Universitätsbibliothek
Heidelberg

Heidelberger Akademie
der Wissenschaften

Heidelberger Akademie der Wissenschaften

Mathematische Abhandlungen

Autor: **Loewy, Alfred** (1873 – 1935)

Titel: **Über lineare homogene Differentialsysteme und ihre Sequenten**

Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse : Abt. A ; 1913, 17
Signatur UB Heidelberg: L 1431-10

Die Untersuchungen betreffen den Artbegriff bei einzelnen Differentialausdrücken und bei Differentialsystemen sowie die Irreduzibilität und vollständige Reduzibilität der Differentialsysteme. Vor allem wird der Zusammenhang dargelegt, der zwischen einem Differentialsystem und einem einzelnen, aus ihm abgeleiteten linearen homogenen Differentialausdruck, der Sequente, besteht. Die Sätze sind zumeist von der Integralexistenz unabhängig und behalten daher auch über das Gebiet der Differentialausdrücke hinaus für axiomatisch definierte Rationalitätsbereiche ihre Gültigkeit.

(Zsfassung aus: Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften / Jahresheft 1913, S. XXX)

Sitzungsberichte
der Heidelberger Akademie der Wissenschaften
Stiftung Heinrich Lanz
Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse
Abteilung A. Mathematisch-physikalische Wissenschaften
Jahrgang 1913. 17. Abhandlung.

Über lineare homogene Differentialsysteme und ihre Sequenten

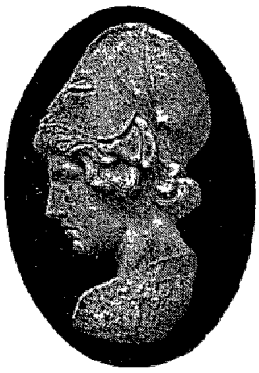
von

Alfred Loewy
in Freiburg i. Br.

+ L 1931 10

Eingegangen am 4. Juni 1913

Vorgelegt von P. Staeckel



Heidelberg 1913
Carl Winter's Universitätsbuchhandlung
Verlags-Nr. 935.

Im folgenden will ich einen Bericht geben über vornehmlich algebraische Untersuchungen aus der Theorie der Differentialsysteme, die ich angestellt habe. Sie bezwecken, vor allem dem Zusammenhang nachzugehen, der zwischen einem System linearer homogener Differentialausdrücke erster Ordnung für n Funktionen und einem einzelnen linearen homogenen Differentialausdruck n^{ter} Ordnung[1]) für eine Funktion, von mir Sequente genannt (vgl. § 4), besteht. Im übrigen beziehen sich die folgenden Untersuchungen auf den Artbegriff bei einzelnen Differentialausdrücken und bei Differentialsystemen, außerdem haben sie die Irreduzibilität und vollständige Reduzibilität bei Differentialsystemen zum Gegenstand. Soweit nicht anders bemerkt oder von Integralen die Rede ist, verlangen die Sätze und ihre Beweise nicht die Integralexistenz; sie sind daher auch über das Gebiet der Differentialsysteme hinaus einer Verallgemeinerung fähig, indem man einen in abstrakter Weise definierten Rationalitätsbereich zugrunde legt. Da die folgenden Sätze eine Reihe von zum Teil neu eingeführten Begriffen voraussetzen, unterlasse ich es, auf sie hier im einzelnen hinzuweisen. Auf die Resultate, die wir für Differentialsysteme mit n Funktionen Herrn L. Schlesinger bereits verdanken, werde ich im folgenden (§ 4, § 6 und § 7) aufmerksam machen. Die Beweise sowie eine weitere Ausgestaltung und Fortführung bleiben einer ausführlichen Publikation vorbehalten.

Den anzustellenden Untersuchungen liegt ein Rationalitätsbereich Σ zugrunde, d. h.[2]) irgend ein in sich vollständiges System von eindeutigen Funktionen einer unabhängigen Variablen x,

[1]) Unter „Differentialausdruck" soll stets ein „linearer homogener Differentialausdruck beliebiger Ordnung", unter einem „Differentialsystem" mit Ausnahme von § 7, Satz IV „ein System linearer homogener Differentialausdrücke erster Ordnung" verstanden werden.

[2]) Vgl. wegen der Definition des Rationalitätsbereiches z. B. meine Arbeit „Über vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichungen", Math. Annalen **62** (S. 89—117), S. 90 (1905).

bei dem durch Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division je zweier Funktionen aus Σ (die Division durch Null ist ausgeschlossen) sowie durch Differentiation jeder Funktion aus Σ das System Σ nicht verlassen wird. Ein Rationalitätsbereich, der derartig definiert ist, braucht nicht alle Konstanten zu enthalten. Insofern wir bei den folgenden Sätzen und Definitionen von der Integralexistenz Gebrauch machen, legen wir den Funktionen von Σ noch die Bedingung auf, daß jede Funktion von Σ in demselben Bereich der komplexen Ebene bis auf isolierte Punkte überall eine reguläre analytische Funktion sein soll. Alle im folgenden auftretenden Differentialausdrücke, Differentialsysteme und Matrizen sollen ausnahmslos Koeffizienten aus dem der Betrachtung zugrunde liegenden Rationalitätsbereiche Σ haben. Ein einzelner Differentialausdruck wird abgekürzt mit einem großen lateinischen, ein Differentialsystem mit einem großen deutschen, eine Matrix mit einem großen deutschen Buchstaben und einem darüber gesetzten Pfeil bezeichnet werden.

§ 1.

Der Artbegriff für einen Differentialausdruck bei Verwendung von Integralen.

Im § 1 will ich des leichteren Verständnisses wegen nur bekanntes wiederholen und einiges über die Terminologie bemerken.

$$A \equiv a_{n1}\, y + a_{n2} \frac{dy}{dx} + \cdots + a_{n\,n+1} \frac{d^n y}{dx^n} \quad \left(n \geqq 1\right) \text{ und}$$

$$B \equiv b_{m1}\, z + b_{m2} \frac{dz}{dx} + \cdots + b_{m\,m+1} \frac{d^m z}{dx^m} \quad \left(m \geqq 1\right)^{1)}$$

seien irgend zwei Differentialausdrücke mit Koeffizienten aus dem der Betrachtung zugrunde liegenden Rationalitätsbereiche Σ. Existiert ein Differentialausdruck:

$$P \equiv p_{11}\, y + p_{12} \frac{dy}{dx} + \cdots + p_{1r+1} \frac{d^r y}{dx^r} \quad \left(r \geqq o\right)$$

mit Koeffizienten aus Σ, so daß alle Integrale der Differentialgleichung $B = 0$ übereinstimmen mit dem Funktionensystem $P(Y_A)$, wenn Y_A alle Integrale der Differentialgleichung $A = 0$

[1]) Die Koeffizienten sind mit Rücksicht auf das folgende mit doppelten Indices versehen.

durchläuft, so hat die Differentialgleichung $B=0$ stets eine Ordnung $m \leqq n$, wenn n die Ordnung der Differentialgleichung $A=0$ bedeutet. Für den Fall $m=n$ hat POINCARÉ 1884 diese Untersuchungen begonnen, und nach ihm heißen zwei Differentialausdrücke A und B derselben Ordnung $m=n$, die in dem geschilderten Verhältnis stehen, von derselben Art. Im Falle gleicher Ordnung $m=n$ beweist man die Symmetrie der zwischen A und B stattfindenden Beziehung, d. h. man weist die Existenz eines Differentialausdruckes Q mit Koeffizienten aus dem Rationalitätsbereiche nach, so daß das Funktionensystem $Q(Z_B)$ übereinstimmt mit den Integralen der Differentialgleichung $A=0$, wenn Z_B alle Integrale der Differentialgleichung $B=0$ durchläuft. Infolge dieser Umkehrbarkeit der Beziehung verwendet man im Falle $m=n$ auch die Bezeichnung „gegenseitig von derselben Art". Im Falle $m<n$, für den das Verhältnis zwischen A und B nicht umkehrbar ist, soll der Differentialausdruck B als dem Differentialausdruck A subordiniert bezeichnet werden.

Bleibt es unentschieden, ob $m=n$ oder $m<n$ ist, so werde ich sagen, daß B in der durch A bestimmten Art enthalten ist, oder daß B sich innerhalb der Art von A befindet[1]).

§ 2.
Der Artbegriff für einen Differentialausdruck bei Verwendung der symbolischen Produktbildung von Differentialausdrücken.

Die in § 1 dafür gegebene Definition, daß B in der durch A bestimmten Art enthalten ist, wollen wir als Definition (D) bezeichnen; sie setzt Integralexistenz voraus. An ihre Stelle kann man die folgende Definition treten lassen, die von der Integralexistenz unabhängig ist und sich der symbolischen Produktbildung linearer homogener Differentialausdrücke bedient[2]).

---

[1]) In meiner Arbeit „Über reduzible lineare homogene Differentialgleichungen", Math. Annalen **56** (S. 549—584), S. 554 (1903) hatte ich die weniger prägnante Bezeichnung „B ist mit A von derselben Art". Ich schließe mich hiermit der Terminologie von Herrn E. VESSIOT in der Encyclopédie des sciences math. II. 16, Nr. 29, Anmerkung 188 an.

[2]) Vgl. auch L. HEFFTER, Über gemeinsame Vielfache linearer Differentialausdrücke und lineare Differentialgleichungen derselben Klasse, Journal für die reine und angewandte Mathematik **116**, S. 157—166, (1896). L. SCHLESINGER, Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen, Bd. II_1, Leipzig 1897, S. 115 ff.

Definition (Δ). Ein Differentialausdruck B heißt in der durch einen Differentialausdruck A bestimmten Art enthalten, wenn es zwei Differentialausdrücke P und Q gibt, so daß zwischen symbolischen Produkten von Differentialausdrücken die Gleichung $BP = QA$ besteht, und, nachdem P und A von einem etwaigen größten gemeinsamen Teiler befreit sind, der sich aus A alsdann ergebende Differentialausdruck A_1 die gleiche Ordnung wie B hat. Ist also A^* ein größter gemeinsamer Teiler von P und A, so soll $A = A_1 A^*$, $P = P_1 A^*$ sein, wobei A_1 und P_1 teilerfremd und A_1 und B von gleicher Ordnung sind. Für den besonderen Fall $m = n$, wo A und B gegenseitig von derselben Art sind, nimmt die Definition (Δ) die Form an: Zwei Differentialausdrücke A und B der gleichen Ordnung heißen von derselben Art, wenn es zwei Differentialausdrücke P und Q gibt, so daß P und A teilerfremd und $BP = QA$ ist.

Daß für den Fall $m = n$ die Definitionen (D) und (Δ) völlig äquivalent sind, wenn Integrale existieren, ist bekannt[1]). Auch der Nachweis, daß für den Fall $m \leqq n$ die Definitionen (D) und (Δ) völlig gleichwertig sind, läßt sich leicht erbringen.

Ist $m < n$, d. h. ist der Differentialausdruck B dem Differentialausdruck A subordiniert, so muß nach Definition (Δ) der Differentialausdruck A zerlegbar sein in $A = A_1 A^*$, wobei A_1 von der Ordnung m und A^* von der Ordnung $n - m$ ist. Hieraus folgt unmittelbar: Zu einem Differentialausdruck A gibt es nur dann subordinierte Differentialausdrücke, wenn A reduzibel ist. In diesem Fall gibt es auch stets zu A subordinierte Differentialausdrücke[2]); ist nämlich $A_1 A^*$ irgend eine Zerlegung des reduziblen Differentialausdruckes A, so stimmen alle dem Differentialausdruck A subordinierten Differentialausdrücke überein mit allen möglichen durch eine Zerlegung von A gelieferten A_1 und denjenigen Differentialausdrücken,

[1]) Vgl. meinen Aufsatz „Zur Theorie der linearen homogenen Differentialausdrücke", Math. Ann. **72**, (S. 203—210), S. 205 und die schöne Dissertation von Herrn H. Blumberg, Über algebraische Eigenschaften von linearen homogenen Differentialausdrücken, Göttingen 1912, (S. 1—52), S. 26 und S. 48.

[2]) Vgl. L. Fuchs, Sitzungsberichte der Kgl. Preuß. Akademie 1888, S. 1276 = Gesammelte math. Werke, Bd. III, Berlin 1909, S. 18.

die mit A_1 von derselben Art sind. Man beweist ferner ohne die Integralexistenz, daß die eingeführte Beziehung transitiv ist, d. h.:

Ist B in der durch A bestimmten Art, C in der durch B bestimmten Art enthalten, so ist C auch in der durch A bestimmten Art enthalten.

§ 3.

Der Artbegriff für einen Differentialausdruck bei Verwendung des Matrizenkalküls.

Anstatt der Definition (Δ) des § 2 soll jetzt für die Artbeziehung eine neue Definition gegeben werden. Diese bedient sich nicht der symbolischen Produktbildung von Differentialausdrücken, sondern des Matrizenkalküls. Ebenso wie die Definition (Δ) ist die neue Definition unabhängig von der Integralexistenz.

Definition (Δ'). Ein Differentialausdruck

$$B \equiv b_{m1} z + b_{m2} \frac{dz}{dx} + \cdots + b_{mm} \frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}} + b_{mm+1} \frac{d^m z}{dx^m} \quad (m \geqq 1)$$

von der Ordnung $m \leqq n$ heißt in der durch einen Differentialausdruck

$$A \equiv a_{n1} y + a_{n2} \frac{dy}{dx} + \cdots + a_{nn} \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + a_{nn+1} \frac{d^n y}{dx^n} \quad (n \geqq 1)$$

bestimmten Art enthalten, wenn es eine Matrix

$$\overleftrightarrow{\mathfrak{P}} = \left\| \begin{matrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & & & \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{matrix} \right\|$$

vom Range m mit Elementen p_{ik} $(i = 1, 2, \ldots m;\ k = 1, 2, \ldots, n)$ aus dem Rationalitätsbereiche gibt, so daß die Gleichung zwischen quadratischen Matrizen n^{ten} Grades

$$\overleftrightarrow{\mathfrak{B}}\,\overleftrightarrow{\mathfrak{P}} = -\overleftrightarrow{\mathfrak{P}}' + \overleftrightarrow{\mathfrak{P}}\,\overleftrightarrow{\mathfrak{A}}$$

besteht. Hierbei bedeutet $\overleftrightarrow{\mathfrak{P}}'$ diejenige Matrix, die aus $\overleftrightarrow{\mathfrak{P}}$ hervorgeht, wenn man in $\overleftrightarrow{\mathfrak{P}}$ alle Elemente p_{ik} durch ihre Differentialquotienten ersetzt; es ist

$$\overleftrightarrow{\mathfrak{A}} = \left\| \begin{matrix} 0 & -1 & 0 & 0 \cdots\cdots 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \cdots\cdots 0 \\ \vdots & & & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \cdots -1 \\ \frac{a_{n1}}{a_{nn+1}} & \frac{a_{n2}}{a_{nn+1}} & \cdots\cdots & \frac{a_{nn}}{a_{nn+1}} \end{matrix} \right\| \text{ und}$$

$$\overleftrightarrow{\mathfrak{B}} = \left\| \begin{matrix} 0 & -1 & 0 & 0 \cdots 0 & 0 \cdots 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \cdots 0 & 0 \cdots 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \cdots 0 \\ \frac{b_{m1}}{b_{mm+1}} & \frac{b_{m2}}{b_{mm+1}} & \cdots\cdots & \frac{b_{mm}}{b_{mm+1}} & 0 \cdots 0 \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 \cdots 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \quad \vdots \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 \cdots 0 \end{matrix} \right\| .$$

Die Definition (Δ') läßt sich ebenfalls ohne Benützung der Integralexistenz auch gleichwertig folgendermaßen aussprechen:

Definition (Δ''). Der Differentialausdruck B heißt in der durch den Differentialausdruck A bestimmten Art enthalten, wenn man n Größen $p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{1n}$ des Rationalitätsbereiches von folgender Beschaffenheit finden kann: Man bilde aus $p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{1n}$ sukzessiv für $i = 1, 2, \ldots, m$

$$p_{i+1k} = + p'_{ik} + p_{ik-1} - p_{in} \frac{a_{nk}}{a_{nn+1}} \quad \left(k = 1, 2, \ldots, n\right)$$

wobei p'_{ik} die Differentialquotienten der p_{ik} sind und p_{i0} den Wert Null hat, und leite aus diesen Größen mit Hilfe von n unabhängigen Variablen $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ die $m+1$ Linearfunktionen ab:

$$\begin{matrix} Z_1 & = p_{11} & Y_1 + p_{12} & Y_2 + \cdots + p_{1n} & Y_n, \\ Z_2 & = p_{21} & Y_1 + p_{22} & Y_2 + \cdots + p_{2n} & Y_n, \\ \vdots & & & & \vdots \\ Z_m & = p_{m1} & Y_1 + p_{m2} & Y_2 + \cdots + p_{mn} & Y_n, \\ Z_{m+1} & = p_{m+11} & Y_1 + p_{m+12} & Y_2 + \cdots + p_{m+1,n} & Y_n; \end{matrix}$$

alsdann müssen die ersten m Funktionen $Z_1, Z_2, \ldots, Z_m$ linear unabhängig sein, während die $m+1$ Funktionen durch die Relation:

$$b_{m1} Z_1 + b_{m2} Z_2 + \cdots + b_{mm} Z_m + b_{mm+1} Z_{m+1} = 0$$

in Dependenz stehen.

Ohne Benützung der Integralexistenz läßt sich der Nachweis führen, daß (Δ), (Δ') und (Δ'') völlig äquivalente Definitionen sind. Setzt man die Integralexistenz voraus, so kann man weiter zeigen, daß die Integrale der Differentialgleichung $B = O$ übereinstimmen mit dem Funktionensystem $P\,(Y_A)$, wenn Y_A die Integrale der Differentialgleichung $A = O$ durchläuft und P den Differentialausdruck

$$p_{11}\,y + p_{12}\frac{dy}{dx} + \cdots + p_{1n}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$$

bedeutet.

§ 4.

Die Sequenten eines Differentialsystems.

Vorgelegt sei ein lineares homogenes Differentialsystem $\mathfrak{A}$ erster Ordnung für n Funktionen:

$$\begin{array}{l} a_{11}\,y_1 + a_{12}\,y_2 + \cdots + a_{1n}\,y_n + a_{1n+1}\dfrac{dy_1}{dx}\,, \\ a_{21}\,y_1 + a_{22}\,y_2 + \cdots + a_{2n}\,y_n + a_{2n+1}\dfrac{dy_2}{dx}\,, \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}\,y_1 + a_{n2}\,y_2 + \cdots + a_{nn}\,y_n + a_{nn+1}\dfrac{dy_n}{dx}\,, \end{array}$$

ferner ein Differentialausdruck S m^{ter} Ordnung:

$$S \equiv s_{m1}\,z + s_{m2}\frac{dz}{dx} + \cdots + s_{m\,m+1}\frac{d^m z}{dx^m}\ \left(m \geqq 1\right).$$

Der Differentialausdruck S soll eine Sequente des Differentialsystems $\mathfrak{A}$ heißen, wenn man n Funktionen $p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{1n}$ aus dem Rationalitätsbereich finden kann, so daß die Integrale der Differentialgleichung $S = O$ übereinstimmen mit dem Funktionensystem $p_{11}\left(y_1\right)_{\mathfrak{A}} + p_{12}\left(y_2\right)_{\mathfrak{A}} + \cdots + p_{1n}\left(y_n\right)_{\mathfrak{A}}$, wobei $\left(y_1\right)_{\mathfrak{A}}$, $\left(y_2\right)_{\mathfrak{A}}, \ldots, \left(y_n\right)_{\mathfrak{A}}$ jedes Lösungssystem des zu $\mathfrak{A}$ gehörigen Differentialgleichungssystems

$$a_{i1}\,y_1 + a_{i2}\,y_2 + \cdots + a_{in}\,y_n + a_{in+1}\frac{dy_i}{dx} = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

durchlaufen. Man beweist alsdann, daß $m \leqq n$ ist*).

*) Vgl. hierzu L. Schlesinger, Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen, Leipzig und Berlin 1908, S. 158.

Ist $m=n$, so soll S eine dem Differentialsystem $\mathfrak{A}$ koordinierte Sequente, im Falle $m<n$ eine dem Differentialsystem subordinierte Sequente heißen.

Die Definition der Sequente wird von der Integralexistenz unabhängig, wenn man folgendermaßen definiert:

Definition (Δ'_1). Ein Differentialausdruck für eine Funktion

$$S \equiv s_{m1}\, z + s_{m2}\frac{dz}{dx} + \cdots + s_{mm}\frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}} + s_{mm+1}\frac{d^m z}{dx^m} \quad \left(m \geqq 1\right)$$

heißt eine Sequente des Differentialsystems $\mathfrak{A}$ für $n \geqq m$ Funktionen:

$$a_{i1}\, y_1 + a_{i2}\, y_2 + \cdots + a_{in}\, y_n + a_{in+1}\frac{dy_i}{dx} \quad \left(i = 1, 2, \ldots, n\right),$$

wenn es eine Matrix

$$\overleftrightarrow{\mathfrak{P}} = \left\| \begin{matrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{matrix} \right\|$$

vom Range m mit Elementen p_{ik} $\left(i=1,2,\ldots,m;\, k=1,2,\ldots,n\right)$ aus dem Rationalitätsbereiche gibt, so daß die Gleichung zwischen quadratischen Matrizen n^{ten} Grades besteht:

$$\overleftrightarrow{\mathfrak{S}}\,\overleftrightarrow{\mathfrak{P}} = -\overleftrightarrow{\mathfrak{P}}' + \overleftrightarrow{\mathfrak{P}}\,\overleftrightarrow{\mathfrak{A}}$$

Hierbei bedeutet $\overleftrightarrow{\mathfrak{P}}'$ diejenige Matrix, die aus $\overleftrightarrow{\mathfrak{P}}$ hervorgeht, wenn man in $\overleftrightarrow{\mathfrak{P}}$ alle Elemente p_{ik} durch ihre Differentialquotienten ersetzt; es ist ferner

$$\overleftrightarrow{\mathfrak{A}} = \left\| \begin{matrix} \dfrac{a_{11}}{a_{1n+1}} & \dfrac{a_{12}}{a_{1n+1}} & \cdots & \dfrac{a_{1n}}{a_{1n+1}} \\ \dfrac{a_{21}}{a_{2n+1}} & \dfrac{a_{22}}{a_{2n+1}} & \cdots & \dfrac{a_{2n}}{a_{2n+1}} \\ \vdots & & & \\ \dfrac{a_{n1}}{a_{nn+1}} & \dfrac{a_{n2}}{a_{nn+1}} & \cdots & \dfrac{a_{nn}}{a_{nn+1}} \end{matrix} \right\| \text{ und}$$

$$\mathfrak{A} = \left\| \begin{array}{cccccc} 0 & -1 & 0 \cdots 0 & 0 & 0 \cdots 0 \\ 0 & 0 & -1 \cdots 0 & 0 & 0 \cdots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots 0 & -1 & 0 \cdots 0 \\ \frac{s_{m1}}{s_{m\,m+1}} & \frac{s_{m2}}{s_{m\,m+1}} & \frac{s_{m3}}{s_{m\,m+1}} \cdots & \frac{s_{mm}}{s_{m\,m+1}} & 0 \cdots 0 \\ 0 & 0 & 0 \cdots\cdots 0 & & 0 \cdots 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots\cdots 0 & & 0 \cdots 0 \end{array} \right\| .$$

Anstatt der Definition (Δ_1') kann man auch ohne Benützung der Integralexistenz die folgende gleichwertige treten lassen:

Definition (Δ''_1). Ein Differentialausdruck

$$S \equiv s_{m1} z + s_{m2} \frac{dz}{dx} + \cdots + s_{mm} \frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}} + s_{m\,m+1} \frac{d^m z}{dx^m} \quad \left(m \geqq 1\right)$$

heißt eine Sequente eines Differentialsystems $\mathfrak{A}$:

$$a_{i1} y_1 + a_{i2} y_2 + \cdots + a_{in} y_n + a_{in+1} \frac{dy_i}{dx} \quad \left(i = 1, 2, \ldots, n\right)$$

für n Funktionen, wenn man n Größen $p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{1n}$ des Rationalitätsbereiches von folgender Beschaffenheit finden kann: Man bilde aus $p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{1n}$ sukzessiv für $i = 1, 2, \ldots, m$

$$p_{i+1k} = + p'_{ik} - \sum_{s=1}^{s=n} p_{is} \frac{a_{sk}}{a_{sn+1}} \quad \left(k = 1, 2, \ldots, n\right),$$

wobei p'_{ik} die Differentialquotienten der p_{ik} sind und p_{i0} den Wert Null hat, und leite aus diesen Größen mit Hilfe von n unabhängigen Variablen $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ die $m+1$ Linearfunktionen ab:

$$\begin{array}{llll} Z_1 & = p_{11} & Y_1 + p_{12} & Y_2 + \cdots + p_{1n} \quad Y_n, \\ Z_2 & = p_{21} & Y_1 + p_{22} & Y_2 + \cdots + p_{2n} \quad Y_n, \\ \vdots & & & \\ Z_m & = p_{m1} & Y_1 + p_{m2} & Y_2 + \cdots + p_{mn} \quad Y_n, \\ Z_{m+1} & = p_{m+11} & Y_1 + p_{m+12} & Y_2 + \cdots + p_{m+1n} \quad Y_n; \end{array}$$

alsdann müssen die ersten m Funktionen $Z_1, Z_2, \ldots, Z_m$ linear unabhängig sein, während die $m+1$ Funktionen durch die Relation:

$$s_{m1} Z_1 + s_{m2} Z_2 + \cdots + s_{m\,m+1} Z_{m+1} = 0$$

in Dependenz stehen.

Ohne die Integralexistenz lassen sich alsdann folgende Sätze beweisen:

Lehrsatz I. Ist der Differentialausdruck S_1 eine Sequente des Differentialsystems $\mathfrak{A}$ und ist S_2 irgend ein Differentialausdruck, der in der durch S_1 bestimmten Art enthalten ist, so ist S_2 ebenso wie S_1 eine Sequente von $\mathfrak{A}$.

Lehrsatz II. Sind S_1 und S_2 Sequenten eines und desselben Differentialsystems $\mathfrak{A}$ und ist S_1 eine zu $\mathfrak{A}$ koordinierte Sequente, so ist S_2 in der durch S_1 bestimmten Art enthalten*).

§ 5.

Nochmals der Artbegriff bei einem Differentialausdruck.

Zu jedem Differentialausdruck

$$S_1 \equiv s_{m1}\, z + s_{m2} \frac{dz}{dx} + \cdots + s_{mm} \frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}} + s_{mm+1} \frac{d^m z}{dx^m} \quad (m \geqq 1)$$

gibt es Differentialsysteme für m Funktionen, die S_1 zur Sequente haben. Das einfachste solcher Differentialsysteme ist das System

$$\frac{dy_1}{dx} - y_2, \frac{dy_2}{dx} - y_3, \cdots \frac{dy_{m-1}}{dx} - y_m,$$
$$s_{m1}\, y_1 + s_{m2}\, y_2 + \cdots + s_{mm}\, y_m + s_{mm+1} \frac{dy_m}{dx};$$

für $z = y_1$ ergibt sich S_1 als Sequente dieses Systems. Das System geht aus S_1 hervor, wenn man für die Abgeleiteten von z neue Variablen einführt.

---

*) Ein ähnlicher Satz findet sich in Herrn Schlesingers Bericht über die Entwicklung der Theorie der linearen Differentialgleichungen seit 1865 (Leipzig 1909), S. 20: „Bildet man die Ausdrücke $r_1 y_1 + r_2 y_2 + \ldots + r_n y_n$, wo die $r_1, r_2, \ldots, r_n$ Funktionen des Rationalitätsbereiches bedeuten, so gehören alle Differentialgleichungen, denen diese Ausdrücke genügen (d. h. die von uns sogenannten Sequenten), zu derselben Art.“ Daß unsere Einschränkung, wonach S_1 eine koordinierte Sequente sein muß, wesentlich ist, lehrt das Beispiel $\frac{dy_1}{dx} - y_1 = 0, \frac{dy_2}{dx} = 0$ für den Rationalitätsbereich aller Konstanten. Bei diesem zerfallenden System ist jede der zwei Differentialgleichungen, aus denen sich das System zusammensetzt, Sequente des Systems, ohne daß diese beiden Sequenten von derselben Art sind.

Für das folgende Theorem genügt es zu wissen, daß für jeden Differentialausdruck S_1 wenigstens ein Differentialsystem existiert, das S_1 zur koordinierten Sequente hat. Im folgenden Paragraphen werden wir dann das allgemeinste System angeben, das einen vorgelegten Differentialausdruck zur Sequente hat. Auf Grund der Sätze I und II im § 4 kann man folgendes charakteristische Kriterium dafür aufstellen, daß sich ein Differentialausdruck S_2 in der durch S_1 bestimmten Art befindet:

Lehrsatz: Von zwei Differentialausdrücken S_1 und S_2 ist S_2 dann und nur dann in der durch S_1 bestimmten Art enthalten, wenn es ein Differentialsystem gibt, dessen Funktionenzahl gleich der Ordnung von S_1 ist, und das sowohl S_1 als auch S_2 zu Sequenten hat.

§ 6.

Der Artbegriff für Differentialsysteme.

Zur Erledigung der Frage nach der Gesamtheit aller Differentialsysteme, bei denen ein vorgelegter Differentialausdruck Sequente sein kann, ist die Betrachtung des Artbegriffs bei Differentialsystemen erforderlich. Es soll hierfür nur folgende, die Integralexistenz nicht benützende Definition gegeben werden:

Definition (Δ'_2). Ein Differentialsystem $\mathfrak{B}$

$$b_{i1}\, z_1 + b_{i2}\, z_2 + \cdot \; + b_{im}\, z_m + b_{im+1} \frac{dz_i}{dx} \quad \left(i = 1, 2, \ldots, m\right)$$

für m Funktionen heißt in der durch ein Differentialsystem $\mathfrak{A}$

$$a_{i1}\, y_1 + a_{i2}\, y_2 + \cdots + a_{in}\, y_n + a_{in+1} \frac{dy_i}{dx} \quad \left(i = 1, 2, \ldots, n\right)$$

für $n \geqq m$ Funktionen bestimmten Art enthalten, wenn eine Matrix

$$\overleftrightarrow{\mathfrak{P}} = \left\| \begin{matrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & & & \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{matrix} \right\|$$

vom Range m mit Elementen p_{ik} $(i=1,2,\ldots,m;\ k=1,2,\ldots,n)$ aus dem Rationalitätsbereich existiert, so daß die Gleichung zwischen quadratischen Matrizen

$$\overleftrightarrow{\mathfrak{B}}\,\overleftrightarrow{\mathfrak{P}} = -\overleftrightarrow{\mathfrak{P}}' + \overleftrightarrow{\mathfrak{P}}\,\overleftrightarrow{\mathfrak{A}}$$

besteht. Hierbei hat $\overleftrightarrow{\mathfrak{P}}'$ die schon früher erwähnte Bedeutung; es ist

$$\overleftrightarrow{\mathfrak{A}} = \left\| \begin{matrix} \frac{a_{11}}{a_{1\,n+1}} & \frac{a_{12}}{a_{1\,n+1}} & \cdots & \frac{a_{1n}}{a_{1\,n+1}} \\ \frac{a_{21}}{a_{2\,n+1}} & \frac{a_{22}}{a_{2\,n+1}} & \cdots & \frac{a_{2n}}{a_{2\,n+1}} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{a_{n1}}{a_{n\,n+1}} & \frac{a_{n2}}{a_{n\,n+1}} & \cdots & \frac{a_{nn}}{a_{n\,n+1}} \end{matrix} \right\| \text{ und}$$

$$\overleftrightarrow{\mathfrak{B}} = \left\| \begin{matrix} \frac{b_{11}}{b_{1\,m+1}} & \frac{b_{12}}{b_{1\,m+1}} & \cdots & \frac{b_{1m}}{b_{1\,m+1}} & 0\,0\cdots 0 \\ \vdots & & & & \\ \frac{b_{m1}}{b_{m\,m+1}} & \frac{b_{m2}}{b_{m\,m+1}} & \cdots & \frac{b_{mm}}{b_{m\,m+1}} & 0\,0\cdots 0 \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0\,0\cdots 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0\,0\cdots 0 \end{matrix} \right\| .$$

Für den Fall $m=n$ ist diese Beziehung symmetrisch; alsdann sagt man, daß die Differentialsysteme $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ von derselben Art sind. Ist $m<n$, so soll das Differentialsystem $\mathfrak{B}$ als dem Differentialsystem $\mathfrak{A}$ subordiniert bezeichnet werden. Den Artbegriff für $m=n$ hat Herr SCHLESINGER[1]) eingeführt, und er ist dabei auch für den Fall $m=n$ zu der oben angegebenen Matrizengleichung gelangt, die zwischen den Koeffizienten zweier Differentialsysteme derselben Art bestehen muß. Die folgenden Sätze, die sich ohne die Integralexistenz beweisen lassen, finden sich aber auch für $m=n$ nicht in der Literatur:

Lehrsatz I. Der Artbegriff ist transitiv, d. h. ist das Differentialsystem $\mathfrak{B}$ in der durch ein Differentialsystem $\mathfrak{A}$ und ferner $\mathfrak{C}$ in der durch das Differentialsystem $\mathfrak{B}$ bestimmten Art enthalten, so ist $\mathfrak{C}$ in der durch $\mathfrak{A}$ bestimmten Art enthalten.

[1]) L. SCHLESINGER, Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen, Leipzig und Berlin 1908, S. 105 und S. 118.

Lehrsatz II. Ist S_1 eine koordinierte Sequente des Differentialsystems $\mathfrak{B}$ und ferner eine beliebige Sequente von $\mathfrak{A}$, so ist $\mathfrak{B}$ in der durch das Differentialsystem $\mathfrak{A}$ bestimmten Art enthalten.

Lehrsatz III. Jede Sequente von $\mathfrak{B}$ ist, wenn $\mathfrak{B}$ in der durch $\mathfrak{A}$ bestimmten Art enthalten ist, auch eine Sequente von $\mathfrak{A}$.

In diesen Sätzen ist enthalten:

Das allgemeinste Differentialsystem, bei dem ein vorgelegter Differentialausdruck S_1 Sequente sein kann, findet man, indem man irgend ein zu S_1 koordiniertes Differentialsystem $\mathfrak{B}$ bestimmt. Jedes Differentialsystem $\mathfrak{A}$, das in der durch es bestimmten Art das System $\mathfrak{B}$ enthält, und auch nur ein solches System $\mathfrak{A}$ hat S_1 zur Sequente.

Nach Lehrsatz III müssen zwei Differentialsysteme derselben Art die nämlichen Sequenten haben. Die Übereinstimmung in den Sequenten ist aber nicht genügend, damit zwei Differentialsysteme von derselben Art sind, es sei denn, daß man weiß, ein jedes von ihnen besitzt eine koordinierte Sequente. Es gibt nämlich auch Systeme ohne koordinierte Sequenten, z. B. das System $\frac{dy_1}{dx} - y_1, \frac{dy_2}{dx} - y_2$ für den Rationalitätsbereich aller Konstanten.

§ 7.

Die Irreduzibilität eines Differentialsystems.

Es soll nunmehr der wichtige Begriff der Irreduzibilität eines Differentialsystems definiert werden.

Definition (J_1). Ein Differentialsystem $\mathfrak{A}$ heißt irreduzibel, wenn es wenigstens eine irreduzible Sequente besitzt, deren Ordnung gleich der Zahl der Funktionen des Systems $\mathfrak{A}$ ist; sonst heißt das System reduzibel.

Aus Lehrsatz II des § 4 folgt leicht, daß alle Sequenten eines irreduziblen Differentialsystems $\mathfrak{A}$ für n Funktionen irreduzibel und n^{ter} Ordnung sind. Demnach ist ein Differentialsystem $\mathfrak{A}$ für n Funktionen reduzibel, wenn es wenigstens eine Sequente besitzt, die entweder reduzibel oder niedriger als n^{ter} Ordnung ist. Die Existenz einer reduziblen Sequente bedingt aber nach Satz I

des § 4 und nach § 2 stets das Vorhandensein einer Sequente niedrigerer Ordnung. Infolgedessen kann man auch folgende mit (J_1) äquivalente Definition aufstellen:

Definition (J_2). Ein Differentialsystem $\mathfrak{A}$ heißt irreduzibel, wenn dasselbe keine Sequente von niedrigerer Ordnung besitzt, als die Anzahl der Funktionen des Systems beträgt; sonst heißt das System $\mathfrak{A}$ reduzibel.

Man kann beweisen, daß auch folgende Definition äquivalent mit den Definitionen (J_1) und (J_2) ist:

Definition (J_3). Ein Differentialsystem $\mathfrak{A}$ heißt irreduzibel, wenn es kein ihm subordiniertes Differentialsystem gibt, sonst heißt es reduzibel.

Die Definitionen (J_2) und (J_3) stimmen mit denjenigen überein, die Herr Schlesinger in seinen schon oben zitierten Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen, Seite 105 bezw. Seite 158 gibt. Unter Verwendung der Integralexistenz soll noch folgende neue Definition für die Irreduzibilität eines Differentialsystems aufgestellt werden, die mit den Definitionen (J_1), (J_2) und (J_3) äquivalent ist.

Definition (J_4). Ein Differentialsystem $\mathfrak{A}$

$$a_{i1}\, y_1 + a_{i2}\, y_2 + \cdots + a_{in}\, y_n + a_{in+1} \frac{dy_i}{dx} \quad \left(i = 1, 2, \ldots, n\right)$$

heißt irreduzibel, wenn es keine Funktion η_1 gibt, die für y_1 gesetzt, gleichzeitig das Differentialgleichungssystem

$$a_{i1}\, y_1 + a_{i2}\, y_2 + \cdots + a_{in}\, y_n + a_{in+1} \frac{dy_i}{dx} = 0 \quad \left(i = 1, 2, \ldots, n\right)$$

und irgend ein solches[1]) für weniger als n Funktionen mit Koeffizienten aus dem Rationalitätsbereiche befriedigt; sonst heißt das System reduzibel.

Die Definition (J_4) ist das Analogon zu der Definition der Irreduzibilität einer einzigen linearen homogenen Differentialgleichung bei Verwendung der Integralexistenz, wie sie Herr Frobenius in seiner grundlegenden Arbeit[2]) eingeführt hat, nämlich: Eine lineare homogene Differentialgleichung mit Koeffizienten aus einem Rationalitätsbereiche heißt irreduzibel, wenn sie mit keiner linearen homogenen Differentialgleichung niedrigerer

[1]) d. h. ebenfalls linear homogenes erster Ordnung (vgl. Anm. 1 auf S. 3).

[2]) Journal f. reine u. angew. Math. **76**, S. 237 (1873).

Ordnung, die ebenfalls Koeffizienten aus demselben Rationalitätsbereiche hat, ein Integral gemeinsam hat. Daß man den Begriff der Irreduzibilität auch für ein Differentialsystem in der nämlichen einfachen Weise definieren kann, ist meines Wissens noch nicht ausgesprochen worden.

Man beweist: Für ein irreduzibles Differentialsystem $\mathfrak{A}$ gibt es auch niemals eine Funktion η_i, wobei i eine aus den Zahlen $2, 3, \ldots, n$ bedeutet, die für y_i gesetzt, gleichzeitig das zu $\mathfrak{A}$ zugehörige Differentialsystem und irgend eines für weniger als n Funktionen mit Koeffizienten aus dem Rationalitätsbereiche befriedigt.

Durch den letzten Satz ist die Bevorzugung, die y_1 in der Definition (J_4) einnimmt, beseitigt, und man kann in (J_4) für y_1 auch eine der Größen y_i $(i = 2, 3, \ldots, n)$ treten lassen.

Von neuen Sätzen, die mir über die Irreduzibilität der Differentialgleichungssysteme noch weiter bekannt sind, sei hier nur angeführt:

I. Gibt es eine Funktion η, die gleichzeitig unter den Integralen zweier Differentialsysteme mit Koeffizienten aus dem Rationalitätsbereiche auftritt, so sind nicht beide gleichzeitig irreduzibel, ausgenommen, daß sie beide gegenseitig von derselben Art sind.

II. Zu jedem Differentialgleichungssystem gehört wenigstens ein irreduzibles, so daß jedes Lösungssystem des letzteren ein Teil eines Lösungssystems des ersteren ist.

Für die beiden folgenden Sätze setzen wir voraus, daß der Rationalitätsbereich alle Konstanten enthält. Alsdann gilt:

III. Sind $\eta_\varkappa$ und $\zeta_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, n)$ zwei partikuläre unabhängige Integralsysteme eines linearen homogenen Differentialgleichungssystems und besteht eine Beziehung (a) $\zeta_i = \gamma_1 \eta_1 + \gamma_2 \eta_2 + \cdots + \gamma_n \eta_n$, wobei $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ dem Rationalitätsbereich angehören, so ist das System reduzibel. Unter der weitergehenden Voraussetzung, daß statt einer einzigen solchen Bedingung (a) deren n bestehen, ist dieses Theorem von Herrn Schlesinger in seinen Vorlesungen, Seite 117 hergeleitet und als Satz von Frobenius[1]) bezeichnet worden.

[1]) Vgl. Frobenius, Journal f. reine u. angew. Math. **76**, 268.

IV. Irgend ein irreduzibles lineares homogenes Differentialgleichungssystem $\mathfrak{A}$ erster Ordnung für n Funktionen habe einen Teil $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_\nu$ $(\nu \leqq n)$ eines partikulären Integralsystems $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ mit irgend einem (nicht notwendig linear homogen vorauszusetzenden[1]) Differentialsystem $\mathfrak{D}$ beliebiger Ordnung für ν Funktionen gemeinsam. $\mathfrak{D}$ habe ebenso wie $\mathfrak{A}$ nur Koeffizienten aus dem Rationalitätsbereich. Alsdann kann man stets wenigstens ein Fundamentalsystem von Lösungen des linearen Systems $\mathfrak{A}$ finden, sodaß die ersten ν Funktionen jedes der n Integralsysteme, die das betreffende Fundamentalsystem von $\mathfrak{A}$ bilden, auch dem Differentialsystem $\mathfrak{D}$ genügen. Ich hebe noch ausdrücklich hervor, daß deswegen durchaus nicht die ersten ν Funktionen jedes Integralsystems von $\mathfrak{A}$ auch dem System $\mathfrak{D}$ zu genügen brauchen, da letzteres nicht linear homogen sein muß. Bemerkenswert an Satz IV erscheint, daß die Irreduzibilität anknüpfend an ausschließlich lineare homogene Differentialsysteme erklärt wurde, also anders wie bei Herrn Koenigsberger in seinem Lehrbuch der Theorie der Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Variabeln (Leipzig 1889, S. 155), und man auch von dem hier eingenommenen Standpunkte aus eine Aussage über das Verhalten der Integrale des linearen homogenen Systems $\mathfrak{A}$ zu einem beliebigen (also nicht notwendig linearen) System $\mathfrak{D}$ machen kann.

Satz IV kann erweitert werden, indem man die Forderung der Irreduzibilität des Systems $\mathfrak{A}$ fortläßt und hierfür die schwächere Voraussetzung macht, daß die n Funktionen $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ ein solches partikuläres Integralsystem von $\mathfrak{A}$ bilden sollen, sodaß keine der n Funktionen $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ einem linearen homogenen Differentialgleichungssystem erster Ordnung für weniger als n Funktionen genügt. Z. B. ist für das reduzible lineare homogene Differentialsystem $\mathfrak{A}$

$$\frac{dy_1}{dx} - y_2 = 0, \frac{dy_2}{dx} - y_3 = 0, \frac{dy_3}{dx} - 6y_3 + 12y_2 - 8y_1 = 0$$

ein derartiges partikuläres Integralsystem η_1, η_2, η_3, wie wir es bei der Erweiterung des Satzes IV voraussetzen, das Funktionensystem

[1]) Durch die Voraussetzung der Irreduzibilität von $\mathfrak{A}$ ist übrigens nach Definition (J_4) ausgeschlossen, daß für $\nu < n$ das Differentialsystem $\mathfrak{D}$ linear homogen und erster Ordnung sein kann.

$$\eta_1 = x^2 e^{2x}, \eta_2 = \frac{d\eta_1}{dx}, \eta_3 = \frac{d\eta_2}{dx};$$

denn keine der drei Funktionen η_1, η_2, η_3 genügt einem linearen homogenen Differentialgleichungssystem erster Ordnung für weniger als drei Funktionen, wenn als Rationalitätsbereich der aller Konstanten gewählt wird. Wie die Ausrechnung lehrt, genügt η_1 dem Differentialgleichungssystem $\mathfrak{D}$ für eine Funktion:

$$2\, y_1 \frac{d^2 y_1}{dx^2} - \left(\frac{dy_1}{dx}\right)^2 - 4\, y_1 \frac{dy_1}{dx} + 4\, y_1^2 = 0.$$

Entsprechend der Erweiterung des Satzes IV kann man tatsächlich ein Fundamentalsystem von $\mathfrak{A}$ aufstellen, so daß die bei ihm für y_1 in Frage kommenden Funktionen der Differentialgleichung $\mathfrak{D}$ genügen, z. B.

$\eta_{11} = x^2 e^{2x}, \eta_{12} = e^{2x} + 2x e^{2x} + x^2 e^{2x}, \eta_{13} = e^{2x} + 4x e^{2x} + 4x^2 e^{2x}.$

Deswegen befriedigt nicht jede lineare homogene Kombination $c_1 \eta_{11} + c_2 \eta_{12} + c_3 \eta_{13}$ mit konstanten Koeffizienten die Differentialgleichung $\mathfrak{D}$; so wird diese z. B. nicht befriedigt durch $\overline{\eta}_1 = x e^{2x}$ (vgl. meinen Aufsatz in den math. Annalen **70**, S. 106).

§ 8.

Die vollständige Reduzibilität eines Differentialsystems.

Zum Schluß soll noch der von mir eingeführte Begriff der vollständigen reduziblen Differentialgleichung oder des vollständig reduziblen Differentialausdrucks (Math. Annalen **62**, S. 95) auf ein Differentialsystem ausgedehnt werden. Ein Differentialausdruck war als vollständig reduzibel definiert, wenn er das kleinste gemeinsame Vielfache irreduzibler Differentialausdrücke ist. Für Differentialsysteme geben wir folgende

Definition: Ein Differentialsystem heißt vollständig reduzibel, wenn es mit einem zerfallenden Differentialsystem von derselben Art ist, dessen einzelne Bestandteile irreduzible Differentialsysteme sind. Ein Differentialsystem für n Funktionen heißt zerfallend, wenn es vom Typus:

$$v_{i_1,1}\, z_1 + v_{i_1,2}\, z_2 + \cdots + v_{i_1,m_1}\, z_{m_1} + v_{i_1,n+1} \frac{dz_{i_1}}{dx} \quad \left(i_1 = 1, 2, \ldots, m_1\right)$$

$$v_{m_1+i_2,\, m_1+1}\, z_{m_1+1} + v_{m_1+i_2,\, m_1+2}\, z_{m_1+2} + \cdots + v_{m_1+i_2,\, m_1+m_2}\, z_{m_1+m_2}$$
$$+ v_{m_1+i_2,\, n+1} \frac{dz_{m_1+i_2}}{dx} \quad \left(i_2 = 1, 2, \ldots, m_2\right)$$

. . . . . .

$$m_1 + m_2 + \ldots m_k = n$$

ist, also eine zerfallende Matrix der Koeffizienten von $z_1, z_2, \ldots, z_n$ besitzt.

Für vollständig reduzible Differentialsysteme seien folgende Sätze angegeben:

I. Jede Sequente eines vollständig reduziblen Differentialsystems ist ein vollständig reduzibler Differentialausdruck. Diese Tatsache ist für ein vollständig reduzibles Differentialsystem charakteristisch, d. h. jedes nicht vollständig reduzible Differentialsystem hat wenigstens eine nicht vollständig reduzible Sequente.

II. Ein vollständig reduzibler Differentialausdruck kann nur bei vollständig reduziblen Differentialsystemen koordinierte Sequente sein.

In meiner zu Anfang dieses Paragraphen zitierten Arbeit, Math. Ann. **62**, S. 106, habe ich folgenden Satz bewiesen: Ein vollständig reduzibler Differentialausdruck ist entweder nur auf eine einzige oder auf unendlich viele Weisen kleinstes gemeinsames Vielfaches irreduzibler Differentialausdrücke. Für die letztere Gattung von Differentialausdrücken gilt nun folgender

Satz: Notwendig und hinreichend, damit ein Differentialausdruck auf unendlich viele Weisen kleinstes gemeinsames Vielfaches irreduzibler Differentialausdrücke sein kann, ist, daß er sich als koordinierte Sequente eines solchen vollständig reduziblen Differentialsystems auffassen läßt, das zwei übereinstimmende irreduzible Bestandteile besitzt.

Ich bemerke noch, daß man für jedes beliebige lineare homogene Differentialsystem $\mathfrak{A}$ „die in der durch $\mathfrak{A}$ bestimmten Art enthaltenen größten vollständig reduziblen Differentialsysteme" einführen kann; alsdann lassen sich ähnliche Untersuchungen anstellen, wie ich sie für einzelne Differentialausdrücke in der zitierten Annalenarbeit durchgeführt habe.

Freiburg i. B., 14. Mai 1913.