio diadico per la moltiplicazione e per la divisione (scomposizione in addizioni di sequenze di raddoppiamento o di dimezzamento), per il quale si rimanda a ciò che è stato detto nel precedente par. 2. I Greci designavano questo procedimento, con il quale erano elegantemente aggirate certe difficoltà del sistema numerico, come 'calcolo egizio'. Nel Medioevo esso continuava a essere insegnato come *duplatio* (raddoppiamento) ed è in parte rimasto in uso fino quasi ai tempi nostri. V'è un caso, in un papiro matematico demotico, in cui compare, a scopo di esercitazione, il procedimento greco, che era notevolmente più complesso.

In un papiro della tarda epoca tolemaica (Parker 1959) sono trattati sistematicamente, e con cifre diverse, alcuni esercizi che si risolverebbero modernamente come equazioni lineari con un'incognita, e che corrispondono ai calcoli-*ʿḥʿ* del Medio Regno. Per esempio, uno dei problemi è enunciato così: «Che cos'è ciò alla cui metà va sommato 3 e al cui terzo 3, affinché ci dia il risultato 10?». Come già detto, in Egitto non esisteva la possibilità di annotare un'incognita nel calcolo, ma in termini moderni questo problema consiste nel risolvere l'equazione $(x/2)+3+(x/3)+3=10$. La procedura utilizzata corrisponde a trasformare l'equazione in $(5/6)\times x=4$, risolvere $(5/6)\times y=1$, ossia ottenere il valore inverso di (5/6), e infine moltiplicare il risultato per 4, per ottenere il valore cercato; questo valore finale, che è $4+(2/3)+(1/10)+(1/30)$, è sottoposto a verifica mediante una prova.

L'area delle superfici rettangolari, trapezoidali e triangolari era calcolata correttamente, come s'è detto nel precedente par. 2; così risulta, per esempio, in un papiro di Heidelberg (Parker 1975) per quanto riguarda un trapezio. Le aree dei quadrilateri irregolari, che si ritrovano in molti casi concreti (per es., negli appezzamenti di terreno: fig. 5), erano calcolate mediante la formula $(a+c)/2\times(b+d)/2$, essendo a, b, c, d le lunghezze dei quattro lati; ne troviamo un esempio nel famoso elenco dei campi del tempio di Edfu, che è una versione geroglifica di un testo demotico (Meeks 1972).

Sono stati inoltre tramandati esercizi su progressioni aritmetiche nelle quali è necessario elevare un numero al quadrato; calcoli di questo genere erano concepiti come moltiplicazioni e pertanto non presentavano particolari difficoltà. È nota la formula corretta $(n^2+n)/2$ per il calcolo della progressione $1+2+3+\ldots+n$, che dà luogo alla seguente rappresentazione:

$$
\begin{array}{ll}
\ldots & \\
1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 & =55\\
1+2+3+4+5+6+7+8+9 & =45\\
1+2+3+4+5+6+7+8 & =36\\
1+2+3+4+5+6+7 & =28\\
1+2+3+4+5+6 & =21\\
1+2+3+4+5 & =15\\
1+2+3+4 & =10\\
1+2+3 & =6\\
1+2 & =3\\
1 & =1;
\end{array}
$$

è nota anche la formula, ugualmente esatta, $[(n+2)/3]\times[(n^2+n)/2]$ per la somma $1+(1+2)+\ldots+(1+2+\ldots+n)$ complessiva per un dato n.

Particolarmente interessanti sono gli esercizi che presuppongono la conoscenza del teorema di Pitagora. Essi si presentano sotto una forma discorsiva: «un palo di una determinata lunghezza (L) sta appoggiato verticalmente a un muro; se la sua estremità inferiore è scostata dal muro di una certa distanza (B), bisogna calcolare di quanto (x) la sua estremità superiore si sia abbassata» (fig. 6).

Il fatto che nella Mesopotamia del II millennio, ossia molto prima di Pitagora (vissuto a cavallo tra il VI e il V sec.), fossero già attestati esercizi analoghi a questi, persino nella formulazione, rende verosimile l'ipotesi che vi sia stata una trasmissione delle conoscenze matematiche babilonesi all'Egitto. Per risolvere il problema appena formulato non sono sufficienti le operazioni di base addizione e moltiplicazione, e le inverse, nonché l'elevazione al quadrato, ma bisogna conoscere anche l'estrazione della radice. Per ottenere le radici di numeri che non sono quadrati perfetti si ricorreva alla formula di approssimazione che è attribuita a Erone di Alessandria: $n^{1/2}=(a^2\pm b)^{1/2}\approx a\pm b/(2a)$. Erone di Alessandria però è vissuto solo nel I sec. d.C. e quindi la formula potrebbe essere stata una conquista elaborata in Mesopotamia, di cui probabilmente Erone potrebbe essere venuto a conoscenza attraverso la matematica demotica. Per i matematici egizi è del tutto chiaro che si trattava di una formula di approssimazione; infatti, nella prova il risultato era di nuovo elevato al quadrato e si annotava la differenza rispetto al numero di partenza.

La formula binomiale $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ trovava applicazione negli esercizi relativi al calcolo dei lati di un rettangolo di cui fossero note l'area e la diagonale. Ricorrendo a metodi moderni, la risoluzione di tali esercizi è ottenibile mediante un sistema di equazioni a due incognite.

Nella raccolta di esercizi prima citata, occupano un posto di rilievo i calcoli relativi al cerchio, nei quali, al posto dell'antica approssimazione egizia di $\pi\approx(8/9)^2\times4\approx3{,}16$, si utilizzava il valore $\pi\approx3$. Si tratta di un'approssimazione meno accurata, ma di più semplice applicazione, in uso anche presso i Babilonesi e molti altri popoli dell'Antichità per il rapporto tra lunghezza della circonferenza (c) e diametro (d) del cerchio; per l'area (a) si ha $a\approx(c/3)\times(c/4)$ e $d\approx[(4/3)\times a]^{1/2}$. Queste formule trovano applicazione in diversi esercizi.

Il seguente problema, presentato in modo sommario nel papiro, può valere come esempio di un esercizio di geometria più complicato. Il problema è enunciato così (fig. 7): «[Sia dato] un terreno. Se [al] suo centro si trova un grande triangolo (equilatero) con tutti (?) e tre (?) i segmenti della lunghezza di 12 cubiti, qual è [allora] l'area del terreno? Guarda in che modo: [uno schizzo illustra il problema]» (Parker 1972, pp. 53-54). L'uso di disegni per illustrare gli esercizi geometrici risale ai più antichi papiri egizi di argomento matematico che ci siano pervenuti.

A scopo di esercitazione bisognava calcolare l'area complessiva risultante dalla somma dell'area dei tre segmenti circolari (S) e di quella del triangolo (T). Innanzi tutto si ricavava l'altezza (h) del triangolo in base al teorema di Pitagora: «Devi moltiplicare 12 per 12, che fa 144. Devi moltiplicare 6 per 6, che fa 36. Sottrai questo da 144 e resta 108. Estraine la radice [quadrata], che fa 10+(1/3)+(1/20)+(1/120). Questa è l'altezza media del solo triangolo». Il valore ottenuto era più accurato di quello che avrebbe dato la formula di approssimazione per la radice quadrata sopra citata. Quindi nel testo è calcolata l'area del triangolo: «Il numero [della] base [è] 12 cubiti, dunque [?] la sua metà 6, la sua altezza centrale 10+(1/3)+(1/20)+(1/120). Questa la moltiplicherai per 6, che fa 62+1/3+(1/60) cubiti. Questo è il numero [dell'area] del triangolo».

Infine, è calcolata l'area dei segmenti circolari. Nel papiro si dà per scontato che l'altezza (a) di un segmento circolare e l'altezza (h) del triangolo siano in un rapporto di 1:3, poiché infatti è indicato: «Devi prendere 1/3 [di] 10+(1/3)+(1/20)+ +(1/120), che fa 3+(1/3)+(1/10)+(1/60)+(1/120)+(1/180)». L'altezza del segmento circolare, calcolata correttamente, è inserita in una formula di approssimazione per il calcolo dell'area, che è data dalla semisomma dell'altezza (a) e della lunghezza (l) della corda, moltiplicata per l'altezza. L'uso di questa formula non tiene conto del modo in cui è stato ottenuto il segmento circolare e anzi è usata pure, per esempio, per calcolare i segmenti circolari che risultano da una circonferenza cui sia stato inscritto un quadrato. Nel nostro caso l'area del segmento circolare è approssimata come 25+(5/6)+(1/10) e l'area complessiva come 143+(1/10)+(1/20). Nella prova questa area è calcolata come quella di un cerchio il cui diametro si ottiene sommando l'altezza (a) del segmento circolare con quella (h) del triangolo. Il risultato è 144 e conferma quello precedentemente ottenuto con un altro procedimento.

Per quanto concerne la geometria dei solidi, si era in grado di calcolare volumi di piramidi in modo corretto. Un papiro conservato nel British Museum (Parker 1972, p. 53 e segg.) considera anche volumi di tronchi di cono, in linea di principio calcolati correttamente, sebbene π sia ancora approssimato a 3. In questo contesto è interessante sottolineare che fra le unità di misura di capacità d'uso, ve n'è una, *hỉn*, che è definita geometricamente come 'palmo cubico', ricordato sopra.

Per concludere, si può affermare che la matematica demotica continua a rientrare per molti aspetti (sistema nu-

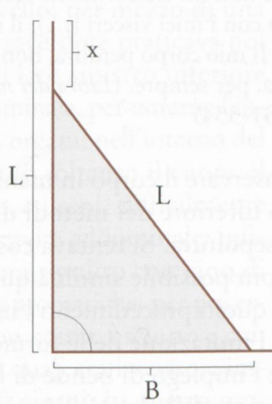

Fig. 6 - Esempio di applicazione del teorema di Pitagora.

Probabilmente frutto dell'influenza mesopotamica, questo metodo è stato poi approfondito dalla scuola alessandrina.

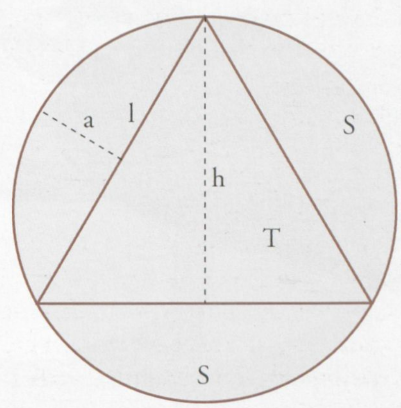

Fig. 7 - Ricostruzione di un problema geometrico.

La tendenza a illustrare testi di geometria, come pure di altre discipline, è tipica della cultura egizia.

merico, tecniche di calcolo) nella più antica tradizione egizia, pur sviluppandola sotto diversi punti di vista (frazioni proprie) e accogliendo alcune innovazioni derivate probabilmente dalla matematica babilonese. Nella scia della tradizione manca l'interesse per le dimostrazioni di carattere generale e i calcoli sono eseguiti con numeri concreti. Vi sono alcuni esempi in cui in un testo demotico si trova per la prima volta la risoluzione di un problema matematico tratto da un testo egizio più antico. Tuttavia, dal punto di vista della storia della scienza la matematica demotica è significativa soprattutto perché rappresenta l'anello di congiunzione con il mondo greco. Infatti, le tecniche della moltiplicazione egizia, il calcolo delle frazioni unitarie (per es., il calcolo onciale romano), il teorema di Pitagora o il procedimento di approssimazione delle radici quadrate, quindi in generale alcune delle tecniche aritmetiche, appartengono al patrimonio di conoscenze matematiche dell'Egitto trasmesso ai Greci attraverso la tradizione demotica.

Friedhelm Hoffmann