Universitätsbibliothek
Heidelberg

Heidelberger Akademie
der Wissenschaften

Heidelberger Akademie der Wissenschaften

Mathematische Abhandlungen

Autor: **Koenigsberger, Leo** (1837 – 1921)

Titel: **Über verborgene Bewegung und unvollständige Probleme in der Dynamik wägbarer Massen**

Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse : Abt. A ; 1912, 18

Signatur UB Heidelberg: O 4579-3-1

Die in einer früheren Arbeit behandelte verborgene Bewegung wird auf den Fall ausgedehnt, in welchem das kinetische Potential nicht mehr von den verborgenen Parametern ist, und weiter werden die in Theorie der monocyklischen Systeme von Helmholtz behandelten unvollständigen Probleme genauer untersucht und deren Existenzbedingungen aufgestellt. Endlich werden beide Fragen in der allgemeinen Frage vereinigt, wann die Elimination von Parametern zwischen Lagrangeschen Gleichungen eines dynamischen Systems wägbarer Massen wieder auf Lagrangesche Gleichungen eines solchen Systems führt.

(Zsfassung aus: Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften / Jahresheft 1913, S. III)

Sitzungsberichte
der Heidelberger Akademie der Wissenschaften
Stiftung Heinrich Lanz
Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse
Abteilung A. Mathematisch-physikalische Wissenschaften
Jahrgang 1912. 18. Abhandlung.

Über verborgene Bewegung und unvollständige Probleme in der Dynamik wägbarer Massen

von

Leo Koenigsberger
in Heidelberg

+ 04579

Eingegangen am 22. November 1912

Heidelberg 1912
Carl Winter's Universitätsbuchhandlung

Verlags-Nr. 835.

In der Dynamik wägbarer Massen haben bekanntlich die Bewegungsgleichungen, wenn mit T die lebendige Kraft des Systems und mit U die Kräftefunktion bezeichnet wird, für das kinetische Potential

$$H = -T - U$$

die Form

$$-\frac{\partial H}{\partial p_s} + \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_s'} = P_s \qquad (s = 1, 2, \ldots \mu),$$

worin P_s die äußeren Kräfte, $p_1, p_2, \ldots p_\mu$ die voneinander unabhängigen Parameter bedeuten, und H, von U abgesehen, also T eine homogene Funktion zweiten Grades von $p_1', \ldots p_\mu'$ darstellt, wenn die Zwangsbedingungen des Problems, welche die Parameter einführen, die Variable t nicht explizite enthalten.

Unter Voraussetzung der in meiner letzten Arbeit[1]) angestellten Betrachtungen über verborgene Bewegung sieht man leicht, daß wenn $p_1, \ldots p_\rho$ die verborgenen Parameter eines Problems sein sollen, dessen übrige Parameter $q_1, \ldots q_\sigma$ sind, die notwendige und hinreichende Form des kinetischen Potentials für ein dynamisches Problem wägbarer Massen mit von der Zeit t unabhängigen Bedingungsgleichungen und einer Kräftefunktion, welche t und die Parameter enthalten darf, aber von den Ableitungen der letzteren unabhängig sein soll, durch

$$H = f_2(p_1', \ldots p_\rho', q_1', \ldots q_\sigma') + \omega(t, q_1, \ldots q_\sigma) + \sum_\lambda p_\lambda \omega_\lambda(t)$$

dargestellt wird, worin f_2 eine homogene Funktion zweiten Grades der eingeschlossenen Größen bedeutet mit Koeffizienten, die nur von $q_1, \ldots q_\sigma$ abhängen.

---

[1]) „Das Prinzip der verborgenen Bewegung". Heidelberger Akademie der Wissenschaften. Abteilung A. 1912. 10. Abhandlung.

In diesem Falle geht nämlich das erste System der LAGRANGE-schen Gleichungen

$$-\frac{\partial H}{\partial p_r} + \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_r'} = P_r \qquad (r = 1, 2, \ldots \rho)$$

$$-\frac{\partial H}{\partial q_s} + \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial q_s'} = Q_s \qquad (s = 1, 2, \ldots \sigma)$$

in

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_r'} = \omega_r(t) + P_r \qquad (r = 1, 2, \ldots \rho)$$

über, und es werden sich, wenn P_r als gegebene Funktionen der Zeit vorausgesetzt werden, aus den in $p_1', \ldots p_\rho', q_1', \ldots q_\sigma'$ linearen Gleichungen

$$\frac{\partial H}{\partial p_r'} = \int (\omega_r(t) + P_r)dt + c_r = \Omega_r(t),$$

in denen $c_1, \ldots c_\rho$ Integrationskonstanten bedeuten, die Werte

$$p_r' = \sum_{r_1} L_{r\,r_1}(\Omega_{r_1}(t) + \alpha_{r_1 1} q_1' + \ldots + \alpha_{r_1 \sigma} q_\sigma')$$

ergeben, worin die Funktionen L und α nur von den Parametern $q_1, \ldots q_\sigma$ abhängen. Durch Substitution dieser Werte in das zweite LAGRANGE'sche Gleichungsystem, welches die Parameter p_r nicht enthält und, wenn

$$H - \sum_\lambda p_\lambda \omega_\lambda(t) = H'$$

gesetzt wird, die Form annimmt

$$-\frac{\partial H'}{\partial q_s} + \frac{d}{dt}\frac{\partial H'}{\partial q_s'} = Q_s,$$

folgt in bekannter Bezeichnung

$$-\left(\frac{\partial H'}{\partial q_s}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H'}{\partial q_s'}\right) = Q_s \qquad (s = 1, 2, \ldots \sigma)$$

oder, da

$$\frac{\partial (H')}{\partial q_s} = \left(\frac{\partial H'}{\partial q_s}\right) + \sum\left(\frac{\partial H'}{\partial p_r'}\right)\frac{\partial (p_r')}{\partial q_s},$$

$$\frac{\partial (H')}{\partial q_s'} = \left(\frac{\partial H'}{\partial q_s'}\right) + \sum\left(\frac{\partial H'}{\partial p_r'}\right)\frac{(\partial p_r')}{\partial q_s'}$$

ist, wenn

$$(H') - \sum \Omega_r(t)(p_r') = \mathfrak{H}$$

gesetzt wird, für die Parameter $q_1, \ldots q_\sigma$ das LAGRANGE'sche Differentialgleichungsystem

$$-\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial q_s} + \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial q_s'} = Q_s \qquad (s = 1, 2, \ldots \sigma),$$

worin das kinetische Potential $\mathfrak{H}$ von den Parametern $p_1, \ldots p_\rho$ unabhängig ist. Wenn nach Substitution der oben für p_r' gefundenen Werte das so erhaltene kinetische Potential auch lineare Glieder in $q_1', \ldots q_\sigma'$ enthält, so wird man nach den früheren Auseinandersetzungen auf eine verborgene Bewegung der Parameter $p_1, \ldots p_\rho$ zurückschließen können; daß aber solche Glieder in der Tat vorkommen, folgt daraus, daß die homogene Funktion zweiten Grades $f_2(p_1', \ldots p_\rho', q_1', \ldots q_\sigma')$, deren Koeffizienten nur von $q_1, \ldots q_\sigma$ abhängen sollten, sich in zwei homogene Funktionen zweiten Grades von der Form zerlegen läßt

$$f_2(p_1', \ldots p_\rho', q_1', \ldots q_\sigma') = F_2\left(\frac{\partial f_2}{\partial p_1'}, \ldots \frac{\partial f_2}{\partial p_\rho'}\right) + \mathfrak{F}_2(q_1', \ldots q_\sigma'),$$

so daß

$$H = F_2\left(\frac{\partial H}{\partial p_1'}, \ldots \frac{\partial H}{\partial p_\rho'}\right) + \mathfrak{F}_2(q_1', \ldots q_\sigma') + \omega(t, q_1, \ldots q_\sigma) + \sum p_\lambda \omega_\lambda(t)$$

wird, und sich daher

$$\mathfrak{H} = F_2(\Omega_1(t), \ldots \Omega_\rho(t)) + \mathfrak{F}_2(q_1', \ldots q_\sigma') + \omega(t, q_1, \ldots q_\sigma) - \sum \Omega_r(t)(p_r')$$

ergibt, worin die (p_r') lineare Funktionen der q_s' sind; es wird somit das kinetische Potential $\mathfrak{H}$ wegen der in $\Omega_r(t)$ vorkommenden willkürlichen Integrationskonstanten $c_1, \ldots c_\rho$, wie wieder nur aus der Zerlegung der Funktion f_2 in die Summe von zwei homogenen Funktionen zweiten Grades mit zwei gesonderten Variabelnsystemen folgt, jedenfalls in $q_1', \ldots q_\sigma'$ lineare Glieder enthalten, deren Koeffizienten von $t, q_1, \ldots q_\sigma$ abhängen.

Um den Energievorrat des ursprünglichen und transformierten LAGRANGE'schen Systems miteinander zu vergleichen, mag bemerkt werden, daß, wenn allgemein ein beliebig aus der Zeit t, den Parametern $p_1, \ldots p_\mu$ und deren ersten Ableitungen zusammengesetztes kinetisches Potential K den LAGRANGE'schen Gleichungen

$$-\frac{\partial K}{\partial p_s} + \frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial p_s'} = P_s \qquad (s = 1, 2, \ldots \mu)$$

zu Grunde liegt, die Beziehung

$$\frac{dK}{dt} = \frac{\partial K}{dt} + \sum \frac{\partial K}{\partial p_s} p_s' + \sum \frac{\partial K}{\partial p_s'} p_s''$$

vermöge jener Differentialgleichungen in

$$\frac{d}{dt}\left(K - \sum p_s' \frac{\partial K}{\partial p_s'}\right) = \frac{\partial K}{\partial t} - \sum p_s' P_s'$$

oder, wenn $P_s = 0$ und der Energievorrat

$$K - \sum p_s' \frac{\partial K}{\partial p_s'} = E$$

gesetzt wird, in

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial K}{\partial t}$$

übergeht. Sondert man ferner in K die in $p_1', \ldots p_\mu'$ linearen Glieder ab und setzt

$$K = \mathfrak{K} + \sum \varphi_s (t, p_1, \ldots p_\mu) p_s',$$

so wird

$$E = K - \sum p_s' \frac{\partial K}{\partial p_s'} = \mathfrak{K} - \sum p_s' \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial p_s'} = \mathfrak{E},$$

und wenn die φ-Funktionen t nicht explizite enthalten,

$$\frac{d\mathfrak{E}}{dt} = \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial t}$$

sein, während die LAGRANGE'schen Gleichungen nur dann die Form

$$-\frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial p_s} + \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial p_s'} = P_s$$

annehmen, wenn φ_s die Variable t nicht explizite enthält, und außerdem

$$\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial p_\beta} = \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial p_\alpha}$$

ist, also bekanntlich der Ausdruck

$$\sum \varphi_s (p_1, \ldots p_\mu) p_s'$$

als ein vollständiger nach t genommener Differentialquotient aus dem kinetischen Potential fortgelassen werden darf. Zur Berechnung des Energievorrates können also in dem kinetischen Potential

erster Ordnung die in den Größen $p_1', \ldots p_\mu'$ linearen Glieder fortgelassen werden.

Hiernach wird für das oben angenommene kinetische Potential

$$H = F_2\left(\frac{\partial H}{\partial p_1'}, \ldots \frac{\partial H}{\partial p_\rho'}\right) + \mathfrak{F}_2(q_1', \ldots q_\sigma') + \omega(t, q_1, \ldots q_\sigma) + \sum p_\lambda \omega_\lambda(t)$$

die den ursprünglichen LAGRANGE'schen Differentialgleichungen zugehörige Energie

$$E = H - \sum p_r' \frac{\partial H}{\partial p_r'} - \sum q_s' \frac{\partial H}{\partial q_s'}$$

in

$$E = -F_2\left(\frac{\partial H}{\partial p_1'}, \ldots \frac{\partial H}{\partial p_\rho'}\right) - \mathfrak{F}_2(q_1', \ldots q_\sigma') + \omega(t, q_1, \ldots q_\sigma) + \sum p_\lambda \omega_\lambda(t)$$

übergehen. Für das transformierte LAGRANGE'sche System in den $q_1, \ldots q_\sigma$, dessen kinetisches Potential durch

$$\mathfrak{H} = F_2(\Omega_1(t), \ldots \Omega_\rho(t)) + \mathfrak{F}_2(q_1', \ldots q_\sigma') + \omega(t, q_1, \ldots q_\sigma) - \sum \Omega_r(t)(p_r')$$

dargestellt war, können zunächst nach der vorher gemachten Bemerkung für die Berechnung der Energie die in $q_1', \ldots q_\sigma'$ linearen Glieder fortgelassen werden, und es wird sich somit, da

$$(p_r') = \sum_{r_1} L_{r r_1}(\Omega_{r_1}(t) + \alpha_{r_1 1} q_1' \ldots + \alpha_{r_1 \sigma} q_\sigma')$$

war, das kinetische Potential

$$\mathfrak{H}_1 = F_2(\Omega_1(t), \ldots \Omega_\sigma(t)) + \mathfrak{F}_2(q_1', \ldots q_\sigma') + \omega(t, q_1, \ldots q_\sigma)$$
$$- \sum_{r, r_1} L_{r r_1} \Omega_r(t) \Omega_{r_1}(t),$$

ergeben, worin $L_{r r_1}$ Funktionen von $q_1, \ldots q_\sigma$ sind; um nun die Energie des transformierten Systems

$$E' = \mathfrak{H}_1 - \sum q_s' \frac{\partial \mathfrak{H}_1}{\partial q_s'}$$

zu berechnen, bemerke man, daß, weil

$$\sum p_r' \frac{\partial H}{\partial p_r'} + \sum q_s' \frac{\partial H}{\partial q_s'} = 2(F_2 + \mathfrak{F}_2)$$

oder für $q_1' = \ldots = q_\sigma' = 0$

$$\left(\sum (p_r')\left(\frac{\partial H}{\partial p_r'}\right)\right)_{q_1' = \ldots = q_\sigma' = 0} = \sum_{r, r_1} L_{r r_1} \Omega_r(t) \Omega_{r_1}(t)$$
$$= 2 F_2 (\Omega_1(t), \ldots \Omega_\rho(t))$$

ist, $\mathfrak{H}_1$ in

$$\mathfrak{H}_1 = - F_2 (\Omega_1(t), \ldots \Omega_\rho(t)) + \mathfrak{F}_2 (q_1', \ldots q_\sigma') + \omega (t, q_1, \ldots q_\sigma)$$

übergeht, und somit

$$E' = - F_2 (\Omega_1(t), \ldots \Omega_\rho(t)) - \mathfrak{F}_2 (q_1', \ldots q_\sigma') + \omega (t, q_1, \ldots q_\sigma)$$

wird.

Es folgt somit, daß nur dann der Energievorrat der ursprünglichen Bewegungsgleichungen und der des transformierten Systems derselbe ist, wenn $\omega_\lambda(t) = 0$, also das ursprüngliche kinetische Potential die Form hat

$$H = f_2 (p_1', \ldots p_\rho', q_1', \ldots q_\sigma') + \omega (t, q_1, \ldots q_\sigma),$$

worin die Koeffizienten von f_2 nur von $q_1, \ldots q_\sigma$ abhängen, das Potential somit die Parameter $p_1, \ldots p_\rho$ nicht enthält.

Man sieht endlich leicht, daß die für die Existenz verborgener Parameter in einem dynamischen Problem wägbarer Massen notwendige und hinreichende Form für ein kinetisches Potential erster Ordnung, in welchem die Kräftefunktion allgemein von der Zeit, den Parametern des Problems und deren ersten Ableitungen abhängt, durch den Ausdruck gegeben ist

$$H = f_2 (p_1', \ldots p_\rho' q_1', \ldots q_\sigma') + \omega (t, q_1, \ldots q_\sigma) + \sum p_r \frac{d \psi_r (t, q_1, \ldots q_\sigma)}{d t},$$

worin f_2 eine homogene Funktion zweiten Grades ist mit Koeffizienten, welche nur von $q_1, \ldots q_\sigma$ abhängen.

Setzt man nämlich

$$H_1 = f_2 (p_1', \ldots p_\rho', q_1', \ldots q_\sigma') + \omega (t, q_1, \ldots \ldots q_\sigma),$$

so gehen die LAGRANGE'schen Bewegungsgleichungen für das kinetische Potential H in

$$- \frac{d \psi_r (t, q_1, \ldots q_\sigma)}{d t} + \frac{d}{d t} \frac{\partial H_1}{\partial p_r'} = P_r$$

$$- \frac{\partial H_1}{\partial q_s} - \sum p_r \frac{d}{d t} \frac{\partial \psi_r (t, q_1, \ldots q_\sigma)}{\partial q_s} +$$
$$\frac{d}{d t} \left(\frac{\partial H_1}{\partial q_s'} + \sum p_r \frac{\partial \psi_r (t, q_1, \ldots q_\sigma)}{\partial q_s} \right) = Q_s$$

oder
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial H_1}{\partial p_r'} = P_r + \frac{d\,\psi_r(t, q_1, \ldots q_\sigma)}{dt} \qquad (r = 1, 2, \ldots \rho)$$

$$-\frac{\partial H_1}{\partial q_s} + \frac{d}{dt}\frac{\partial H_1}{\partial q_s'} = Q_s - \sum p_r' \frac{\partial \psi_r(t, q_1, \ldots q_\sigma)}{\partial q_s} \qquad (s = 1, 2, \ldots \sigma)$$

über. Seien wieder P_r und Q_s gegebene Funktionen von t, so wird man aus den Integralen des ersten Gleichungssystems

$$\frac{\partial H_1}{\partial p_r'} = \int P_r\,dt + \psi_r(t, q_1, \ldots q_\sigma) + c_r$$

die Werte von $p_1', \ldots p_\rho'$ als lineare Funktionen von $q_1', \ldots q_\sigma'$ und den rechten Seiten dieser Gleichungen mit Koeffizienten, die nur von $q_1, \ldots q_\sigma$ abhängen, berechnen und in das zweite Gleichungsystem einsetzen können, so daß wieder in den früheren Bezeichnungen

$$-\left(\frac{\partial H_1}{\partial q_s}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H_1}{\partial q_s'}\right) = Q_s - \sum (p_r') \frac{\partial \psi_r(t, q_1, \ldots q_\sigma)}{\partial q_s}$$

folgt. Genau wie oben ist dann ersichtlich, daß, wenn

$$\mathfrak{H} = (H_1) - \sum \left\{ \int P_r\,dt + \psi_r(t, q_1, \ldots q_\sigma) + c_r \right\} (p_r')$$

gesetzt wird, sich für die Parameter $q_1, \ldots q_\sigma$ das LAGRANGE'sche Differentialgleichungsystem ergibt

$$-\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial q_s} + \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial q_s'} = Q_s,$$

worin das kinetische Potential $\mathfrak{H}$ vermöge der Substitution der Werte für (p_r') die Ableitungen $q_1', \ldots q_\sigma'$ auch in der ersten Potenz enthält.

Nachdem nunmehr die notwendigen und hinreichenden Bedingungen der Existenz einer verborgenen Bewegung bei dynamischen Problemen wägbarer Massen für ein kinetisches Potential erster Ordnung unter der Voraussetzung entwickelt worden, daß die Zwangsbedingungen die Zeit t nicht explizite enthalten, daß diese Variable dagegen nebst den Parametern des Problems und deren ersten Ableitungen in der Kräftefunktion vorkommen darf, will ich noch auf die an die Theorie der monozyklischen Systeme sich anschließenden Ausführungen von HELMHOLTZ[2]) über unvoll-

[2]) Wissenschaftliche Abhandlungen. Dritter Band. S. 215.

ständige Probleme näher eingehen, welche wesentlicher Ergänzungen bedürfen.

Gehen wir wieder von dynamischen Problemen aus, deren Kräftefunktion auch die Zeit t explizite enthalten darf, und nehmen an, daß das kinetische Potential der identischen Beziehung unterliegt

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p_r' \partial q_s'} \equiv 0 \quad (r = 1, 2, .. \rho, \; s = 1, 2, \ldots \sigma),$$

also die Form hat

$$H = \sum f_r (p_1, .. q_1, ..) p_r'^2 + 2 \sum f_{r r_1} (p_1, .. q_1, ..) p_r' p_{r_1}'$$

$$+ \sum \varphi_s (p_1, .. q_1, ..) q_s'^2 + 2 \sum \varphi_{s s_1} (p_1, .. q_1, ..) q_s' q_{s_1}' + F(t, p_1, .. q_1, ..),$$

so werden die zugehörigen LAGRANGE'schen Differentialgleichungen lauten

$$-\frac{\partial H}{\partial p_r} + \sum \frac{\partial^2 H}{\partial p_r' \partial p_{r_1}} p_{r_1}' + \sum \frac{\partial^2 H}{\partial p_r' \partial p_{r_1}'} p_{r_1}'' + \sum \frac{\partial^2 H}{\partial p_r' \partial q_s} q_s' = P_r$$

$$(r = 1, 2, .. \rho)$$

$$-\frac{\partial H}{\partial q_s} + \sum \frac{\partial^2 H}{\partial q_s' \partial p_r} p_r' + \sum \frac{\partial^2 H}{\partial q_s' \partial q_{s_1}} q_{s_1}' + \sum \frac{\partial^2 H}{\partial q_s' \partial q_{s_1}'} q_{s_1}'' = Q_s$$

$$(s = 1, 2, .. \sigma).$$

Machen wir nun die Voraussetzung, daß $P_r = 0$ ist, und nehmen ferner an, daß die beiden LAGRANGE'schen Differentialgleichungsysteme ein partikuläres Integralsystem besitzen, für welches die Parameter $p_1, \ldots p_\rho$ konstant, also $p_1' = .. = p_\rho' = p_1'' = \ldots = p_\rho'' = 0$ sind, so werden vermöge der oben angenommenen Form des kinetischen Potentials die beiden LAGRANGE'schen Gleichungen für dieses Partikularsystem der p in

$$\frac{\partial H}{\partial p_r} = 0 \qquad (r = 1, 2, .. \rho)$$

$$-\frac{\partial H}{\partial q_s} + \sum \frac{\partial^2 H}{\partial q_s' \partial q_{s_1}} q_{s_1}' + \sum \frac{\partial^2 H}{\partial q_s' \partial q_{s_1}'} q_{s_1}'' = Q_s \quad (s = 1, 2, \ldots \sigma)$$

übergehen[1]), wenn überall $p_r' = p_r'' = 0$ gesetzt wird. Berechnet man aus den ρ ersten Gleichungen $p_1, .. p_\rho$ und setzt

[1]) Die Bemerkung von HELMHOLTZ, daß unter der Voraussetzung

$$P_r = 0, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial p_r' \partial q_s'} = 0$$

$$p_r = \psi_r (t, q_1, \ldots q_\sigma, q_1', \ldots q_\sigma'),$$

so werden sich zunächst, wenn diese Werte für p_r nebst $p_r' = 0$, $p_r'' = 0$ in das zweite LAGRANGE'sche System eingesetzt werden, die Gleichungen ergeben

$$-\left(\frac{\partial H}{\partial q_s}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial q_s'}\right) = Q_s,$$

und bemerkt man, daß die p_r der Annahme nach Konstanten sein sollen, so wird die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß ein solches konstantes Partikularsystem der p existiert, die sein, daß die letzten σ LAGRANGE'schen Gleichungen für die q und die ρ Differentialgleichungen

$$\frac{\partial \psi_r}{\partial t} + \sum \frac{\partial \psi_r}{\partial q_s} q_s' + \sum \frac{\partial \psi_r}{\partial q_s'} q_s'' = 0 \quad (r = 1, 2, \ldots \rho)$$

gemeinsame Integralsysteme besitzen.

Ist dies nun der Fall, so wird, weil

$$\frac{\partial (H)}{\partial q_s} = \left(\frac{\partial H}{\partial q_s}\right) + \sum \left(\frac{\partial H}{\partial p_r}\right) \frac{\partial (p_r)}{\partial q_s} = \left(\frac{\partial H}{\partial q_s}\right)$$

$$\frac{\partial (H)}{\partial q_s'} = \left(\frac{\partial H}{\partial q_s'}\right) + \sum \left(\frac{\partial H}{\partial p_r}\right) \frac{\partial (p_r)}{\partial q_s'} = \left(\frac{\partial H}{\partial q_s'}\right)$$

ist, wenn

$$\mathfrak{H} = (H)$$

für die Substitution $p_r = \psi_r$, $p_r' = 0$, $p_r'' = 0$ gesetzt wird, das Differentialgleichungsystem zur Bestimmung des den konstanten p zugehörigen Partikularsystems der q, sich wieder ein System von LAGRANGE'schen Differentialgleichungen

$$-\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial q_s} + \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial q_s'} = Q_s \quad (s = 1, 2, \ldots \sigma)$$

ergeben, worin das kinetische Potential $\mathfrak{H}$ eine komplizierte, aus t, $q_1, \ldots q_\sigma, q_1', \ldots q_\sigma'$ zusammengesetzte Form annehmen kann.

Habe z. B. ein dynamisches Problem mit zwei voneinander unabhängigen Parametern p und q das kinetische Potential

$$H = f(p, q)\, p'^2 + \varphi(p, q)\, q'^2 + F(p, q),$$

„Bewegungen des Systems möglich sind, bei denen die p_r dauernd konstant also die $p_r' = 0$ bleiben", ist nicht zutreffend, vielmehr muß, wie sich oben zeigen wird, die Möglichkeit solcher Bewegungen in die Bedingungen für die Durchführung der Theorie der unvollständigen Probleme aufgenommen werden.

welches der oben aufgestellten Bedingung genügt, so werden die beiden LAGRANGE'schen Gleichungen unter der Voraussetzung, daß ein partikuläres Integralsystem existiert, für welches p konstant ist, als Differentialgleichungen für das unvollständige Problem lauten

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p} q'^2 + \frac{\partial F}{\partial p} = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q} q'^2 - \frac{\partial F}{\partial q} + 2 \varphi q'' = Q,$$

wobei jedoch die Funktionen f, φ, F im kinetischen Potential nicht beliebig gewählt werden dürfen, sondern so, daß ein Partikularsystem von Integralen mit konstantem p existiert. Um die Bedingung hierfür zu finden, stelle man mit den beiden letzten Gleichungen unter der Voraussetzung eines konstanten $p = c$, also $p' = p'' = 0$ den nach t genommenen Differentialquotienten der ersten derselben

$$2 \frac{\partial \varphi}{\partial p} q' q'' + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p \partial q} q'^3 + \frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q} q' = 0$$

zusammen, so daß sich unter der Annahme, daß das partikulare Integralsystem nicht durch $p = c$, $q = c_1$ gegeben sein soll, durch Elimination von q'^2 und q'' zwischen diesen drei Gleichungen die nur von $p = c$, q und Q abhängige Bedingungsgleichung ergibt

$$\frac{\partial F}{\partial p}\left(\varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p \partial q} - \frac{\partial \varphi}{\partial p} \frac{\partial \varphi}{\partial q}\right) - \frac{\partial \varphi}{\partial p}\left(\varphi \frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q} + \frac{\partial \varphi}{\partial p}\left(\frac{\partial F}{\partial q} + Q\right)\right) = 0,$$

welche, wenn dem konstanten Werte von p für den Parameter q nicht ein konstanter Wert oder eine lediglich durch die äußere Kraft Q ohne Integrationskonstanten fest bestimmte Funktion von t entsprechen soll, für Q die Annahme eines konstanten Wertes erfordert und daher eine in p und q identische sein muß. Setzt man nun den aus der ersten der beiden obigen Gleichungen sich ergebenden Wert von p als Funktion von q und q' in die zweite Gleichung ein, so wird sich für die Variable q die LAGRANGE'sche Gleichung ergeben

$$-\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial q} + \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial q'} = Q,$$

worin das kinetische Potential erster Ordnung durch den Ausdruck gegeben ist

$$\mathfrak{H} = (\varphi(p, q))\, q'^2 + (F(p, q)).$$

Sei z. B.

$$\varphi(p, q) = p\,q, \quad F(p, q) = \frac{q}{p} + p, \quad Q = 0,$$

also das kinetische Potential

$$H = f(p, q)\,p'^2 + p\,q\,q'^2 + \frac{q}{p} + p,$$

so werden zunächst die beiden LAGRANGE'schen Gleichungen für $p' = p'' = 0$ die Form annehmen

$$q\,q'^2 - \frac{q}{p^2} + 1 = 0$$

$$p^2\,q'^2 + 2\,p^2\,q\,q'' = 1,$$

und die oben aufgestellte Bedingung für die Möglichkeit eines partikulären Integralsystems, in welchem p konstant ist, wird identisch erfüllt sein.

Setzt man nun aus der ersten dieser beiden Gleichungen den Wert von

$$p^2 = \frac{q}{q\,q'^2 + 1}$$

in die zweite Gleichung ein, so folgt

$$2\,q^2\,q'' = 1,$$

und dieselbe Beziehung erhält man, wenn man unter Ausschluß von $q' = 0$ den Ausdruck für p^2 nach t differentiert und $p' = 0$ setzt; substituiert man den aus dem allgemeinen Integral dieser Differentialgleichung

$$\int \sqrt{\frac{q}{k\,q - 1}}\,d\,q = t + k_1,$$

worin k und k_1 Integrationskonstanten, sich ergebenden Wert von q in den obigen Ausdruck für p^2, so ergibt sich in der Tat $p^2 = \frac{1}{k}$, also konstant. Bildet man endlich das kinetische Potential

$$\mathfrak{H} = (p\,q)\,q'^2 + \left(\frac{q}{p}\right) + (p) = \frac{(p^2)\,(q\,q'^2 + 1) + q}{(p)},$$

so geht $\mathfrak{H}$ durch Substitution des oben gefundenen Wertes von p in

$$\mathfrak{H} = 2\sqrt{q^2\,q'^2 + q}$$

über, und hiernach, wie unmittelbar zu sehen, die zugehörige

LAGRANGE'sche Gleichung wieder die oben erhaltene Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Allgemeiner gefaßt werden sich die Probleme der verborgenen Bewegung ebenso wie die unvollständigen Probleme der Frage unterordnen, ob und wann für die Bewegung eines Systems von Punkten, welche in den Koordinaten ausdrückbaren Zwangsbedingungen unterliegen und also LAGRANGE'schen Differentialgleichungen in den Parametern genügen, die Veränderungen eines Teiles dieser Parameter mit der Zeit wieder durch LAGRANGE'sche Gleichungen für ein anderes kinetisches Potential erster Ordnung beschrieben werden können; wir werden somit auf die Untersuchung des Eliminationsproblems einer bestimmten Anzahl von Parametern geführt und auf die Frage, wann die LAGRANGE'schen Differentialgleichungen, welche unter bestimmten Bedingungen das Eliminationsresultat darstellen, wieder einem kinetischen Potential erster Ordnung zugehören.

Die Beantwortung dieser Frage wird wesentlich andere Methoden erfordern als die zur Behandlung der verborgenen Bewegung und der unvollständigen Probleme zur Anwendung gekommenen, welche die Unabhängigkeit des kinetischen Potentials von einzelnen Parametern oder bestimmte Eigenschaften von partikulären Integralsystemen der Bewegungsgleichungen voraussetzen. Es wird zunächst genügen, diese Methoden für den Fall der Elimination eines Parameters zwischen zwei einem dynamischen Probleme wägbarer Massen zugehörigen LAGRANGE'schen Gleichungen unter der Voraussetzung zu erläutern, daß die Zwangsbedingungen die Zeit t nicht explizite enthalten, und dann zu der Behandlung des Eliminationsproblems einer beliebigen Anzahl von Parametern für ein allgemeines LAGRANGE'sches Differentialgleichungsystem überzugehen.

Habe das auf zwei freie Parameter reduzierte kinetische Potential die Form

$$H = \varphi_1 (p, q)\, p'^2 + 2\, \varphi_2 (p, q)\, p'\, q' + \varphi_3 (p, q)\, q'^2 + \psi (p, q),$$

für welches die beiden LAGRANGE'schen Gleichungen

$$-\frac{\partial H}{\partial p} + \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p'} = 0, \quad -\frac{\partial H}{\partial q} + \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial q'} = Q$$

seien, so wird man unter der Annahme, daß die erstere dieser Gleichungen die Größen p' und p'' nicht enthält — bei den unvollständigen Problemen wurden sie gleich Null gesetzt vermöge der Voraussetzung eines konstanten partikularen Integralwertes von p — aus dieser Gleichung p als Funktion von q, q', q'' ausdrücken und

in die zweite LAGRANGE'sche Gleichung einsetzen können. Man sieht aber unmittelbar aus jener Gleichung, daß, wenn der Koeffizient von p''

$$2\,\varphi_1\,(p, q) = 0$$

ist, auch der von p' verschwindet, und es wird diese Gleichung daher die Form annehmen

$$2\,\varphi_2\,q'' - \left(\frac{\partial\,\varphi_3}{\partial\,p} - 2\,\frac{\partial\,\varphi_2}{\partial\,q}\right) q'^2 - \frac{\partial\,\psi}{\partial\,p} = 0,$$

aus welcher sich

$$p = f\,(q, q', q'')$$

ergeben mag. Dieser Wert von p in die zweite LAGRANGE'sche Gleichung substituiert führt dieselbe in

$$-\left(\frac{\partial\,H}{\partial\,q}\right) - \frac{d}{d\,t}\left(\frac{\partial\,H}{\partial\,q'}\right) = Q$$

über, während das transformierte kinetische Potential lautet

$$(H) = 2\,\varphi_2\,(f, q)\,\frac{d\,f}{d\,t}\,q' + \varphi_3\,(f, q)\,q'^2 + \psi\,(f, q)$$

und somit in q''' linear ist. Da aber infolge der bekannten Beziehungen

$$\frac{\partial\,(p')}{\partial\,q} = \frac{d}{d\,t}\,\frac{\partial\,(p)}{\partial\,q}, \quad \frac{\partial\,(p')}{\partial\,q'} = \frac{d}{d\,t}\,\frac{\partial\,(p)}{\partial\,q'} + \frac{\partial\,(p)}{\partial\,q}$$

$$\frac{\partial\,(p')}{\partial\,q''} = \frac{d}{d\,t}\,\frac{\partial\,(p)}{\partial\,q''} + \frac{\partial\,(p)}{\partial\,q'}, \quad \frac{\partial\,(p')}{\partial\,q'''} = \frac{\partial\,(p)}{\partial\,q''}$$

die Gleichungen bestehen

$$\frac{\partial\,(H)}{\partial\,q} = \left(\frac{\partial\,H}{\partial\,q}\right) + \left(\frac{\partial\,H}{\partial\,p}\right)\frac{\partial\,(p)}{\partial\,q} + \left(\frac{\partial\,H}{\partial\,p'}\right)\frac{d}{d\,t}\,\frac{\partial\,(p)}{\partial\,q}$$

$$\frac{\partial\,(H)}{\partial\,q'} = \left(\frac{\partial\,H}{\partial\,q'}\right) + \left(\frac{\partial\,H}{\partial\,p}\right)\frac{\partial\,(p)}{\partial\,q'} + \left(\frac{\partial\,H}{\partial\,p'}\right)\left[\frac{d}{d\,t}\,\frac{\partial\,(p)}{\partial\,q'} + \frac{\partial\,(p)}{\partial\,q}\right]$$

$$\frac{\partial\,(H)}{\partial\,q''} = \left(\frac{\partial\,H}{\partial\,p}\right)\frac{\partial\,(p)}{\partial\,q''} + \left(\frac{\partial\,H}{\partial\,p'}\right)\left[\frac{d}{d\,t}\,\frac{\partial\,(p)}{\partial\,q''} + \frac{\partial\,(p)}{\partial\,q'}\right]$$

$$\frac{\partial\,(H)}{\partial\,q'''} = \left(\frac{\partial\,H}{\partial\,p'}\right)\frac{\partial\,(p)}{\partial\,q''},$$

so folgt unmittelbar vermöge der für den Parameter p bestehenden LAGRANGE'schen Gleichung, daß

$$\frac{\partial\,(H)}{\partial\,q} - \frac{d}{d\,t}\,\frac{\partial\,(H)}{\partial\,q'} + \frac{d^2}{d\,t^2}\,\frac{\partial\,(H)}{\partial\,q''} - \frac{d^3}{d\,t^3}\,\frac{\partial\,(H)}{\partial\,q''} = \left(\frac{\partial\,H}{\partial\,q}\right) - \frac{d}{d\,t}\left(\frac{\partial\,H}{\partial\,q'}\right)$$

ist, und daß somit durch Substitution des oben als Funktion von q, q', q'' hergeleiteten Wertes von p die zweite LAGRANGE'sche Gleichung in

$$-\frac{\partial(H)}{\partial q}+\frac{d}{dt}\frac{\partial(H)}{\partial q'}-\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial(H)}{\partial q''}+\frac{d^3}{dt^3}\frac{\partial(H)}{\partial q'''}=Q$$

übergeht, in welcher das kinetische Potential

$$(H)=\omega(q, q', q'')\,q'''+\omega_1(q, q', q'')$$

von der dritten Ordnung und in q''' linear ist. Setzt man nun

$$H_1=\int\omega(q, q', q'')\,dq'',$$

so wird

$$\frac{dH_1}{dt}=q'\int\frac{\partial\omega}{\partial q}dq''+q''\int\frac{\partial\omega}{\partial q'}dq''+\omega q'''=H_1'$$

als ein total nach t genommener Differentialquotient einer Funktion von q, q', q'' der Differentialgleichung

$$-\frac{\partial H_1'}{\partial q}+\frac{d}{dt}\frac{\partial H_1'}{\partial q'}-\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial H_1'}{\partial q''}+\frac{d^3}{dt^3}\frac{\partial H_1'}{\partial q'''}=0$$

identisch genügen, wie aus der Variationsrechnung bekannt ist, oder auch aus den Beziehungen

$$\frac{\partial H_1'}{\partial q}=\frac{d}{dt}\frac{\partial H_1}{\partial q},\quad \frac{\partial H_1'}{\partial q'}=\frac{d}{dt}\frac{\partial H_1}{\partial q'}+\frac{\partial H_1}{\partial q}$$

$$\frac{\partial H_1'}{\partial q''}=\frac{d}{dt}\frac{\partial H_1}{\partial q''}+\frac{\partial H_1}{\partial q'},\quad \frac{\partial H_1'}{\partial q'''}=\frac{\partial H_1}{\partial q''}$$

unmittelbar hervorgeht. Bildet man somit

$$(H)-H_1'=\mathfrak{H},$$

so erhält man für das kinetische Potential $\mathfrak{H}$ die LAGRANGE'sche Gleichung

$$-\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial q}+\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial q'}-\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial q''}+\frac{d^3}{dt^3}\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial q'''}=Q,$$

oder da

$$\mathfrak{H}=\omega_1(q, q', q'')-q'\int\frac{\partial\omega}{\partial q}dq''-q''\int\frac{\partial\omega}{\partial q'}dq''$$

die Größe q''' nicht mehr enthält, die Differentialgleichung

$$-\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial q}+\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial q'}-\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial q''}=Q$$

für das kinetische Potential zweiter Ordnung $\mathfrak{H}$, in welchem nach der oben für H zu Grunde gelegten Form

$$\omega = 2(\varphi_2)q' \frac{\partial f}{\partial q''}, \quad \omega_1 = 2(\varphi_2)q' \left(\frac{\partial f}{\partial q} q' + \frac{\partial f}{\partial q'} q''\right) + (\varphi_3) q'^2 + (\psi)$$

ist.

Soll nun die durch Elimination von p erhaltene Differentialgleichung von der zweiten Ordnung, also das zugehörige kinetische Potential von der ersten Ordnung oder von der zweiten Ordnung, aber in q'' linear sein, so muß $\frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial q''^2}$ identisch Null oder

$$\frac{\partial^2 \omega_1}{\partial q''^2} = q' \frac{\partial^2 \omega}{\partial q \partial q''} + q'' \frac{\partial^2 \omega}{\partial q' \partial q''} + 2 \frac{\partial \omega}{\partial q'}$$

sein, während $p = f(q, q', q'')$ die Gleichung

$$2(\varphi_2) q'' - \left(\left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial p}\right) - 2\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial q}\right)\right) q'^2 - \left(\frac{\partial \psi}{\partial p}\right) = 0$$

identisch befriedigt. Ist das kinetische Potential zweiter Ordnung $\mathfrak{H}$ linear in q'', so kann man es wie oben auf ein Potential erster Ordnung reduzieren. Fehlt in der ersten LAGRANGE'schen Gleichung die Größe q'', wofür die notwendige und hinreichende Bedingung die ist, daß in dem kinetischen Potential H

$$\varphi_2(p, q) = 0$$

ist, so sieht man leicht, daß, weil der Ausdruck für p dann nur von q und q' abhängt, $(H) = \mathfrak{H}$ ein kinetisches Potential erster Ordnung, also die zugehörige Bewegungsgleichung von der zweiten Ordnung sein wird.

Für LAGRANGE'sche Gleichungen mit mehr als zwei Parametern gestaltet sich jedoch die Methode und das Resultat der Elimination wesentlich anders; aber es wird auch hier genügen, die Betrachtung an vier solchen Gleichungen durchzuführen, aus denen zwei Parameter eliminiert werden sollen.

Seien die dem kinetischen Potential

$$H = \varphi_{11} p_1'^2 + 2\varphi_{12} p_1' p_2' + \varphi_{22} p_2'^2 + f_{11} q_1'^2 + 2 f_{12} q_1' q_2' + f_{22} q_2'^2$$
$$+ 2\psi_{11} p_1' q_1' + 2\psi_{12} p_1' q_2' + 2\psi_{21} p_2' q_1' + 2\psi_{22} p_2' q_2' + F,$$

worin die Funktionen φ, f, ψ, F von den Parametern p_1, p_2, q_1, q_2 abhängen, zugehörigen LAGRANGE'schen Gleichungen

$$-\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} + \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_\alpha'} = 0, \quad -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} + \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial q_\alpha'} = Q_\alpha \quad (\alpha = 1, 2),$$

und sollen die Parameter p_1 und p_2 zwischen diesen vier Gleichungen unter der Annahme eliminiert werden, daß in den ersten beiden die ersten und zweiten Ableitungen dieser Größen nicht enthalten sind, so ergibt sich zunächst unmittelbar, daß das Fehlen der Ableitungen p_1'', p_2'' die Bedingungen erfordert

$$\varphi_{11} = 0, \ \varphi_{12} = 0, \ \varphi_{22} = 0,$$

und daß ferner das der Größen p_1', p_2' — unter der Voraussetzung zweier Gleichungen zog das Verschwinden von p'' das von p' nach sich — in den so entstehenden LAGRANGE'schen Gleichungen die Bedingungen liefert

$$\frac{\partial \psi_{11}}{\partial p_2} = \frac{\partial \psi_{21}}{\partial p_1}, \quad \frac{\partial \psi_{12}}{\partial p_2} = \frac{\partial \psi_{22}}{\partial p_1},$$

daß also

$$\psi_{11}\, d\, p_1 + \psi_{21}\, d\, p_2 \quad \text{und} \quad \psi_{12}\, d\, p_1 + \psi_{22}\, d\, p_2$$

vollständige Differentiale in Bezug auf p_1 und p_2 sein müssen. Unter diesen Bedingungen für die ψ-Funktionen werden somit für das kinetische Potential

$$H = f_{11}\, q_1'^2 + 2 f_{12}\, q_1' q_2' + f_{22}\, q_2'^2 + 2 \psi_{11}\, p_1' q_1' + 2 \psi_{12}\, p_1' q_2' + 2 \psi_{21}\, p_2' q_1' + 2 \psi_{22}\, p_2' q_2' + F$$

die den Parametern p_1 und p_2 zugehörigen Differentialgleichungen

$$-\frac{\partial f_{11}}{\partial p_1} q_1'^2 + 2 \frac{\partial f_{12}}{\partial p_1} q_1' q_2' - \frac{\partial f_{22}}{\partial p_1} q_2'^2 + 2 \frac{\partial \psi_{11}}{\partial q_1} q_1'^2 + 2 \left(\frac{\partial \psi_{11}}{\partial q_2} + \frac{\partial \psi_{12}}{\partial q_1} \right) q_1' q_2' + 2 \frac{\partial \psi_{12}}{\partial q_2} q_2'^2 - \frac{\partial F}{\partial p_1} + 2 \psi_{11}\, q_1'' + 2 \psi_{12}\, q_2'' = 0$$

$$-\frac{\partial f_{11}}{\partial p_2} q_1'^2 - 2 \frac{\partial f_{12}}{\partial p_2} q_1' q_2' - \frac{\partial f_{22}}{\partial p_2} q_2'^2 + 2 \frac{\partial \psi_{21}}{\partial q_1} q_1'^2 + 2 \left(\frac{\partial \psi_{21}}{\partial q_2} + \frac{\partial \psi_{22}}{\partial q_1} \right) q_1' q_2' + 2 \frac{\partial \psi_{22}}{\partial q_2} q_2'^2 - \frac{\partial F}{\partial p_2} + 2 \psi_{21}\, q_1'' + 2 \psi_{22}\, q_2'' = 0$$

die Größen p_1', p_2', p_1'', p_2'' nicht enthalten, und man wird somit aus diesen p_1 und p_2 in der Form berechnen können

$$p_1 = F_1 (q_1, q_2, q_1', q_2', q_1'', q_2''), \quad p_2 = F_2 (q_1, q_2, q_1', q_2', q_1'', q_2'').$$

Substituirt man diese Werte für p_1 und p_2 in das kinetische Potential H, so daß sich

$$(H) = (f_{11})\, q_1'^2 + 2 (f_{12})\, q_1' q_2' + (f_{22})\, q_2'^2 + 2 (\psi_{11})\, q_1' \frac{d F_1}{d t} + 2 (\psi_{12})\, q_2' \frac{d F_1}{d t} + 2 (\psi_{21})\, q_1' \frac{d F_2}{d t} + 2 (\psi_{22})\, q_2' \frac{d F_2}{d t} + (F)$$

ergibt, worin die Argumente der eingeklammerten Funktionen q_1, q_2, q_1', q_2', q_1'', q_2'' sind, so nehmen vermöge der beiden ersten LAGRANGE'schen Gleichungen

$$-\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}+\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_\alpha'}=0 \qquad (\alpha=1,2)$$

mit Hilfe der oben entwickelten Beziehungen zwischen den nach t genommenen totalen und den partiellen Differentialquotienten der Parameter und deren Ableitungen die beiden zu q_1 und q_2 gehörigen Differentialgleichungen die Form an

$$-\frac{\partial(H)}{\partial q_\alpha}+\frac{d}{dt}\frac{\partial(H)}{\partial q_\alpha'}-\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial(H)}{\partial q_\alpha''}+\frac{d^3}{dt^3}\frac{\partial(H)}{\partial q_\alpha'''}=Q_\alpha \quad (\alpha=1,2).$$

Setzt man nun

$$(H)=\omega_1 q_1'''+\omega_2 q_2'''+\omega,$$

worin ω, ω_1, ω_2 Funktionen von q_1, q_2, q_1', q_2', q_1'', q_2'' sind, so folgt aus dem obigen Werte von (H)

$$\omega_1=2(\psi_{11})q_1'\frac{\partial F_1}{\partial q_1''}+2(\psi_{12})q_2'\frac{\partial F_1}{\partial q_1''}+2(\psi_{21})q_1'\frac{\partial F_2}{\partial q_1''}+2(\psi_{22})q_2'\frac{\partial F_2}{\partial q_2''}$$

$$\omega_2=2(\psi_{11})q_1'\frac{\partial F_1}{\partial q_2''}+2(\psi_{12})q_2'\frac{\partial F_1}{\partial q_2''}+2(\psi_{21})q_1'\frac{\partial F_2}{\partial q_2''}+2(\psi_{22})q_2'\frac{\partial F_2}{\partial q_2''},$$

worin die ψ-Funktionen von q_1, q_2 und deren ersten und zweiten Ableitungen abhängen, und es ist leicht ersichtlich, daß vermöge der oben für die ψ gefundenen Bedingungen, die Bestandteile vollständiger Differentiale zu sein, sich die Beziehung ergibt

$$\frac{\partial\omega_1}{\partial q_2''}=\frac{\partial\omega_2}{\partial q_1''}.$$

Setzt man nunmehr

$$H_1=\int\omega_1\,dq_1''+\int\left(\omega_2-\int\frac{\partial\omega_1}{\partial q_2''}\,dq_1''\right)dq_2'',$$

so folgt

$$\frac{\partial H_1}{\partial q_1''}=\omega_1,\quad \frac{\partial H_1}{\partial q_2''}=\omega_2,$$

und es wird somit der nach t genommene totale Differentialquotient

$$H_1'=\frac{\partial H_1}{\partial q_1}q_1'+\frac{\partial H_1}{\partial q_1'}q_1''+\frac{\partial H_1}{\partial q_2}q_2'+\frac{\partial H_1}{\partial q_2'}q_2''+\omega_1 q_1'''+\omega_2 q_2'''$$

den Differentialgleichungen

$$-\frac{\partial H_1'}{\partial q_\alpha}+\frac{d}{dt}\frac{\partial H_1'}{\partial q_\alpha'}-\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial H_1'}{\partial q_\alpha''}+\frac{d^3}{dt^3}\frac{\partial H_1'}{\partial q_\alpha'''}=0 \qquad (\alpha=1,2)$$

identisch genügen. Das kinetische Potential

$$\mathfrak{H}=(H)-H_1'$$

liefert somit, da die Größen q_1''', q_2''' aus der Differenz herausfallen, und dieses also nur von der zweiten Ordnung ist, für die Parameter q_1 und q_2 die beiden LAGRANGE'schen Gleichungen

$$-\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial q_\alpha}+\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial q_\alpha'}-\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial q_\alpha''}=Q_\alpha \qquad (\alpha=1,2).$$

Soll aber die Elimination der Parameter p_1 und p_2 auf zwei LAGRANGE'sche Differentialgleichungen für die Parameter q_1 und q_2 führen, wie sie einem dynamischen Probleme wägbarer Massen entsprechen, sollen diese also zweiter Ordnung und das kinetische Potential $\mathfrak{H}$ von der ersten Ordnung oder unter einer ähnlichen Voraussetzung wie früher von der zweiten Ordnung, aber linear in q_1'' und q_2'' sein, so müssen die Bedingungen erfüllt sein

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial q_1''^2}=0, \quad \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial q_2''^2}=0,$$

welche wir noch in anderer Weise auf Grund der folgenden Überlegungen ausdrücken können. Sollen sich nämlich aus den beiden oben für p_1 und p_2 aufgestellten LAGRANGE'schen Gleichungen diese Parameter nur als Funktionen von q_1, q_2, q_1', q_2' in der Form ergeben

$$p_1=F_1(q_1, q_2, q_1', q_2'), \quad p_2=F_2(q_1, q_2, q_1', q_2'),$$

so folgt unmittelbar aus den nach Substitution dieser Werte in die Differentialgleichungen sich ergebenden identischen Beziehungen, daß die Koeffizienten von q_1'' und q_2'' verschwinden müssen, also

$$\psi_{11}(F_1, F_2, q_1, q_2)=0, \quad \psi_{12}(F_1, F_2, q_1, q_2)=0, \quad \psi_{21}(F_1, F_2, q_1, q_2)=0,$$
$$\psi_{22}(F_1, F_2, q_1, q_2)=0$$

sein wird. Hieraus folgt aber, daß die Funktionen F_1 und F_2 nur von q_1 und q_2 abhängen dürfen, und da sodann durch Substitution der Werte

$$p_1=F_1(q_1, q_2), \quad p_2=F_2(q_1, q_2)$$

auch

$$\left(-\left(\frac{\partial f_{11}}{\partial p_1}\right)+2\left(\frac{\partial \psi_{11}}{\partial q_1}\right)\right)q_1'^2+2\left(-\left(\frac{\partial f_{12}}{\partial p_1}\right)+\left(\frac{\partial \psi_{11}}{\partial q_2}\right)+\left(\frac{\partial \psi_{12}}{\partial q_1}\right)\right)q_1'q_2'$$
$$+\left(-\left(\frac{\partial f_{22}}{\partial p_1}\right)+2\left(\frac{\partial \psi_{12}}{\partial q_2}\right)\right)q_2'^2-\left(\frac{\partial F}{\partial p_1}\right)=0$$

und

$$\left(-\left(\frac{\partial f_{11}}{\partial p_2}\right)+2\left(\frac{\partial \psi_{21}}{\partial q_1}\right)\right)q_1'^2+2\left(-\left(\frac{\partial f_{12}}{\partial p_2}\right)+\left(\frac{\partial \psi_{21}}{\partial q_2}\right)+\left(\frac{\partial \psi_{22}}{\partial q_1}\right)\right)q_1'q_2'$$
$$+\left(-\left(\frac{\partial f_{22}}{\partial p_2}\right)+2\left(\frac{\partial \psi_{22}}{\partial q_2}\right)\right)q_2'^2-\left(\frac{\partial F}{\partial p_2}\right)=0,$$

sein muß, so ergeben sich als notwendige Bedingungen dafür, daß das kinetische Potential (H) von der ersten Ordnung, also die zu q_1 und q_2 gehörigen LAGRANGE'schen Differentialgleichungen von der zweiten Ordnung sind, die, daß die Gleichungen

$$-\frac{\partial f_{11}}{\partial p_1}+2\frac{\partial \psi_{11}}{\partial q_1}=0,\ -\frac{\partial f_{12}}{\partial p_1}+\frac{\partial \psi_{11}}{\partial q_2}+\frac{\partial \psi_{12}}{\partial q_1}=0,\ -\frac{\partial f_{22}}{\partial p_1}+2\frac{\partial \psi_{12}}{\partial q_2}=0$$
$$-\frac{\partial f_{11}}{\partial p_2}+2\frac{\partial \psi_{21}}{\partial q_1}=0,\ -\frac{\partial f_{12}}{\partial p_2}+\frac{\partial \psi_{21}}{\partial q_2}+\frac{\partial \psi_{22}}{\partial q_1}=0,\ -\frac{\partial f_{22}}{\partial p_2}+2\frac{\partial \psi_{22}}{\partial q_2}=0$$
$$\psi_{11}=0\quad \psi_{12}=0\quad \psi_{21}=0\quad \psi_{22}=0$$
$$\frac{\partial F}{\partial p_1}=0\quad \frac{\partial F}{\partial p_2}=0$$

durch dieselben Funktionen p_1 und p_2 von q_1 und q_2 befriedigt werden. Sind diese Bedingungen erfüllt, so geht durch Substitution dieser Werte von p_1 und p_2 das kinetische Potential über in

$$(H)=(f_{11})q_1'^2+2(f_{12})q_1'q_2'+(f_{22})q_2'^2+(F),$$

welchem die beiden LAGRANGE'schen Gleichungen zugehören

$$\frac{\partial(f_{11})}{\partial q_1}q_1'^2+2\frac{\partial(f_{11})}{\partial q_2}q_1'q_2'+\left(2\frac{\partial(f_{12})}{\partial q_2}-\frac{\partial(f_{22})}{\partial q_1}\right)q_2'^2$$
$$+2(f_{11})q_1''+2(f_{12})q_2''-\frac{\partial(F)}{\partial q_1}=Q_1,$$
$$\left(2\frac{\partial(f_{12})}{\partial q_1}-\frac{\partial(f_{11})}{\partial q_2}\right)q_1'^2+2\frac{\partial(f_{22})}{\partial q_1}q_1'q_2'+\frac{\partial(f_{22})}{\partial q_2}q_2'^2$$
$$+2(f_{12})q_1''+2(f_{22})q_2''-\frac{\partial(F)}{\partial q_2}=Q_2.$$

So wird das kinetische Potential

$$H = 2\,q_1\,p_1^2\,q_1'^2 + 2\,(p_1\,p_2 - 3\,p_1\,q_1^2)\,q_1'\,q_2' - 2\,p_2\,q_1\,q_2'^2$$
$$+ 2\,(q_1^2 p_1 - p_1\,p_2)\,p_1'\,q_1' + 2\,(q_1\,p_2 - q_1^3)\,p_1'\,q_2' + 2\,(-p_1^2 + q_2^2)\,p_2'\,q_1'$$
$$+ 2\,(p_1\,q_1 - q_1\,q_2)\,p_2'\,q_2' + \frac{p_1^2}{2} - p_1\,q_2 + \frac{p_2^2}{2} - q_1^2\,p_2\,,$$

die zu p_1 und p_2 gehörigen LAGRANGE'schen Gleichungen liefern

$$p_1 - q_2 + 2\,(p_2 - q_1^2)\,(p_1\,q_1'' - q_1\,q_2'') = 0$$
$$p_2 - q_1^2 + (p_1 - q_2)\,((p_1 + q_2)\,q_1'' - 2\,q_1\,q_2'') = 0\,,$$

welchen

$$p_1 = q_2\,, \quad p_2 = q_1^2$$

genügen, und diese Werte befriedigen in der Tat die oben für die Koeffizienten des kinetischen Potentials aufgestellten Bedingungen; das durch diese Substitution transformierte kinetische Potential

$$(H) = 2\,q_1\,q_2^2\,q_1'^2 - 4\,q_1^2\,q_2\,q_1'\,q_2' - 2\,q_1^3\,q_2'^2 - \tfrac{1}{2}\,q_2^2 - \tfrac{1}{2}\,q_1^4$$

führt sodann für die Parameter q_1 und q_2 auf die Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$4\,q_1\,q_2^2\,q_1'' - 4\,q_1^2\,q_2\,q_2'' + 2\,q_2^2\,q_1'^2 + 8\,q_1\,q_2\,q_1'\,q_2' + 2\,q_1^2\,q_2'^2$$
$$+ 2\,q_1^3 = Q_1$$
$$-4\,q_1^2\,q_2\,q_1'' - 4\,q_1^3\,q_2'' - 12\,q_1\,q_2\,q_1'^2 - 12\,q_1^2\,q_1'\,q_2' + q_2 = Q_2\,,$$

welche der Form der Differentialgleichungen dynamischer Probleme entsprechen, und nebst den oben gefundenen Werten von p_1 und p_2 ein partikuläres Integralsystem der vorgelegten LAGRANGE'schen Gleichungen liefern werden.

C. F. Wintersche Buchdruckerei.