

**Die Kategorie der kompakt-erzeugten Räume**  
**als in *Top* coreflektive Kategorie mit Exponentialgesetz**

Diplomarbeit von  
Herbert Breger  
Heidelberg, Sommer 1971

## Inhaltsverzeichnis

- 0. Einleitung
- 1. Topologische Coreflexionen
  - 1.1. Grundlegendes
  - 1.2. Corefektive Hülle und  $\mathfrak{A}$ -System
  - 1.3. Die Kategorie  $\mathfrak{A}\text{-}Top$
  - 1.4. Die  $\mathfrak{A}$ -Charakteristik
- 2. Exponentialkategorien
  - 2.1. Eigenschaften
  - 2.2. Konstruktion
  - 2.3. „Day-Kelley“-Räume
  - 2.4. Exponentialkategorien im „Verband“ der corefektiven Unterkategorien von  $Top$
  - 2.5. Ergebnisse in  $Top$
- 3. Die Kategorie der kompakt-erzeugten Räume
  - 3.1. Eigenschaften
  - 3.2. Verhalten kompakt-erzeugter Räume unter Produktbildung
  - 3.3. Die Kategorie der quasikompakt-regulär-erzeugten Räume
- 4. Anhang: Es gibt einen quasikompakten Raum, der nicht stetiges Bild eines kompakten ist
- 5. Literaturverzeichnis

## Einleitung

Wegen der schönen Eigenschaften der kompakten Teilmengen eines (hausdorffschen) Raumes, die sich „wie Punkte“ verhalten (z. B. Dugundji S. 225), ist es naheliegend, einen topologischen Raum durch Auferlegung bestimmter Bedingungen auf seine kompakten Teilmengen zu untersuchen. Insbesondere zeigt sich, daß die Topologie einer großen und wichtigen Klasse topologischer Räume (nämlich der lokalkompakten, der CW-Räume und der hausdorffschen Räume, die das 1. Abzählbarkeitsaxiom erfüllen) bereits vollständig durch die Topologie ihrer kompakten Teilmengen bestimmt ist.

Die systematische Untersuchung und Verallgemeinerung dieser Situation führte zum Begriff der „natürlichen Überdeckung“ (Cohen 1954, Brown 1963, Franklin 1969) und zu einer gewissen kanonischen Quotientendarstellung: Ein Raum, der die schwache Topologie bezüglich einer natürlichen Überdeckung  $\Sigma$  trägt, ist Quotient der topologischen Summe seiner Teilräume, die in  $\Sigma$  liegen. Dabei ist die Identifizierung lokal eine Einbettung.

Mit der Entwicklung der Theorie der Coreflexionen (vgl. Herrlich, Herrlich/Strecker) wurde der kategorielle Hintergrund geklärt. Coreflektive Unterkategorien von  $Top$  haben eine Reihe wichtiger Eigenschaften: Der Corefunktionsfaktor verfeinert die Topologie bei festgehaltener Trägermenge, er erhält inverse Limiten. Darüber hinaus sind die coreflektiven Unterkategorien durch die Abgeschlossenheit gegenüber Summen- und Quotientenbildung charakterisiert. Jede natürliche Überdeckung gibt Anlaß zu einem Corefunktionsfaktor, aber nicht jeder Corefunktionsfaktor läßt sich durch eine natürliche Überdeckung gewinnen (Herrlich/Strecker (2) S. 32). Teile dieser Arbeit sind dem Nachweis gewidmet, daß sich die wichtigsten Konstruktionen, die durch eine natürliche Überdeckung ermöglicht werden, mit geringen Modifizierungen für beliebige topologische Coreflexionen durchführen lassen (vgl. etwa den Abschnitt über die  $\mathfrak{A}$ -Charakteristik mit Franklin (3)).

Die von Kelley (1955), Morita (1956), Brown (1963, 1964), Steenrod (1967) angegebene Kategorie der hausdorffschen kompakt-erzeugten Räume ist coreflektive Unterkategorie der Kategorie der Hausdorff-Räume und noch zusätzlich dadurch ausgezeichnet, daß in ihr ein Exponentialgesetz für Funktionenräume gilt. Weitere Argumente (die in dieser Arbeit nicht mehr berücksichtigt worden sind) für die Vorteile dieser Kategorie sind von Gabriel/Zisman (1967), Noble (1970) und Sieradski (1970) angeführt worden.

Ein wesentliches Ziel dieser Arbeit bestand nun darin, diese Kategorie sinnvoll auf nicht-hausdorffsche Räume zu erweitern, so daß möglichst viele der bereits bekannten Ergebnisse ohne die Einschränkung „hausdorffsch“ formuliert werden können. In 2.4.4 wird gezeigt, daß in der Kategorie der quasikompakt-erzeugten Räume (die in der Literatur in der Regel als die natürliche Erweiterung angesehen wird) kein Exponentialgesetz gilt (Dies erklärt sich daher, daß der Unterschied zwischen „kompakt“ und „quasikompakt“ eben kein bloß technischer ist wie z. B. zwischen „quasikompakt und  $T_1$ “ und „quasikompakt“). Infolgedessen mußte das Konzept der natürlichen Überdeckung und der schwachen Topologie aufgegeben werden.

Durch Verallgemeinerung eines Beweises von Gabriel/Zisman bzw. Damerow (1969) läßt sich das Exponentialgesetz für die corefektive Hülle in  $Top$  der kompakten Räume zeigen (Diese Kategorie ist gleichzeitig die corefektive Hülle in  $Top$  der von Brown/Steenrod angegebenen Kategorie). Eine Teilmenge eines Raumes aus dieser Kategorie ist genau dann offen, wenn ihr Urbild unter jeder stetigen Abbildung mit kompaktem Definitionsbereich offen ist. Tatsächlich ist diese Beschreibung für topologische Coreflexionen typisch, wie der trotz seiner Trivialität bisher anscheinend noch nicht bekannte Satz 1.2.9 zeigt. Daß die hausdorffschen kompakt-erzeugten Räume die schwache Topologie bzgl. ihrer kompakten Teilmengen tragen, erscheint so als „zufällig“: In diesem Fall genügt es nämlich, sich auf die Einbettungen mit kompaktem Definitionsbereich zu beschränken. Dieses „Genügen der Einbettungen“ ist kennzeichnend für die natürlichen Überdeckungen (vgl. 1.2.22, 1.3.7).

Bei der Behandlung der Coreflexionen wurde das Schwergewicht auf das Verhältnis zwischen „Erzeugendensystem“ (vgl. 1.2.3) und corefektiver Unterkategorie gelegt. Fast die gesamte Arbeit beruht auf dem Prinzip, daß sich schöne Eigenschaften, die das Erzeugendensystem in  $Top$  besitzt, auf die Räume aus der corefektiven Unterkategorie in gewisser Weise übertragen (vgl. 1.2.6, 2.2.3, 2.5.1, 3.1.11 u. a.).

Die Arbeit ist auf topologische Probleme zugeschnitten, d. h. auf Abschwächung der Voraussetzungen wurde nur dann Wert gelegt, wenn sich dadurch allgemeinere Aussagen über topologische Räume ergeben. Zur besseren Veranschaulichung werden auch in Kapitel 1 die Beispiele aus der Kategorie der kompakt-erzeugten Räume gewählt. An einigen Stellen sind wörtlich aus der Literatur übernommene Sätze, die einen längeren Beweis erfordern, ohne Beweis wiedergegeben. Im allgemeinen ließen sich aber Rechnereien (vgl. z. B. Steenrod) vermeiden.

## 1. TOPOLOGISCHE COREFLEXIONEN

### 1.1. Grundlegendes

Zur Theorie der Coreflexionen sei auf Herrlich (1), (2) und Herrlich/Strecker (1), (2) verwiesen.

1.1.1 Alle in dieser Arbeit betrachteten Unterkategorien von  $Top$  seien voll und isomorphieabgeschlossen, ferner sollen sie wenigstens einen nichtleeren Raum enthalten.

1.1.2 Definition:  $\mathfrak{U}$  sei Unterkategorie von  $Top$

$\mathfrak{U}$  heißt corefektiv in  $Top \iff$  Der Inklusionsfunctor  $E : \mathfrak{U} \rightarrow Top$  besitzt einen coadjungierten Funktor  $C : Top \rightarrow \mathfrak{U}$  mit  $C \circ E = Id_{\mathfrak{U}}$

Im folgenden wird gelegentlich die Sprechweise „ $\mathfrak{U}$  corefektiv“ statt „ $\mathfrak{U}$  corefektiv in  $Top$ “ gebraucht.

Wegen 1.1.1 läßt sich die Definition auch wie folgt umformulieren:

1.1.3 Lemma:

$\mathfrak{U}$  ist genau dann corefektiv in  $Top$ , wenn gilt: Zu jedem  $X \in Top$  existiert eine stetige Abbildung  $c_X$  (genannt die  $\mathfrak{U}$ -Coreflexion von  $X$ ), so daß gilt: Zu jeder stetigen Abbildung  $f : U \rightarrow X$  mit  $U \in \mathfrak{U}$  existiert genau eine stetige Abbildung  $\bar{f}$ , so daß

$$\begin{array}{ccc} CX & \xrightarrow{c_X} & X \\ & \swarrow \bar{f} & \uparrow f \\ & & U \end{array}$$

kommutiert.

1.1.4 Satz: Jede  $\mathfrak{U}$ -Coreflexion in  $Top$  ist bijektiv, das heißt oBdA:  $CX$  stellt eine Verfeinerung der Topologie auf  $X$  bei festgehaltener Trägermenge dar.

Beweis: i) zeige:  $c_X$  ist surjektiv

Annahme: Es existiert  $x_0 \in X - c_X(CX)$

sei  $U \in \mathfrak{U}$ ,  $U \neq \emptyset$ , die konstante Abbildung von  $U$  auf  $x_0$  ist stetig und liefert daher einen Widerspruch zur universellen Eigenschaft.

ii) Sei  $c_X(a) = c_X(b)$  für  $a, b \in CX$

Betrachte wieder die konstante Abbildung  $f : U \rightarrow X$ , die  $U$  auf  $c_X(b)$  abbildet.

Falls nun  $a \neq b$  wäre, so wäre die Abbildung  $\bar{f}$  im Widerspruch zu 1.1.3 nicht eindeutig bestimmt.

1.1.5 Satz: Sei  $\mathfrak{U}$  corefektiv in  $Top$ .  $D : I \rightarrow U$  sei ein Diagramm. Dann gilt:

(i)  $(L, l_i)$  Colimes von  $D \iff (L, l_i)$  ist Colimes von  $E \circ D : I \rightarrow Top$

(ii) Ist  $(L, l_i)$  Limes von  $E \circ D$  in  $Top$ , so ist  $(CL, l_i \circ c_L)$  Limes von  $D$  in  $\mathfrak{U}$ .

1.1.6 Korollar: Jede corefektive Unterkategorie  $\mathfrak{U}$  von  $Top$  ist vollständig und covollständig.

1.1.7 Korollar:  $\mathfrak{U}$  ist abgeschlossen unter der Bildung topologischer Summen, topologischer Quotienten, Adjunktionsräumen und Retrakten.

Beweis zu 1.1.5:

(i) „ $\Rightarrow$ “: trivial, denn  $E$  besitzt Coadjungierten

„ $\Leftarrow$ “: Es braucht lediglich  $L \in \mathfrak{U}$  gezeigt zu werden. Wegen der universellen Eigenschaft der Coreflexion gilt:

Zu jedem  $l_i : Di \rightarrow L$  existiert genau ein  $\bar{l}_i : Di \rightarrow CL$ , so daß

$$\begin{array}{ccc} CL & \xrightarrow{c_L} & L \\ & \swarrow \bar{l}_i & \uparrow l_i \\ & & Di \end{array}$$

kommutiert.

Sei  $f : i \rightarrow j$  ein  $I$ -Morphismus, betrachte das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} & L & \\ & \uparrow c_L & \\ & CL & \\ \begin{array}{c} l_i \\ \bar{l}_i \end{array} \nearrow & & \nwarrow \begin{array}{c} l_j \\ \bar{l}_j \end{array} \\ Di & \xrightarrow{Df} & Dj \end{array}$$

Es gilt also:  $l_i = l_j \circ Df = c_L \circ \bar{l}_j \circ Df$

und:  $l_i = c_L \circ \bar{l}_i$

Wegen der Eindeutigkeit (1.1.3) folgt die Kommutativität auch des unteren Dreiecks.

Die universelle Eigenschaft des Colimes liefert die Existenz eines stetigen  $l : L \rightarrow CL$  mit  $l \circ l_i = \bar{l}_i$ .

Daher hat man:

$$l_i = c_L \circ \bar{l}_i = c_L \circ (l \circ l_i) = (c_L \circ l) \circ l_i$$

Daraus folgt schließlich wegen der Colimes-Eigenschaft:

$$c_L \circ l = id_L$$

Weil  $c_L$  ohnehin bijektiv ist (1.1.4), ergibt sich nun, daß  $c_L$  Homöomorphismus ist.

Beweis von (ii): trivial, denn  $C$  besitzt Adjungierten

Beweis der Korollare 1.1.6 und 1.1.7: trivial

1.1.8 Bemerkung: Insbesondere ist mit 1.1.5 in  $\mathfrak{U}$  ein Produkt  $\Pi$  definiert, nämlich

$$U \amalg U' = C(U \times U') \quad \text{für } U, U' \in \mathfrak{U}$$

Ferner ist mit 1.1.5 eine Definition des Unterraums in  $\mathfrak{U}$  gegeben: Für  $U \in \mathfrak{U}$  gehört zur Teilmenge  $M \subseteq U$  der „Unterraum“  $CM$ . Ein Beispiel dafür, daß Teilmengen mit Relativtopologie im allgemeinen nicht wieder in  $\mathfrak{U}$  zu liegen brauchen, wird in 1.4.16 angegeben.

Die folgende Definition wird nur für den nächsten Satz benötigt:

1.1.9 Definition:  $\mathfrak{U} \in Top, X \in Top$ .

Die Menge  $\{g_i/g_i: U_i \rightarrow X \text{ injektiv, stetig, } U_i \in \mathfrak{U}, i \in I\}$  heißt repräsentative Menge von  $\mathfrak{U}$ -Unterobjekten von  $X$ , wenn gilt: Zu jedem  $h: U' \rightarrow X$  injektiv, stetig mit  $U' \in \mathfrak{U}$  existiert  $i \in I$ , so daß sich  $h$  und  $g_i$  nur um einen Homöomorphismus unterscheiden.

Weil in  $Top$  zu jedem Raum die Menge seiner Unterobjekte existiert, existiert erst recht zu jedem  $\mathfrak{U} \subseteq Top$  und jedem  $X \in Top$  eine repräsentative Menge von  $\mathfrak{U}$ -Unterobjekten von  $X$ .

1.1.10 Charakterisierungssatz:

$\mathfrak{U}$  corefektiv in  $Top \iff \mathfrak{U}$  ist abgeschlossen unter der Bildung topologischer Summen und Quotienten.

Beweis: „ $\Rightarrow$ “: ist mit 1.1.7 bereits gezeigt

„ $\Leftarrow$ “: Sei  $X \in Top$ , sei  $\{g_i/g_i: U_i \rightarrow X, i \in I\}$  eine repräsentative Menge von  $\mathfrak{U}$ -Unterobjekten von  $X$ .

Dann liegt auch  $\bigoplus U_i$  in  $\mathfrak{U}$  und wegen der universellen Eigenschaft der Summe existiert ein stetiges  $g: \bigoplus U_i \rightarrow X$ , so daß

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus U_i & \xrightarrow{g} & X \\ m_i \uparrow & \nearrow g_i & \\ U_i & & \end{array}$$

für alle  $i \in I$  kommutiert.

Zerlege  $g$  in eine Identifizierung  $h$  und eine injektive stetige Abbildung  $c$ :

$$\begin{array}{ccc} \bar{X} & \xrightarrow{c} & X \\ & \nwarrow h & \uparrow g \\ & & \bigoplus U_i \end{array}$$

Dann ist nach Voraussetzung auch  $\bar{X} \in \mathfrak{U}$ . Es genügt nun zu zeigen, daß  $c$  eine  $\mathfrak{U}$ -Coreflexion ist.

Dazu sei  $f : U \rightarrow X$  mit  $U \in \mathfrak{U}$  gegeben. Zerlege  $f$  in eine Identifizierung  $t$  und eine Injektion  $k$ :

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & X \\ & \searrow t & \nearrow k \\ & & U' \end{array}$$

Dann ist auch  $U' \in \mathfrak{U}$  und es existiert  $j \in I$ , so daß oBdA

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & X \\ & \searrow t & \nearrow g_j \\ & & U_j \end{array}$$

kommutiert. Insgesamt ist dann also das folgende Diagramm kommutativ:

$$\begin{array}{ccccc} \bar{X} & \xrightarrow{c} & X & & \\ h \uparrow & \nearrow g & \uparrow g_j & \nwarrow f & \\ \bigoplus U_i & \xleftarrow{m_j} & U_j & \xleftarrow{t} & U \end{array}$$

Dann ist  $h \circ m_j \circ t = \bar{f}$  die gesuchte Abbildung. Ihre Eindeutigkeit ergibt sich aus der Injektivität von  $c$ . Wegen 1.1.3 ist also  $\mathfrak{U}$  corefektiv in  $Top$ .

### 1.1.11 Korollar:

Die Kategorie der diskreten Räume ist corefektiv in  $Top$  und in jeder corefektiven Unterkategorie von  $Top$  enthalten.



Beweis: Der erste Teil der Aussage folgt unmittelbar aus 1.1.10. Sei nun  $\mathfrak{U}$  corefektiv. Wegen der Abgeschlossenheit unter Identifizierungen liegt der einpunktige Raum in  $\mathfrak{U}$ , wegen der Abgeschlossenheit unter Summen also alle diskreten.

## 1.2. Coreflektive Hülle und $\mathfrak{A}$ -System

1.2.1 Lemma:  $f_i : X_i \rightarrow Y_i$  seien stetige Abbildungen für  $i \in I$ , die  $j_i : X_i \rightarrow \bigoplus X_i$  bzw.  $k_i : Y_i \rightarrow \bigoplus Y_i$  seien Injektionen der Summanden:

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus X_i & \dashrightarrow & \bigoplus Y_i \\ j_i \uparrow & & \uparrow k_i \\ X_i & \xrightarrow{f_i} & Y_i \end{array}$$

Dann gilt:

- (i) Es existiert genau ein stetiges  $f : \bigoplus X_i \rightarrow \bigoplus Y_i$ , so daß das obige Diagramm für alle  $i \in I$  kommutiert.
- (ii) Sind alle  $f_i$  Identifizierungen, so auch  $f$ .

Beweis: (i): universelle Eigenschaft der Summe

(ii): Sei  $V \in \bigoplus Y_i$  und  $f^{-1}V$  offen, also ist auch  $f_i^{-1}(k_i^{-1}V) = j_i^{-1}(f^{-1}V)$  offen für alle  $i \in I$ .

Da die  $f_i$  Identifizierungen sind, ist  $k_i^{-1}V$  offen für alle  $i \in I$ , also ist  $V \cap Y_i$  offen in  $Y_i$  für alle  $i \in I$ , d. h. aber  $V$  offen in  $\bigoplus Y_i$ .

1.2.2 Satz: Sei  $\mathfrak{A}$  Unterkategorie von  $Top$ . Dann existiert eine kleinste  $\mathfrak{A}$  umfassende coreflektive Unterkategorie  $\tilde{\mathfrak{A}}$  und für diese gilt:

$X \in \tilde{\mathfrak{A}} \iff$  Es existiert eine Menge  $\{A_i/A_i \in \mathfrak{A}, i \in I\}$  und  $X$  ist Quotient von  $\bigoplus A_i$ .

Beweis:  $\tilde{\mathfrak{A}}$  werde durch die letzte Aussage definiert. Dann ist  $\tilde{\mathfrak{A}}$  offenbar unter der Bildung topologischer Quotienten abgeschlossen. Wegen 1.2.1 ist  $\tilde{\mathfrak{A}}$  auch unter Summenbildung abgeschlossen. Wegen 1.1.10 ist daher  $\tilde{\mathfrak{A}}$  coreflektiv in  $Top$ . Ferner ist  $\tilde{\mathfrak{A}}$  wegen 1.1.10 offenbar in jeder  $\mathfrak{A}$  umfassenden coreflektiven Unterkategorie enthalten.

1.2.3 Definition:  $\tilde{\mathfrak{A}}$  heißt die Kategorie der  $\mathfrak{A}$ -erzeugten Räume.  $\mathfrak{A}$  heißt ein Erzeugendensystem für  $\tilde{\mathfrak{A}}$ .

Wegen 1.1.10 ist der Operator  $\sim$  idempotent. Jede coreflektive Unterkategorie besitzt also mindestens ein Erzeugendensystem, nämlich sich selbst.

Falls  $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} \subseteq \tilde{\mathfrak{A}}$ , so ist offenbar auch  $\mathfrak{B}$  ein Erzeugendensystem. Die Bezeichnung „ $\mathfrak{A}$ -erzeugt“ wird außer durch 1.2.2 dadurch gerechtfertigt, daß sich eine ganze Reihe von Eigenschaften von  $\mathfrak{A}$  auf  $\tilde{\mathfrak{A}}$  übertragen.

1.2.4 Lemma: Sei  $X \in Top$ ,  $\mathfrak{A} \subseteq Top$ . Es gelte:

(i)  $c : \bar{X} \rightarrow X$  injektiv, stetig

(ii)  $\bar{X} \in \tilde{\mathfrak{A}}$

(iii) Zu jedem stetigen  $f : A \rightarrow X$  mit  $A \in \mathfrak{A}$  existiert genau ein stetiges  $\bar{f} : A \rightarrow \bar{X}$  mit  $c\bar{f} = f$

Dann ist  $c$  schon die  $\tilde{\mathfrak{A}}$ -Coreflexion von  $X$  und  $\bar{X}$  homöomorph zu  $CX$ .

Beweis: Sei  $Y \in \tilde{\mathfrak{A}}$  und eine stetige Abbildung  $g : Y \rightarrow X$  gegeben.

Nach 1.2.2 existiert dann eine Identifizierung  $h : \bigoplus A_i \rightarrow Y$ . Seien  $j_i : A_i \rightarrow \bigoplus A_i$  die Injektionen der Summanden. Wegen 1.1.3 existiert dann zu jedem  $i \in I$  eine stetige Abbildung  $\overline{ghj_i}$ , so daß

$$\begin{array}{ccc} \bar{X} & \xrightarrow{c} & X \\ \overline{ghj_i} \uparrow & \nearrow ghj_i & \\ A_i & & \end{array}$$

kommutiert.

Wegen der universellen Eigenschaft der Summe existiert ein stetiges  $k : \bigoplus A_i \rightarrow \bar{X}$ , so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} & & \bar{X} & \xrightarrow{c} & X \\ & \nearrow \overline{ghj_i} & \uparrow k & & \uparrow g \\ A_i & \xrightarrow{j_i} & \bigoplus A_i & \xrightarrow{h} & Y \end{array}$$

kommutiert. Deshalb und weil  $c$  injektiv und  $h$  surjektiv ist, läßt sich eine Abbildung  $\bar{g} : Y \rightarrow \bar{X}$  durch

$$\bar{g}(y) = k(h^{-1}(y))$$

definieren. Weil  $h$  Identifizierung ist, folgt aus  $k = \bar{g}h$  die Stetigkeit von  $\bar{g}$ .

Ferner ist

$$c\bar{g}h = ck = gh$$

also

$$c\bar{g} = g$$

Wegen der Injektivität von  $c$  ist  $\bar{g}$  auch eindeutig bestimmt.

1.2.5 Definition:  $\mathfrak{U}$  Unterkategorie von  $Top$

$\mathfrak{U}$  heißt abgeschlossen-erblich  $\iff$  Jede abgeschlossene Teilmenge eines Raumes aus  $\mathfrak{U}$  liegt wieder in  $\mathfrak{U}$

$\mathfrak{U}$  heißt offen-erblich  $\iff$  Jede offene Teilmenge eines Raumes aus  $\mathfrak{U}$  liegt wieder in  $\mathfrak{U}$

$\mathfrak{U}$  heißt erblich  $\iff$  Jeder Teilraum eines Raumes aus  $\mathfrak{U}$  liegt wieder in  $\mathfrak{U}$

Wenn keine Mißverständnisse möglich sind, sagt man für  $X \in \mathfrak{U}$  auch „ $X$  ist erblich“, wenn jeder Teilraum von  $X$  wieder zu  $\mathfrak{U}$  gehört.

1.2.6 Satz:  $\mathfrak{A}$  Unterkategorie von  $Top$ .

(i)  $\mathfrak{A}$  abgeschlossen-erblich  $\Rightarrow \tilde{\mathfrak{A}}$  abgeschlossen-erblich

(ii)  $\mathfrak{A}$  offen-erblich  $\Rightarrow \tilde{\mathfrak{A}}$  offen-erblich

Beweis: (i) Sei  $X \in \tilde{\mathfrak{A}}$ ,  $B \subseteq X$  abgeschlossen.

Wegen 1.2.2 existiert eine Identifizierung  $h : \bigoplus A_i \rightarrow X$ .

Dann ist auch  $h|_{h^{-1}B} : h^{-1}B \rightarrow B$  eine Identifizierung.

Wegen 1.1.7 genügt es also zu zeigen, daß  $h^{-1}B \in \tilde{\mathfrak{A}}$ .

$h^{-1}B$  läßt sich schreiben als  $\bigoplus (A_i \cap h^{-1}B)$ ;

$A_i \cap h^{-1}B$  ist abgeschlossener Unterraum von  $A_i$ , liegt also in  $\mathfrak{A}$ , mit 1.1.7 ist man fertig.

(ii): völlig analog

Die Nützlichkeit der in 1.2.2 gegebenen Quotientendarstellung hat sich schon in 1.2.6 gezeigt. Daher:

1.2.7 Definition:  $\mathfrak{A} \subseteq Top$ ,  $X \in Top$ .

Eine Menge  $\{\varphi_i/\varphi_i : A_i \rightarrow X \text{ stetig, } A_i \in \mathfrak{A}, i \in I\}$  heißt  $\mathfrak{A}$ -System von  $X$ , wenn

$$(\varphi_i)_{i \in I} : \bigoplus A_i \rightarrow CX$$

Identifizierung ist ( $C$  Coreflexionsfunktork zu  $\tilde{\mathfrak{A}}$ ).

Beispiel: Sei  $\mathfrak{K}$  die Kategorie der kompakten Räume. Wegen 1.1.7 sind CW-Räume kompakt-erzeugt. Für einen CW-Raum bilden die charakteristischen Abbildungen ein  $\mathfrak{K}$ -System.

1.2.8 Definition:  $\mathfrak{A} \subseteq Top$ ,  $X \in Top$ ,  $M \subseteq X$

$M$  heißt  $\mathfrak{A}$ -offen  $\iff f^{-1}M$  offen für alle stetigen  $f : A \rightarrow X$  mit  $A \in \mathfrak{A}$

1.2.9 Satz:  $\mathfrak{A} \subseteq Top$ ,  $X \in Top$ ,  $M \subseteq X$ ,  $\mathfrak{M}$  sei  $\mathfrak{A}$ -System von  $X$ . Es sind äquivalent:

- (i)  $M$  offen in  $CX$
- (ii)  $M$   $\mathfrak{A}$ -offen
- (iii)  $M$   $\tilde{\mathfrak{A}}$ -offen
- (iv)  $\varphi^{-1}M$  offen für alle  $\varphi \in \mathfrak{M}$

Beweis: (i)  $\Rightarrow$  (iii): Sei  $f : Y \rightarrow X$  gegeben mit  $Y \in \tilde{\mathfrak{A}}$ . Nach 1.1.3 ist auch  $f : Y \rightarrow CX$  stetig

(iii)  $\Rightarrow$  (ii): trivial

(ii)  $\Rightarrow$  (iv): trivial

(iv)  $\Rightarrow$  (i): nach Def. des  $\mathfrak{A}$ -Systems trivial

Selbstverständlich bleibt der Satz richtig, wenn man jeweils „offen“ durch „abgeschlossen“ ersetzt.

Die Topologie der Räume aus  $\tilde{\mathfrak{A}}$  ist also bereits durch die stetigen Abbildungen mit Definitionsbereich aus  $\mathfrak{A}$  bestimmt. Der Funktor  $C$  kann so berechnet werden.

Sei nun  $\mathfrak{M}$  ein  $\mathfrak{A}$ -System von  $X$ .  $\mathfrak{M}$  wird wie folgt zu einer Kategorie: Sind  $\varphi, \psi \in \mathfrak{M}$  zwei Objekte, so ist eine stetige Abbildung  $h$  mit  $\varphi = \psi h$  ein Morphismus von  $\varphi$  nach  $\psi$ .

Dann ergibt sich:

1.2.10 Korollar:  $X \in Top$ ,  $\mathfrak{A} \subseteq Top$ ,  $\mathfrak{M} = \{\varphi_i/\varphi_i : A_i \rightarrow X, i \in I\}$  sei ein  $\mathfrak{A}$ -System von  $X$  mit der zusätzlichen Eigenschaft: Zu jedem  $x \in X$  existiert  $i \in I$  mit  $\varphi_i(A_i) = \{x\}$ .

Dann gilt:

$$CX = \varinjlim_{\mathfrak{M}} A_i$$

Beweis: Sei ein Raum  $Y$  sowie stetige Abbildungen  $\psi_i : A_i \rightarrow Y$  gegeben, so daß gilt:

$$\varphi_i = \varphi_j h \Rightarrow \psi_i = \psi_j h$$

Dann definiere  $\lambda : CX \rightarrow Y$  durch

$$\lambda(x) = \psi_i(a_i) \quad \text{für } \varphi_i(a_i) = x$$

$\lambda$  ist wohldefiniert: Sei nämlich  $\varphi_j(b_j) = x$  (dabei ist  $j = i$  zugelassen).

Nach Voraussetzung existiert  $k \in I$  mit  $\varphi_k(A_k) = \{x\}$ .

Dann sind die Abbildungen  $h_1 : A_k \rightarrow A_i$  und  $h_2 : A_k \rightarrow A_j$

mit  $h_1(A_k) = \{a_i\}$  und  $h_2(A_k) = \{b_j\}$  Morphismen von  $\varphi_k$  nach  $\varphi_i$  bzw.  $\varphi_j$ .

Nach Voraussetzung über  $Y$  ist

$$\psi_i h_1 = \psi_k = \psi_j h_2$$

also  $\psi_i(a_i) = \psi_j(b_j)$ , d. h. aber  $\lambda$  ist wohldefiniert.

Stetigkeit von  $\lambda$ : Sei  $M \subseteq Y$  offen, also ist  $\psi_i^{-1}M$  offen für alle  $i \in I$ , also ist  $\varphi_i^{-1}\lambda^{-1}M$  offen für alle  $i \in I$ .

Nach 1.2.9 ist dann  $\lambda^{-1}M$  offen in  $CX$ .

Die Eindeutigkeit von  $\lambda$  ist klar.

Es folgen nun einige Aussagen über  $\mathfrak{A}$ -Systeme:

1.2.11 Lemma:  $X \in Top$ ,  $\mathfrak{A} \subseteq Top$ ,  $\mathfrak{M}$  sei eine Menge stetiger Abbildungen in  $X$  mit Definitionsbereich aus  $\mathfrak{A}$

$\mathfrak{M}$   $\mathfrak{A}$ -System von  $X \iff$  (i) Für jedes  $M \subseteq X$  gilt:

$$M \text{ } \mathfrak{A}\text{-offen} \iff \varphi^{-1}M \text{ offen für alle } \varphi \in \mathfrak{M}$$

und

$$(ii) \bigcup_{\substack{\varphi \in \mathfrak{M} \\ \varphi : A \rightarrow X}} \varphi(A) = X$$

Beweis: „ $\Rightarrow$ “: folgt aus 1.2.9 und 1.2.7

„ $\Leftarrow$ “: Wegen 1.2.9 ist  $(\varphi)_{\varphi \in \mathfrak{M}} : \bigoplus_{\mathfrak{M}} A \rightarrow CX$  Identifizierung

1.2.12 Lemma:

(i)  $\mathfrak{M}$   $\mathfrak{A}$ -System,  $\mathfrak{N}$  sei ein Menge stetiger Abbildungen von einem Objekt aus  $\mathfrak{A}$  in  $X$ . Dann ist auch  $\mathfrak{M} \cup \mathfrak{N}$  ein  $\mathfrak{A}$ -System von  $X$ .

(ii) Jeder Raum besitzt ein  $\mathfrak{A}$ -System, dessen Mächtigkeit die seiner Potenzmenge nicht übersteigt.

Beweis: (i): folgt aus 1.2.11

(ii)  $X \in Top$  gegeben. Zu  $M \subseteq X$  nicht  $\mathfrak{A}$ -offen wähle  $g_M : A_M \rightarrow X$  mit  $g_M^{-1}(M)$  nicht offen.

Zu  $M \subseteq X$   $\mathfrak{A}$ -offen wähle ein  $g_M : A_M \rightarrow X$  mit  $g_M(A_M) \cap M \neq \emptyset$  (ein solches existiert stets, man kann z. B. eine konstante Abbildung wählen, nach 1.1.1 enthält  $\mathfrak{A}$  ja einen nichtleeren Raum).

Dann ist Bedingung (i) von 1.2.11 für  $\mathfrak{M} = \{g_M/M \subseteq X\}$  erfüllt.

Sei  $x \in X$ . Falls  $\{x\}$  nicht  $\mathfrak{A}$ -offen, so kann  $g_{\{x\}}^{-1}(x)$  nicht leer sein. Falls  $\{x\}$   $\mathfrak{A}$ -offen, so folgt ebenfalls

$$x \in \bigcup_{g_M \in \mathfrak{M}} g_M(A_M)$$

Damit ist auch 1.2.11 (ii) erfüllt.

1.2.13 Satz:  $X_i \in Top, i \in I$

(i) Seien  $\mathfrak{M}_i$   $\mathfrak{A}$ -Systeme von  $X_i$ . Dann ist  $\bigcup_{i \in I} \mathfrak{M}_i$   $\mathfrak{A}$ -System von  $\bigoplus X_i$ .

(ii) Sei  $\mathfrak{A}$  abgeschlossen unter topologischen Produkten über der Indexmenge  $I$ . Dann gibt es  $\mathfrak{A}$ -Systeme  $\mathfrak{M}_i$  von  $X_i$ , so daß  $\mathfrak{N} = \{ \prod_{i \in I} \varphi_i / \varphi_i \in \mathfrak{M}_i \}$   $\mathfrak{A}$ -System von  $\prod_{i \in I} X_i$  und sowohl  $\mathfrak{N}$  als auch alle  $\mathfrak{M}_i$  die zusätzliche Eigenschaft von 1.2.10 haben.

(Das Kreuz bezeichnet das cartesische Produkt im Unterschied zum Produkt  $\Pi$  in  $\mathfrak{A}$ ).

(iii) Für  $i, j \in I$  gelte  $CX_i = CX_j$ . Für  $i \in I$  trage  $M_i \subseteq X_i$  Relativtopologie.

Dann existiert ein  $\mathfrak{A}$ -System  $\mathfrak{M}$  von  $CX_i$ , so daß  $\{ \varphi / \varphi \in \mathfrak{M}, \text{Bild } \varphi \subseteq M_i \}$   $\mathfrak{A}$ -System von  $M_i$  ist.

Beweis:

(i): folgt aus 1.2.1 und 1.2.7

(ii): Sei  $\mathfrak{L}$  ein  $\mathfrak{A}$ -System von  $\prod_{i \in I} X_i$ , sei  $\mathfrak{M}'_i$   $\mathfrak{A}$ -System von  $X_i$  mit der zusätzlichen Eigenschaft gemäß 1.2.10 (wegen 1.2.12 (i) ist dies möglich).

Setze  $\mathfrak{M}_i = \mathfrak{M}'_i \cup \{ p_{X_i} \varphi / \varphi \in \mathfrak{L} \}$

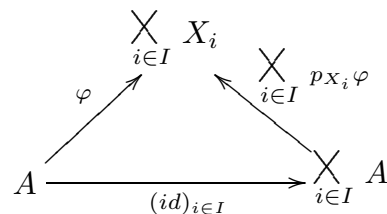
Nach 1.2.12 (i) ist dann  $\mathfrak{M}_i$  ein  $\mathfrak{A}$ -System von  $X_i$ .

Nach Voraussetzung über  $\mathfrak{A}$  (Produkttreue) ist  $\mathfrak{N}$  eine Menge stetiger Abbildungen von einem Objekt aus  $\mathfrak{A}$  in  $\prod_{i \in I} X_i$ .

Sowohl  $\mathfrak{N}$  als auch alle  $\mathfrak{M}_i$  besitzen offenbar die „zusätzliche Eigenschaft“.

Wegen 1.2.12 (i) genügt es zu zeigen, daß  $\{ \prod_{i \in I} p_{X_i} \varphi / \varphi \in \mathfrak{L} \}$   $\mathfrak{A}$ -System von  $\prod_{i \in I} X_i$  ist.

Betrachte das kommutative Diagramm:



Ist  $M \subseteq \prod_{i \in I} X_i$   $\mathfrak{A}$ -offen, so folgt aus der Produkttreue

$$\left( \prod_{i \in I} p_{X_i} \varphi \right)^{-1} M \text{ offen für alle } \varphi \in \mathfrak{L}$$

Die Umkehrung ergibt sich aus der Kommutativität des Diagramms. Also ist 1.2.11 (i) erfüllt; 1.2.11 (ii) ist wieder trivial.

(iii): Sei  $\mathfrak{M}_i$   $\mathfrak{A}$ -System von  $M_i$  und  $\mathfrak{M}'$   $\mathfrak{A}$ -System von  $CX_i$ .

Wegen 1.2.12 (i) ist dann  $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}' \cup \bigcup_{i \in I} \mathfrak{M}_i$   $\mathfrak{A}$ -System von  $CX_i$  und ebenfalls mit 1.2.12

(i) folgt der zweite Teil der Behauptung.

1.2.14 Beispiel: Einen zu 1.2.13 analogen Satz für Identifizierungen oder auch nur für Retrakte gibt es zunächst nicht. Dazu betrachte man den folgenden von Arens angegebenen Raum (vgl. Kelley S. 77):

$$X = \{(m, n) / m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

Topologie auf  $X$ :  $(m, n) \neq (0, 0) \Leftarrow \{(m, n)\}$  offen

$U$  offene Umgebung von  $(0, 0) \iff (0, 0) \in U$  und für fast alle  $m$  ist  $\{n / (m, n) \notin U\}$  endlich

(D. h.:  $U$  enthält fast alle Elemente aus fast allen Spalten).

$X$  ist hausdorffsch, die kompakten Teilmengen sind gerade die endlichen. Also ist  $\{(0, 0)\}$  offen in jeder kompakten Teilmenge, daraus folgt, daß  $\{(0, 0)\}$   $\mathfrak{R}$ -offen ist ( $\mathfrak{R}$  bezeichnet wieder die Kategorie der kompakten).

Offenbar ist  $S = \{(0, 0), (1, 1)\}$  der Sierpinski-Raum  $S$ : da  $S$  sich bekanntlich als Quotient des Einheitsintervalls schreiben läßt, ist  $S$  nach 1.1.7 kompakt-erzeugt, d. h.  $\mathfrak{R}$ -offene und offene Teilmengen stimmen überein (1.2.9). Die Abbildung  $r : X \rightarrow S$ , die alle Elemente von  $X - S$  auf  $(1, 1)$  abbildet, ist eine Retraktion.

Angenommen, es gäbe ein  $\mathfrak{R}$ -System  $\mathfrak{M}$  von  $X$ , so daß  $\{r\varphi / \varphi \in \mathfrak{M}\}$  ein  $\mathfrak{R}$ -System von  $S$  ist.

Weil  $\{(0, 0)\}$   $\mathfrak{R}$ -offen in  $X$  ist, wäre dann also

$$(r\varphi)^{-1}(0, 0) = \varphi^{-1}r^{-1}(0, 0) = \varphi^{-1}(0, 0) \text{ offen.}$$

Dies ist aber ein Widerspruch, weil  $\{(0, 0)\}$  nicht  $\mathfrak{R}$ -offen in  $S$  ist.

Dieses Beispiel beruht darauf, daß  $X$  nicht in  $\tilde{\mathfrak{R}}$  liegt, es gilt nämlich:

1.2.15 Lemma:  $X \in \tilde{\mathfrak{A}}$ ,  $f : X \rightarrow Y$  Identifizierung,  $\mathfrak{M}$  sei ein  $\mathfrak{A}$ -System von  $X$ , dann ist  $\{f\varphi / \varphi \in \mathfrak{M}\}$   $\mathfrak{A}$ -System von  $Y$ .



Beweis:

$$\begin{aligned}
 M \subseteq Y \text{ } \mathfrak{A}\text{-offen} &\Rightarrow (f\varphi)^{-1}M \text{ offen für alle } \varphi \in \mathfrak{M} \\
 &\Rightarrow \varphi^{-1}(f^{-1}M) \text{ offen für alle } \varphi \in \mathfrak{M} \\
 &\Rightarrow f^{-1}M \text{ offen (wegen } X \in \tilde{\mathfrak{A}} \text{ und 1.2.9)} \\
 &\Rightarrow M \text{ offen}
 \end{aligned}$$

(In  $Y$  stimmen offen und  $\mathfrak{A}$ -offen überein, weil mit  $X$  auch  $Y$  in  $\tilde{\mathfrak{A}}$  liegt).

Damit ist 1.2.11 (i) gezeigt, Bedingung (ii) ist wieder trivial.

Es lassen sich nun mit Hilfe der Aussagen über  $\mathfrak{A}$ -Systeme Folgerungen für das Produkt  $\Pi$  in  $\tilde{\mathfrak{A}}$  ziehen:

1.2.16 Lemma:  $\mathfrak{A}$  sei abgeschlossen unter endlichen Produkten in  $Top$ ,  $X, Y \in Top$ .

Dann gibt es  $\mathfrak{A}$ -Systeme  $\mathfrak{M} = \{\varphi_i/\varphi_i : A_i \rightarrow X, i \in I\}$  und  $\mathfrak{N} = \{\psi_j/\psi_j : B_j \rightarrow Y, j \in J\}$  von  $X$  bzw.  $Y$ , so daß gilt:

$$C(X \times Y) = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ \mathfrak{M}}} \lim_{\substack{\longrightarrow \\ \mathfrak{N}}} (A_i \times B_j)$$

Beweis:  $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$  werden gemäß 1.2.13 (ii) so gewählt, daß  $\{\varphi_i \times \psi_j / \varphi_i \in \mathfrak{M}, \psi_j \in \mathfrak{N}\}$   $\mathfrak{A}$ -System von  $X \times Y$  ist.

Wegen 1.2.10 ist dann

$$C(X \times Y) = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ \{\varphi_i \times \psi_j / \dots\}}} (A_i \times B_j)$$

Dann ist aber auch (vgl. den Beweis zu 1.2.10)

$$\begin{aligned}
 C(X \times Y) &= \lim_{\substack{\longrightarrow \\ \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}}} (A_i \times B_j) \\
 &= \lim_{\substack{\longrightarrow \\ \mathfrak{M}}} \lim_{\substack{\longrightarrow \\ \mathfrak{N}}} (A_i \times B_j)
 \end{aligned}$$

1.2.17 Lemma:  $X, Y \in Top$ ,  $\mathfrak{A}$  abgeschlossen unter endlichen Produkten in  $Top$ . Dann gilt:

$$C(X \times Y) = C(CX \times CY)$$

Beweis: Nach 1.2.13 (ii) findet man  $\mathfrak{A}$ -Systeme  $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$  für  $X, Y$ , ebenso  $\mathfrak{M}', \mathfrak{N}'$  für  $CX, CY$ .

Nach 1.2.12 (i) ist dann  $\{\varphi \times \psi/\varphi \in \mathfrak{M} \cup \mathfrak{M}', \psi \in \mathfrak{N} \cup \mathfrak{N}'\}$  ein  $\mathfrak{A}$ -System sowohl für  $C(X \times Y)$  als auch für  $C(CX \times CY)$ .

1.2.18 Lemma:  $X, Y \in \tilde{\mathfrak{A}}$ ,  $M \subseteq X$ ,  $N \subseteq Y$  tragen Relativtopologie, sei  $M \amalg_R N \subseteq X \amalg Y$  mit Relativtopologie. Dann gilt:

$$M \amalg N = C(M \times N) = C(M \amalg_R N)$$

Beweis: Wegen 1.2.13 (iii) haben  $M \times N$  und  $M \amalg_R N$  ein gemeinsames  $\mathfrak{A}$ -System, mit 1.2.7 folgt also die Behauptung.

1.2.19 Lemma:  $X, Y \in Top$

$$X \times Y = C(X \times Y) \Rightarrow X, Y \in \tilde{\mathfrak{A}}$$

Beweis: Die Projektionen sind Identifizierungen, mit  $X \times Y$  liegen dann auch  $X, Y$  in  $\tilde{\mathfrak{A}}$ .

1.2.20 Beispiel: Die in 1.2.19 angegebene notwendige Bedingung für die Gleichheit von cartesischem Produkt und Produkt in  $\tilde{\mathfrak{A}}$  ist im allgemeinen nicht hinreichend. Ein bekanntes Beispiel dazu ist von Dowker angegeben worden: Zwei CW-Räume (die nach 3.2.5 (i) kompakt-erzeugt sind), deren cartesisches Produkt aber kein CW-Raum ist (wegen 3.2.5 (ii) ist dann also  $k(X \times Y) \neq X \times Y$ , wobei  $k$  den Coreflexionsfaktor zu  $\tilde{\mathfrak{K}}$  bedeutet). Ein ähnliches Beispiel, das später noch verwendet wird, soll hier vorgerechnet werden:  $\mathbb{N}$  trage die diskrete Topologie, in  $\mathbb{N} \times [0, 1]$  werde  $\mathbb{N} \times \{0\}$  zu einem Punkt identifiziert, der entstandene Raum  $X$  liegt als Quotient einer Summe von kompakten Räumen in  $\tilde{\mathfrak{K}}$ . Der Raum  $\mathbb{Q}$  der rationalen Zahlen erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom und ist daher kompakt-erzeugt (3.1.1 (ii) und 1.4.3).

In  $X \times \mathbb{Q}$  trifft jede Umgebung von  $((0, 0), 0)$  die Menge

$$M = \{(n, 0), \frac{1}{n}\}/n \in \mathbb{N}\}$$

Also ist  $M$  nicht abgeschlossen in  $X \times \mathbb{Q}$ .

Um zu zeigen, daß  $M$  in  $k(X \times \mathbb{Q})$  abgeschlossen ist, genügt es nach 3.1.3 zu zeigen, daß  $M$  jede kompakte Teilmenge von  $X \times \mathbb{Q}$  in einer abgeschlossenen Menge trifft. Weil jede kompakte Teilmenge im Produkt ihrer Projektionen enthalten ist, genügt es, sich dabei auf kompakte Teilmengen der Form  $K_1 \times K_2$  mit  $K_1, K_2$  kompakt in  $X$  bzw.  $\mathbb{Q}$  zu beschränken.

Jede in  $X$  kompakte Teilmenge trifft nur endlich viele  $\{n\} \times [0, 1]$ ; daher gilt sogar:  
Sei  $K \subseteq \mathbb{Q}$  kompakt, dann genügt es zu zeigen, daß

$$M \cap \left( \left( \bigcup_{i=1}^k \{n_i\} \times [0, 1] \right) \times K \right)$$

für jedes  $k \in \mathbb{N}$  abgeschlossen ist in  $X \times \mathbb{Q}$ .

Dieser Durchschnitt ist aber nichts anderes als

$$\left\{ \left( (n_i, 0), \frac{1}{n_i} \right) \mid 1 \leq i \leq k \text{ und } \frac{1}{n_i} \in K \right\}$$

was eine abgeschlossene Menge ist.

Es folgen nun noch einige Aussagen über die coreflektive Hülle.

Es bezeichne:

$\mathfrak{A}_{sum}$  die Kategorie aller topologischen Summen von Räumen aus  $\mathfrak{A}$

$\mathfrak{A}_{lok}$  die Kategorie aller Räume, in denen jeder Punkt eine zu  $\mathfrak{A}$  gehörige Umgebung hat.

$\mathfrak{A}_s$  die Kategorie aller Räume  $X$ , die die schwache Topologie bzgl.  $\{A/A \subseteq X, A \in \mathfrak{A}\}$  tragen

1.2.21 Lemma: Es gilt:  $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}_{sum} \subseteq \mathfrak{A}_{lok} \subseteq \mathfrak{A}_s \subseteq \tilde{\mathfrak{A}}$

Beweis: Die beiden ersten Inklusionen sind trivial

(i): Sei  $X \in \mathfrak{A}_{lok}$  und  $U \cap A$  offen in  $A$  für jedes  $A \subseteq X, A \in \mathfrak{A}$ , d. h. zu jedem  $A \subseteq X$  existiert  $W_A$  offen in  $X$  mit

$$U \cap A = W_A \cap A$$

Sei  $u \in U$ , dann existiert  $A \in \mathfrak{A}$  und  $V$  offen in  $X$  mit  $u \in V \subseteq A$ .

Dann ist  $V \cap W_A$  offene Umgebung von  $u$  und  $V \cap W_A \subseteq U$ , also ist  $U$  offen.

(ii): Sei  $X \in \mathfrak{A}_s$ , sei  $(\tilde{A}_i)_{i \in I}$  die Familie aller zu  $\tilde{\mathfrak{A}}$  gehörigen Teilmengen von  $X$ .

Dann ist die natürliche Abbildung  $f : \bigoplus_{i \in I} \tilde{A}_i \rightarrow X$  surjektiv, weil jede einpunktige

Teilmenge von  $X$  wegen 1.1.7 in  $\tilde{\mathfrak{A}}$  liegt.

Trivialerweise gilt:  $X \in \mathfrak{A}_s \Rightarrow X \in (\tilde{\mathfrak{A}})_s$ , daher ist  $f$  Identifizierung. Mit 1.1.7 folgt die Behauptung.

1.2.22 Lemma:  $X \in Top, M \subseteq X, M \in \tilde{\mathfrak{A}}$ . Dann ist die Relativtopologie von  $M$  in  $X$  und in  $CX$  dieselbe.

Beweis: Sei  $j : M \rightarrow X$  Einbettung, dann ist nach 1.1.3 und 1.1.4  $\bar{j} : M \rightarrow CX$  stetig und offen.

1.2.23 Lemma:  $X \in Top$ . Es sind äquivalent:

- (i)  $\{j_A/j_A : A \rightarrow X \text{ Einbettung}, A \in \mathfrak{A}, A \subseteq X\}$  ist  $\mathfrak{A}$ -System von  $X$ .
- (ii) Die natürliche Abbildung  $h : \bigoplus_{\substack{A \subseteq X \\ A \in \mathfrak{A}}} A \rightarrow CX$  ist Identifizierung und lokal eine Einbettung.

(iii)  $CX$  trägt die schwache Topologie bezüglich seiner Teilmengen aus  $\mathfrak{A}$  und jeder Punkt aus  $CX$  liegt in einer Teilmenge aus  $\mathfrak{A}$ .

Beweis: (i)  $\Rightarrow$  (ii): 1.2.7 und 1.2.22

(ii)  $\Rightarrow$  (iii): 1.2.22

(iii)  $\Rightarrow$  (i): 1.2.11

1.2.24 Definition:  $\mathfrak{A} \subseteq Top, X \in Top$

$X$  heißt bildverträglich bzgl.  $\mathfrak{A} \iff$  Zu jedem  $f : A \rightarrow X$  stetig mit  $A \in \mathfrak{A}$  existiert  $A' \in \mathfrak{A}, A' \subseteq X$  mit  $f(A) \subseteq A'$

$\mathfrak{A}$  heißt bildverträglich  $\iff$  Alle topologischen Räume sind bildverträglich bzgl.  $\mathfrak{A}$

1.2.25 Lemma:

$X$  ist bildverträglich bzgl.  $\mathfrak{A} \Rightarrow$  Die Einbettungen der Teilmengen von  $X$ , die zu  $\mathfrak{A}$  gehören, bilden ein  $\mathfrak{A}$ -System von  $X$

Beweis: Ist  $M$   $\mathfrak{A}$ -offen, so ist trivialerweise  $j^{-1}M$  offen für alle Einbettungen  $j : A \rightarrow X$  mit  $A \in \mathfrak{A}$ .

Die Umkehrung ergibt sich daraus, daß sich jedes  $\varphi : A \rightarrow X$  zerlegen läßt in

$$A \xrightarrow{\varphi'} A' \xrightarrow{j} X$$

Damit ist 1.2.11 (i) erfüllt.

Mit konstanten Abbildungen und 1.2.24 ergibt sich 1.2.111 (ii).

1.2.26 Bemerkung: Sei  $\mathfrak{A}$  bildverträglich. Trotz 1.2.25 kann man den Begriff des  $\mathfrak{A}$ -Systems nicht ohne weiteres fallenlassen und durch den Begriff „Menge der zu  $\mathfrak{A}$  gehörigen Teilräume“ ersetzen, weil sich etwa 1.2.13 (ii) (diese Aussage wurde wesentlich für 1.2.16 und damit 2.2.3 benutzt) nicht analog formulieren läßt. Verwendet man stattdessen cofinale Teilmengen (so Damerow), so muß man weitere (nämlich ordnungstheoretische) Voraussetzungen an  $\mathfrak{A}$  machen.

1.2.27 Lemma:  $X \in Top, \mathfrak{A} \subseteq Top,$

$X \in \tilde{\mathfrak{A}} \iff$  Zu jedem  $M \subseteq X$  und jedem  $x \in \bar{M}$  existiert ein abgeschlossenes  $N \subseteq X$   
mit  $N \in \tilde{\mathfrak{A}}$  und  $x \in \overline{M \cap N}$ .

Beweis: „ $\Rightarrow$ “: trivial

„ $\Leftarrow$ “: Sei  $M \subseteq X$  und  $M$   $\mathfrak{A}$ -abgeschlossen, sei  $x \in \bar{M}$ . Dann gibt es  $N$  abgeschlossen in  $X$ ,  $N \in \tilde{\mathfrak{A}}$ , so daß  $x \in \overline{M \cap N}$ .

Jedes stetige  $\psi : A' \rightarrow N$  mit  $A' \in \mathfrak{A}$  kann man auch als Abbildung in  $X$  auffassen, also ist  $\psi^{-1}(M) = \psi^{-1}(M \cap N)$  abgeschlossen.

Wegen  $N \in \tilde{\mathfrak{A}}$  folgt mit 1.2.9, daß  $M \cap N$  abgeschlossen in  $N$ , also auch in  $X$ .

Daher ist  $x \in M \cap N$ , also  $x \in M$ , d. h.  $M$  abgeschlossen.

Mit 1.2.9 folgt die Behauptung.

Dieses Lemma verallgemeinert (ebenso wie 1.4.6) Steenrod 2.1.

### 1.3 Die Kategorie $\mathfrak{A}$ -Top

$(X, \mathfrak{X})$  bezeichnet den topologischen Raum mit der Topologie  $\mathfrak{X}$  auf der Menge  $X$ . Die Formulierung des folgenden Lemmas ist zur Vereinfachung der Schreibweise etwas lässig.

1.3.1 Lemma:  $\mathfrak{U}$  Unterkategorie von  $Top$ . Dann gilt:

$\mathfrak{U}$  corefektiv in  $Top \iff$  Für jedes  $(X, \mathfrak{X})$  existiert unter allen Topologien  $\mathfrak{X}'$ , die feiner als  $\mathfrak{X}$  sind und für die  $(X, \mathfrak{X}') \in \mathfrak{U}$  gilt, eine größte  $\bar{X}$  und es gilt für jedes  $Y \in Top$ :

$$Mor_{Top}(X, Y) \subseteq Mor_U(\bar{X}, \bar{Y})$$

Beweis: „ $\Rightarrow$ “: Wegen 1.1.3 und 1.1.4 existiert eine solche größte Topologie  $CX = \bar{X}$ .

Sei  $f : X \rightarrow Y$  stetig, dann ist  $f$  auch als Abbildung von  $CX$  in  $Y$  stetig. Nach 1.1.3 und 1.1.4 existiert dann ein  $\bar{f} : CX \rightarrow CY$  mit  $\bar{f}(x) = f(x)$  für alle  $x \in X$ .

„ $\Leftarrow$ “: Sei  $C$  durch  $CX = \bar{X}$  auf Objekten definiert. Zu zeigen ist, daß  $id : CX \rightarrow X$   $\mathfrak{U}$ -Coreflexion ist.

Dazu sei  $U \in \mathfrak{U}$  und  $f : U \rightarrow X$  stetig. Offenbar ist  $U = CU$ .

Wegen der Inklusionsbeziehung zwischen den Morphismenmengen existiert  $\bar{f}$ , so daß

$$\begin{array}{ccc} CX & \xrightarrow{id} & X \\ & \swarrow \bar{f} & \uparrow f \\ & & U \end{array}$$

kommutiert, mit dieser Eigenschaft ist  $\bar{f}$  eindeutig bestimmt. Mit 1.1.3 folgt die Behauptung.

Wenn man nun für je zwei topologische Räume die Morphismenmenge gemäß 1.3.1 „auffüllt“ (statt die Objekte auf  $\mathfrak{U}$  einzuschränken), so erhält man eine zu  $\mathfrak{U}$  äquivalente Kategorie. Dies soll im folgenden präzisiert werden.

1.3.2 Definition:  $\mathfrak{A}$  sei Unterkategorie von  $Top$ ,  $X, Y \in Top$ ,  $f : X \rightarrow Y$  Abbildung (nicht notwendig stetig).

$f$  heißt  $\mathfrak{A}$ -stetig  $\iff f\varphi$  stetig für alle stetigen  $\varphi : A \rightarrow X$  mit  $A \in \mathfrak{A}$

1.3.3 Lemma:  $X, Y \in Top$ ,  $f : X \rightarrow Y$  Abbildung,  $\mathfrak{M}$  ein  $\mathfrak{A}$ -System für  $X$ . Es sind äquivalent:

- (i)  $Cf : CX \rightarrow CY$  stetig
- (ii)  $f$   $\mathfrak{A}$ -stetig
- (iii)  $f$   $\tilde{\mathfrak{A}}$ -stetig
- (iv)  $f\varphi$  stetig für alle  $\varphi \in \mathfrak{M}$
- (v) Das Urbild jeder  $\mathfrak{A}$ -offenen Teilmenge unter  $f$  ist wieder  $\mathfrak{A}$ -offen

Beweis: „(i)  $\Rightarrow$  (iii)“: Sei  $\varphi : A \rightarrow X$  mit  $A \in \tilde{\mathfrak{A}}$  gegeben, dann kommutiert

$$\begin{array}{ccccc}
 & & CX & \xrightarrow{Cf} & CY \\
 & \nearrow \varphi & \downarrow id & & \downarrow id \\
 A & & X & \xrightarrow{f} & Y \\
 & \searrow \varphi & & & 
 \end{array}$$

also ist  $f\varphi$  stetig.

„(iii)  $\Rightarrow$  (ii)“: Abschwächung

„(ii)  $\Rightarrow$  (iv)“: Abschwächung

„(iv)  $\Rightarrow$  (v)“:  $M \subseteq Y$   $\mathfrak{A}$ -offen, also  $(f\varphi)^{-1}M$  offen,

d. h.  $\varphi^{-1}(f^{-1}M)$  offen für alle  $\varphi \in \mathfrak{M}$ ,

d. h.  $f^{-1}M$   $\mathfrak{A}$ -offen

„(v)  $\Rightarrow$  (i)“: 1.2.9

1.3.4 Definition: Die Kategorie, deren Objekte topologische Räume und deren Morphismen  $\mathfrak{A}$ -stetige Abbildungen sind, heiße  $\mathfrak{A}Top$ .

1.3.5 Lemma:  $X$  ist genau dann  $\mathfrak{A}$ -erzeugt, wenn jede  $\mathfrak{A}$ -stetige Abbildung mit Definitionsbereich  $X$  stetig ist.

Beweis: „ $\Rightarrow$ “: Sei  $f : X \rightarrow Y$   $\mathfrak{A}$ -stetig

wegen 1.3.3 ist  $Cf : X \rightarrow CY$  stetig, also auch

$$f : X \xrightarrow{Cf} CY \xrightarrow{id} Y$$

„ $\Leftarrow$ “: Nach 1.3.3 ist  $id : X \rightarrow CX$   $\mathfrak{A}$ -stetig, nach Voraussetzung also stetig, also Homöomorphismus, d. h.  $X = CX$ .

1.3.6 Satz:  $\tilde{\mathfrak{A}}$  ist volle Unterkategorie von  $\mathfrak{A}\text{-Top}$  und  $\tilde{\mathfrak{A}}$  ist natürlich äquivalent zu  $\mathfrak{A}\text{-Top}$ .

Beweis: Wegen 1.3.3 (i)  $\iff$  (ii) ist  $\tilde{\mathfrak{A}}$  volle Unterkategorie von  $\mathfrak{A}\text{-Top}$  (der Einbettungsfunktor heiße  $E'$ ).

Ebenfalls wegen 1.3.3 definiert  $C$  einen Funktor  $C'$  von  $\mathfrak{A}\text{-Top}$  nach  $\tilde{\mathfrak{A}}$ .

(i) Sei  $X, Y \in \tilde{\mathfrak{A}}$ ,  $f : X \rightarrow Y$  stetig. Dann ist  $C'E'X = X$ , also liefert  $id$  eine natürliche Äquivalenz:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ id \uparrow & & \uparrow id \\ C'E'X & \xrightarrow{C'E'f} & C'E'Y \end{array}$$

(ii) Seien  $X, Y \in \mathfrak{A}\text{-Top}$ ,  $f : X \rightarrow Y$   $\mathfrak{A}$ -stetig. Dann ist  $E'C'X = CX$  und  $id$  liefert eine natürliche Transformation:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ id \uparrow & & \uparrow id \\ E'C'X & \xrightarrow{E'C'f} & E'C'Y \end{array}$$

Aber diese natürliche Transformation ist auch eine natürliche Äquivalenz, denn wegen 1.3.3 ist auch  $id : X \rightarrow CX = E'C'X$   $\mathfrak{A}$ -stetig.

Wie der zweite Teil des Beweises zeigt, ist durch die Vergrößerung der Morphismenmengen der Isomorphie-Begriff in  $\mathfrak{A}\text{-Top}$  schwächer als der Homöomorphie-Begriff. In jeder Isomorphie-Klasse von Räumen aus  $\mathfrak{A}\text{-Top}$  liegt genau ein Raum, der schon zu  $\tilde{\mathfrak{A}}$  gehört.

1.3.7 Lemma:  $f : X \rightarrow Y$  Abbildung,  $X$  sei bildverträglich bzgl.  $\mathfrak{A}$ . Dann gilt:

$$f \text{ } \mathfrak{A}\text{-stetig} \iff f|_A \text{ stetig für alle } A \subseteq X \text{ mit } A \in \mathfrak{A}$$

Beweis: ergibt sich unmittelbar aus 1.3.3 (ii)  $\iff$  (iv) sowie 1.2.25

1.3.8 Bemerkung: Die Kategorie  $\mathfrak{R}\text{-Top}$  ist eine volle Unterkategorie der von Spanier angegebenen Kategorie quasitopologischer Räume und quasistetiger Abbildungen. Brown (2) hat eine volle Unterkategorie von  $\mathfrak{R}\text{-Top}$  untersucht, nämlich die hausdorffschen Räume mit  $\mathfrak{R}$ -stetigen Abbildungen.

Die Kategorie  $\mathfrak{A}\text{-Top}$  hat gegenüber  $\tilde{\mathfrak{A}}$  den Vorteil, daß in  $\mathfrak{A}\text{-Top}$  Unterräume die Relativtopologie tragen und keine Modifizierung der Produktdefinition erforderlich ist. Dem steht aber ein Nachteil gegenüber, der im allgemeinen schwerwiegender sein wird: Weil die  $\mathfrak{A}$ -stetigen Abbildungen die Struktur eines topologischen Raumes nur „unter einem



gewissen Gesichtspunkt“ respektieren, muß eine Reihe von topologischen Begriffen in  $\mathfrak{A}$ -*Top* umdefiniert werden. Dies soll im folgenden in der Kategorie  $\mathfrak{R}$ -*Top* am Beispiel der Zusammenhangsbegriffe erläutert werden.

1.3.9 Lemma:  $f : X \rightarrow Y$   $\mathfrak{R}$ -stetig,  $X$  bogenzusammenhängend. Dann ist auch  $f(X)$  bogenzusammenhängend.

Beweis:  $f(x_1), f(x_2)$  gegeben. Dann existiert  $w : [0, 1] \rightarrow X$  stetig mit  $w(0) = x_1$  und  $w(1) = x_2$ . Dann ist  $fw$  geeignet.

Im Gegensatz dazu ist der Begriff des Zusammenhangs nicht verträglich mit dem durch  $\mathfrak{R}$  gegebenen „Gesichtspunkt“:

1.3.10 Beispiel: Das  $\mathfrak{R}$ -stetige Bild eines zusammenhängenden Raums braucht nicht zusammenhängend zu sein.

Dazu werde das Einheitsintervall wie folgt umtopologisiert:

$U$  Umgebung von  $0 \iff 0 \in U$  und  $U$  enthält ein offenes Intervall um  $0$ , in dem endlich viele gegen Null konvergierende Folgen fehlen dürfen (konvergent in der üblichen Topologie).

Für die anderen Punkte bleiben die Umgebungssysteme unverändert. Der so entstandene Raum heiße  $X$ .

(i)  $X$  ist hausdorffsch

Beweis: trivial

(ii)  $X$  ist zusammenhängend

Beweis:  $X - \{0\}$  trägt die gewöhnliche Topologie und ist daher als halboffenes Intervall sogar bogenzusammenhängend,

dann ist auch  $\overline{X - \{0\}} = X$  zusammenhängend

(iii) Sei  $K \subseteq X$  kompakt mit  $0 \in K$ . Dann existiert  $\varepsilon > 0$  mit  $K \cap [0, \varepsilon[ = \{0\}$

Beweis: indirekt, Annahme: Zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  existiert  $x_n \neq 0$  mit  $x_n \in K \cap [0, \frac{1}{n}[$

Dann ist die Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen Null konvergent (in der gewöhnlichen Topologie).

Also ist  $U = X - \{x_1, x_2, \dots\}$  offen

Setze  $m_i = \min\{x_{i-1} - x_i, x_i - x_{i+1}\}$  für  $i \in \mathbb{N}$ ,

dann erhält man eine offene Überdeckung von  $K$

$$K \subseteq U \cup \bigcup_{i \in \mathbb{N}} ]x_i - m_i, x_i + m_i[$$

die keine endliche Teilüberdeckung enthält, Widerspruch !

(iv)  $kX$  ist nicht zusammenhängend

Sei  $\varphi : K' \rightarrow X$  stetig mit  $K'$  kompakt. Dann ist  $\varphi K'$  kompakt, wegen (iii) also  $\varphi^{-1}0$  offen, nach 1.2.9 ist also  $\{0\}$  offen und abgeschlossen in  $kX$ .

( $X$  ist wegen (iii) ein instruktives Beispiel für einen nicht-kompakt-erzeugten Raum: Die kompakten Teilmengen ( $X$  ist hausdorffsch) sind in der Nähe der Null so dünn gesät, daß sie dort zur Bestimmung der Topologie nicht ausreichen).

Wegen 1.3.3 ist  $id : X \rightarrow kX$   $\mathfrak{R}$ -stetig, daher Isomorphismus in  $\mathfrak{R}\text{-Top}$ , mithin ist der Zusammenhang in  $\mathfrak{R}\text{-Top}$  keine Invariante. (Anders gesagt: Der Funktor  $k$  führt zusammenhängende Räume nicht notwendig in zusammenhängende über.) Invariant ist aber der folgende Begriff (der wegen 1.3.3 und 1.2.9 analog zu  $\mathfrak{R}$ -stetig und  $\mathfrak{R}$ -offen gebildet ist):

1.3.11 Definition:  $X \in \mathfrak{R}\text{-Top}$

$X$  heißt  $\mathfrak{R}$ -zusammenhängend  $\iff kX$  ist zusammenhängend

1.3.12 Lemma:  $X \in \mathfrak{R}\text{-Top}$

- (i) Das  $\mathfrak{R}$ -stetige Bild eines  $\mathfrak{R}$ -zusammenhängenden Raumes ist  $\mathfrak{R}$ -zusammenhängend
- (ii) Jeder bogenzusammenhängende Raum ist  $\mathfrak{R}$ -zusammenhängend
- (iii)  $X$   $\mathfrak{R}$ -zusammenhängend  $\iff$  Die leere Menge und der ganze Raum sind die einzigen Teilmengen von  $X$ , die  $\mathfrak{R}$ -offen und  $\mathfrak{R}$ -abgeschlossen sind.

Beweis: (i): 1.3.3 (i)  $\iff$  (ii) und 1.3.11

(ii):  $X$  bogenzusammenhängend  $\Rightarrow kX$  bogenzusammenhängend (wegen 1.3.9)  
 $\Rightarrow kX$  zusammenhängend  
 $\Rightarrow X$   $\mathfrak{R}$ -zusammenhängend

(iii): 1.2.9 und 1.3.11

1.3.13 Bemerkung: Ebenso ist in  $\mathfrak{R}\text{-Top}$  der Begriff „hausdorffsch“ nicht invariant. Dazu betrachte man den unter 1.2.14 angegebenen Raum  $X$  und setze  $M = X - \{(0,0)\}$ . Dann ist die Fasersumme  $X \sqcup_M X$  nicht hausdorffsch, aber  $k(X \sqcup_M X)$  ist hausdorffsch (nämlich diskret).

#### 1.4. Die $\mathfrak{A}$ -Charakteristik

In diesem Abschnitt werden Ergebnisse von Franklin (3), Arhangel'skij/Franklin und Weddington auf coreflektive Unterkategorien übertragen.

1.4.1 Definition:  $X \in Top$ ,  $M \subseteq X$ ,  $\alpha, \beta$  Ordinalzahlen. Für vorgegebenes  $\mathfrak{A} \subseteq Top$  werden folgende Mengenoperatoren definiert (transfinite Induktion):

$$M' = \{x \in X / \text{Existiert } \varphi : A \rightarrow X \text{ stetig mit } A \in \mathfrak{A} \text{ und } x \in \overline{\varphi(\varphi^{-1}M)}\}$$

$$M^0 = M$$

$$M^\alpha = \begin{cases} (M^\beta)' & \text{falls } \alpha = \beta + 1 \\ \bigcup_{\beta < \alpha} M^\beta & \text{sonst} \end{cases}$$

1.4.2 Definition:

Die kleinste Ordinalzahl  $\alpha$  (falls sie existiert), so daß  $M^\alpha = \bar{M}$  für jedes  $M \subseteq X$  gilt, heißt die  $\mathfrak{A}$ -Charakteristik von  $X$ .

Diese Definition ist topologisch invariant.

1.4.3 Satz:  $X \in Top$ ,  $\mathfrak{A} \subseteq Top$

$X$  ist  $\mathfrak{A}$ -erzeugt  $\iff X$  besitzt eine  $\mathfrak{A}$ -Charakteristik

Beweis: „ $\Rightarrow$ “: Es genügt zu zeigen: Für jedes  $M \subseteq X$  existiert ein  $\alpha$  mit  $M^\alpha = \bar{M}$  (dann existiert nämlich zu jedem  $M$  ein kleinstes  $\alpha$ , von denen kann man dann das Supremum nehmen).

Für jede Ordinalzahl  $\beta$  gilt jedenfalls  $M \subseteq M^\beta \subseteq \bar{M}$ .

Falls  $M^\beta$  nicht abgeschlossen ist, so existiert wegen  $X \in \tilde{\mathfrak{A}}$  ein stetiges  $\varphi : A \rightarrow X$  mit  $A \in \mathfrak{A}$  und  $\varphi^{-1}(M^\beta)$  nicht abgeschlossen (wegen 1.2.9), also ist

$$M^{\beta+1} = (M^\beta)' \neq M^\beta$$

Weil also  $M^{\beta+1} - M^\beta$  mindestens einen Punkt enthält, existiert ein  $\alpha$  mit  $M^\alpha$  abgeschlossen, also  $M^\alpha = \bar{M}$ .

„ $\Leftarrow$ “: Sei  $M \subseteq X$  und  $M$   $\mathfrak{A}$ -abgeschlossen.

Dann folgt  $M' \subseteq M$ , also  $M^\alpha \subseteq M$  für alle Ordinalzahlen  $\alpha$ , also auch  $\bar{M} \subseteq M$ , d. h.  $M$  abgeschlossen. Mit 1.2.9 folgt die Behauptung.

Der Satz besagt also, daß es nur in  $\mathfrak{A}$ -erzeugten Systemen möglich ist, den Abschluß aller Teilmengen mit Hilfe von Morphismen von den  $A \in \mathfrak{A}$  zu erreichen.

1.4.4 Bemerkung: Im Gegensatz zu den Begriffen „ $\mathfrak{A}$ -offen“ und „ $\mathfrak{A}$ -stetig“, die äquivalent sind zu „ $\tilde{\mathfrak{A}}$ -offen“ bzw. „ $\tilde{\mathfrak{A}}$ -stetig“ (vgl. 1.2.9 und 1.3.3) hängt die  $\mathfrak{A}$ -Charakteristik tatsächlich vom Erzeugendensystem  $\mathfrak{A}$  ab: Trivialerweise hat jeder Raum aus  $\tilde{\mathfrak{A}}$  eine  $\tilde{\mathfrak{A}}$ -Charakteristik  $\leq 1$ .

Die Räume mit  $\mathfrak{R}$ -Charakteristik  $\leq 1$  heißen in der Literatur  $k'$ -Räume (vgl. Arhangel'skij (1), (2), Bagley/Weddington, Weddington etc.). Es gibt kompakt-erzeugte Räume, die keine  $k'$ -Räume sind (vgl. 1.4.22, 3.2.3 und auch Frolik). Räume mit  $\mathfrak{R}$ -Charakteristik  $> 1$  sind jedoch „sehr selten“ und daher kaum untersucht.

1.4.5 Lemma:  $X \in Top$

$X$  hat  $\mathfrak{A}$ -Charakteristik 0  $\iff X$  diskret

Beweis: trivial

1.4.6 Lemma:  $X \in Top$

$X$  hat  $\mathfrak{A}$ -Charakteristik  $\leq 1 \iff$  Zu jedem  $M \subseteq X$  und jedem  $x \in \bar{M}$  existiert ein stetiges  $\varphi : A \rightarrow X$  mit  $A \in \mathfrak{A}$  und  $\varphi^{-1}x \cap \overline{\varphi^{-1}M} \neq \emptyset$

Beweis: trivial

Wegen 1.4.3 ist dies eine Verallgemeinerung von Steenrod 2.1

1.4.7 Lemma:  $\mathfrak{A} \in Top$ ,  $X \in \tilde{\mathfrak{A}}$ . Dann gilt:

(i)  $X$  indiskret  $\Rightarrow X$  hat  $\mathfrak{A}$ -Charakteristik 1

(ii)  $X$  Sierpinski-Raum  $\Rightarrow X$  hat  $\mathfrak{A}$ -Charakteristik 1

Beweis: (i): Sei  $M \subseteq X$ ,  $x \in \bar{M} = X$ ,

nach 1.1.11 muß  $\mathfrak{A}$  einen nicht-diskreten Raum  $A$  enthalten, sei also  $B \subseteq A$  nicht abgeschlossen und  $m \in M$ .

Dann ist  $\varphi : A \rightarrow X$

$$\varphi(B) = m \text{ und } \varphi(A - B) = x$$

stetig, wegen  $x \in \overline{\varphi^{-1}M}$  folgt nach 1.4.6 sowie 1.4.5 die Behauptung.

(ii): Annahme: Alle Räume aus  $\mathfrak{A}$  haben die Eigenschaft: Jede offene Teilmenge ist auch abgeschlossen.

Mit 1.2.9 folgt dann, daß die  $\mathfrak{A}$ -erzeugten Räume dieselbe Eigenschaft haben, also ist der Sierpinski-Raum nicht  $\mathfrak{A}$ -erzeugt, Widerspruch zur Voraussetzung.

Sei also  $A \in \mathfrak{A}$  und  $U \subseteq A$  offen, aber nicht abgeschlossen.

Sei  $X = \{x, y\}$  mit  $\{x\}$  offen. Dann ist  $\varphi : A \rightarrow X$  mit

$$\varphi(U) = x \text{ und } \varphi(A - U) = y$$

stetig, also  $y \in \{x\}^1$ .

Da  $X$  nicht diskret ist (vgl. 1.4.5), folgt die Behauptung.

1.4.7 (i) ist übrigens gleichwertig zu der Aussage, daß der bei Herrlich (1) 22.1.3 (c) definierte „Limesoperator“ idempotent ist (vgl. Herrlich (1) S. 146–149).

1.4.5 und 1.4.7 sowie die triviale Aussage

$$X \in \tilde{\mathfrak{A}} \text{ und } \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{A}\text{-Charakteristik von } X \geq \mathfrak{B}\text{-Charakteristik von } X$$

legen die Vermutung nahe, daß die Charakteristik Informationen über den „Verband“ der coreflektiven Unterkategorien von  $Top$  (vgl. Herrlich (1), S. 148–152) gibt. Eine mögliche Vermutung wäre z. B.: Sind  $X, Y$   $\mathfrak{A}$ -erzeugt und ist die coreflektive Hülle von  $X$  in der von  $Y$  enthalten, so ist die  $\mathfrak{A}$ -Charakteristik von  $X$  kleiner oder gleich der  $\mathfrak{A}$ -Charakteristik von  $Y$ .

1.4.8 Definition:  $X \in Top, M \subseteq X$

$M$  heißt  $\mathfrak{A}$ -verträglich bezüglich  $X \iff$  Für jedes  $N \subseteq M$  gilt: Aus  $\varphi^{-1}N$  abgeschlossen in  $\varphi^{-1}M$  für alle stetigen  $\varphi : A \rightarrow X$  mit  $A \in \mathfrak{A}$  folgt:  $N$  ist abgeschlossen in  $M$

Offenbar gilt:

$M$   $\mathfrak{A}$ -verträglich bezüglich  $M \iff M \in \tilde{\mathfrak{A}}$

Falls keine Verwechslungen entstehen können, wird der Zusatz „bezüglich  $X$ “ weggelassen.

Für hausdorffsches  $X$  ist „ $M$   $\mathfrak{R}$ -verträglich bezüglich  $X$ “ gleichbedeutend mit der von Weddington benutzten Ausdrucksweise „ $M$  hat Eigenschaft  $(k)$ “.

1.4.9 Satz:  $X \in \tilde{\mathfrak{A}}$

$X$  hat  $\mathfrak{A}$ -Charakteristik  $\leq 1 \iff$  Jede Teilmenge von  $X$  ist  $\mathfrak{A}$ -verträglich

Beweis: „ $\Rightarrow$ “:  $M \subseteq X$  gegeben. Sei  $N \subseteq M$  und  $\varphi^{-1}N$  abgeschlossen in  $\varphi^{-1}M$  für alle stetigen  $\varphi : A \rightarrow X$  mit  $A \in \mathfrak{A}$ .

Sei  $x$  Häufungspunkt von  $N$  in  $M$ , dann ist auch  $x \in \bar{N}$ .

Nach 1.4.6 existiert  $\varphi : A \rightarrow X$  mit

$$\varphi^{-1}x \cap \overline{\varphi^{-1}N} \neq \emptyset$$

Außerdem gilt:  $\varphi^{-1}x \subseteq \varphi^{-1}M$

Nach Voraussetzung ist  $\varphi^{-1}N$  abgeschlossen in  $\varphi^{-1}M$ , daher folgt

$$\varphi^{-1}x \cap \varphi^{-1}N \neq \emptyset$$

also  $x \in N$ , d. h. aber  $N$  abgeschlossen in  $M$ .

„ $\Leftarrow$ “: Annahme:  $X$  hat  $\mathfrak{A}$ -Charakteristik  $> 1$ ,

nach 1.4.6 existiert dann  $M \subseteq X$  und  $x \in \bar{M} - M$  mit: Für alle  $\varphi : A \rightarrow X$  ist

$$\varphi^{-1}x \cap \overline{\varphi^{-1}M} = \emptyset$$

Dann ist

$$\varphi^{-1}M = \overline{\varphi^{-1}M} \cap (\varphi^{-1}(M \cup \{x\}))$$

Das bedeutet aber, daß  $\varphi^{-1}M$  abgeschlossen ist in

$$\varphi^{-1}(M \cup \{x\})$$

Weil  $M \cup \{x\}$   $\mathfrak{A}$ -verträglich ist, folgt:  $M$  ist abgeschlossen in  $M \cup \{x\}$ . Dies ist aber ein Widerspruch zu  $x \in \bar{M} - M$ .

1.4.10 Definition:  $f : X \rightarrow Y$  Identifizierung

$f$  heißt erbliche Identifizierung  $\iff$  Für jedes  $M \subseteq Y$  ist  $f|_{f^{-1}M} : f^{-1}M \rightarrow M$  eine Identifizierung

1.4.11 Korollar:  $X \in \tilde{\mathfrak{A}}$  (d. h.  $X$  ist Quotient eines Raumes aus  $\mathfrak{A}_{sum}$ )

$X$  hat  $\mathfrak{A}$ -Charakteristik  $\leq 1 \iff$  Es gibt eine erbliche Identifizierung  $f : S \rightarrow X$  mit  $S \in \mathfrak{A}_{sum}$

Beweis: „ $\Rightarrow$ “: Zu jedem  $(N, M) \in \mathfrak{P}(X) \times \mathfrak{P}(X)$  mit  $N \subseteq M$  wähle ein stetiges  $f_i : A_i \rightarrow X$  ( $i \in I$ ,  $I$  geeignetes Indexsystem) mit

$$f_i^{-1}N \text{ abgeschlossen in } f_i^{-1}M \iff \text{Für alle stetigen } \varphi : A \rightarrow X \text{ mit } A \in \mathfrak{A} \text{ ist } \varphi^{-1}N \text{ abgeschlossen in } \varphi^{-1}M$$

OBdA sei dann  $\{f_i/i \in I\}$  ein  $\mathfrak{A}$ -System von  $X$  (sonst bildet man gemäß 1.2.12 (i) die Vereinigung mit einem  $\mathfrak{A}$ -System).

Zu zeigen ist, daß  $(f_i)_{i \in I} : \bigoplus A_i \rightarrow X$  erbliche Identifizierung ist.

Sei  $M \subseteq X$  und  $N \subseteq M$  und  $(f_i)_{i \in I}^{-1}N$  abgeschlossen in  $(f_i)_{i \in I}^{-1}M$ .

Also ist  $f_i^{-1}N$  abgeschlossen in  $f_i^{-1}M$  für alle  $i \in I$ .

Nach Wahl des zu  $(N, M)$  gehörigen  $f_i$  gilt also:

$\varphi^{-1}N$  abgeschlossen in  $\varphi^{-1}M$  für alle  $\varphi : A \rightarrow X$  mit  $A \in \mathfrak{A}$ .

Wegen 1.4.9 ist dann aber  $N$  abgeschlossen in  $M$ , woraus die Behauptung folgt.

„ $\Leftarrow$ “: Wegen 1.4.9 genügt es zu zeigen: Jede Teilmenge  $M$  von  $N$  ist  $\mathfrak{A}$ -verträglich.

Sei  $N \subseteq M$  und  $\varphi^{-1}N$  abgeschlossen in  $\varphi^{-1}M$  für die  $\varphi : A \rightarrow X$ , sei  $S = \bigoplus_{i \in I} A_i$ .

Dann ist also  $f|_{A_i}^{-1}N$  abgeschlossen in  $f|_{A_i}^{-1}M$  für alle  $i \in I$ ,

d. h.  $f^{-1}N$  abgeschlossen in  $f^{-1}M$ .

Weil  $f$  erbliche Identifizierung ist, folgt:  $N$  abgeschlossen in  $M$ .

1.4.12 Korollar: Sei  $X$  bildverträglich bzgl.  $\mathfrak{A}$ ,  $X \in \tilde{\mathfrak{A}}$

$X$  hat  $\mathfrak{A}$ -Charakteristik  $\leq 1 \iff$  Die natürliche Abbildung  $\bigoplus_{\substack{A \subseteq X \\ A \in \mathfrak{A}}} A \rightarrow X$  ist erbliche Identifizierung

Beweis: „ $\Leftarrow$ “: folgt sofort aus 1.4.11

„ $\Rightarrow$ “: Zu jedem  $A_i \subseteq X$  mit  $A_i \in \mathfrak{A}$  sei  $f_i : A_i \rightarrow X$  die Einbettung.

Dann ist  $\{f_i/i \in I\}$  eine Menge, wie sie im Beweis von 1.4.11 „ $\Rightarrow$ “ gebraucht wird:

Sei nämlich  $(N, M) \in \mathfrak{P}(X) \times \mathfrak{P}(X)$  mit  $N \subseteq M$  gegeben, falls  $\varphi : A' \rightarrow X$  existiert mit  $\varphi^{-1}N$  nicht abgeschlossen in  $\varphi^{-1}M$ , so gibt es  $A'' \in \mathfrak{A}$ ,  $\varphi A' \subseteq A'' \subseteq X$  und  $A'' \cap N$  kann nicht abgeschlossen sein in  $A'' \cap M$ .

Wegen 1.2.25 ist  $\{f_i/i \in I\}$  auch ein  $\mathfrak{A}$ -System von  $X$ .

1.4.13 Lemma: Sei  $X_i \in \tilde{\mathfrak{A}}$  für  $i \in I$ . Dann gilt:

Die  $\mathfrak{A}$ -Charakteristik der Summe der  $X_i$  ist gleich dem Supremum der  $\mathfrak{A}$ -Charakteristiken der  $X_i$ .

Insbesondere ist also die Kategorie der Räume mit  $\mathfrak{A}$ -Charakteristik  $\alpha$  abgeschlossen unter Summenbildung.

Beweis: Zunächst folgt jedenfalls sofort

$\mathfrak{A}$ -Charakteristik von  $\bigoplus X_i \geq \mathfrak{A}$ -Charakteristik von  $X_i$  für jedes  $i \in I$

Sei nun  $M \subseteq \bigoplus X_i$ , wegen

$M$  abgeschlossen  $\iff M \cap X_i$  abgeschlossen in  $X_i$  für alle  $i \in I$

folgt die Behauptung.

1.4.14 Lemma:  $X \in \tilde{\mathfrak{A}}$ ,  $M \subseteq X$

$M \in \tilde{\mathfrak{A}} \Rightarrow M$  ist  $\mathfrak{A}$ -verträglich bzgl.  $X$

Beweis: folgt aus 1.2.9 (mit „abgeschlossen“ statt „offen“), weil sich jedes  $\varphi : A \rightarrow M$  als ein  $\varphi : A \rightarrow X$  auffassen läßt.

Die Umkehrung von 1.4.14 gilt jedoch nicht (vgl. 1.4.16).

1.4.15 Korollar:  $X \in \tilde{\mathfrak{A}}$

$X$  erblich  $\iff$  Jede Teilmenge von  $X$  hat  $\mathfrak{A}$ -Charakteristik  $\leq 1$

Beweis: „ $\Rightarrow$ “:  $M \subseteq X$  gegeben. Sei  $N \subseteq M$  beliebig, dann ist auch  $N \in \tilde{\mathfrak{A}}$ , wegen 1.4.14 ist also  $N$   $\mathfrak{A}$ -verträglich bzgl.  $M$ ,

nach 1.4.9 hat dann  $M$   $\mathfrak{A}$ -Charakteristik  $\leq 1$ .

„ $\Leftarrow$ “: wegen 1.4.3 trivial

Die Aussage „ $X$  ist erblich“ hängt nur von  $\tilde{\mathfrak{A}}$  ab, die  $\mathfrak{A}$ -Charakteristik hängt dagegen sehr wohl vom Erzeugendensystem ab (vgl. 1.4.4), aber — wie dieser Satz zeigt — „nicht zu sehr“.

1.4.16 Beispiel: Es gibt Räume mit  $\mathfrak{A}$ -Charakteristik 1, die nicht erblich sind.

Dazu betrachte man den unter 1.2.14 angegebenen Raum  $X$ .  $X$  ist vollständig regulär, denn:

Ist  $U$  offene Umgebung von  $(0,0)$ , dann ist  $f : X \rightarrow [0,1]$  mit  $f(U) = 0$  und  $f(\mathbb{C}U) = 1$  von der gesuchten Art.

Ist  $U$  offene Umgebung von  $(n,m) \neq (0,0)$ , dann definiere  $f(n,m) = 0$  und  $f(X - \{(n,m)\}) = 1$

Also ist  $X$  Teilraum eines kompakten Raumes  $K$ .  $K$  hat trivialerweise  $\mathfrak{R}$ -Charakteristik 1, ist aber nicht erblich wegen  $X \notin \tilde{\mathfrak{R}}$ .

Wegen 1.4.9 ist  $X$   $\mathfrak{R}$ -verträglich bzgl.  $K$ , also kann man 1.4.14 nicht umkehren.

1.4.17 Lemma:

$f, g$  erbliche Identifizierung  $\Rightarrow f \circ g$  erbliche Identifizierung

Beweis: trivial

Damit läßt sich nun die Kategorie der Räume mit  $\mathfrak{A}$ -Charakteristik  $\leq 1$  analog zu 1.1.10 charakterisieren:

1.4.18 Satz: Die Kategorie  $\mathfrak{A}'$  der Räume mit  $\mathfrak{A}$ -Charakteristik  $\leq 1$  ist die kleinste  $\mathfrak{A}$  umfassende Kategorie, die unter Summen und erblichen Quotienten abgeschlossen ist.



Beweis: (i): Wegen 1.4.11 und 1.4.17 haben erbliche Quotienten von Räumen aus  $\mathfrak{A}'$  wieder  $\mathfrak{A}$ -Charakteristik  $\leq 1$ .

Wegen 1.4.13 ist  $\mathfrak{A}'$  auch unter Summen abgeschlossen.

(ii): Eine  $\mathfrak{A}$  umfassende Kategorie, die unter Summen und erblichen Quotienten abgeschlossen ist, muß wegen 1.4.11 auch  $\mathfrak{A}'$  umfassen.

Analog zu 1.2.19 gilt:

1.4.19 Lemma:

$X \times Y$  erblicher  $\mathfrak{A}$ -erzeugter Raum  $\Rightarrow X, Y$  erbliche  $\mathfrak{A}$ -erzeugte Räume

Beweis: Die Projektionen sind offen, also erbliche Identifizierungen.

Also ist jede Teilmenge von  $X$  bzw.  $Y$  Quotient einer  $\mathfrak{A}$ -erzeugten Teilmenge von  $X \times Y$ , mit 1.1.7 fertig.

1.4.20 Lemma:

(i)  $\mathfrak{A}$  abgeschlossen-erblich  $\Rightarrow \mathfrak{A}'$  abgeschlossen-erblich

(ii)  $\mathfrak{A}$  offen-erblich  $\Rightarrow \mathfrak{A}'$  offen-erblich

(iii)  $\mathfrak{A}$  erblich  $\Rightarrow \mathfrak{A}'$  erblich

Beweis: (i), (ii), (iii): Der Beweis verläuft völlig analog zu 1.2.6 (statt 1.1.7 wird diesmal 1.4.18 zitiert).

1.4.21 Beispiel: Ein wichtiges Beispiel für eine coreflektive Unterkategorie von  $Top$  ist die Kategorie der folgenbestimmten Räume (vgl. Franklin (1), (2), (3)). Man kann sie wie folgt erhalten:

Sei  $S$  ein hausdorffscher Raum, dann definiere:

$S \in \mathfrak{S} \iff$  Es gibt eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $S$ , die gegen  $x_0 \in S$  konvergiert und es ist  

$$S = \{x_n/n \in \mathbb{N}\} \cup \{x_0\}$$

Dann heißt  $\tilde{\mathfrak{S}}$  die Kategorie der folgenbestimmten Räume.

Weil jedes  $S \in \mathfrak{S}$  kompakt ist, gilt  $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{K}$  und also  $\tilde{\mathfrak{S}} \subseteq \tilde{\mathfrak{K}}$ .

Man definiert nun:

$X$  Fréchet-Raum  $\iff (M \subseteq X$  und  $x \in \bar{M} \Rightarrow$  Es existiert eine Folge in  $M$ , die gegen  $x$  konvergiert)

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i)  $X$  ist Fréchet-Raum

(ii)  $X$  ist erblicher  $\mathfrak{S}$ -erzeugter Raum

(iii)  $X$  hat  $\mathfrak{S}$ -Charakteristik  $\leq 1$ .

Beweis: Wegen 1.4.6 folgt (i)  $\iff$  (iii)

Deshalb hat auch jede Teilmenge von  $X$   $\mathfrak{C}$ -Charakteristik  $\leq 1$ , also folgt (i)  $\Rightarrow$  (ii).

Wegen 1.4.15 ist (ii)  $\Rightarrow$  (iii) nur eine Abschwächung.

Für die Kategorie der folgenbestimmten Räume läßt sich also ein Erzeugendensystem angeben, so daß jeder Raum mit Charakteristik  $\leq 1$  schon erblich ist.

1.4.22 Bemerkung: Abschließend sollen ohne Beweis Ergebnisse von Arhangel'skij/Franklin über den Wertevorrat der  $\mathfrak{C}$ - und  $\mathfrak{R}$ -Charakteristik zitiert werden:

(i) Die  $\mathfrak{C}$ -Charakteristik ist stets kleiner oder gleich als die erste überabzählbare Ordinalzahl  $\omega_1$ .

(ii) Zu jeder Ordinalzahl  $\alpha \leq \omega_1$  existiert ein hausdorffscher Raum  $X_\alpha$  mit der Eigenschaft:

$$\mathfrak{C}\text{-Charakteristik von } X_\alpha = \mathfrak{R}\text{-Charakteristik von } X_\alpha = \alpha.$$

## 2. EXPONENTIALKATEGORIEN

### 2.1 Eigenschaften

2.1.1 Definition:  $\mathfrak{C}$  sei volle Unterkategorie von  $Top$  und enthalte den einpunktigen Raum.  $\mathfrak{C}$  besitze ein Produkt  $\Pi$ , so daß für den Vergißfunktork  $V$  gilt:  $V(X \Pi Y) = X \times Y$  für alle  $X, Y \in \mathfrak{C}$ .

$\mathfrak{C}$  heißt Exponentialkategorie  $\iff$  Für alle  $X \in \mathfrak{C}$  hat der Funktor  $\cdot \Pi X : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{C}$  einen Coadjungierten.

Der folgende Satz ist von Damerow übernommen:

2.1.2 Satz:  $\mathfrak{C}$  sei Exponentialkategorie,  $X, Y, Z \in \mathfrak{C}$ . Dann existiert ein bis auf natürliche Isomorphie eindeutig bestimmter Funktor  $T : \mathfrak{C} \times \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{C}$  mit

(i)  $V \circ T = Mor_{\mathfrak{C}}$

(ii) Es gibt einen in allen drei Variablen natürlichen Isomorphismus

$$\varphi : Mor_{\mathfrak{C}}(X \Pi Y, Z) \rightarrow Mor_{\mathfrak{C}}(X, T(Y, Z))$$

$T$  topologisiert die Abbildungsmengen also in kanonischer Weise.

Beweis: nach Voraussetzung gibt es einen in  $X$  und  $Z$  natürlichen Isomorphismus

$$\varphi : Mor_{\mathfrak{C}}(X \Pi Y, Z) \rightarrow Mor_{\mathfrak{C}}(X, F_Y(Z))$$

Setzt man nun für  $X$  den einpunktigen Raum, so ergibt sich, daß man oBdA

$$Mor_{\mathfrak{C}}(Y, Z) = V \circ F_Y(Z)$$

annehmen kann.

(i) Für jedes  $Z \in \mathfrak{C}$  soll zunächst ein kontravarianter Funktor  $G_Z : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{C}$  definiert werden, setze

$$G_Z(Y) = F_Y(Z)$$

Sei nun  $f : Y' \rightarrow Y$  stetig, dann ist

$$\eta(f) = \varphi \circ \text{Mor}_{\mathfrak{C}}(\cdot \amalg f, id) \circ \varphi^{-1}$$

eine natürliche Transformation

$$\eta(f) : \text{Mor}(\cdot, F_Y(Z)) \rightarrow \text{Mor}(\cdot, F_{Y'}(Z))$$

Dann setze

$$G_Z(f) = \eta(f)(id_{F_Y(Z)})$$

Daraus folgt mit dem Yoneda-Lemma:

$$\eta(f) = \text{Mor}_{\mathfrak{C}}(\cdot, G_Z(f))$$

Man überlegt sich dann leicht, daß  $G_Z$  ein Funktor ist.

Weiter definiert man:  $T(Y, Z) = F_Y(Z)$  und

$$T(f, g) = G_{Z'}(f) \circ F_Y(g) \quad \text{für } f : Y' \rightarrow Y \text{ und } g : Z \rightarrow Z'$$

Man kann dann nachrechnen, daß  $T$  ein Funktor ist.

(ii)  $\varphi$  ist auch in  $Y$  natürlich:

Sei  $f : Y' \rightarrow Y$  gegeben, dann ist

$$\begin{aligned} \text{Mor}(id_X, T(f, id_Z)) &= \text{Mor}(id_X, G_Z(f)) \\ &= \eta_X(f) \end{aligned}$$

Nach Definition von  $\eta(f)$  ist dann

$$\begin{array}{ccc} \text{Mor}(X \amalg Y, Z) & \xrightarrow{\varphi} & \text{Mor}(X, T(Y, Z)) \\ \text{Mor}(id \amalg f, id) \downarrow & & \downarrow \text{Mor}(id, T(f, id)) \\ \text{Mor}(X \amalg Y', Z) & \xrightarrow{\varphi} & \text{Mor}(X, T(Y', Z)) \end{array}$$

kommutativ, also  $\varphi$  in allen drei Variablen natürlich.

(iii) Sei nun  $T'$  ein zweiter solcher Funktor mit der natürlichen Isomorphie  $\varphi'$ .

Dann ist

$$\varphi' \circ \varphi^{-1} : \text{Mor}(X, T(Y, Z)) \rightarrow \text{Mor}(X, T'(Y, Z))$$

eine natürliche Isomorphie. Ihr Bild unter der Yoneda-Abbildung liefert eine natürliche Isomorphie zwischen  $T(Y, Z)$  und  $T'(Y, Z)$ .

(iv) Die Funktorgleichung  $V \circ T = \text{Mor}_{\mathfrak{C}}$  gilt auch auf Morphismen: Das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{Mor}(*, T(Y, Z)) & \xrightarrow{\varphi} & \text{Mor}(* \amalg Y, Z) & \longrightarrow & \text{Mor}(Y, Z) = VT(Y, Z) \\
 \text{Mor}(id, T(f, g)) \downarrow & & \text{Mor}(id \amalg f, g) \downarrow & & \text{Mor}(f, g) \downarrow \\
 \text{Mor}(*, T(Y', Z')) & \xrightarrow{\varphi} & \text{Mor}(* \amalg Y', Z') & \longrightarrow & \text{Mor}(Y', Z') = VT(Y', Z')
 \end{array}$$

Weil die waagerechten Abbildungen natürliche Isomorphismen sind, folgt  $\text{Mor}(f, g) = VT(f, g)$ .

Nachdem die Existenz einer in allen drei Variablen natürlichen Isomorphie gezeigt ist, kann man nun sogar zeigen:

2.1.3 Satz:  $\mathfrak{C}$  sei Exponentialkategorie. Dann ist

$$\alpha : \text{Mor}_{\mathfrak{C}}(X \amalg Y, Z) \rightarrow \text{Mor}_{\mathfrak{C}}(X, T(Y, Z))$$

$$(f)(x)(y) = f(x, y)$$

natürliche Isomorphie.

Beweis: Sei  $f : X \amalg Y \rightarrow Z$  stetig. Weil der einpunktige Raum  $*$  in  $\mathfrak{C}$  liegt, besagt 2.1.2

(ii) insbesondere, daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Mor}(X \amalg Y, Z) & \xrightarrow{\varphi} & \text{Mor}(X, T(Y, Z)) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \text{Mor}(\{x\} \amalg \{y\}, Z) & \xrightarrow{\varphi} & \text{Mor}(\{x\}, T(\{y\}, Z)) \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 \text{Mor}(\{x\} \amalg \{y\}, \{f(x, y)\}) & \xrightarrow{\varphi=\alpha} & \text{Mor}(\{x\}, T(\{y\}, \{f(x, y)\}))
 \end{array}$$

Daraus folgt die Behauptung.

2.1.4 Lemma:  $\mathfrak{C}$  Exponentialkategorie,  $X, Y \in \mathfrak{C}$

Dann ist die Evaluation  $\varepsilon : T(X, Y) \amalg X \rightarrow Y$

$$\varepsilon(f, x) = f(x)$$

stetig.

Beweis:  $id : T(X, Y) \rightarrow T(X, Y)$  ist stetig und es ist  $\varepsilon = \alpha^{-1}(id)$

Der folgende Satz rechtfertigt nun die Bezeichnung „Exponentialkategorie“:

2.1.5 Satz:  $\mathfrak{C}$  Exponentialkategorie,  $X, Y, Z \in \mathfrak{C}$

Dann ist  $\alpha : T(X \amalg Y, Z) \rightarrow T(X, T(Y, Z))$

$$\alpha(f)(x)(y) = f(x, y)$$

ein natürlicher Homöomorphismus.

Beweis: (i)  $\alpha$  ist stetig:

$\varepsilon : T(X \amalg Y, Z) \amalg X \amalg Y \rightarrow Z$

$(f, x, y) \mapsto f(x, y)$  ist stetig nach 2.1.4

Wegen 2.1.3 ist dann auch

$T(X \amalg Y, Z) \amalg X \rightarrow T(Y, Z)$

$(f, x) \mapsto f(x, \cdot)$

stetig, erneute Anwendung von 2.1.3 liefert die Stetigkeit von  $\alpha$ :

$T(X \amalg Y, Z) \rightarrow T(X, T(Y, Z))$

$f \mapsto f(\cdot)(\cdot)$

(ii)  $\alpha^{-1}$  ist stetig:

Wegen 2.1.4 ist die folgende Zusammensetzung stetig:

$$\varepsilon \circ (\varepsilon' \amalg id) : T(X, T(Y, Z)) \amalg X \amalg Y \rightarrow T(Y, Z) \amalg Y \rightarrow Z$$

$$(\alpha(f), x, y) \mapsto (\alpha(f)(x), y) \mapsto f(x, y)$$

Nach 2.1.3 ist dann auch

$$T(X, T(Y, Z)) \rightarrow T(X \amalg Y, Z)$$

$$\alpha(f) \mapsto ((x, y) \mapsto f(x, y))$$

stetig. Dies ist aber  $\alpha^{-1}$ .

2.1.6 Satz:  $\mathfrak{C}$  Exponentialkategorie,  $X \in \mathfrak{C}$ . Dann gilt:

- (i)  $T(X, \cdot) : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{C}$  erhält Limites
- (ii)  $\cdot \amalg X : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{C}$  erhält Colimites
- (iii)  $T(\cdot, X) : \mathfrak{C}^d \rightarrow \mathfrak{C}$  erhält Limites ( $\mathfrak{C}^d$  ist die duale Kategorie)

Beweis: (i) und (ii): wegen 2.1.5 klar

(iii): Sei  $X, Y, Z \in \mathfrak{C}$ , sei  $s : Z \amalg Y \rightarrow Y \amalg Z$  der naheliegende Homöomorphismus.

Dann ist die folgende Zusammensetzung

$$\begin{array}{ccc} \text{Mor}_{\mathfrak{C}}(Z, T(Y, X)) & \xrightarrow{\alpha^{-1}} & \text{Mor}_{\mathfrak{C}}(Z \amalg Y, X) \xrightarrow{\text{Mor}_{\mathfrak{C}}(s, id)} \text{Mor}(Y \amalg Z, X) \\ & & \downarrow \alpha \\ & & \text{Mor}(Y, T(Z, X)) \end{array}$$

ein natürlicher Isomorphismus, dann gibt es auch einen natürlichen Isomorphismus

$$\text{Mor}_{\mathfrak{C}^d}(T(Y, X), Z) \rightarrow \text{Mor}_{\mathfrak{C}}(Y, T(Z, X))$$

d. h. aber der kovariante Funktor  $T(\cdot, X) : \mathfrak{C}^d \rightarrow \mathfrak{C}$  hat einen Adjungierten. Daraus folgt die Behauptung.

2.1.7 Korollar:  $\mathfrak{C}$  Exponentialkategorie,  $f : X \rightarrow X'$  und  $g : Y \rightarrow Y'$  seien Identifizierungen. Dann ist auch  $f \amalg g : X \amalg Y \rightarrow X' \amalg Y'$  Identifizierung.

Beweis: Nach 2.1.6 (ii) sind  $f \amalg id_Y$  und  $id_{X'} \amalg g$  Identifizierungen, also auch die Zusammensetzung.

2.1.8 Korollar:  $\mathfrak{C}$  Exponentialkategorie,  $X, Y, Z \in \mathfrak{C}$

$$T(X, Y \amalg Z) = T(X, Y) \amalg T(X, Z)$$

Beweis: folgt aus 2.1.6 (i)

2.1.9 Satz:  $\mathfrak{C}$  Exponentialkategorie,  $X, Y, Z \in \mathfrak{C}$

Die Verknüpfung von Abbildungen

$$\begin{aligned} \circ : T(Y, Z) \amalg T(X, Y) &\rightarrow T(X, Z) \\ (g, f) &\mapsto g \circ f \end{aligned}$$

ist stetig.

Beweis: Wegen 2.1.4 ist

$$T(Y, Z) \amalg T(X, Y) \amalg X \xrightarrow{id \amalg \varepsilon} T(Y, Z) \amalg Y \xrightarrow{\varepsilon'} Z$$

stetig, wegen 2.1.5 ist dann auch

$$\alpha(\varepsilon' \circ (id \amalg \varepsilon)) : T(Y, Z) \amalg T(X, Y) \rightarrow T(X, Z)$$

stetig und es ist

$$\alpha(\varepsilon' \circ (id \amalg \varepsilon))(g, f) = g \circ f$$

Für weitere Aussagen benötigt man mehr Informationen über  $\mathfrak{C}$ . Im folgenden Abschnitt wird nun eine spezielle Klasse von Exponentialkategorien angegeben.



## 2.2. Konstruktion von coreflektiven Exponentialkategorien

2.2.1 Bezeichnungen: Für  $X, Y \in Top$  bezeichne  $Stet(X, Y)$  die Menge der stetigen Abbildungen von  $X$  nach  $Y$ , versehen mit einer Topologie (nicht notwendig der quasikompakt-offenen).

$\mathfrak{B}$  bezeichne dann die volle Unterkategorie derjenigen Objekte  $B \in Top$ , für die für alle  $X, Y \in Top$  ein natürlicher Homöomorphismus  $\alpha : Stet(X \times B, Y) \rightarrow Stet(X, Stet(B, Y))$  existiert. ( $\mathfrak{B}$  hängt also offenbar von der vorgegebenen Funktionenraumtopologie ab).

2.2.2 Lemma:  $\mathfrak{B}$  ist abgeschlossen unter der Bildung endlicher topologischer Produkte.

Beweis: ergibt sich aus

$$\begin{array}{ccc}
 Stet(X \times B \times B', Y) & \longrightarrow & Stet(X \times B, Stet(B', Y)) \\
 & & \downarrow \\
 & & Stet(X, Stet(B, Stet(B', Y))) \\
 & & \downarrow \\
 & & Stet(X, Stet(B \times B', Y))
 \end{array}$$

Der folgende Satz verschärft ein Ergebnis von Damerow (vgl. auch Vogt):

2.2.3 Satz:  $\mathfrak{A}$  sei volle Unterkategorie von  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{A}$  sei abgeschlossen unter endlichen Produkten in  $Top$ . Dann gilt:

- (i)  $X \times B = X \amalg B$  für alle  $X \in \tilde{\mathfrak{A}}, B \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$
- (ii)  $\tilde{\mathfrak{A}}$  ist Exponentialkategorie
- (iii)  $C Stet(Y, Z) = T(Y, Z)$  für  $Y, Z \in \tilde{\mathfrak{A}}$

Beweis: (i): Nach 1.2.16 existieren  $\mathfrak{A}$ -Systeme  $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$  für  $X, B$ , so daß

$$C(X \times B) = \varinjlim_{\mathfrak{M}} \varinjlim_{\mathfrak{N}} (A_i \times A'_j)$$

Nach 1.2.10 gilt:

$$X \times B = \left( \varinjlim_{\mathfrak{M}} A_i \right) \times B$$

Wegen  $B \in \mathfrak{B}$  folgt:

$$= \lim_{\overrightarrow{\mathfrak{A}}} (A_i \times B)$$

Erneute Anwendung von 1.2.10 liefert:

$$= \lim_{\overrightarrow{\mathfrak{A}}} (A_i \times \lim_{\overrightarrow{\mathfrak{A}}} A'_j)$$

Wegen  $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$  folgt:

$$= \lim_{\overrightarrow{\mathfrak{A}}} \lim_{\overrightarrow{\mathfrak{A}}} (A_i \times A'_j)$$

$$= C(X \times Y)$$

$$= X \amalg Y$$

(ii): Seien  $X, Y, Z \in \tilde{\mathfrak{A}}$ . Nach 1.2.16 existieren  $\mathfrak{A}$ -Systeme  $\mathfrak{M} = \{\varphi_j/\varphi_j : A'_j \rightarrow X, j \in J\}$  und  $\mathfrak{N} = \{\psi_i/\psi_i : A_i \rightarrow Y, i \in I\}$  von  $X$  bzw.  $Y$ , so daß

$$X \amalg Y = \lim_{\overrightarrow{\mathfrak{M}}} \lim_{\overrightarrow{\mathfrak{N}}} (A'_j \times A_i)$$

Nach 1.1.1 existiert eine natürliche Bijektion

$$\text{Mor}_{\tilde{\mathfrak{A}}}(X \amalg Y, Z) \simeq \text{Stet}(\lim_{\overrightarrow{\mathfrak{M}}} \lim_{\overrightarrow{\mathfrak{N}}} (A'_j \times A_i), Z)$$

Wegen  $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$  folgt weiter

$$\simeq \text{Stet}(\lim_{\overrightarrow{\mathfrak{A}}} (\lim_{\overrightarrow{\mathfrak{A}}} A'_j \times A_i), Z)$$

$$\simeq \lim_{\overleftarrow{\mathfrak{A}}} \text{Stet}(X \times A_i, Z)$$

Mit  $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$  ergibt sich

$$\simeq \lim_{\overleftarrow{\mathfrak{A}}} \text{Stet}(X, \text{Stet}(A_i, Z))$$

$$\simeq \text{Stet}(X, \lim_{\leftarrow \mathfrak{A}} \text{Stet}(A_i, Z))$$

Aus 1.1.2 folgt schließlich

$$\simeq \text{Mor}_{\tilde{\mathfrak{A}}}(X, C \lim_{\leftarrow} \text{Stet}(A_i, Z))$$

Nach der Definition der Exponentialkategorie ergibt sich daraus die Behauptung.

(iii): Sei  $A \in \mathfrak{A}$ . Wegen  $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$  und 1.1.2 ist

$$\text{Mor}_{\tilde{\mathfrak{A}}}(X \times A, Z) \longrightarrow \text{Mor}_{\tilde{\mathfrak{A}}}(X, C \text{Stet}(A, Z))$$

Adjunktionsisomorphismus, wegen 2.2.3 (i) ist  $X \times A = X \amalg A$ , mit 2.1.2 (Eindeutigkeit) ergibt sich daher

$$T(A, Z) = C \text{Stet}(A, Z)$$

Der Beweis von (ii) zeigt, daß

$$T(Y, Z) = C \lim_{\leftarrow} \text{Stet}(A_i, Z)$$

Mit 1.1.5 (ii) folgt

$$= C \lim_{\leftarrow} C \text{Stet}(A_i, Z)$$

Aus 2.1.6 (iii) ergibt sich schließlich

$$= C \text{Stet}(\lim_{\rightarrow} A_i, Z)$$

$$= C \text{Stet}(Y, Z)$$

## 2.3 „Day-Kelley“-Räume

Dieser Abschnitt stützt sich auf eine Arbeit von B. J. Day und G. M. Kelley. Die Autoren topologisieren die Menge der offenen Mengen eines Raumes und formulieren mit Hilfe dieser Topologie Aussagen über den ursprünglichen Raum.

2.3.1 Definition: Sei  $(Z, \mathfrak{Z})$  ein topologischer Raum. In der Potenzmenge  $\mathfrak{P}(\mathfrak{Z})$  wird eine Teilmenge  $\mathfrak{H}$  ausgezeichnet:

$H \in \mathfrak{H} \iff$  (1)  $V, W \in \mathfrak{Z}$  mit  $V \subseteq W$  und  $V \in H \Rightarrow W \in H$

und

(2)  $V_i \in \mathfrak{Z}$  für  $i \in I$  und  $\bigcup_{i \in I} V_i \in H \Rightarrow$  Es existieren endlich viele Indizes

$$i_1 \dots i_n \text{ mit } \bigcup_{k=1}^n V_{i_k} \in H$$

2.3.2 Lemma:  $(\mathfrak{Z}, \mathfrak{H})$  ist ein topologischer Raum

Beweis: (i)  $\emptyset \in \mathfrak{H}$  trivial

(ii):  $\mathfrak{Z} \in \mathfrak{H}$  trivial

(iii): beliebige Vereinigungen: Seien  $H_\lambda \in \mathfrak{H}$  für  $\lambda \in \Lambda$

(1) Sei  $V \in \bigcup H_\lambda$  und sei  $W \in \mathfrak{Z}$  mit  $V \subseteq W$ .

Dann ist  $V \in H_{\lambda_1}$ , also  $W \in H_{\lambda_1}$ , also  $W \in \bigcup H_\lambda$

(2) Seien  $V_i \in \mathfrak{Z}$  und  $\bigcup V_i \in \bigcup H_\lambda$

also  $\bigcup V_i \in H_{\lambda_1}$ , also  $\bigcup_{k=1}^n V_{i_k} \in H_{\lambda_1}$

also  $\bigcup_{k=1}^n V_{i_k} \in \bigcup H_\lambda$

(iv) endliche Durchschnitte: Seien  $H_\mu \in \mathfrak{H}$  für  $1 \leq \mu \leq m$ .

(1) Sei  $V \in \bigcap H_\mu$  und  $V \subseteq W$ .

Dann folgt  $W \in \bigcap H_\mu$

(2)  $\bigcup V_i \in \bigcap H_\mu \Rightarrow \bigcup V_i \in H_\mu$  für  $1 \leq \mu \leq m$ ,

$\Rightarrow \bigcup_{k_\mu=1}^{n_\mu} V_{i_{k_\mu}} \in H_\mu$  für  $1 \leq \mu \leq m$ ,

$\Rightarrow \bigcup_{\mu=1}^m \bigcup_{k_\mu=1}^{n_\mu} V_{i_{k_\mu}} \supseteq \bigcup_{k_\mu=1}^{n_\mu} V_{i_{k_\mu}}$  für  $1 \leq \mu \leq m$ ,

Wegen (1) folgt daher

$$\bigcup_{\mu=1}^m \bigcup_{k_\mu=1}^{n_\mu} V_{i_{k_\mu}} \in H_\mu \quad \text{für } 1 \leq \mu \leq m$$

also liegt diese Menge auch im Durchschnitt der  $H_\mu$ .

2.3.3 Definition:  $Z \in Top$

$Z$  heißt „Day-Kelley“-Raum (DK-Raum)  $\iff$  Für alle Identifizierungen  $f : X \rightarrow Y$  ist  $f \times id : X \times Z \rightarrow Y \times Z$  eine Identifizierung.

2.3.4 Satz:  $Z \in Top$

$Z$  DK-Raum  $\iff$  Zu jedem  $z \in Z$  und jeder offenen Umgebung  $W$  von  $z$  existiert  $H \in \mathfrak{H}$  mit  $W \in H$ , so daß  $\bigcap_{V \in H} V$  Umgebung von  $z$  in  $Z$ .

Beweis: s. Day/Kelley

2.3.5 Definition:  $Z \in Top$

$Z$  heißt lokal-quasikompakt  $\iff$  Jeder Punkt in  $Z$  besitzt eine Umgebungsbasis aus quasikompakten Mengen.

$Z$  heißt regulär  $\iff$  Jeder Punkt besitzt eine Umgebungsbasis aus abgeschlossenen Mengen.

2.3.6 Satz:

- (i)  $Z$  lokal-quasikompakt  $\Rightarrow Z$  DK-Raum
- (ii)  $Z$  regulärer DK-Raum  $\Rightarrow Z$  lokal-quasikompakt
- (iii)  $Z$  hausdorffscher DK-Raum  $\Rightarrow Z$  lokalkompakt

Beweis: Der Beweis erfolgt jeweils mit 2.3.4

(i)  $z \in Z$ ,  $W$  offene Umgebung von  $z$ , gegeben.

Dann existiert eine quasikompakte Umgebung  $Q$  von  $z$  mit  $Q \subseteq W$ .

Setze  $M = \{V \in \mathfrak{H} / Q \subseteq V\}$

Dann ist  $H \in \mathfrak{H}$ ,  $W \in H$  und  $\bigcap_{V \in H} V$  ist Umgebung von  $z$ .

(ii):  $z, W$  gegeben. Dann gibt es  $H \in \mathfrak{H}$  mit  $W \in H$ , so daß  $\bigcap_{V \in H} V$  Umgebung von  $z$  ist.

Weil  $Z$  regulär ist, umfaßt  $\bigcap V$  eine abgeschlossene Umgebung  $A$ .

Wegen  $A \subseteq W$  genügt es zu zeigen, daß  $A$  quasikompakt.

Sei  $(U_i)_{i \in I}$  offene Überdeckung von  $A$ .

Dann ist  $(U_i)$  zusammen mit  $W \cap \mathfrak{C}A$  offene Überdeckung von  $W$ .

Wegen  $W \in H$  folgt aus 2.3.1

$$(W \cap \mathfrak{C}A) \cup \bigcup_{i \in I} U_i \in H$$

Dann liegt schon eine endliche Vereinigung in  $H$ , bei der  $W \cap \mathfrak{C}A$  eventuell nicht auftritt;

2.3.1 (i) folgt aber

$$(W \cap \mathfrak{C}A) \cup \bigcup_{k=1}^n U_{i_k} \in H$$

Weil  $A$  im Durchschnitt aller Elemente aus  $H$  enthalten ist, ergibt sich nun

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^n U_{i_k}$$

(iii): Wegen (ii) genügt es zu zeigen, daß  $Z$  regulär ist.

Sei  $z, W$  gegeben. Dazu gibt es  $H \in \mathfrak{H}$  gemäß 2.3.4

Dann genügt es zu zeigen, daß

$$\overline{\bigcap_{V \in H} V} \subseteq W$$

Sei nun  $x \in Z - W$ .  $Z$  hausdorffsch, also existieren zu jedem  $w \in W$  offene Umgebungen

$U_w$  von  $w$  und  $O_w$  von  $x$  mit  $U_w \cap O_w = \emptyset$ .

Wegen  $\bigcup_{w \in W} U_w \supseteq W$  und  $W \in H$  folgt, daß

$$\bigcup_{k=1}^n U_{w_k} \in H$$

gilt. Also folgt

$$\bigcap_{V \in H} V \subseteq \bigcup_{k=1}^n U_{w_k}$$

Wegen  $x \in \bigcap_{k=1}^n O_{w_k}$  und  $\bigcap_{k=1}^n O_{w_k} \cap \bigcup_{k=1}^n U_{w_k} = \emptyset$  folgt nun

$$x \notin \overline{\bigcap_{V \in H} V}$$

Daraus ergibt sich die Behauptung.

Aus den bisher referierten Ergebnissen von Day/Kelley folgt nun unmittelbar eine schärfere Bestimmung der Kategorie  $\mathfrak{B}$  (vgl. 2.2.1) als es mit den Ergebnissen von Fox (Theorem 3) bzw. Arens (vgl. auch Dugundji S. 260) möglich ist (nämlich: Jeder vollständig reguläre Raum aus  $\mathfrak{B}$  ist schon lokalkompakt).

2.3.7 Satz:

- (i)  $X \in \mathfrak{B} \rightarrow X$  DK-Raum
- (ii)  $X \in \mathfrak{B}$ , hausdorffsch  $\Rightarrow X$  lokalkompakt
- (iii)  $X \in \mathfrak{B}$ ,  $X$  regulär  $\Rightarrow X$  lokal-quasikompakt

Beweis: (i): Der Funktor  $\cdot \times X$  hat einen Coadjungierten

(ii) und (iii): wegen 2.3.6 trivial

2.3.8 Bemerkung: Die Untersuchungen von Arens/Dugundji (Theorem 4.21) sowie Garcia ((1), Theorem 3.14 und Korollar 3.8) haben ergeben, daß unter den set-open-Topologien diejenigen Topologien eine ausgezeichnete Rolle spielen, bei denen alle „sets“ quasikompakt sind. Man kann nun diese Ergebnisse unpräzise, aber plausibel ergänzen: Obwohl 2.3.6 keine „genau-dann“-Aussage macht, ist kein DK-Raum bekannt, der nicht schon lokal-quasikompakt ist (vgl. Day/Kelley). Für die lokal-quasikompakten Räume gilt das Exponentialgesetz in *Top* bekanntlich schon dann, wenn die Funktionenräume die quasikompakt-offene Topologie tragen. Satz 2.3.7 zeigt also, daß es keine oder doch nur eine „geringe“ Verkleinerung der Kategorie  $\mathfrak{B}$  bedeutet, wenn man in *Top* die Funktionenräume mit der quasikompakt-offenen Topologie versieht. Dies relativiert in gewisser Weise Ergebnisse von Noble (2) über „Graphentopologien“.

## 2.4. Exponentialkategorien im „Verband“ der corefektiven Unterkategorien von $Top$

2.4.1 Satz:  $Stet(X, Y)$  trage die quasikompakt-offene Topologie. Dann sind die folgenden corefektiven Unterkategorien von  $Top$  Exponentialkategorien mit  $C Stet(X, Y)$  als Funktionenraumtopologie:

- (i) Die diskreten Räume
- (ii) Die indiskret-erzeugten Räume
- (iii) Die endlich-erzeugten Räume
- (iv) Die folgenbestimmten Räume
- (v) Die bogenzusammenhängend-kompakt - erzeugten Räume
- (vi) Die zusammenhängend-kompakt - erzeugten Räume
- (vii) Die kompakt-erzeugten Räume
- (viii) Die quasikompakt-regulär - erzeugten Räume
- (ix) Die lokalquasikompakt-erzeugten Räume
- (x) Die Kategorie  $\mathfrak{B}$

Es gelten folgende Inklusionsbeziehungen:

$$(i) \subseteq (ii) \subseteq (iii) \subseteq \begin{matrix} (v) \subseteq (vi) \\ (iv) \end{matrix} \subseteq (vii) \subseteq (viii) \subseteq (ix) \subseteq (x)$$

Beweis: Der Beweis beruht jeweils auf 2.2.3

(i):  $\mathfrak{A} = \{*\}$  ist Erzeugendensystem (vgl. 1.1.11)

(ii), (iii), (v), (vi), (vii), (viii), (ix): Im Namen ist jeweils schon ein Erzeugendensystem angegeben, das unter endlichen topologischen Produkten abgeschlossen ist.

Ferner enthält jedes dieser Erzeugendensysteme nur lokalquasikompakte Räume, diese liegen aber nach Arens/Dugundji (4.2.1 zusammen mit 4.7) in  $\mathfrak{B}$ .

(iv): Wähle für  $\mathfrak{A}$  alle endlichen cartesischen Produkte von Räumen aus  $\mathfrak{C}$  (vgl. 1.4.21). Dann sind die Objekte aus  $\mathfrak{A}$  kompakt, also  $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ .

Jedes Objekt aus  $\mathfrak{A}$  ist Fréchet-Raum, also  $\mathfrak{C}$ -erzeugt. Dann ist  $\mathfrak{A}$  auch ein Erzeugendensystem von  $\tilde{\mathfrak{C}}$ .

(x) wegen 2.2.2 klar

Die angegebenen Inklusionen ergeben sich teils aus Herrlich (1) (S. 148–152) bzw. sind größtenteils trivial, weil offensichtliche Inklusionen zwischen den Erzeugendensystemen vorliegen.

Daß die unter (vii) und (viii) angegebenen Kategorien übereinstimmen, wird unter 3.3 gezeigt.



2.4.2 Satz:  $\mathfrak{L}, \mathfrak{D}$  seien coreflektive Unterkategorien von  $Top$  mit Coreflexionsfunktoren  $C, D$ .  $\mathfrak{D}$  sei Exponentialkategorie mit Funktionenraumfunktorktor  $T_{\mathfrak{D}}(\cdot, \cdot, \cdot)$ . Dann gilt:

$$C(X \times Y) = D(X \times Y) \text{ für alle } X, Y \in \mathfrak{L} \iff \begin{aligned} & \text{(i) } \mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{D} \\ & \text{und (ii) } \mathfrak{L} \text{ Exponentialkategorie} \\ & \text{und (iii) } T_{\mathfrak{L}} = CT_{\mathfrak{D}} \end{aligned}$$

Beweis: „ $\Rightarrow$ “: Sei  $X \in \mathfrak{L}$ , dann folgt

$$C(X \times *) = D(X \times *)$$

also  $X = DX$ , d. h. aber  $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{D}$ .

Seien nun  $X, Y, Z \in \mathfrak{L}$ , dann gilt:

$$\begin{aligned} Mor_{\mathfrak{L}}(C(X \times Y), Z) &= Mor_{\mathfrak{D}}(D(X \times Y), Z) \simeq Mor_{\mathfrak{D}}(X, T_{\mathfrak{D}}(Y, Z)) \\ &\simeq Mor_{\mathfrak{L}}(X, CT_{\mathfrak{D}}(Y, Z)) \end{aligned}$$

also ist  $\mathfrak{L}$  Exponentialkategorie.

Wegen der Eindeutigkeit (Satz 2.1.2) folgt  $T_{\mathfrak{L}} = CT_{\mathfrak{D}}$ .

„ $\Leftarrow$ “: Seien  $X, Y, Z \in \mathfrak{L}$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} Mor_{\mathfrak{L}}(C(X \times Y), Z) &\simeq Mor_{\mathfrak{L}}(X, T_{\mathfrak{L}}(Y, Z)) \\ &\simeq Mor_{\mathfrak{L}}(X, CT_{\mathfrak{D}}(Y, Z)) \\ &\simeq Mor_{\mathfrak{D}}(X, T_{\mathfrak{D}}(Y, Z)) \quad (\text{wegen 1.1.1 und 1.1.3}) \\ &\simeq Mor_{\mathfrak{D}}(D(X \times Y), Z) \end{aligned}$$

Setze  $Z = C(X \times Y)$ , dann ist  $id : D(X \times Y) \rightarrow C(X \times Y)$  stetig, aber  $C(X \times Y)$  hat wegen  $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{D}$  feinere Topologie als  $D(X \times Y)$  (wegen 1.2.9), also folgt die Behauptung.

2.4.3 Bemerkung: Dieser Satz läßt nun merkwürdige (wegen 1.2.20) Folgerungen zu, wie beispielsweise:

Wenn das cartesische Produkt zweier folgenbestimmter Räume kompakt-erzeugt ist, so ist es schon folgenbestimmt. (Beweis folgt unmittelbar aus 2.4.1 und 2.4.2).

Weiterhin lassen sich mit 2.4.2 gewisse Aussagen über die Größe von coreflektiven Exponentialkategorien mit „schöner“ Funktionenraumtopologie machen. Aus 2.4.2 folgt nämlich unmittelbar z. B.:

Sei  $\mathfrak{L}$  coreflektive Exponentialkategorie mit  $C Stet$  als Funktionenraumtopologie,  $X, Y \in \mathfrak{L}$ ,  $X \times Y \notin \mathfrak{L}$ . Dann gibt es keine coreflektive Exponentialkategorie  $\mathfrak{D}$  mit  $X \times Y \in \mathfrak{D}$  und  $D Stet$  als Funktionenraumtopologie.

Eine bessere Schranke für die Größe einer coreflectiven Exponentialkategorie läßt sich wie folgt angeben:

2.4.4 Satz: Es gibt keine coreflective Exponentialkategorie, die alle quasikompakten Räume umfaßt.

Beweis: Betrachte die Ein-Punkt-Kompaktifizierung  $K$  von  $\mathbb{N} \times [0, 1]$  ( $\mathbb{N}$  diskret) und die Ein-Punkt-Kompaktifizierung  $\mathbb{Q}^*$  der rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$ .

$\mathbb{N} \times [0, 1]$  ist lokalkompakt; wie schon in 1.2.20 bemerkt, ist  $\mathbb{Q}$  kompakt-erzeugt. Nach 2.2.3. (i) ist dann  $\mathbb{N} \times [0, 1] \times \mathbb{Q}$  kompakt-erzeugt.

In  $K$  werde  $\mathbb{N} \times \{0\}$  zu einem Punkt identifiziert (die Identifizierung heiße  $p$ ). Angenommen,

$$p \times id : K \times \mathbb{Q}^* \rightarrow \frac{K}{\mathbb{N} \times \{0\}} \times \mathbb{Q}^*$$

ist ebenfalls Identifizierung. Dann ist auch die Einschränkung auf ein offenes Urbild

$$p \times id|_{\mathbb{N} \times [0, 1] \times \mathbb{Q}} : \mathbb{N} \times [0, 1] \times \mathbb{Q} \rightarrow \frac{\mathbb{N} \times [0, 1]}{\mathbb{N} \times \{0\}} \times \mathbb{Q}$$

eine Identifizierung. Wegen 1.1.7 ist mit  $\mathbb{N} \times [0, 1] \times \mathbb{Q}$  auch  $\frac{\mathbb{N} \times [0, 1]}{\mathbb{N} \times \{0\}} \times \mathbb{Q}$  kompakt-erzeugt. Aber dies ist ein Widerspruch zu 1.2.20. Also ist  $p \times id$  keine Identifizierung.

Angenommen, es gibt eine coreflective Exponentialkategorie  $\mathfrak{C}$  mit Coreflexionsfunktork  $C$ , die alle quasikompakten Räume umfaßt. Insbesondere gilt dann

$$C(K \times \mathbb{Q}^*) = K \times \mathbb{Q}^*$$

$$C\left(\frac{K}{\mathbb{N} \times \{0\}} \times \mathbb{Q}^*\right) = \frac{K}{\mathbb{N} \times \{0\}} \times \mathbb{Q}^*$$

Aber dann ist  $C(p \times id) = p \times id$  im Widerspruch zu 2.1.7 keine Identifizierung.

Wegen 2.2.3 besagt dieser Satz also insbesondere, daß nicht alle quasikompakten Räume in  $\mathfrak{B}$  liegen.

Mit  $K / \mathbb{N} \times \{0\} \times \mathbb{Q}^*$  ist gleichzeitig ein quasikompakter Raum angegeben, der nicht kompakt-erzeugt ist (denn sonst müßte der offene Unterraum

$$\mathbb{N} \times [0, 1] / \mathbb{N} \times \{0\} \times \mathbb{Q}$$

wegen 3.1.6 auch kompakt-erzeugt sein). Damit wird eine Frage beantwortet, die Herrlich auf der Topologie-Konferenz in Pittsburgh 1970 stellte (vgl. Herrlich: *Categorical Topology*, in: *General Topology and its Applications*, vol. 1, No. 1, April 1971, S. 13).

## 2.5 Ergebnisse in $Top$

Mit Hilfe der Quotientendarstellung für die Objekte der coreflektiven Hülle (1.2.2) läßt sich ein recht allgemeiner Satz von Michael (3) ohne die Voraussetzung „hausdorffsch“ aussprechen (Michael verwendet „kompakt-erzeugt“ im Sinne von „quasikompakt-erzeugt“).

2.5.1 Satz:  $X_1$  und  $Y_1 \times Y_2$  seien kompakt-erzeugt,  $X_2 \in Top$ ,  $f_i : X_i \rightarrow Y_i$  Identifizierungen für  $i = 1, 2$ . Dann ist auch  $f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \rightarrow Y_1 \times Y_2$  Identifizierung. (Statt „kompakt-erzeugt“ würde es genügen zu verlangen: „aus der coreflektiven Hülle von  $\mathfrak{B}$ “).

Beweis: Wegen 1.2.2 existiert ein lokalkompaktes  $L$  und eine Identifizierung  $g : L \rightarrow X_1$ . Dann kommutiert das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
 & L \times Y_2 & \\
 id \times f_2 \nearrow & & \searrow f_1 g \times id \\
 L \times X_2 & & Y_1 \times Y_2 \\
 g \times id \searrow & & \nearrow f_1 \times f_2 \\
 & X_1 \times X_2 & 
 \end{array}$$

Wegen 1.2.19 ist  $Y_2$  kompakt-erzeugt, wegen 2.2.3 (i) ist dann auch  $L \times Y_2$  kompakt-erzeugt. Mit 2.4.1 (vii) und 2.1.7 ergibt sich weiter, daß  $f_1 g \times id$  Identifizierung ist.

Weil  $L$  lokalkompakt ist, ist auch  $id \times f_2$  Identifizierung. Also ist auch  $(f_1 \times f_2)(g \times id)$  Identifizierung.

Dann ist aber auch  $f_1 \times f_2$  eine Identifizierung.

Michael hat für diesen Satz zwei Beispiele angegeben, für die die Voraussetzungen des Satzes erfüllt sind, wie man sich leicht überlegt:

- (i)  $X_1$  kompakt-erzeugt,  $Y_2$  lokalkompakt
- (ii)  $X_1, Y_1, Y_2$  erfüllen das erste Abzählbarkeitsaxiom

2.5.2 Satz:  $\mathfrak{A}$  wie in 2.2.3,  $X, Y, Z \in Top$ . Dann gilt:

$$\alpha : Stet(C(X \times Y), Z) \rightarrow Stet(CX, Stet(CY, Z))$$

$$\alpha(f)(x)(y) = f(x, y)$$

ist Homöomorphismus.

Beweis: 2.2.3 besagt in Verbindung mit 2.1.3, daß

$$\alpha : Stet(C(X \times Y), CZ) \rightarrow Stet(CX, CStet(CY, CZ))$$

bijektiv ist. Nach Definition der Coreflexion ist dann auch

$$\alpha : Stet(C(X \times Y), Z) \rightarrow Stet(CX, Stet(CY, Z))$$

bijektiv. Wie in 2.1.4 und 2.1.5 folgt dann die Behauptung.

Die folgenden beiden Sätze werden in  $Top$  ausgesprochen, obwohl man sie natürlich auch als Sätze in  $\tilde{\mathfrak{A}}$  interpretieren kann (nach Anwendung des Corefunktors auf alle nicht in  $\tilde{\mathfrak{A}}$  gelegenen Räume).

2.5.3 Satz:  $\mathfrak{A}$  wie in 2.2.3, das Einheitsintervall  $I$  liege in  $\tilde{\mathfrak{A}}$ ,  $X \in \tilde{\mathfrak{A}}$ . Dann gilt:

- (i) Das Homotopiekonzept in  $\tilde{\mathfrak{A}}$  ist dasselbe wie in  $Top$ .
- (ii) Die Homotopieklassen stetiger Abbildungen von  $X$  nach  $Y$  sind die Bogenkomponenten von  $Stet(X, Y)$ .

Beweis: (i): nach 2.2.3 (i) ist  $X \amalg I = X \times I$  für alle  $X \in \tilde{\mathfrak{A}}$ .

(ii): Seien  $f, g : X \rightarrow Y$  stetig

$f$  homotop zu  $g \iff$  Es existiert eine Homotopie  $\lambda : I \times X \rightarrow Y$  mit  $\lambda(\cdot, 0) = f$  und  $\lambda(\cdot, 1) = g$

Wegen 2.5.2 und  $C(I \times X) = I \times X$  folgt

$$\iff \alpha(\lambda) : I \rightarrow Stet(X, Y) \text{ stetig und } \alpha(\lambda)(0) = f \text{ und } \alpha(\lambda)(1) = g$$

Wie man sieht, hat dieser Satz also zunächst nichts mit der quasikompakt-offenen Topologie zu tun (dazu vgl. Dugundji S. 319–320).

2.5.4 Satz:  $\mathfrak{A}$  wie in 2.2.3,  $I \in \tilde{\mathfrak{A}}$ ,  $X, Y, Z \in Top$ , die Funktionenräume in  $Top$  seien mit der quasikompakt-offenen Topologie versehen. Dann gilt:

- (i) Sei  $X \in \tilde{\mathfrak{A}}$ . Der Funktor  $Stet(\cdot, Z)$  führt homotope Abbildungen von  $X$  in  $Y$  wieder in homotope über.
- (ii) Sei  $Z \in \tilde{\mathfrak{A}}$ . Der Funktor  $Stet(Z, \cdot)$  führt homotope Abbildungen von  $X$  in  $Y$  wieder in homotope über.

Beweis:  $f, g : X \rightarrow Y$  seien stetig,  $\lambda$  sei Homotopie zwischen  $f$  und  $g$ .

(i): Mit  $\lambda$  ist auch

$Stet(\lambda, Z) : Stet(Y, Z) \rightarrow Stet(I \times X, Z)$  stetig (vgl. Dugundji S. 259).

Seien

$$\alpha : Stet(I \times X, Z) \rightarrow Stet(I, Stet(X, Z))$$

$$\alpha' : Stet(Stet(Y, Z) \times I, Stet(X, Z)) \rightarrow Stet(Stet(Y, Z), Stet(I, Stet(X, Z)))$$

die wegen 2.5.2 bzw. des bekannten Satzes über lokalkompakte Räume existierenden Homöomorphismen.

Sei  $h \in Stet(Y, Z)$ ,  $t \in I$ . Es ist

$$Stet(\lambda, Z)(h) = h \circ \lambda$$

$$\alpha \circ (Stet(\lambda, Z))(h) = h\lambda(\cdot)(\cdot)$$

$$\alpha'^{-1}(\alpha \circ Stet(\lambda, Z))(h, t) = h\lambda(t)(\cdot)$$

Diese Abbildung vermittelt also eine Homotopie zwischen  $Stetf, Z$  und  $Stet(g, Z)$ .

(ii):  $I$  lokalkompakt, also ist

$\alpha(\lambda) : X \rightarrow Stet(I, Y)$  stetig

dann ist auch

$$Stet(Z, \alpha(\lambda)) : Stet(Z, X) \rightarrow Stet(Z, Stet(I, Y))$$

stetig.

Man setzt nun  $Stet(Z, \alpha(\lambda))$  mit den folgenden Homöomorphismen zusammen:

$$\begin{array}{ccccc} Stet(Z, Stet(I, Y)) & \longrightarrow & Stet(Z \times I, Y) & \longrightarrow & Stet(I \times Z, Y) \\ & & & & \downarrow \text{(wegen 2.5.2)} \\ & & & & Stet(I, Stet(Z, Y)) \end{array}$$

Weil  $I$  lokalkompakt ist, erhält man nun schließlich eine stetige Abbildung  $Stet(Z, X) \times I \rightarrow Stet(Z, Y)$ , die die gesuchte Homotopie vermittelt.

### 3. DIE KATEGORIE DER KOMPAKT-ERZEUGTEN RÄUME

#### 3.1 Eigenschaften

Mit dem folgenden Lemma werden zwei wichtige Klassen topologischer Räume angegeben, die wegen 1.4.3 kompakt-erzeugt sind. Eine weitere wichtige Klasse wird in 3.2.5 (i) angegeben.

3.1.1 Lemma:  $X \in Top$ ,  $M \subseteq X$

(i)  $X$  lokalkompakt  $\Rightarrow X$  hat  $\mathfrak{K}$ -Charakteristik  $\leq 1$

(ii)  $X$  Fréchet-Raum  $\Rightarrow M$  hat  $\mathfrak{K}$ -Charakteristik  $\leq 1$

Beweis: Sei  $M \subseteq X$  und  $x \in \bar{M}$ .

(i): Sei  $K$  kompakte Umgebung von  $x$ . Sei  $V$  beliebige Umgebung  $x$ , dann ist auch  $V \cap K$  Umgebung, also  $V \cap K \cap M \neq \emptyset$ , d. h. aber  $x \in \overline{K \cap M}$ . Mit 1.4.6 folgt die Behauptung (man nehme die Einbettung von  $K$  in  $X$ ).

(ii): Weil jeder Teilraum von  $X$  wieder Fréchet-Raum ist, genügt es die Behauptung für  $X$  selber zu zeigen.

Es existiert also eine gegen  $x$  konvergente Folge  $(x_n)$  mit  $x_n \in M$ .

Die Menge  $\{x_n/n \in \mathbb{N}\}$  erhalte diskrete Topologie,  $K$  sei ihre Ein-Punkt-Kompaktifizierung. Dann ist die Injektion  $j : K \rightarrow X$  stetig, mit 1.4.6 folgt die Behauptung.

3.1.2 Satz:  $X$  kompakt-erzeugt

(i)  $X$  Fréchet-Raum  $\Rightarrow X$  erblich

(ii)  $X$  hausdorffsch und erblich  $\Rightarrow X$  Fréchet-Raum

Beweis: (i): folgt sofort aus 3.1.1 (ii) und 1.4.15

(ii): s. Arhangel'skij (3)

Der von Arhangel'skij angegebene Beweis macht wesentlich von der Voraussetzung „hausdorffsch“ Gebrauch.

Wegen 1.4.21 hat also die Kategorie der hausdorffschen folgenbestimmten Räume dieselben erblichen Räume wie die Kategorie der hausdorffschen kompakt-erzeugten.

### 3.1.3 Lemma: $X$ hausdorffsch

- (i)  $X$  und  $kX$  haben dieselben kompakten Teilmengen
- (ii)  $X$  kompakt-erzeugt  $\iff X$  trägt die schwache Topologie bzgl. seiner kompakten Teilmengen

Beweis: (i): Wegen 1.2.22 haben die kompakten Teilmengen von  $X$  in  $kX$  dieselbe Topologie. Andererseits kann  $kX$  auch nicht mehr kompakte Teilmengen haben, denn  $id : kX \rightarrow X$  ist stetig.

- (ii) „ $\Rightarrow$ “: wegen 1.2.25 und 1.2.23
- „ $\Leftarrow$ “: wegen 1.2.21

3.1.4 Bemerkung: Die in dieser Arbeit gewählte Definition von „kompakt-erzeugt“ erlaubt es nicht, diesen Satz ohne die Voraussetzung „hausdorffsch“ auszusprechen. Diesen „Preis“ muß man für das Exponentialgesetz bzw. etwa 2.5.1 zahlen.

Trivialerweise ist jeder kompakt-erzeugte Raum quasikompakt-erzeugt, trägt folglich wegen 1.2.25 und 1.2.23 die schwache Topologie bezüglich seiner quasikompakten Teilmengen, aber die kompakt-erzeugten sind durch diese Eigenschaft nicht charakterisiert. Ein Beispiel für einen Raum mit schwacher Topologie bezüglich seiner quasikompakten Teilmengen, der aber nicht kompakt-erzeugt ist, wurde schon unter 2.4.4 angegeben. (Weitere Beispiele sind leicht zu konstruieren durch Ein-Punkt-Kompaktifizierungen: Beispielsweise ist die Ein-Punkt-Kompaktifizierung des unter 1.2.14 angegebenen Raumes quasikompakt, aber nicht kompakt-erzeugt wegen 3.1.16 (i)). Gleichzeitig zeigen diese Beispiele, daß quasikompakte Teilmengen (im Unterschied zu 3.1.13 (i)) unter dem Funktor  $k$  sehr wohl ihre Topologie ändern können. Die „richtige“ Verallgemeinerung der für hausdorffsche Räume geltenden Aussage „kompakte Teilmengen behalten ihre Topologie“ ist also durch 1.2.22 gegeben.

### 3.1.5 Lemma: $X \in Top$

Die Identität von  $kX$  nach  $X$  induziert Isomorphismen auf den Homotopie-Gruppen sowie den singulären Homologie- und Kohomologie-Gruppen.

Beweis: Abgeschlossene Zellen sind kompakt, mit 1.1.3 folgt die Behauptung.

### 3.1.6 Lemma: $X$ kompakt-erzeugt, $U \subseteq X$ offen, $A \subseteq X$ abgeschlossen. Dann gilt:

- (i)  $U$  ist kompakt-erzeugt
- (ii)  $A$  ist kompakt-erzeugt
- (iii) Wenn  $X$   $\mathfrak{R}$ -Charakteristik  $\leq 1$  hat, dann ist auch  $U \cap A$  kompakt-erzeugt



Beweis: (i), (ii): Die Kategorie der lokalkompakten ist offen-erblich und abgeschlossen-erblich. Wegen 1.2.21 bilden die lokalkompakten ein Erzeugendensystem für  $\tilde{\mathfrak{K}}$ , mit 1.2.6 folgt die Behauptung.

(iii): Wegen 1.4.11 gibt es eine erbliche Identifizierung  $f : L \rightarrow X$  mit  $L$  lokalkompakt. Dann ist  $f^{-1}(U \cap A) = f^{-1}U \cap f^{-1}A$  ebenfalls lokalkompakt und

$$f \Big|_{f^{-1}(U \cap A)} : f^{-1}(U \cap A) \rightarrow U \cap A$$

ist Identifizierung. Aus 1.1.7 folgt die Behauptung.

Wenngleich also die Räume mit  $\mathfrak{K}$ -Charakteristik  $\leq 1$  nicht unbedingt erblich sind (im Gegensatz zu 1.4.21), so erlauben sie doch immerhin etwas weitergehende Aussagen über Unterräume.

3.1.7 Lemma: Es sind äquivalent:

- (i)  $X$  ist kompakt-erzeugt
- (ii) Es gibt eine Identifizierung  $g : L \rightarrow X$  mit  $L$  lokalkompakt und parakompakt
- (iii)  $X$  ist Quotient eines lokalkompakten Raumes

Beweis: (i)  $\Rightarrow$  (ii): wegen 1.2.2 klar

(ii)  $\Rightarrow$  (iii): trivial

(iii)  $\Rightarrow$  (i): wegen 1.2.21 und 1.1.7 klar

3.1.8 Definition:  $f : X \rightarrow Y$  stetig

$f$  heißt compact-covering  $\iff$  Für jedes quasikompakte  $Q \subseteq Y$  existiert quasikompaktes  $Q' \subseteq X$  mit  $f(Q') = Q$

3.1.9 Zusatz:

- (i) Ist  $X$  hausdorffsch, so kann man  $g$  in 3.1.7 (ii) als compact-covering wählen
- (ii) Ist  $g$  in 3.1.7 (ii) abgeschlossen, so ist  $g$  compact-covering

Beweis: (i): ergibt sich aus 1.2.25, 1.2.23 (i)  $\iff$  (ii) und 3.1.3 (i)

(ii): dies ist ein Ergebnis von Michael (4) (Korollar 1.2 besagt:  $P$  parakompakt,  $g : P \rightarrow X$  abgeschlossene Identifizierung  $\Rightarrow g$  compact-covering).

Unter 4.1.10 wird ein kompakt-erzeugter Raum angegeben, für den es kein compact-covering  $g$  gibt. — Das folgende Lemma stammt ebenfalls von Michael:

3.1.10 Lemma:  $f : X \rightarrow Y$  compact-covering,  $Y$  hausdorffsch kompakt-erzeugt. Dann ist  $f$  Identifizierung.

Beweis: Aus „ $f$  compact-covering“ folgt insbesondere, daß  $f$  surjektiv ist.

Sei  $A \subseteq Y$  und  $f^{-1}A$  abgeschlossen, sei  $K \subseteq Y$  kompakt.

Dann existiert quasikompaktes  $Q \subseteq X$  mit  $f(Q) = K$ .

Dann ist auch  $Q \cap f^{-1}A$  quasikompakt, also ist  $f(Q \cap f^{-1}A) = K \cap A$  kompakt, d. h. abgeschlossen.

Wegen 3.1.3 (ii) ist dann  $A$  abgeschlossen.

Da in der Definition der quasikompakt-offenen Topologie auf  $Stet(X, Y)$  nur eine Subbasis explizit angegeben wird, ist die Topologie auf  $Stet(Z, Stet(X, Y))$  zunächst nur in äußerst unhandlicher Form gegeben. Jackson (vgl. auch Dugundji S. 264) hat nun folgendes gezeigt:

$X$  hausdorffsch,  $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  sei Subbasis von  $Y$ . Dann ist

$$\{M(K, U_\lambda)/K \subseteq Y \text{ kompakt, } \lambda \in \Lambda\}$$

Subbasis der quasikompakt-offenen Topologie auf  $Stet(X, Y)$ . Der Beweis macht wesentlich davon Gebrauch, daß  $X$  hausdorffsch ist. Durch geringe Modifikation des Beweises kann man jedoch den folgenden Satz (ohne die Voraussetzung „hausdorffsch“) zeigen, der in der Kategorie der kompakt-erzeugten dem Satz von Jackson analog ist:

3.1.11 Satz:  $X, Y$  kompakt-erzeugt,  $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  sei Subbasis der Topologie auf  $Y$ . Dann erhält man die Topologie auf  $T(X, Y)$ , indem man den Coreflexionsfunktork  $k$  auf die von der Subbasis

$$\{M(Q, U_\lambda) / Q \subseteq X \text{ quasikompakt, } \lambda \in \Lambda\}$$

erzeugte Topologie anwendet.

Beweis: Sei  $\mathfrak{M}$  ein  $\mathfrak{R}$ -System von  $X$  mit der zusätzlichen Eigenschaft: Ist  $\varphi \in \mathfrak{M}$  mit  $\varphi : K \rightarrow X$  und  $K' \subseteq K$  kompakt, dann ist auch  $\varphi|_{K'} \in \mathfrak{M}$ . (Ein solches  $\mathfrak{R}$ -System existiert wegen 1.2.12 (i)).

Für  $V \subseteq Y$  offen und  $\varphi \in \mathfrak{M}$  mit  $\varphi : K \rightarrow X$  definiere

$$M(\varphi, V) = \{f/f : X \rightarrow Y \text{ und } f\varphi(K) \subseteq V\}$$

Der topologische Raum mit der von der Subbasis  $\{M(\varphi, U_\lambda)/\varphi \in \mathfrak{M}, \lambda \in \Lambda\}$  erzeugten Topologie auf der Menge der stetigen Abbildungen von  $X$  nach  $Y$  heiße  $B(X, Y)$ .

$Stet(X, Y)$  trage die quasikompakt-offene Topologie, dann genügt es zu zeigen, daß  $kB(X, Y) = kStet(X, Y)$  gilt.

Wegen 2.1.6 (iii) und 2.4.1 (vii) genügt es also

$$kB(X, Y) = k \lim_{\varphi \in \mathfrak{M}} \leftarrow k \text{Stet}(K_\varphi, Y)$$

zu zeigen. Wegen 1.1.5 ( $k$  und  $\lim_{\leftarrow}$  vertauschbar) wird dies gezeigt sein, wenn

$$B(X, Y) = \lim_{\leftarrow} \text{Stet}(K_\varphi, Y)$$

bewiesen ist.

Wegen  $X = \varinjlim K_\varphi$  existiert offenbar eine Bijektion zwischen den Mengen.

(i) Sei die in  $B(X, Y)$  offene Menge  $M(\psi, U_\lambda)$  gegeben mit  $\psi : K \rightarrow X$ .

Dann ist  $\{f/f : K \rightarrow Y \text{ und } f(K) \subseteq U_\lambda\}$  offen in  $\text{Stet}(K, Y)$ .

Folglich ist  $\{g : X \rightarrow Y/g\psi(K) \subseteq U_\lambda\}$  offen in  $\lim_{\leftarrow} \text{Stet}(K_\varphi, Y)$ , dieser Limes hat also feinere Topologie als  $B(X, Y)$ .

(ii) Nach Wahl von  $\mathfrak{M}$  und Definition des Limes erzeugen die Mengen der Form

$$\{g : X \rightarrow Y/g\varphi(K_\varphi) \subseteq V\} \quad \text{mit } \varphi \in \mathfrak{M} \text{ und } V \text{ offen in } Y$$

die Topologie auf  $\lim_{\leftarrow} \text{Stet}(K_\varphi, Y)$ .

Sei  $\psi \in \mathfrak{M}$ ,  $\psi : K \rightarrow X$ ,  $V$  offen in  $Y$  gegeben und sei  $h \in \{g/g\psi K \subseteq V\}$ .

Dann genügt es  $\psi_\mu, U_\mu, \mu = 1, \dots, m$ , zu finden, so daß

$$h \in \bigcap_{\mu=1}^m M(\psi_\mu, U_\mu) \subseteq M(\psi K, V)$$

gilt.

Weil  $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  Subbasis von  $Y$  ist, kann man schreiben

$$V = \bigcup V_\beta \text{ mit } V_\beta = \bigcap_{j=1}^{k(\beta)} U_{\beta,j}$$

Wegen  $h\psi K \subseteq V$  bilden die  $(h\psi)^{-1}V_\beta$  eine offene Überdeckung von  $K$ . Sei  $(h\psi)^{-1}V_{\beta_\mu}$  mit  $\mu = 1, \dots, m$  eine endliche Teilüberdeckung.

Weil  $K$  insbesondere normal ist (vgl. Dugundji S. 152), existieren kompakte  $K_\mu \subseteq K$  mit

$$\bigcup_{\mu=1}^m K_\mu = K \text{ und } K_\mu \subseteq (h\psi)^{-1}V_{\beta_\mu}$$

Nun gilt für  $\mu = 1, \dots, m$ :

$$\begin{aligned} h \in M(\psi \mid_{K_\mu}, V_{\beta_\mu}) &= M(\psi \mid_{K_\mu}, \bigcap_j U_{\beta_\mu, j}) \\ &= \bigcap_j M(\psi \mid_{K_\mu}, U_{\beta_\mu, j}) \end{aligned}$$

Also folgt:

$$h \in \bigcap_{\mu=1}^m \bigcap_j M(\psi \mid_{K_\mu}, U_{\beta_\mu, j}) = \bigcap_{\mu} M(\psi \mid_{K_\mu}, V_{\beta_\mu}) \subseteq M(\psi \mid_K, \bigcup_{\mu} V_{\beta_\mu}) \subseteq M(\psi \mid_K, V)$$

Das war aber zu zeigen.

### 3.2 Verhalten kompakt-erzeugter Räume unter Produktbildung

In 1.2.20 ist bereits ein Beispiel dafür angegeben worden, daß das cartesische Produkt kompakt-erzeugter Räume nicht kompakt-erzeugt zu sein braucht.

3.2.1 Satz:

- (i)  $X$  lokalquasikompakt,  $X, Y \in \tilde{\mathfrak{K}} \Rightarrow X \times Y = X \amalg Y$   
 (ii)  $X$  regulär, kompakt-erzeugt, für jedes kompakt-erzeugte  $Y$  sei  $X \times Y = X \amalg Y$ .  
 Dann ist  $X$  lokalquasikompakt.

Beweis: (i): folgt unmittelbar aus 2.2.3 (i)

(ii): s. Michael (2)

Analog zu 3.2.1 ist von Bagley/Weddington (eigentlich für quasikompakt-erzeugte Räume) gezeigt worden:

3.2.2 Lemma:  $X$   $T_1$ -Raum

$X$  hat  $\mathfrak{K}$ -Charakteristik 0  $\iff X \times Y$  hat  $\mathfrak{K}$ -Charakteristik  $\leq 1$  für jedes  $Y$  mit  $\mathfrak{K}$ -Charakteristik  $\leq 1$ .

Beweis: „ $\Rightarrow$ “: Wegen 1.4.5 ist  $X$  diskret, also

$$X \times Y = \bigoplus_{x \in X} Y_x$$

dann folgt aus 1.4.13 die Behauptung.

„ $\Leftarrow$ “: Angenommen,  $X$  ist nicht diskret. Dann existiert  $x \in X$  und eine Menge  $\{x_i/i \in I\}$  mit  $x$  als Häufungspunkt und der Eigenschaft  $x_i \neq x$  für alle  $i \in I$ .

Topologisiere  $Y = \{z\} \cup I \times \mathbb{N}$  wie folgt:

$I \times \mathbb{N}$  ist diskret und

$U$  offene Umgebung von  $z \iff z \in U$  und  $\{i\} \times \mathbb{N} - U$  ist endlich für jedes  $i \in I$ .

Sei  $M \subseteq X$  und  $y \in \bar{M}$  gegeben. Mit 1.4.6 soll nun zunächst gezeigt werden, daß  $Y$   $\mathfrak{K}$ -Charakteristik  $\leq 1$  hat.

1. Fall:  $y \in I \times \mathbb{N}$ . Dann ist  $\{y\}$  offen, also  $y \in M$ , dann ist die Einbettung von  $\{y\}$  in  $Y$  geeignet.

2. Fall:  $y = z$ .

Wegen  $z \in \bar{M}$  existiert  $i \in I$  und  $M \cap \{i\} \times \mathbb{N}$  ist unendlich.

Nach Definition der Umgebungen von  $z$  ist  $\{z\} \cup \{i\} \times \mathbb{N}$  kompakt.

Also ist die Einbettung  $j : \{z\} \cup \{i\} \times \mathbb{N} \rightarrow Y$  geeignet.

Also hat  $Y$   $\mathfrak{K}$ -Charakteristik  $\leq 1$ .

Setze  $P = \{(x_i, (i, n)) / i \in I, n \in \mathbb{N}\} \subseteq X \times Y$ ,  
dann ist  $(x, z) \in \bar{P}$ .

Sei  $\varphi : K \rightarrow X \times Y$  gegeben mit  $K$  kompakt.

Dann ist  $\varphi K \subseteq p_X \varphi K \times p_Y \varphi K$ ;

weil  $p_Y \varphi K$  kompakt ist, gilt

$p_Y \varphi K \cap \{i\} \times \mathbb{N} \neq \emptyset$  für nur endlich viele  $i \in I$ .

Dann gibt es auch nur endlich viele  $i \in I$  mit  $x_i \in p_X(P \cap \varphi K)$ .

Weil  $X$   $T_1$ -Raum ist, gibt es eine Umgebung von  $x$ , in der keines dieser endlich vielen  $x_i$  liegt. Also folgt

$$(x, z) \notin \overline{P \cap \varphi K}$$

Wegen 1.4.6 kann dann aber  $X \times Y$  nicht  $\mathfrak{R}$ -Charakteristik  $\leq 1$  haben. Das ist ein Widerspruch.

Also ist  $X$  diskret, mit 1.4.5 folgt die Behauptung.

3.2.3 Korollar: Es gibt Räume mit  $\mathfrak{R}$ -Charakteristik  $> 1$ .

Beweis: Wähle  $X$  lokalkompakt, nicht diskret. Konstruiere  $Y$  wie im Beweis zu 3.2.2, dann ist  $Y$  kompakt-erzeugt (denn  $Y$  hat sogar  $\mathfrak{R}$ -Charakteristik  $\leq 1$ ).

Nach 3.2.1 ist dann  $X \times Y$  kompakt-erzeugt, nach 3.2.2 (Beweis von „ $\Leftarrow$ “) hat  $X \times Y$  aber nicht  $\mathfrak{R}$ -Charakteristik  $\leq 1$ .

3.2.4 Satz:  $X, Y$  erfüllen das erste Abzählbarkeitsaxiom.

Dann gilt:  $X \times Y = X \amalg Y$

Beweis: 3.1.1 (ii) (denn auch  $X \times Y$  erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom).

Für den nächsten Satz wird die folgende Definition benötigt: Ein CW-Raum heißt lokal-abzählbar, wenn jeder Punkt im Innern eines abzählbaren Unterkomplexes liegt.

3.2.5 Satz:

(i) Jeder CW-Raum ist kompakt-erzeugt

(ii)  $X, Y$  CW-Räume  $\Rightarrow X \amalg Y$  CW-Raum

(iii)  $X, Y$  CW-Räume,  $X$  lokalendlich  $\Rightarrow X \times Y = X \amalg Y$

(iv)  $X, Y$  lokal-abzählbare CW-Räume  $\Rightarrow X \times Y = X \amalg Y$

Beweis: (i): Jeder CW-Raum ist Quotient eines lokalkompakten Raums, mit 3.1.7 folgt die Behauptung.

(ii): Seien  $K_i, L_j$  abgeschlossene Zellen und  $f : \bigoplus K_i \rightarrow X$  und  $g : \bigoplus L_j \rightarrow Y$  die Identifizierungen. Dann muß lediglich noch gezeigt werden, daß  $f \amalg g$  identifizierend ist (denn vgl. Schubert III.3.3).

Wegen 3.2.1 (i) gilt

$$\begin{aligned} k\left(\bigoplus K_i \times \bigoplus L_j\right) &= \bigoplus K_i \times \bigoplus L_j \\ &= \bigoplus K_i \times L_j \end{aligned}$$

und wegen 2.1.7 folgt, daß

$$f \amalg g : \bigoplus K_i \times L_j \rightarrow k(X \times Y)$$

identifizierend ist.

(iii): folgt aus 3.2.1 (i)

(iv) s. James (1)

### 3.3 Die Kategorie der quasikompakt-regulär - erzeugten Räume

Das Ziel dieses Abschnitts ist der Beweis des folgenden Satzes:

3.3.1 Satz: Die corefektive Hülle der quasikompakten und regulären Räume stimmt mit der corefektiven Hülle der kompakten Räume überein.

Der Beweis erfolgt in mehreren Schritten. Für das folgende sei  $Q$  ein quasikompakter und regulärer Raum. Falls  $Q$   $T_1$ -Raum ist, so ist  $Q$  bereits kompakt.

OBdA sei also im folgenden  $Q$  nicht  $T_1$ . Dann ist

$$M = \left\{ \overline{\{q\}}/\{q\} \text{ nicht abgeschlossen, } q \in Q \right\} \neq \emptyset$$

Die Elemente von  $M$  werden durch die Indexmenge  $I$  indiziert:  $M = \{A_i/i \in I\}$  und  $a_i \in Q$  seien so gewählt, daß  $A_i = \overline{\{a_i\}}$  für jedes  $i \in I$ .

3.3.2 Lemma: Jedes  $A_i$  trägt indiskrete Topologie

Beweis: Angenommen, es gibt  $U \subseteq A_i$  offen mit  $U \neq \emptyset$  und  $U \neq A_i$ .

1. Fall:  $a_i \notin U$

$U$  offen in  $A_i \Rightarrow$  Es existiert  $V$  offen in  $Q$  mit  $U = A_i \cap V$

Sei  $a \in U$ , dann ist  $V$  offene Umgebung von  $a$  in  $Q$ , aber  $a_i \notin V$ .

Dies ist aber ein Widerspruch zu  $a \in \overline{\{a_i\}}$ .

2. Fall:  $a_i \in U$

als Teilmenge eines regulären Raumes ist auch  $A_i$  regulär, also existiert  $F$  abgeschlossen in  $A_i$  mit  $a_i \in F \subseteq U$ .

Dann ist aber  $\mathbb{C}_{A_i}F$  offen in  $A_i$ , nicht leer (denn  $U \neq A_i$ ), verschieden von  $A_i$  (denn  $a_i \in F$ ). Also liegt für  $\mathbb{C}_{A_i}F$  der erste Fall vor.

3.3.3 Lemma:

(i)  $Q' =_{def} Q - \bigcup_{i \in I} A_i$  ist hausdorffsch

(ii)  $A_i = A_j \iff A_i \cap A_j \neq \emptyset$

Beweis: (i):  $Q'$  ist  $T_1$  und regulär, also  $T_2$

(ii) „ $\Rightarrow$ “: trivial

„ $\Leftarrow$ “: Sei  $x \in A_i \cap A_j$  und sei  $y \in A_i$ .

Sei  $U$  offene Umgebung von  $y$  in  $Q$ .

$A_i$  ist indiskret, also  $x \in U$ .



$A_j$  ist indiskret, also  $a_j \in U$ .

D. h. aber  $y \in \overline{\{a_j\}} = A_j$

Aus Symmetriegründen folgt auch  $A_j \subseteq A_i$ .

3.3.4 Lemma: Je zwei disjunkte abgeschlossene Teilmengen von  $Q$  haben disjunkte Umgebungen.

Beweis:  $A, B \subseteq Q$  seien abgeschlossen und  $A \cap B = \emptyset$ . Mit  $Q$  ist dann auch  $A$  quasikompakt. Weil  $Q$  regulär ist, folgt dann die Behauptung (vgl. Schubert S. 76, Satz 8.1).

Identifiziere nun jedes  $A_i$  zu einem Punkt. Der entstandene Raum heiße  $Q^*$ ,  $p : Q \rightarrow Q^*$  sei die Identifizierung.

3.3.5 Satz:

(i)  $p$  ist offen

(ii)  $Q^*$  ist kompakt

(iii) Jede stetige Abbildung von  $Q$  in einen  $T_1$ -Raum faktorisiert über  $p$ .

Beweis: (i): Wegen 3.3.2 gilt für jedes offene  $U$  in  $Q$  und für jedes  $i \in I$ :  $A_i \subseteq U$  oder  $A_i \cap U = \emptyset$ ,

also ist  $U = p^{-1}pU$ , d. h. aber  $pU$  offen.

(ii):  $Q^* = p(Q)$  ist quasikompakt.

Seien  $x, y \in Q^*$  und  $x \neq y$ . Dann sind  $p^{-1}(x)$  und  $p^{-1}(y)$  disjunkt und abgeschlossen (wegen 3.3.3 (i) und weil jedes  $A_i$  abgeschlossen ist). Nach 3.3.4 existieren disjunkte offene Umgebungen von  $p^{-1}(x)$  und  $p^{-1}(y)$ .

Deren Bilder unter  $p$  sind offen und disjunkt (wiederum wegen 3.3.2). Also ist  $Q^*$  hausdorffsch.

(iii): Sei  $X$   $T_1$ -Raum und  $f : Q \rightarrow X$  stetig.

Angenommen, es gibt  $i \in I$  und  $q, q' \in A_i$  mit  $f(q) \neq f(q')$ .

$\{f(q)\}$  und  $\{f(q')\}$  sind abgeschlossen und disjunkt, also auch ihre Urbilder, im Widerspruch zu 3.3.2. — Also gilt in der Schreibweise von Garcia (1) (S. 28–29)  $kX = k'X$  für jeden  $T_1$ -Raum.

Die Struktur von  $Q$  ist jetzt soweit bekannt, daß der folgende Satz bewiesen werden kann, aus dem dann 3.3.1 folgt:

3.3.6 Satz:  $Q$  ist kompakt-erzeugt

Beweis: Sei  $F \subseteq Q$  nicht abgeschlossen

1. Fall: Es existiert  $i \in I$  mit  $A_i \cap F \neq \emptyset$  und  $A_i - F \neq \emptyset$ ,  
dann existiert  $a \in F \cap A_i$  und  $b \in A_i - F$ .

Dann ist  $f : [0, 1] \rightarrow Q$  mit  $f([0, \frac{1}{2}[) = a$  und  $f([\frac{1}{2}, 1]) = b$  stetig, aber  $f^{-1}F = [0, \frac{1}{2}[$  ist nicht abgeschlossen.

2. Fall: Für alle  $i \in I$  gilt:  $A_i \cap F \neq \emptyset \Rightarrow A_i \subseteq F$

Dann ist  $f : Q^* \rightarrow Q$  mit

$$f(p(q)) = \begin{cases} q & \text{falls } q \in Q' \\ a_i & \text{falls } q \in A_i \end{cases}$$

stetig (denn für offenes  $U$  gilt  $f^{-1}U = pU$ ). Nach der Voraussetzung in der Fallunterscheidung ist  $f^{-1}F = pF$ . Aber  $p^{-1}pF = F$ , also ist  $pF$  nicht abgeschlossen.

Also ist jede  $\mathfrak{K}$ -abgeschlossene Teilmenge schon abgeschlossen, mit 1.2.9 fertig.

4. ANHANG: Es gibt einen quasikompakten Raum, der nicht stetiges Bild eines kompakten ist

Die folgende Definition sowie die Aussagen 4.1.3 bis 4.1.6 stammen von McCord.

4.1.1 Definition:  $X \in Top$

$X$  schwach hausdorffsch  $\iff$  Für jedes stetige  $\varphi : K \rightarrow X$  mit  $K$  kompakt ist  $\varphi(K)$  abgeschlossen in  $X$ .

Die Eigenschaft „schwach  $T_2$ “ liegt also zwischen  $T_1$  und  $T_2$ . Daß diese Eigenschaft „knapp“ unterhalb von  $T_2$  liegt, soll das folgende Lemma plausibel machen.

4.1.2 Lemma:  $X$  schwach hausdorffsch

(i)  $X$  erfülle das erste Abzählbarkeitsaxiom. Dann ist  $X$  hausdorffsch.

(ii)  $X$  lokal-quasikompakt und kompakt-erzeugt. Dann ist  $X$  hausdorffsch.

Beweis: (i): Sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Folge in  $X$ , die gegen  $x$  und  $y$  konvergiert. Annahme:  $x \neq y$ .

1. Fall: Es gibt unendlich viele  $n \in \mathbb{N}$  mit  $x_n = y$ .

Dann trifft jede Umgebung von  $x$  den Punkt  $y$ , also ist  $\{y\}$  nicht abgeschlossen, also ist  $X$  nicht schwach hausdorffsch, Widerspruch !

2. Fall: Es gibt höchstens endlich viele  $n \in \mathbb{N}$  mit  $x_n = y$ .

Dann kann man oBdA annehmen, daß  $x_n \neq y$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Die Menge  $\{x_n/n \in \mathbb{N}\}$  erhalte die diskrete Topologie,  $K$  sei ihre Ein-Punkt-Kompaktifizierung. Dann ist  $j : K \rightarrow X$  mit  $j(x_n) = x_n$  und  $j(*) = x$  stetig, also  $j(K)$  abgeschlossen.

Aber es ist  $y \notin j(K)$ , Widerspruch !

(ii): Wegen 3.2.1 (i) ist  $X \times X = k(X \times X)$ .

Es genügt also zu zeigen, daß die Diagonale abgeschlossen ist in  $k(X \times X)$ . Dies wird in 4.1.5 gezeigt.

Wenn es also einen lokal-quasikompakten Raum gibt, der schwach hausdorffsch, aber nicht hausdorffsch ist, so wäre damit die Verschiedenheit der beiden in 2.4.1 (vii) und (ix) angegebenen Kategorien gezeigt.

4.1.3 Lemma:  $X$  schwach hausdorffsch,  $\varphi : K \rightarrow X$  stetig mit  $K$  kompakt. Dann ist auch  $\varphi K$  kompakt.

Beweis: Seien  $x_1, x_2 \in \varphi K$  mit  $x_1 \neq x_2$ .

$X$   $T_1$ -Raum,  $K$  normal, also existieren offene Mengen  $U_1, U_2$  in  $K$  mit  $\varphi^{-1}x_i \in U_i$  und  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ .

$X$  schwach hausdorffsch, also sind  $\varphi(K - U_i)$  abgeschlossen in  $\varphi K$ .

Also sind  $\varphi K - \varphi(K - U_i)$  offene und disjunkte Umgebungen für  $x_1$  und  $x_2$ .

In Verschärfung von 3.1.3 gilt:

4.1.4 Korollar:  $X$  schwach hausdorffsch. Dann gilt:

$X$  kompakt-erzeugt  $\iff X$  trägt die schwache Topologie bzgl. seiner kompakten Teilmengen.

Beweis: folgt aus 4.1.3 und 1.2.25 sowie 1.2.23

4.1.5 Satz:  $X$  kompakt-erzeugt. Dann gilt:

$X$  schwach hausdorffsch  $\iff$  Die Diagonale  $\Delta$  ist abgeschlossen in  $X \amalg X$

Beweis: „ $\Leftarrow$ “: Sei  $\varphi : K \rightarrow X$  gegeben, ebenso  $\psi : L \rightarrow X$  mit  $K, L$  kompakt.

Dann ist

$$\psi^{-1}(\varphi K) = \{l \in L / \psi l = \varphi k \text{ für ein } k \in K \}$$

$$= \text{proj}_2(\varphi \times \psi)^{-1}\Delta$$

$(\varphi \times \psi)^{-1}\Delta$  ist abgeschlossen in  $K \times L$ , dann ist auch  $\text{proj}_2(\varphi \times \psi)^{-1}\Delta$  abgeschlossen (Projektion entlang des kompakten Faktors, vgl. Dugundji S. 227).

Weil  $X$  kompakt-erzeugt ist, ist also  $\varphi K$  abgeschlossen.

„ $\Rightarrow$ “:  $\varphi : K \rightarrow X \times X$  gegeben

Nach 4.1.3 ist also  $\text{proj } \varphi K$  kompakte Teilmenge von  $X$ , also ist  $A = \text{proj}_1 \varphi K \cup \text{proj}_2 \varphi K$  kompakt.

Weil also  $A$  hausdorffsch ist, folgt

$$\Delta_A \text{ abgeschlossen in } A \times A$$

Wegen  $\varphi K \subseteq A \times A$  folgt weiter

$$\varphi^{-1}\Delta_X = \varphi^{-1}\Delta_A \text{ abgeschlossen in } K$$

Wegen 1.1.8 und 1.2.9 ist also  $\Delta_X$  abgeschlossen in  $X \amalg X$ .

4.1.6 Satz:  $X$  kompakt-erzeugt, schwach hausdorffsch,  
 $A \subseteq X$  abgeschlossen. Dann ist auch  $X/A$  schwach hausdorffsch.

Beweis: Sei  $p : X \rightarrow X/A$  die Identifizierung.

Wegen 2.1.7 ist dann auch  $p \amalg p : X \amalg X \rightarrow X/A \amalg X/A$  eine Identifizierung.

Es ist  $(p \amalg p)^{-1} \Delta_{X/A} = \{(x, x) / x \in X - A\} \cup A \times A$

$$= \Delta_X \cup A \times A \text{ abgeschlossen wegen 4.1.5}$$

Dann folgt aus 4.1.5 die Behauptung.

Der folgende Satz stammt von Joseph:

4.1.7 Satz:  $X$  quasikompakt

Jede quasikompakte Teilmenge von  $X \iff$  Jede stetige Bijektion von einem quasikom-  
 ist abgeschlossen pakten Raum auf  $X$  ist ein Homöomorphis-  
 mus

Beweis: „ $\Rightarrow$ “: Sei  $f : Q \rightarrow X$  bijektiv, stetig,  $Q$  quasikompakt,  $A \subseteq Q$  abgeschlossen.

Dann ist  $A$  quasikompakt, also auch  $f(A)$ , also ist  $f(A)$  abgeschlossen, d. h. aber  $f$   
 Homöomorphismus.

„ $\Leftarrow$ “: Sei  $A \subseteq X$  quasikompakt.

Zusätzlich zu den in  $X$  offenen Mengen werde auch  $\mathcal{C}A$  für offen erklärt, der so entstandene  
 Raum mit verfeinerter Topologie heiße  $X'$ . Dann ist offenbar

$$\{U \cup (V \cap \mathcal{C}A) / U, V \text{ offen in } X\}$$

die Menge der in  $X'$  offenen Mengen.

Es soll nun gezeigt werden, daß  $X'$  quasikompakt ist. Sei also

$$\begin{aligned} X' &= \bigcup_{i \in I} (U_i \cup (V_i \cap \mathcal{C}A)) \\ &= \bigcup_{i \in I} U_i \cup (\mathcal{C}A \cap \bigcup_{i \in I} V_i) \end{aligned}$$

Für  $i_0 \in I$  gilt dann trivialerweise

$$\mathcal{C}V_{i_0} \cup A \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i \cup \bigcup_{i \in I} V_i$$

Links steht die Vereinigung zweier in  $X$  quasikompakter Mengen, oBdA folgt also, daß ein  $n \in \mathbb{N}$  existiert mit

$$\mathbb{C}V_{i_0} \cup A \subseteq \bigcup_{k=1}^n U_{i_k} \cup \bigcup_{k=1}^n V_{i_k}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} X' &= \bigcup_{k=1}^n U_{i_k} \cup \bigcup_{k=1}^n V_{i_k} \cup \mathbb{C}(\mathbb{C}V_{i_0} \cup A) \\ &= \bigcup_{k=0}^n (U_{i_k} \cup (V_{i_k} \cap \mathbb{C}A)) \end{aligned}$$

also ist  $X'$  quasikompakt.

Weil  $X'$  feinere Topologie trägt, ist  $id : X' \rightarrow X$  stetig, also ein Homöomorphismus. Also ist  $A$  abgeschlossen in  $X$ .

4.1.8 Bemerkung:  $X$  sei eine Menge,  $X \neq \emptyset$ .  $\mathfrak{H}(X)$  bezeichne die Menge aller hausdorffschen Topologien auf  $X$ ,  $\mathfrak{Q}(X)$  die aller quasikompakten. Beide Mengen sind nicht leer (diskrete bzw. indiskrete Topologie). Durch

$X_1 \preceq X_2 \iff$  Es existiert  $j : X_2 \rightarrow X_1$  bijektiv, stetig

wird eine Ordnung erklärt. Dann kann man 4.1.7 auch so formulieren: Sei  $X \in Top$ ,

Jede quasikompakte Teilmenge von  $X$  ist abgeschlossen  $\iff X$  ist maximales Element von  $\mathfrak{Q}(X)$

Insbesondere ist also jedes maximale Element von  $\mathfrak{Q}(X)$  schwach hausdorffsch. Die kompakten Räume mit Trägermenge  $X$  sind bekanntlich dadurch charakterisiert, daß sie sowohl maximal in  $\mathfrak{Q}(X)$  als auch minimal in  $\mathfrak{H}(X)$  sind.

4.1.9 Satz:  $X$  quasikompakt, nicht kompakt

(i)  $X$  schwach hausdorffsch  $\implies$  Es gibt keine stetige Surjektion  $f : K \rightarrow X$  mit  $K$  kompakt.

(ii) Jede quasikompakte Teilmenge von  $X \iff X$  ist kein stetiges Bild eines kompakten Raumes und  $X$  ist maximal mit dieser Eigenschaft in  $\mathfrak{Q}(X)$   
 ist abgeschlossen

Beweis: (i): folgt sofort aus 4.1.3

(ii) „ $\implies$ “: folgt aus 4.1.9 (i) und 4.1.8

„ $\Leftarrow$ “: Wegen 4.1.8 genügt es zu zeigen, daß  $X$  überhaupt maximal ist in  $\mathfrak{Q}(X)$ .

Angenommen, es gibt quasikompaktes  $Q$  und  $j : Q \rightarrow X$  stetig, bijektiv, aber kein Homöomorphismus.

Nach Voraussetzung muß dann  $Q$  stetiges Bild eines kompakten sein, dann ist aber auch  $X$  stetiges Bild, Widerspruch !

4.1.10 Beispiel:

Die Topologie der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  werde dadurch verfeinert, daß auch die Menge der rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  für offen erklärt wird. Der entstandene Raum erfüllt offenbar ebenfalls das erste Abzählbarkeitsaxiom, ist also nach 3.1.1 (ii) kompakt-erzeugt. Identifiziere die abgeschlossene Teilmenge  $\mathbb{C}\mathbb{Q}$  zu einem Punkt  $*$ , der entstandene Raum heiße  $Y$ . Nach 4.1.6 ist auch  $Y$  schwach hausdorffsch (und wegen 1.1.7 sowieso kompakt-erzeugt).

$Y$  ist aber nicht hausdorffsch, denn  $1$  und  $*$  haben keine disjunkten Umgebungen (denn jede Umgebung von  $1$  hat ein Urbild unter der Identifizierung mit irrationalen Zahlen). Entfernt man endlich viele in  $\mathbb{Q}$  konvergente Folgen aus  $Y$ , so erhält man offene Umgebungen von  $*$ . Dies sind auch alle offenen Umgebungen von  $*$ .

Also ist  $Y$  quasikompakt ( $Y$  ist übrigens gerade die Ein-Punkt-Kompaktifizierung der rationalen Zahlen). Nach 4.1.9 (i) ist also  $Y$  nicht stetiges Bild eines kompakten Raumes. Darüberhinaus ist  $Y$  wegen 3.3.5 (iii) auch nicht stetiges Bild eines quasikompakten und regulären Raums. (Dies beantwortet einen Teil einer Frage von Garcia (1), S. 30–31).

LITERATURVERZEICHNIS

- Arens: A topology for spaces of transformations, *Ann. of Math.* 47 (1946), S. 480–495
- Arens/Dugundji: Topologies for function spaces, *Pacific J. of Math.* 1 (1951), S. 5–31
- Arhangelskij: (1) Bicomact sets and the topology of spaces, *Soviet Math. Dokl.* 4 (1963), S. 561–564
- (2) On a class of spaces containing all metric and all locally bicomact spaces, *SMD* 4 (1963), S. 1051–1055
- (3) A characterization of very  $k$ -spaces, *Czechoslovak Math. J.* 18 (93) (1968), S. 392–395
- Arhangelskij/Franklin: Ordinal invariants for topological spaces, *Mich. Math. J.* 15 (1968), S. 313–320
- Bagley/Weddington: Products of  $k'$ -spaces, *Proceed Amer. Math. Soc.* 22 (1969), S. 392 bis 394
- Bagley/Yang:  $k$ -spaces and function spaces, *Proceed Amer. Math. Soc.* 17 (1966), S. 703 bis 705
- Brown: (1) Ten topologies for  $X \times Y$ , *Quart. J. Math. Oxford Ser.* (2) 14 (1963), S. 503 ff.
- (2) Function spaces and product topologies, *Quart. J. Math. Oxford Ser.* (2) 15 (1964), S. 238 ff.
- Cohen: Spaces with weak topologies, *Quart. J. Math. Oxford Ser.* (2) 5 (1954), S. 77–80
- Damerow: *Die Kategorie der Kelley-Räume*, Diplomarbeit, Freie Universität Berlin, 1969
- Day/Kelley: On topological quotient maps preserved by pullbacks or products, *Proc. Cambr. Phil. Soc.* 67 (1970), S. 553–558
- Dowker: Topology of metric complexes, *American J. Math.* 74 (1952), S. 555–577
- Dugundji: *Topology*, Boston 1968



- Fox: On topologies for function spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.* 51 (1945), S. 429–432
- Franklin: (1) Spaces in which sequences suffice I, *Fundamenta Math.* 57 (1965), S. 107–115  
(2) Spaces in which sequences suffice II, *Fundamenta Math.* 61 (1967), S. 51–56  
(3) Natural covers, *Compos. Mathem.* 21 (1969), S. 253–261
- Frolik: Locally  $G_\delta$ -spaces, *Czech. Math. J.* 12 (1962), S. 346ff.
- Gabriel/Zisman: *Calculus of fractions and homotopy theory*, Berlin, Heidelberg, New York 1967
- Garcia: (1) Espacios funcionales y funtores adjuntas I, *Anales del Instituto Matemáticas* 1966  
(2) Espacios funcionales y funtores adjuntas II, *Anales del Instituto Matemáticas* 1967
- Herrlich: (1) *Topologische Reflexionen und Coreflexionen*, Lecture notes Nr. 78 (1968)  
(2) Limit-Operators and topological coreflections, *Trans. Amer. Math.* 146 (1969), S. 203–210
- Herrlich/Strecker: (1) Coreflective Subcategories I. Erscheint  
(2) Coreflective Subcategories II. Erscheint
- Jackson: Spaces of mappings on topological products with applications to homotopy theory, *Proceed. Amer. Math. Soc.* 3 (1952), S. 327ff.
- James: Reduced product spaces, *Annals of Math.* 62 (1955), S. 170 ff.
- Joseph: Continuous functions and spaces in which compact sets are closed, *Amer. Math. Monthly* 76 (1969), S. 1125–1126
- Kelley: *General Topology*, New York 1955
- Lin/Soniat: A new characterization of Hausdorff  $k$ -spaces, *Proc. Japan Academy* 44 (1968), S. 1031–1032
- Mc Cord: Classifying spaces and infinite symmetric products, *Trans. Amer. Math. Soc.* 146 (1969), S. 273 ff.

- Michael: (1)  $\mathbf{N}_0$ -spaces, *J. of Math. and Mech.* 15 (1966), S. 983–1002  
(2) Local compactness and cartesian products of quotient maps and  $k$ -spaces, *Ann. Inst. Fourier* 18, 2 (1968), S. 281–286  
(3) Bi-quotient maps and cartesian products of quotient maps, *Ann. Inst. Fourier* 18, 2 (1968), S. 287–302  
(4) A note on closed maps and compact sets, *Israel J. Math.* 2 (1964), S. 173–176
- Morita: Note on mapping spaces, *Proceed. Japan Academy* 32 (1956), S. 671–675
- Noble: (1)  $k$ -groups and duality, *Trans. Amer. Math. Soc.* 151 (1970), S. 551–561  
(2) Products with closed projections, *Trans. Amer. Math. Soc.* 140 (1969), S. 381–391
- Schubert: *Topologie*, Stuttgart 1969
- Sieradski: Generalized theories for  $k$ -spaces, *Proceed Amer. Math. Soc.* 24 (1970), S. 52 ff.
- Spanier: Quasi-Topologies, *Duke Math. J.* 30 (1963), S. 1–14
- Steenrod: A convenient category of topological spaces, *Mich. Math. J.* 14 (1967), S. 133–152
- Vogt: (1) Convenient categories of topological spaces for algebraic topology. Erscheint  
(2) Convenient categories of topological spaces for homotopy theory. Erscheint
- Weddington: On  $k$ -spaces, *Proceed. Amer. Math. Soc.* 22 (1969), S. 635–638