Heidelberger Akademie der Wissenschaften

Mathematische Abhandlungen

Autor: **Koenigsberger, Leo** (1837 – 1921)

Titel: **Der Abelsche Fundamentalsatz der Integralrechnung**

Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse : Abt. A ; 1914, 9

Der Abelsche Fundamentalsatz der Integralrechnung bezüglich eines algebraisch darstellbaren Abelschen Integrales als rationale Funktion des Integranden wird auf lineare Differentialgleichungen ausgedehnt. Außerdem werden für die Elemente der Integralrechnung weitere Folgerungen aus dem Abelschen Satze hergeleitet für den Fall, daß der Integrand die Lösung einer algebraisch auflösbaren Gleichung ist.

(Zsfassung aus: Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften / Jahresheft 1914, S. XXIII - XXIV)

Sitzungsberichte
der Heidelberger Akademie der Wissenschaften
Stiftung Heinrich Lanz
Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse
Abteilung A. Mathematisch-physikalische Wissenschaften
Jahrgang 1914. 9. Abhandlung

Der ABELsche Fundamentalsatz der Integralrechnung

von

LEO KOENIGSBERGER
in Heidelberg

Eingegangen am 8. Mai 1914

Heidelberg 1914
Carl Winters Universitätsbuchhandlung

Verlags-Nr. 1085.

Der bekannte Abelsche Fundamentalsatz der Integralrechnung, nach welchem, wenn das Integral einer algebraischen Funktion einer Variabeln in dieser algebraisch ausdrückbar ist, dies auch in rationaler Form durch den Integranden möglich ist, gestattet eine Ausdehnung auf lineare Differentialgleichungen, welche die Bedeutung und Anwendbarkeit dieses Satzes klarer hervortreten läßt.

Sei
$$\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m$$
ein Integralsystem der totalen Differentialgleichungen

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{dz_1}{dx} = f_1(x, z_1, z_2, \ldots, z_m) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dz_m}{dx} = f_m(x, z_1, z_2, \ldots, z_m) \end{cases},$$

in denen $f_1, \ldots, f_m$ rationale Funktionen der eingeschlossenen Größen bedeuten, und sei eine lineare Differentialgleichung gegeben

$$(2) \qquad \frac{d^n u}{dx^n} + r_1(x, \zeta_1, \ldots, \zeta_m) \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \ldots + r_n(x, \zeta_1 \ldots \zeta_m) u = R(x, \zeta_1, \ldots, \zeta_m) ,$$

in welcher $r_1, \ldots, r_n, R$ wieder rationale Verbindungen darstellen, werde ferner angenommen, daß diese Differentialgleichung ein in $x, \zeta_1, \ldots, \zeta_m$ algebraisches Integral u_1 besitze, so wird dieses Integral in jenen Größen rational ausdrückbar sein, wenn die reduzierte homogene Differentialgleichung

$$(3) \qquad \frac{d^n u}{dx^n} + r_1(x, \zeta_1, \ldots, \zeta_m) \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \ldots + r_n(x, \zeta_1, \zeta_m) u = 0$$

n in $x, \zeta_1, \ldots, \zeta_m$ rationale Fundamentalintegrale besitzt.

Sei nämlich u_1 die Lösung der mit Adjungierung von $x, \zeta_1, \ldots, \zeta_m$ irreduktibeln algebraischen Gleichung

$$(4) \qquad u^\nu + \rho_1(x, \zeta_1, \ldots, \zeta_m) u^{\nu-1} + \ldots + \rho_\nu(x, \zeta_1, \ldots, \zeta_m) = 0 ,$$

1*

in welcher $\rho_1, .., \rho_\nu$ rationale Funktionen bedeuten, so werden zufolge des Differentialgleichungssystems (1)

$$\frac{du_1}{dx}, \frac{d^2u_1}{dx^2}, \ldots, \frac{d^nu_1}{dx^n}$$

rational in $x, \zeta_1, .., \zeta_m$ und u_1 ausdrückbar sein und es wird sich durch Substitution dieser Werte in die Differentialgleichnng (2) eine algebraische Gleichung in u_1 ergeben, welcher wegen der Irreduktibilität der Gleichung (4) sämtliche Lösungen der letzteren genügen werden. Da nun, wie hieraus unmittelbar ersichtlich, jede andere Lösung u_2 der Gleichung (4) ein Integral der Differentialgleichung (2), also $u_2 - u_1$ ein Integral der reduzierten Differentialgleichung (3) sein wird, so folgt aus der für die Fundamentalintegrale der letzteren gemachten Voraussetzung

$$u_2 = u_1 + R_1(x, \zeta_1, .., \zeta_m) \quad ,$$

worin R_1 eine rationale Funktion der eingeschlossenen Größen darstellt. Dies widerspricht aber der Annahme der Irreduktibilität der Gleichung (4), und es muß daher $\nu = 1$, also wird u_1 rational in $x, \zeta_1, .., \zeta_m$ ausdrückbar sein.

Für den Fall, daß das Integralsystem der Differentialgleichungen (1) ein algebraisches ist, daß $n = 1$ und

$$r_n(x, \int_1, .., \int_m) = 0$$

ist, ergibt sich, da die reduzierte Differentialgleichung in $\frac{du}{dx} = 0$ übergeht, der Abelsche Satz.

Will man den oben aufgestellten Satz nur in der Abelschen Auffassung aussprechen, also nicht nachweisen, daß u_1 selbst rational in $x, \zeta_1, .., \zeta_m$ ausdrückbar ist, sondern nur zeigen, daß es dann jedenfalls ein in diesen Größen rational ausdrückbares Integral gibt, so braucht man die reduzierte Differentialgleichung gar keiner Bedingung zu unterwerfen; denn wenn alle Lösungen der Gleichung (4), wie gezeigt worden, der Differentialgleichung (2) Genüge leisten, so wird auch

$$\frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{n} = -\frac{1}{n}\rho_1(x, \zeta_1, .., \zeta_m)$$

ein Integral der nicht homogenen Differentialgleichung sein.

Sei nun y_1 die Lösung einer mit Adjungierung von x irreduktibeln algebraischen Gleichung

$$(5) \qquad y^k + \rho_1(x) y^{k-1} + \dots + \rho_k(x) = 0 \ ,$$

worin $\rho_1 \dots \rho_k$ rationale Funktionen von x bedeuten, und habe die Differentialgleichung

$$(6) \qquad \frac{d^n u}{dx^n} + r_1(x, y_1) \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \dots + r_n(x, y_1) u = y_1$$

ein in x algebraisches Integral, so wird sich dieses Integral, wenn die reduzierte Differentialgleichung

$$\frac{d^n u}{dx^n} + r_1(x, y_1) \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \dots + r_n(x, y_1) u = 0$$

n in x und y_1 rationale Fundamentalintegrale hat, in x und y_1 rational ausdrückbar sein, oder es wird, wenn die reduzierte Differentialgleichung keiner Bedingung unterworfen wird, ein rational in x und y_1 ausdrückbares Integral der Differentialgleichung (6) existieren.

Ist nun y_1 in den Koeffizienten der Differentialgleichung nicht enthalten, hat dieselbe also die Form

$$(6) \qquad \frac{d^n u}{dx^n} + r_1(x) \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \dots + r_n(x) u = y_1 \ ,$$

und ist die Gleichung (5) algebraisch durch Wurzelzeichen auflösbar, so können wir weitere Eigenschaften für die Teile, aus denen y_1 besteht, herleiten.

Sei y_1 in der Abelschen Definition eine algebraische Funktion λ^{ter} Ordnung und μ^{ten} Grades, enthalte somit μ Primzahlwurzeln

$$(a) \qquad \sqrt[\alpha_1]{p_1},\ \sqrt[\alpha_2]{p_2}, \dots, \sqrt[\alpha_\mu]{p_\mu} \ ,$$

in denen $p_1, p_2, \dots, p_\mu$ algebraische Funktionen $\lambda - 1^{\text{ter}}$ Ordnung bedeuten, und von denen keine durch die nachfolgenden und algebraische Funktionen $\lambda - 1^{\text{ter}}$ Ordnung rational ausdrückbar ist, so wird

$$(7) \qquad y_1 = q_0 + q_1 p_1^{\frac{1}{\alpha_1}} + q_2 p_1^{\frac{2}{\alpha_1}} + \dots + q_{\alpha_1 - 1} p_1^{\frac{\alpha_1 - 1}{\alpha_1}}$$

sein, worin $q_0, q_1, \ldots$ algebraische Funktionen λ^{ter} Ordnung und $\mu-1^{\text{ten}}$ Grades sind; und es wird die in x und y_1 rationale Funktion u_1, oder ohne Voraussetzung für die reduzierte Differentialgleichung eine andere Integralfunktion nebst ihren Ableitungen dieselbe Form haben

$$(8) \qquad \frac{d^k u_1}{dx^k} = q_{0k} + q_{1k} p_1^{\frac{1}{\alpha_1}} + \cdots q_{\alpha_1-1k} p_1^{\frac{\alpha_1-1}{\alpha_1}},$$

worin die q wiederum denselben Charakter besitzen.

Nun ist aber die Gleichung

$$(9) \qquad z^{\alpha_1} = p_1$$

mit Adjungierung der in der Reihe (a) auf $\sqrt[\alpha_1]{p_1}$ folgenden Elemente und algebraischer Funktionen $\lambda-1^{\text{ter}}$ Ordnung irreduktibel; denn, wenn sie eine Lösung $\varepsilon p_1^{1/\alpha_1}$, in welcher ε eine α_1^{te} Einheitswurzel ist, mit einer irreduktibeln Gleichung von niedrigerem Grade als dem α_1^{ten} und mit gleichartigen, aus jenen Elementen und algebraischen Funktionen niederer Ordnung rational zusammengesetzten Koeffizienten gemein hätte, so würde die letztere Gleichung noch eine andere in der Form

$$\varepsilon^\rho p_1^{1/\alpha_1}$$

gegebene Lösung besitzen und es würde sich gegen die Annahme der Irreduktibilität der Grad derselben erniedrigen lassen, was nur dann nicht möglich wäre, wenn der Grad der irreduktibeln Gleichung der erste, also $\sqrt[\alpha_1]{p_1}$ rational durch $\sqrt[\alpha_2]{p_2}, \ldots, \sqrt[\alpha_\mu]{p_\mu}$ und algebraische Funktionen $\lambda-1^{\text{ter}}$ Ordnung ausdrückbar wäre, und dies war durch die obige Voraussetzung ausgeschlossen. Es ist somit die Gleichung (9) mit Adjungierung der angegebenen Größen irreduktibel.

Setzt man nun die Ausdrücke (7) und (8) in die Differentialgleichung (6) ein, so erhält man eine algebraische Gleichung in p_1^{1/α_1}, welcher wegen der Irreduktibilität der Gleichung (9) auch genügt wird, wenn statt p_1^{1/α_1} die Werte

$$\varepsilon p_1^{1/\alpha_1}, \; \varepsilon^2 p_1^{1/\alpha_1}, \ldots, \varepsilon^{\alpha_1-1} p_1^{1/\alpha_1}$$

substituiert werden, worin ε eine primitive α_1^{te} Einheitswurzel bedeutet.

Multipliziert man die so entstehenden Gleichungen mit

$$1, \varepsilon^{-\sigma}, \varepsilon^{-2\sigma}, \ldots, \varepsilon^{-(\alpha_1-1)\sigma},$$

und addiert alle diese Gleichungen, so ergibt sich, da nach (8)

$$u_1 = q_{00} + q_{10} p_1^{\frac{1}{\alpha_1}} + \cdots + q_{\alpha-10} p_1^{\frac{\alpha_1-1}{\alpha_1}}$$

ist, die Beziehung

$$(10)\quad \frac{d^n\left(q_{\sigma 0} p_1^{\frac{\sigma}{\alpha_1}}\right)}{dx^n} + r_1(x)\frac{d^{n-1}\left(q_{\sigma 0} p_1^{\frac{\sigma}{\alpha_1}}\right)}{dx^{n-1}} + \cdots + r_n(x)\, q_{\sigma 0} p_1^{\frac{\sigma}{\alpha_1}} = q_\sigma p_1^{\frac{\sigma}{\alpha_1}},$$

oder es hat die Differentialgleichung

$$\frac{d^n u}{dx^n} + r_1(x)\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + \cdots + r_n(x)\, u = q_\sigma p_1^{\frac{\sigma}{\alpha_1}}$$

für einen oder mehrere ganzzahlige Werte von σ das Integral

$$u = q_{\sigma 0} p_1^{\frac{\sigma}{\alpha_1}}.$$

Läßt man nun in der durch Ausführung der Differentialquotienten entwickelten Gleichung (10) den gemeinsamen Faktor p_1^{σ/α_1} fort, so erhält man eine Gleichung für die zweite der algebraischen Funktionen λ^{ter} Ordnung der Reihe (a) p_2^{1/α_2}, welche wieder wegen der Irreduktibilität der Gleichung

$$z^{\alpha_2} = p_2$$

unter Adjungierung der folgenden Irrationalitäten λ^{ter} Ordnung und algebraischer Funktionen niederer Ordnung für alle Lösungen

$$\eta p_2^{1/\alpha_2}$$

der letzteren Gleichung, worin η eine α_2^{te} Einheitswurzel ist, erfüllt sein wird, und es ist somit durch Schlüsse, welche den vorher gemachten völlig analog sind, ersichtlich, daß, wenn die algebraische Funktion q_σ von der λ^{ten} Ordnung und vom $\mu-1^{\text{ten}}$ Grade in die Form gesetzt wird

$$q_\sigma = \overset{(\sigma)}{q_0} + \overset{(\sigma)}{q_1}\, p_2^{\frac{1}{\alpha_2}} + \cdots + \overset{(\sigma)}{q_{\alpha_2-1}}\, p_2^{\frac{\alpha_2-1}{\alpha_2}},$$

die Differentialgleichung

$$\frac{d^n u}{dx^n} + r_1(x)\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + \ldots + r_n(x)\,u = q_{\sigma_1}^{(\sigma)}\, p_2^{\frac{\sigma_1}{\alpha_2}}\, p_1^{\frac{\sigma}{\alpha_1}}$$

ein Integral von der Form

$$u = q_{\sigma_1 0}^{(\sigma)}\, p_2^{\frac{\sigma_1}{\alpha_2}}\, p_1^{\frac{\sigma}{\alpha_1}}$$

besitzen wird.

Schließt man genau so weiter auch für die algebraischen Funktionen $\lambda-1^{\text{ter}}$, $\lambda-2^{\text{ter}}$, ... Ordnung, so erhält man das nachfolgende Theorem:

Sei die lineare Differentialgleichung gegeben

$$\frac{d^n u}{dx^n} + r_1(x)\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + \ldots + r_n(x)\,u = y\ ,$$

in welcher $r_1(x) \ldots r_n(x)$ rationale Funktionen von x bedeuten und y die Lösung einer durch Wurzelzeichen auflösbaren algebraischen Gleichung in x ist, deren algebraische Elemente λ^{ter}, $\lambda-1^{\text{ter}}$, .., 1^{ter} Ordnung mit

$$\begin{array}{l} A_{\lambda 1}\, A_{\lambda 2} \ldots A_{\lambda\mu} \\ A_{\lambda-1 1}\, A_{\lambda-1 2} \ldots A_{\lambda-1 \mu_1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{11}\, A_{12} \ldots A_{1\mu_{\lambda-1}} \end{array}$$

bezeichnet werden mögen, von denen keines eine rationale Funktion der nachfolgenden sein soll, dann wird die lineare Differentialgleichung

$$\frac{d^n u}{dx^n} + r_1(x)\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + \ldots + r_n(x)\,u = R(x)\,M\ ,$$

in welcher $R(x)$ eine bestimmte rationale Funktion von x und

$$M = A_{\lambda 1}^{a_{\lambda 1}}\, A_{\lambda 2}^{a_{\lambda 2}} \ldots A_{\lambda\mu}^{a_{\lambda\mu}}\, A_{\lambda-1 1}^{a_{\lambda-1 1}} \ldots A_{1\mu_{\lambda-1}}^{a_{1\mu_{\lambda-1}}}$$

ist, ferner die Größen a bestimmte positive ganze Zahlen darstellen, welche auch den Wert Null annehmen können, ein Integral von der Form

$$u = R_1(x)\,M$$

besitzen, worin $R_1(x)$ wieder eine rationale Funktion von x ist.

In dem speziellen Falle des Abelschen Satzes über die Darstellung eines algebraisch ausführbaren Abelschen Integrals würde der Satz der Integralrechnung folgen, daß dann auch stets mindestens ein Integral von der Form

$$\int R(x) M dx$$

existiert, dessen Wert sich durch

$$R_1(x) M$$

darstellen läßt, wenn M das Produkt positiver ganzzahliger Potenzen der in y enthaltenen algebraischen Elemente bedeutet.

Es bedarf keiner weiteren Ausführung, daß sich mit Hilfe des Abelschen Satzes auch der oben für lineare Differentialgleichungen bewiesene Satz ergibt, wenn die Darstellung der Integrale derselben mit Hilfe der Variation der Konstanten durch die Fundamentalintegrale der reduzierten Differentialgleichung benutzt wird. Ebenso unmittelbar ist ersichtlich, in welcher Form sich die Sätze von Abel bezüglich der Reduktion von Integralen algebraischer Funktioenn auf Logarithmen, elliptische Integrale usw. für lineare Differentialgleichungen erweitern lassen; wenn nur die Bemerkung benutzt wird, dass, falls eine Lösung einer irreduktibeln Gleichung algebraisch durch Wurzelzeichen ausdrückbar ist, diese Eigenschaft auch allen Lösungen derselben zukommt.