Universitätsbibliothek
Heidelberg

Heidelberger Akademie
der Wissenschaften

Heidelberger Akademie der Wissenschaften

Mathematische Abhandlungen

Autor: **Carl Köhler** (1855 – 1932)

Titel: **Über das Raumfünfeck und über die projektive Einteilung der durch ein Raumfünfeck bestimmten Polarfelder**

Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse : Abt. A ; 1913, 16
Signatur UB Heidelberg: L 810-11

Im ersten Teil der Arbeit wird die Teilung des projektiven Ebenenraumes durch ein Raumfünfeck untersucht. In dem durch diese Teilung in fünfzehn Gebiete zerlegten Raum kann eine Ebene, die keine Ecke des Raumfünfecks enthält, zwei typisch verschiedene Lagen einnehmen: sie gehört entweder einem viereckigen oder einem fünfeckigen Gebiet an. Die Bestimmung ihrer Lage kann man zwar direkt vornehmen, sie wird aber für die Anschauung bequemer, wenn man eines der fünf durch die Ebene und das Raumfünfeck bestimmten Raumfünfseite zu Hilfe nimmt. — Falls das Raumfünfeck nur eigentliche Ecken besitzt, gehört die uneigentliche Ebene des Raumes entweder einem viereckigen oder einem fünfeckigen seiner Gebiete an, und man muß demnach zwei Typen von eigentlichen Raumfünfecken unterscheiden. — Der zweite Teil der Arbeit zeigt, wie sich die projektive Beschaffenheit des durch ein Raumfünfeck in einer Ebene bestimmten Polarfeldes immer direkt aus der Lage der Ebene in bezug auf das Raumfünfeck erkennen läßt.

(Zsfassung aus: Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften / Jahresheft 1913, S. XXX)

Sitzungsberichte
der Heidelberger Akademie der Wissenschaften
Stiftung Heinrich Lanz
Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse
Abteilung A. Mathematisch-physikalische Wissenschaften
Jahrgang 1913. 16. Abhandlung.

Über das Raumfünfeck und über die projektive Einteilung der durch ein Raumfünfeck bestimmten Polarfelder

von
C. Koehler
in Heidelberg

L 810 1

Eingegangen am 18. Juni 1913

Vorgelegt von L. Koenigsberger

Heidelberg 1913
Carl Winter's Universitätsbuchhandlung

Verlags-Nr. 932.

Bekanntlich gelten im Raume die beiden den Involutions-Sätzen für das vollständige Viereck und Vierseit in der Ebene entsprechenden Sätze:

Die Gegenelemente eines vollständigen Raumfünfecks (Raumfünfseits) bestimmen in jeder ihm nicht angehörigen Ebene (in jedem ihm nicht angehörigen Punkt) zehn Paare von Polarelementen eines Polarfeldes (Polarbündels)[1]).

Ob das auf diese Weise bestimmte Polargebilde *elliptisch* oder *hyperbolisch* ist, kann man nach ebenso einfachen und anschaulichen *geometrischen* Kriterien entscheiden, wie sie für die durch ein vollständiges Viereck oder Vierseit bestimmten Involutionen existieren[2]). Für den Fall des *Raumfünfseits* lassen sich diese Kriterien direkt aus einer früher veröffentlichten Arbeit[3]) herleiten. Sie verlieren aber bei ihrer Übertragung auf den dualistisch entsprechenden Fall, die natürlich prinzipiell keine Schwierigkeit bietet, wesentlich an Anschaulichkeit, weil die Teilung des Punktraums durch ein Raumfünfseit der unmittelbaren Anschauung viel leichter zugänglich ist wie die Teilung des Ebenenraums durch ein Raumfünfeck. Man kann nun zwar, wie wir sehen werden, auch bei den Kriterien für das Raumfünfeck mit der ersten Raumteilung auskommen, es ist aber an und für sich von Interesse, auch die zweite zu untersuchen und sie der Anschauung möglichst nahe zu bringen.

Zu diesem Zweck werden im Folgenden zuerst die Kriterien, die zur Unterscheidung der Gebiete der durch ein Raumfünfseit P

---

[1]) Vgl. Reye, Geom. d. Lage, Bd. 2 (4. Aufl.), p. 107. — Ein (vollständiges) *Raumfünfseit* P ist ein System von fünf Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$, von denen nicht vier mit demselben Punkt inzidieren. Diese fünf *Ebenen* sind seine *Seiten*, die zehn Geraden $|\alpha\beta|$, $|\alpha\gamma|$, ... seine *Kanten*, die zehn Punkte $(\alpha\beta\gamma)$, $(\alpha\beta\delta)$, ... seine *Ecken*, und zu der Kante $|\alpha\beta|$ gehört als *Gegenelement* die Ecke $(\gamma\delta\epsilon)$. — Ein Punkt P gehört dem Raumfünfseit *nicht* an, wenn er mit keiner von dessen Seiten inzidiert.

Dualistisch entsprechend wird das (vollständige) *Raumfünfeck* $\mathfrak{R}$ mit den *Ecken* A, B, C, D, E, den *Kanten* $|AB|$, ... und den *Seiten* $[ABC]$, ... definiert.

[2]) Vgl. Heffter und Koehler, Lehrb. d. analyt. Geom., Bd. 1, p. 171 u. 216.

[3]) Archiv d. Math. u. Phys., III. Reihe, Bd. 6 (1904), p. 95.

hervorgerufenen Raumteilung dienen, so gefaßt, daß sich aus ihnen die dualistisch entsprechenden für das Raumfünfeck direkt ablesen lassen. Dann aber wird gezeigt, daß man, um die Lage einer Ebene π in bezug auf ein Raumfünfeck $\mathfrak{R}$ zu bestimmen, nur festzustellen braucht, wie irgend eine Ecke von $\mathfrak{R}$ in bezug auf ein durch $\mathfrak{R}$ und π bestimmtes Raumfünfseit liegt, — daß man also statt jener stets diese anschaulichere Raumteilung benützen kann (Nr. 1). — Dabei stellt sich heraus, daß man in der *affinen* Geometrie je nach der Lage, die die uneigentliche Ebene in bezug auf ein $\mathfrak{R}$ mit nur *eigentlichen* Ecken einnimmt, zwei Typen von „*eigentlichen*" Raumfünfecken unterscheiden muß, und daß bei einem solchen $\mathfrak{R}$ sich das Gebiet, dem eine beliebig gegebene Ebene π angehört, immer unmittelbar durch die Anschauung erkennen läßt (Nr. 2). — Hierauf werden in Nr. 3 die Kriterien für die *projektive* Beschaffenheit der durch ein $\mathfrak{R}$ bestimmten Polarfelder[4]) und der durch ein P bestimmten Polarbündel hergeleitet und die ersteren für den Fall, daß $\mathfrak{R}$ ein *eigentliches* Raumfünfeck ist, spezialisiert. — Endlich bringt Nr. 4 als Ergänzung zu den *rein geometrischen* Betrachtungen in Nr. 1—3 die sehr einfachen *analytischen* Kriterien, die zur Bestimmung der Lage eines Raumelements in bezug auf $\mathfrak{R}$ oder P dienen, und gibt mit ihrer Hülfe einen zweiten Beweis für die in Nr. 3 hergeleiteten Kriterien.

1.

Der Teilung des *projektiven* Punktraums durch ein Raumfünfseit P in zehn *pentaedrisch* und fünf *tetraedrisch* begrenzte Gebiete[5]) entspricht dualistisch die Teilung des *projektiven* Ebenenraumes durch ein Raumfünfeck $\mathfrak{R}$ in zehn *fünfeckig* und fünf *viereckig* begrenzte Gebiete. Die Unterscheidung dieser Gebiete erfolgt nach den Kriterien:

I^{a}. *Ein Punkt P gehört einem pentaedrischen, bzw. tetraedrischen Gebiet des durch ein vollständiges Raumfünfseit geteilten Punktraums an, wenn er von drei nicht mit derselben Seite, bzw. mit derselben Seite, aber nicht mit derselben Kante inzidierenden Ecken des Raumfünfseits durch zwei von dessen Seiten getrennt wird.*

---

[4]) Wie die *parallelmetrische* Art der Kernkurven in diesen Polarfeldern von der Lage der sie tragenden Ebenen abhängt, soll in einer sich an die vorliegende anschließenden Mitteilung untersucht werden.

[5]) Vgl. Archiv, l. c. p. 102. — Diese Gebiete sind dort kurz als „Pentaeder" und „Tetraeder" (in weiterem Sinn) bezeichnet, was sich hier wegen der dualistischen Übertragung aus sprachlichen Gründen nicht empfiehlt.

I^b. *Eine Ebene* π *gehört einem fünfeckigen, bzw. viereckigen Gebiet des durch ein vollständiges Raumfünfeck geteilten Ebenenraums an, wenn sie von drei nicht mit derselben Ecke, bzw. mit derselben Ecke, aber nicht mit derselben Kante inzidierenden Seiten des Raumfünfecks durch zwei von dessen Ecken getrennt wird.*

Die Grenzen oder „*Grenzbereiche*" eines *Gebietes*[6]) von P sind Teile der von den Seiten von P getragenen Punktfelder; die Grenzbereiche eines Gebietes von $\mathfrak{R}$ sind Teile der von den Ecken von $\mathfrak{R}$ getragenen Ebenenbündel. Liegt z. B. ein Grenzbereich eines Gebietes von P in der Ebene α, so entsteht er durch die Teilung, die das von den Seiten β, γ, δ, ϵ auf α ausgeschnittene vollständige Vierseit in dem von α getragenen Punktfeld hervorbringt. Er ist also selbst entweder *vierseitig* oder *dreiseitig* begrenzt. Ob das eine oder das andere der Fall ist, sowie das dualistisch Entsprechende ergibt sich aus den Kriterien:

II^a. *Ein Punkt P gehört einem vierseitigen, bzw. dreiseitigen Bereich des durch ein vollständiges Vierseit geteilten Punktfeldes an, wenn er von zwei nicht mit derselben, bzw. mit derselben Seite inzidierenden Eckpunkten des Vierseits durch zwei von dessen Seiten getrennt wird.*

II^b. *Eine Ebene* π *gehört einem vierkantigen, bzw. dreikantigen Bereich des durch ein vollständiges Vierkant geteilten Ebenenbündels an, wenn sie von zwei nicht mit derselben, bzw. mit derselben Kante inzidierenden Seitenebenen des Vierkants durch zwei von dessen Kanten getrennt wird.*

Nun besitzt jedes *pentaedrische* Gebiet in *zwei* Seiten von P dreiseitige, in *drei* Seiten von P vierseitige Grenzbereiche, und das Entsprechende gilt für jedes *fünfeckige* Gebiet von $\mathfrak{R}$. D. h.

III. *Die fünf Seiten von* P *(Ecken von* $\mathfrak{R}$*) zerfallen für jedes pentaedrische (fünfeckige) Gebiet in ein Paar und ein Tripel.*

Wir können somit die zehn pentaedrischen Gebiete von P kurz nach den in ihnen *paarweise* auftretenden Seiten mit $\{\alpha\,\beta\}$, $\{\alpha\,\gamma\}$, ... , die zehn fünfeckigen Gebiete von $\mathfrak{R}$ nach den in ihnen *paarweise* auftretenden Ecken mit {AB}, {AC} . . . . bezeichnen, wonach also {AB} dasjenige fünfeckige Gebiet von $\mathfrak{R}$ ist, für das die Ecken A und B *dreikantige* Grenzbereiche tragen.

Jedes der fünf tetraedrischen (viereckigen) Gebiete hat vier dreiseitige (dreikantige) Grenzbereiche. Wenn wir sie mit $\{\alpha\}$, $\{\beta\}$

[6]) Wir unterscheiden also den zweidimensionalen *Bereich* von dem dreidimensionalen *Gebiet*.

. . . . ($\{A\}$, $\{B\}$ . . . .), d. h. jedes Gebiet nach derjenigen Seite von P (Ecke von $\mathfrak{R}$) bezeichnen, die *keinen* seiner Grenzbereiche trägt, so können wir I^a und I^b durch die schärferen, zur Unterscheidung der *einzelnen* Gebiete von P und $\mathfrak{R}$ dienenden Kriterien ersetzen:

IV^a. *Ein Punkt* P *liegt im Gebiet* $\{\delta\,\epsilon\}$ *von* P, *wenn*[7])

$$P,\ (\gamma\,\delta\,\epsilon)\,|\,\alpha,\beta;\quad P,\ (\beta\,\delta\,\epsilon)\,|\,\alpha,\gamma;$$
$$P,\ (\alpha\,\beta\,\gamma)\,|\,\delta,\epsilon,$$

im Gebiet $\{\epsilon\}$, *wenn*

$$P,\ (\gamma\,\delta\,\epsilon)\,|\,\alpha,\beta;\quad P,\ (\beta\,\delta\,\epsilon)\,|\,\alpha,\gamma;$$
$$P,\ (\beta\,\gamma\,\epsilon)\,|\,\alpha,\delta.$$

IV^b. *Eine Ebene* π *liegt im Gebiet* $\{DE\}$ *von* $\mathfrak{R}$, *wenn*

$$\pi,\ [CDE]\,|\,A,B;\quad \pi,\ [BDE]\,|\,A,C;$$
$$\pi,\ [ABC]\,|\,D,E,$$

im Gebiet $\{E\}$, *wenn*

$$\pi,\ [CDE]\,|\,A,B;\quad \pi,\ [BDE]\,|\,A,C;$$
$$\pi,\ [BCE]\,|\,A,D.$$

Aus dem pentaedrischen Gebiet $\{\delta\,\epsilon\}$ gelangt ein Punkt P durch dessen von den Seiten δ, bzw. ϵ getragene Grenzbereiche in die tetraedrischen Gebiete $\{\epsilon\}$, bzw. $\{\delta\}$, durch die von α, bzw. β, γ getragenen Grenzbereiche in die pentaedrischen Gebiete $\{\beta\gamma\}$, bzw. $\{\gamma\alpha\}$, $\{\alpha\,\beta\}$. Aus dem tetraedrischen Gebiet $\{\epsilon\}$ kommt er durch dessen von α, bzw. β, γ, δ getragene Grenzbereiche in die pentaedrischen Gebiete $\{\alpha\,\epsilon\}$, bzw. $\{\beta\,\epsilon\}$, $\{\gamma\,\epsilon\}$, $\{\delta\,\epsilon\}$. D. h.:

V^a. *Wenn ein Punkt P eine Seite von* P *überschreitet, so gelangt er aus einem tetraedrischen Gebiet immer in ein pentaedrisches, aus einem pentraedrischen Gebiet aber in ein tetraedrisches oder penta-*

---

[7]) P, $(\gamma\,\delta\,\epsilon)\,|\,\alpha,\beta$ ist zu lesen: „P wird von der Ecke $(\gamma\,\delta\,\epsilon)$ durch die Seiten α, β des Raumfünfseits getrennt." — Man sieht leicht, daß von drei „Trennungen" wie

$$P,\ (\gamma\,\delta\,\epsilon)\,|\,\alpha,\beta;\quad P,\ (\beta\,\delta\,\epsilon)\,|\,\alpha,\gamma;\quad P,\ (\alpha\,\delta\,\epsilon)\,|\,\beta,\gamma,$$

in denen *nur drei* Seiten von P auftreten, jede aus den beiden anderen folgt. Es gelten somit für ein pentaedrisches (tetraedrisches) Gebiet von P vier (sechs) Trennungen, von denen aber nur drei, die zusammen alle fünf (alle vier) zur Begrenzung des Gebiets beitragenden Seiten von P enthalten, voneinander unabhängig sind. — Aus den Trennungen, denen ein Punkt P unterliegt, kann man immer direkt ablesen, welchem Gebiet von P er angehört; denn sie geben unmittelbar das zu diesem Gebiet gehörige Seiten*paar*, bzw. die ihm *nicht* angehörige Seite von P an. — Das Entsprechende gilt natürlich auch für die Gebiete von $\mathfrak{R}$.

edrisches Gebiet, je nachdem die überschrittene Seite dem Seitenpaar oder dem Seitentripel des Ausgangsgebiets angehört.

V^b. *Wenn eine Ebene* π *eine Ecke von* $\mathfrak{R}$ *überschreitet, so gelangt sie aus einem viereckigen Gebiet immer in ein fünfeckiges, aus einem fünfeckigen Gebiet aber in ein viereckiges oder fünfeckiges Gebiet, je nachdem die überschrittene Ecke dem Eckenpaar oder dem Eckentripel des Ausgangsgebiets angehört.*

Durch die bisher aufgestellten Doppelsätze, in denen die Dualität aufs strengste gewahrt ist, sind die verschiedenen Gebiete von P und $\mathfrak{R}$, sowie ihre Grenzbereiche vollkommen ausreichend definiert, und es ist auch die Art, wie diese Gebiete aneinander grenzen, klargestellt. Da aber die Teilung des Punktraums durch P gegenüber derjenigen des Ebenenraumes durch $\mathfrak{R}$ in bezug auf Anschaulichkeit erheblich bevorzugt ist[8]), so ist es wünschenswert, zwischen beiden Raumteilungen einen Zusammenhang herzustellen, der die Bestimmung der Lage einer Ebene in bezug auf $\mathfrak{R}$ auf die anschaulichere Bestimmung der Lage eines Punktes in bezug auf ein Raumfünfseit zurückzuführen gestattet.

Das Raumfünfeck $\mathfrak{R}$ bestimmt mit einer ihm nicht angehörigen Ebene π zusammen fünf Raumfünfseite, die außer dieser Ebene die die Ecken B, C, D, E, bzw. A, C, D, E, ... von $\mathfrak{R}$ verbindenden Ebenen als *Seiten* besitzen. Wir bezeichnen diese *durch* $\mathfrak{R}$ *und* π *bestimmten* Raumfünfseite mit P_A, P_B, . . . und beweisen den Satz:

VI. *Je nachdem die Ebene* π *einem fünfeckigen oder viereckigen Gebiet des Raumfünfecks* $\mathfrak{R}$ *angehört, liegt jede Ecke von* $\mathfrak{R}$ *in einem pentaedrischen oder tetraedrischen Gebiet des durch* π *und die übrigen Ecken von* $\mathfrak{R}$ *bestimmten Raumfünfseits.*

Wir nehmen zunächst an, die Ebene π liege in dem *fünfeckigen* Gebiet {DE}, so daß nach IV^b für sie die Trennungen

$$\begin{gathered}\pi,\ [CDE]\,|\,A, B;\quad \pi,\ [BDE]\,|\,A, C;\\ \pi,\ [ABC]\,|\,D, E\end{gathered}\tag{1}$$

gelten, und bestimmen unter dieser Annahme dasjenige Gebiet des Raumfünfseits P_A, in dem dann A liegen muß.

Aus der letzten Trennung (1) folgt, daß auch das von [ABC] und π auf der Geraden $|DE|$ ausgeschnittene Punktepaar durch das Punktepaar D, E getrennt wird. Projiziert man diese beiden Paare von $|BC|$ aus durch zwei Ebenenpaare und ersetzt dann wieder die Ebenen des ersten Paares durch die mit ihnen inzidie-

[8]) Man „*sieht*", wie *P* in bezug auf P, nicht aber, wie π in bezug auf $\mathfrak{R}$ liegt!

renden Punkte A und $(\pi \mid DE \mid)$, so erhält man die Trennung

$$A, (\pi \mid DE \mid) \mid [BCD], [BCE],$$

die mit den beiden ersten Trennungen (1) zusammen nach IV^a besagt, daß A in dem *pentaedrischen* Gebiet $\{[BCD]\,[BCE]\}$ des Raumfünfseits P_A liegt. Ebenso ergibt sich, daß bei der für π angenommenen Lage der Punkt B, bzw. C in dem *pentaedrischen* Gebiet $\{[ACD]\,[ACE]\}$ von P_B, bzw. $\{[ABD]\,[ABE]\}$ von P_C liegen muß. Aus den beiden ersten Trennungen (1) folgen aber auch durch dieselben Schlüsse wie oben die Trennungen

$$D, (\pi \mid AB \mid) \mid [ACE], [BCE]$$
$$D, (\pi \mid AC \mid) \mid [ABE], [BCE],$$

die mit der letzten Trennung (1) zusammen nach IV^a aussagen, daß D in dem *pentaedrischen* Gebiet $\{[ABC]\,\pi\}$ von P_D liegt. Schließlich ergibt sich E in $\{[ABC]\,\pi\}$ von P_E. Es liegt also unter der für π gemachten Annahme *jede* Ecke von $\mathfrak{R}$ pentaedrisch in dem durch die vier übrigen Ecken und π bestimmten Raumfünfseit.

Ebenso zeigt man, daß, falls π dem *viereckigen* Gebiet $\{E\}$ von $\mathfrak{R}$ angehört, E in dem *tetraedrischen* Gebiet $\{\pi\}$ von P_E, A in dem *tetraedrischen* Gebiet $\{[BCD]\}$ von P_A liegt, usf. Satz VI ist also bewiesen und kann jetzt in erweiterter Form auch so ausgesprochen werden:

VII. *Wenn die Ebene π einem fünfeckigen Gebiet von $\mathfrak{R}$ angehört, liegt jede Ecke seines Eckentripels in einem von π vierseitig, jede Ecke seines Eckenpaares in einem von π dreiseitig begrenzten pentaedrischen Gebiet des durch π und die übrigen Ecken von $\mathfrak{R}$ bestimmten Raumfünfseits. — Wenn π einem viereckigen Gebiet von $\mathfrak{R}$ angehört, so liegt die dieses nicht begrenzende Ecke von $\mathfrak{R}$ in dem von π nicht begrenzten, jede der vier es begrenzenden Ecken in einem von π (dreiseitig) begrenzten tetraedrischen Gebiet des durch π und die übrigen Ecken von $\mathfrak{R}$ bestimmten Raumfünfseits.*

Aus VI ergibt sich noch als Korollar:

VIII. *Wenn eine Ecke eines Raumfünfecks $\mathfrak{R}$ in einem pentaedrischen (tetraedrischen) Gebiet des durch seine vier anderen Ecken und eine Ebene π bestimmten Raumfünfseits liegt, so gilt dasselbe für jede Ecke, und π selbst gehört dann einem fünfeckigen (viereckigen) Gebiet von $\mathfrak{R}$ an.*

Um die Lage einer gegebenen Ebene π in bezug auf ein ge-

gebenes Raumfünfeck $\mathfrak{R}$ zu bestimmen, brauchen wir somit nur von *einer* Ecke von $\mathfrak{R}$ festzustellen, ob sie pentaedrisch oder tetraedrisch in dem betreffenden Raumfünfseit liegt, was der Anschauung leichter fällt wie die direkte Bestimmung nach I^b. — Auch können wir jetzt sagen, ein *Raumfünfeck* $\mathfrak{R}$ *habe pentaedrische (tetraedrische) Lage in bezug auf eine Ebene* π, wenn π einem fünfeckigen (viereckigen) Gebiet von $\mathfrak{R}$ angehört[9]).

2.

Wenn ein Raumfünfeck *nur eigentliche* Ecken besitzt, so kann es in bezug auf die uneigentliche Ebene ϵ_∞ entweder tetraedrische oder pentaedrische Lage haben. Wir müssen demnach in der *affinen* Geometrie zwei Arten von *eigentlichen* Raumfünfecken, die wir als „*tetraedrale*" und „*pentaedrale*" *Raumfünfecke* bezeichnen wollen[10]), voneinander unterscheiden, während ein entsprechender Unterschied für die Raumfünfseite nicht existiert.

Ist $\mathfrak{R}$ ein *tetraedrales* Raumfünfeck und liegt ϵ_∞ etwa in dem Gebiet $\{E\}$ von $\mathfrak{R}$, so liegt E nach VII in dem tetraedrischen Gebiet $\{\epsilon_\infty\}$ des durch A, B, C, D, ϵ_∞ bestimmten Raumfünfseits P_E, also *im Innern* des durch die Punkte A, B, C, D bestimmten Tetraeders, während die Punkte A, . . ., D *außerhalb* der Tetraeder BCDE, . . . ABCE liegen. D. h.

Ein tetraedrales Raumfünfeck besitzt eine „innere" und vier „äußere" Ecken.

Ist dagegen $\mathfrak{R}$ ein *pentaedrales* Raumfünfeck, so liegt *jede* seiner Ecken *außerhalb* des durch die vier übrigen bestimmten Tetraeders. Somit kann man auch sagen:

Ein eigentliches Raumfünfeck ist tetraedral oder pentaedral, je nachdem es eine oder keine innere Ecke besitzt.

Nach III zerfallen die Ecken eines *pentaedralen* $\mathfrak{R}$ für jedes fünfeckige Gebiet, also auch für dasjenige, dem ϵ_∞ angehört, in ein Paar und ein Tripel. Dieses Gebiet ist aber bestimmt, sobald $\mathfrak{R}$ gegeben ist. D. h.

---

[9]) Ebenso könnte man, da auch der zu VIII dualistische Satz gilt, von der fünfeckigen (viereckigen) Lage eines Raumfünfseits P in bezug auf einen Punkt P sprechen, wenn P in einem pentaedrischen (tetraedrischen) Gebiet von P liegt. Dadurch wäre aber nichts gewonnen.

[10]) Entsprechend den *trigonalen* und *tetragonalen* Vierecken der ebenen Geometrie (vgl. Hefftер u. Koehler, l. c. p. 216).

Die Ecken jedes pentaedralen Raumfünfecks zerfallen in ein Eckenpaar und ein Eckentripel.

Liegt ϵ_∞ etwa in dem fünfeckigen Gebiet $\{DE\}$ von $\mathfrak{R}$, ist also DE das Paar, ABC das Tripel, so liegen nach VII *nur* D und E in von ϵ_∞ *dreiseitig* begrenzten Gebieten der Raumfünfseite P_D und P_E. Man kann somit immer unmittelbar erkennen, welche Ecken von $\mathfrak{R}$ sein Eckenpaar bilden[11]).

Aus den bisherigen Feststellungen folgt noch:

Die uneigentliche Ebene gehört demjenigen Gebiet eines tetraedralen (pentaedralen) Raumfünfecks an, das von dessen innerer Ecke nicht (von dessen Eckenpaar dreikantig) begrenzt ist.

Jetzt können wir endlich sehr anschauliche *affine* Kriterien zur Bestimmung der Lage, die eine Ebene π in bezug auf ein *eigentliches* Raumfünfeck haben kann, aufstellen.

Es sei $\mathfrak{R}$ ein *tetraedrales* Raumfünfeck und E seine *innere* Ecke, also ϵ_∞ in dem viereckigen Gebiet $\{E\}$ gelegen. Gehört dann die Ebene π ebenfalls dem Gebiet $\{E\}$ an, so liegen alle fünf Ecken von $\mathfrak{R}$ auf *derselben* Seite von π. Überschreitet nun π die äußere Ecke A und trennt also diese *affin*[12]) von jeder der übrigen Ecken, so gelangt es (nach V^b) aus $\{E\}$ in das fünfeckige Gebiet $\{AE\}$. Aus diesem aber kommt π nach Überschreitung der äußeren Ecke B in das ebenfalls fünfeckige Gebiet $\{CD\}$ und trennt jetzt A und B (affin) von den übrigen Ecken. D. h.

IX. *Eine einem tetraedralen Raumfünfeck nicht angehörige Ebene π liegt dann und nur dann in einem fünfeckigen Gebiet, wenn eine oder zwei äußere Ecken durch π von den übrigen Ecken des Raumfünfecks getrennt werden.*

Ist dagegen $\mathfrak{R}$ ein *pentaedrales* Raumfünfeck mit dem Eckenpaar DE, also ϵ_∞ in dem fünfeckigen Gebiet $\{DE\}$ gelegen, so gelangt eine Ebene π (nach V^b) aus $\{DE\}$ jedesmal in ein viereckiges Gebiet, wenn sie *eine* der Ecken D, E oder *zwei* von den Ecken A, B, C überschreitet. D. h.

X. *Eine einem pentaedralen Raumfünfeck nicht angehörige Ebene π liegt dann und nur dann in einem viereckigen Gebiet,*

---

[11]) Aus IV^b ergibt sich außerdem für das Eckenpaar eines *pentaedralen* Raumfünfecks ABCDE die Bestimmung: wenn A, B durch [CDE] und A, C durch [BDE] *affin* (vgl. Anm. 12) getrennt werden, ist ABC das Eckentripel, DE das Eckenpaar.

[12]) Zwei Punkte werden durch *eine* Ebene π (*affin*) getrennt, wenn sie durch die *beiden* Ebenen π und ϵ_∞ *projektiv* getrennt sind.

wenn eine Ecke des Eckenpaares oder zwei Ecken des Eckentripels durch π *von den übrigen Ecken des Raumfünfecks getrennt werden.*

3.

Wir untersuchen jetzt die *projektive* Beschaffenheit des Polarfelds, das durch ein beliebig gegebenes (also ev. auch uneigentliche Ecken enthaltendes) Raumfünfeck $\mathfrak{R}$ in einer $\mathfrak{R}$ nicht angehörigen Ebene π bestimmt wird. Dieses Polarfeld gehört den fünf polaren Räumen an, die man erhält, wenn man je vier Ecken von $\mathfrak{R}$ als Polviereck, die fünfte Ecke und π aber als ein Paar von Polarelementen betrachtet[13]). Sein Kernkegelschnitt entsteht folglich als Schnitt der Ebene π mit der Kernfläche eines beliebigen dieser polaren Räume — etwa desjenigen, der ABCD als Polviereck und E, π als Polarelemente besitzt. Dieser Kegelschnitt ist somit imaginär oder reell, je nachdem E in einem tetraedrischen oder pentaedrischen Gebiet des durch A, B, C, D, π bestimmten Raumfünfseits liegt[14]). D. h.:

XI. *Das durch ein Raumfünfeck* $\mathfrak{R}$ *in einer ihm nicht angehörigen Ebene* π *bestimmte Polarfeld ist elliptisch oder hyperbolisch, je nachdem eine beliebige Ecke von* $\mathfrak{R}$ *in einem tetraedrischen oder pentaedrischen Gebiet des durch* π *und die übrigen Ecken von* $\mathfrak{R}$ *bestimmten Raumfünfseits liegt.*

Nach VIII können wir diesem *projektiven* Kriterium auch die im Wortlaut einfachere, aber für den praktischen Gebrauch weniger bequeme Fassung geben:

XI^a. *Das durch ein Raumfünfeck* $\mathfrak{R}$ *in einer ihm nicht angehörigen Ebene* π *bestimmte Polarfeld ist elliptisch oder hyperbolisch, je nachdem* π *einem viereckigen oder fünfeckigen Gebiet von* $\mathfrak{R}$ *angehört.*

Dualistisch entsprechend gilt:

XI^b. *Das durch ein Raumfünfseit* P *in einem ihm nicht angehörigen Punkt P bestimmte Polarbündel ist elliptisch oder hyperbolisch, je nachdem P einem tetraedrischen oder pentraedrischen Gebiet von* P *angehört.*

Auch die projektive Beschaffenheit der Kernflächen in den fünf durch $\mathfrak{R}$ und π bestimmten polaren Räumen können wir leicht

---

[13]) Vgl. Reye, l. c.

[14]) Vgl. Archiv f. Math. u. Phys. l. c. Satz VI.

erkennen. Aus dem in Nr. 1 bewiesenen Satz VII und aus Satz V der zuletzt zitierten Arbeit folgt nämlich:

XII. *Wenn die Ebene* π *einem viereckigen (fünfeckigen) Gebiet des Raumfünfecks* $\mathfrak{R}$ *angehört, besitzen von den fünf durch* $\mathfrak{R}$ *und* π *bestimmten polaren Räumen vier eine nichtgeradlinige und einer eine imaginäre (zwei eine nichtgeradlinige und drei eine geradlinige) Kernfläche.*

Da eine imaginäre Fläche die Ebene π imaginär, eine geradlinige Fläche aber π immer reell schneidet und die Kernkurve des Polarfelds in der Ebene π allen fünf Kernflächen angehört, liefert XII einen zweiten Beweis für das Kriterium XI^a.

Ist $\mathfrak{R}$ ein *eigentliches* Raumfünfeck, so tritt nach IX und X an Stelle von XI^a das für die Anschauung besonders bequeme *affine* Kriterium:

XIII. *Das durch ein tetraedrales (pentaedrales) Raumfünfeck in einer ihm nicht angehörigen Ebene* π *bestimmte Polarfeld ist hyperbolisch (elliptisch), wenn eine oder zwei äußere Ecken (eine Ecke des Eckenpaares oder zwei Ecken des Eckentripels) durch* π *von den übrigen Ecken des Raumfünfecks getrennt werden. Bei jeder anderen Lage von* π *ist das Polarfeld elliptisch (hyperbolisch).*

4.

Um *analytische* Kriterien herzuleiten, die zur Bestimmung der Lage eines Punktes in bezug auf ein Raumfünfseit (einer Ebene in bezug auf ein Raumfünfeck) dienen, nehmen wir an, es seien

$$U_1(x) \equiv \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$U_5(x) \equiv \epsilon_1 x_1 + \epsilon_2 x_2 + \epsilon_3 x_3 + \epsilon_4 x_4 = 0$$

die Gleichungen der fünf Seiten α, β, γ, δ, ϵ eines Raumfünfseits P in beliebigen homogenen Koordinaten. Dann lassen sich stets fünf von Null verschiedene Konstanten k_i so bestimmen, daß die Identität

$$\sum_1^5 k_i U_i(x) \equiv 0$$

erfüllt ist. Setzt man also

$$k_i U_i(x) \equiv \overline{U}_i(x),$$

so gilt für die Gleichungen

(1) $$\overline{U}_i(x) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots . 5)$$

der fünf Seiten von P die Identität

(2) $$\overline{U}_1(x) + \overline{U}_2(x) + \overline{U}_3(x) + \overline{U}_4(x) + \overline{U}_5(x) \equiv 0$$

Führt man nun durch die Gleichungen

(3) $$\rho x'_i = \overline{U}_i(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots . 5)$$

die nach (2) durch die Identität

(4) $$x'_1 + x'_2 + x'_3 + x'_4 + x'_5 \equiv 0$$

verbundenen Variablen x'_i ein, so kann man vier beliebige von diesen als neue Punkt-Koordinaten betrachten in einem System, dessen Koordinatentetraeder aus vier Seiten von P besteht und das die fünfte Seite von P als Einheitsebene besitzt.

Ist etwa ϵ die Einheitsebene, so liegt der Einheitspunkt des Systems — als harmonischer Pol von ϵ in bezug auf das Koordinatentetraeder — in dem *tetraedrischen* Gebiet $\{\epsilon\}$ von P. Demnach haben die neuen Koordinaten y'_1, y'_2, y'_3, y'_4 eines beliebigen *in* $\{\epsilon\}$ *gelegenen* Punktes *P* alle vier *dasselbe* Vorzeichen. Es müssen somit, wenn $y_1, \ldots y_4$ seine Koordinaten im ursprünglichen System sind, in diesem Fall $\overline{U}_1(y) \ldots \overline{U}_4(y)$ das gleiche, also nach (2) das entgegengesetzte Vorzeichen wie $\overline{U}_5(y)$ besitzen, und das Entsprechende gilt für die vier anderen *tetraedrischen* Gebiete von P. Liegt dagegen der Punkt y in einem *pentaedrischen* Gebiet von P, z. B. in $\{\delta\epsilon\}$, so ergibt sich, daß $\overline{U}_4(y)$ und $\overline{U}_5(y)$ ungleich $\overline{U}_1(y)$, $\overline{U}_2(y)$, $\overline{U}_3(y)$ signiert sein müssen. D. h.

XIV. *Wenn die linken Seiten der ein Raumfünfseit* P *bestimmenden Gleichungen die Identität* (2) *erfüllen, so liegt ein* P *nicht angehöriger Punkt* y *in einem tetraedrischen oder pentaedrischen Gebiet von* P, *je nachdem in der Reihe*

$$\overline{U}_1(y),\ \overline{U}_2(y),\ \overline{U}_3(y),\ \overline{U}_4(y),\ \overline{U}_5(y)$$

eines oder zwei Glieder den übrigen ungleich signiert sind, und zwar liegt y *in dem von der Ebene* $\overline{U}_k(x) = 0$ *nicht begrenzten tetraedrischen, bzw. in dem von den Ebenen* $\overline{U}_k(x) = 0$ *und* $\overline{U}_l(x) = 0$ *dreiseitig begrenzten pentaedrischen Gebiet von* P, *wenn* $\overline{U}_k(y)$, *bzw.* $\overline{U}_k(y)$ *und* $\overline{U}_l(y)$ *den übrigen* $\overline{U}_i(y)$ *ungleich signiert sind.*

Entsprechend lautet das zu diesem dualistische Kriterium, das über die Lage einer Ebene π in bezug auf ein Raumfünfeck $\mathfrak{R}$ entscheidet. Wir sprechen es nicht aus, benützen es aber für den Fall, daß π mit der uneigentlichen Ebene des Raumes zusammen-

fällt, um ein *affines* analytisches Kriterium zur Unterscheidung tetraedraler und pentaedraler Raumfünfecke aufzustellen.

Sind a_i, b_i, c_i, d_i, e_i $(i = 1, 2, 3)$ die Koordinaten der Ecken eines *eigentlichen* Raumfünfecks $\mathfrak{R}$ in einem beliebigen[15]) Cartesischen Koordinatensystem, also

$$U_1(\xi) \equiv a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + a_3 \xi_3 + 1 = 0$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$U_5(\xi) \equiv e_1 \xi_1 + e_2 \xi_2 + e_3 \xi_3 + 1 = 0$$

ihre Gleichungen in Plückerschen Ebenenkoordinaten, so ist die Identität

$$\sum_1^5 k_i U_i(\xi) \equiv 0$$

erfüllt für

$$k_1 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 & e_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \equiv (b\,c\,d\,e)$$

$$k_2 = (c\,d\,e\,a)$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$k_5 = (a\,b\,c\,d).$$

Da die uneigentliche Ebene die Cartesischen Koordinaten 0, 0, 0, 1 besitzt, folgt somit aus dem Dualistikum zu XIV, daß die Vorzeichen der k_i über ihre Lage in bezug auf $\mathfrak{R}$ entscheiden. D. h.

XV. *Wenn* a_i, b_i, c_i, d_i, e_i $(i = 1, 2, 3)$ *die* Cartesischen *Koordinaten von fünf eigentlichen Punkten sind, so bilden diese eine tetraedrales oder pentaedrales Raumfünfeck* $\mathfrak{R}$, *je nachdem von den fünf aus dem Zyklus* (a b c d e) *gebildeten Determinanten*

(b c d e), (c d e a), (d e a b), (e a b c), (a b c d)

eine oder zwei den übrigen ungleich signiert sind, und zwar ist e *die innere Ecke, bzw.* d, e *das Eckenpaar von* $\mathfrak{R}$, *wenn* (a b c d), *bzw.* (e a b c) *und* (a b c d) *den übrigen Determinanten ungleich signiert sind.*

Es soll jetzt noch das Kriterium XI^b *analytisch* bewiesen werden.

Das Raumfünfseit P sei durch die die Identität (2) erfüllenden Gleichungen (1) gegeben, und y_i seien die Koordinaten des Punktes *P*.

[15]) Das Koordinatensystem braucht also nicht orthogonal zu sein, und sein Einheitspunkt kann außerhalb der drei Koordinatenebenen ganz beliebig gewählt werden.

Dann hat die Kernfläche des polaren Raumes, der durch das Poltetraeder $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ und durch den Punkt y als Pol der Ebene ϵ bestimmt ist, in den Hülfskoordinaten (3) die Gleichung

$$\frac{x'_1{}^2}{y'_1} + \frac{x'_2{}^2}{y'_2} + \frac{x'_3{}^2}{y'_3} + \frac{x'_4{}^2}{y'_4} = 0. \tag{5}$$

Es sind also

$$\frac{\overline{U}_k^2(x)}{\overline{U}_k(y)} + \frac{\overline{U}_l^2(x)}{\overline{U}_l(y)} + \frac{\overline{U}_m^2(x)}{\overline{U}_m(y)} + \frac{\overline{U}_n^2(x)}{\overline{U}_n(y)} = 0 \tag{6}$$

$$(k, l, m, n = 1, 2, 3, 4, 5)$$

die Gleichungen der Kernflächen in fünf polaren Räumen, von denen jeder das durch P und y bestimmte Polarbündel enthält. Dessen Kernkegel ist somit gemeinsamer Tangentenkegel dieser fünf Flächen.

Liegt nun der Punkt y in einem *tetraedrischen* Gebiet von P, so ist nach XIV *eine* der fünf Konstanten $U_i(y)$ den übrigen ungleich signiert; es sind also dann vier von den Flächen (6) nichtgeradlinig, und die fünfte ist imaginär. Folglich muß der Kernkegel des Polarbündels imaginär und dieses selbst *elliptisch* sein. Liegt dagegen y in einem *pentaedrischen* Gebiet von P, so sind von den Flächen (6) zwei nichtgeradlinig und drei geradlinig, und da die letzteren *nur* reelle Tangentenkegel besitzen, hat das Polarbündel jetzt einen reellen Kern und ist also *hyperbolisch*. Damit ist XI^b nochmals bewiesen.

Endlich folgt noch aus (5) unter Benutzung von (4) für den Kernkegel des Polarbündels die Gleichung

$$\frac{x'_1{}^2}{y'_1} + \frac{x'_2{}^2}{y'_2} + \frac{x'_3{}^2}{y'_3} + \frac{x'_4{}^2}{y'_4} + \frac{x'_5{}^2}{y'_5} = 0,$$

also nach (3) in *beliebigen homogenen* Koordinaten die elegante Darstellung

$$\sum_1^5 \frac{\overline{U}_i^2(x)}{\overline{U}_i(y)} = 0, \tag{7}$$

in der außer den Koordinaten der Spitze y nur die die Idenität (2) erfüllenden Gleichungen (1) der Seiten von P auftreten.

Betrachtet man (1) als die Gleichungen der *Ecken* eines Raumfünfecks $\mathfrak{R}$ und die y_i als Koordinaten einer ihm nicht angehörigen *Ebene* π, so ist durch die Gleichung (7) der Kernkegelschnitt des durch $\mathfrak{R}$ in der Ebene π bestimmten Polarfelds als Fläche zweiter Klasse dargestellt.