



UNIVERSITÄTSBIBLIOTHEK
HEIDELBERG

HEIDELBERGER AKADEMIE
DER WISSENSCHAFTEN



Heidelberger Akademie der Wissenschaften

Mathematische Abhandlungen

Autor: **Stäckel, Paul** (1862 – 1919)

Titel: **Die Darstellung der geraden Zahlen als Summen
von zwei Primzahlen**

Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften,
Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse : Abt. A ; 1916, 10

Signatur UB Heidelberg: L 346

Zuerst vom Verfasser und dann von anderen Mathematikern waren Näherungsformeln für die Anzahl der Darstellungen der geraden Zahlen als Summen von zwei Primzahlen aufgestellt worden, die jedoch nur eine unvollkommene Annäherung an die wahren Werte lieferten. In der vorliegenden Abhandlung wird eine neue Näherungsformel entwickelt, die, wie die numerische Prüfung bei den geraden Zahlen des Bereichs von 4000 bis 4998 zeigt, sich dem wirklichen Verlauf eng anschließt.

(Zsfassung aus: Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften / Jahreshft 1916 , S. XXV)

Sitzungsberichte
der Heidelberger Akademie der Wissenschaften
Stiftung Heinrich Lanz

Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse
Abteilung A. Mathematisch-physikalische Wissenschaften

Jahrgang 1916. 10. Abhandlung

Die Darstellung der geraden Zahlen als Summen von zwei Primzahlen

Von

†
PAUL STÄCKEL

in Heidelberg

+ L 346

Eingegangen am 8. August 1916



Heidelberg 1916
Carl Winters Universitätsbuchhandlung

Verlags-Nr. 1318

§ 1

Verlauf der zahlentheoretischen Funktion $G(2n)$

GOLDBACH hat in einem Briefe an EULER vom 7. Juni 1742 die Vermutung ausgesprochen, jede gerade Zahl lasse sich als Summe von zwei Primzahlen darstellen¹. Die Anzahl solcher Darstellungen der geraden Zahl $2n$ möge die zugehörige GOLDBACHSche Zahl $G(2n)$ genannt werden. Dabei sollen die Darstellungen $2n = x + y$ und $2n = y + x$ als verschieden angesehen werden, wenn x und y verschieden sind; die GOLDBACHSchen Zahlen sind also gerade Zahlen, außer wenn n eine Primzahl ist.

Die Tafeln, die G. CANTOR² für die geraden Zahlen bis 1000 und HAUSSNER³ bis 5000 veröffentlicht haben, zeigen, daß die zahlentheoretische Funktion $G(2n)$ zwar recht unregelmäßig verläuft, aber doch nicht nur für den Bereich bis 5000 stets größer als Null ausfällt, sondern sogar von 190 ab stets größer als 10, von 458 ab stets größer als 20, von 994 ab stets größer als 30 ist. Bildet man ferner für die Werte von $G(2n)$, die zu den geraden Zahlen der ersten zehn Hunderte, von 2 bis 998, gehören, jeweils das arithmetische Mittel, so ergibt sich (Tafel 1) eine beständig wachsende Reihe von Werten.

TAFEL 1

Mittelwerte der Funktion $G(2n)$ für die ersten zehn Hunderte

Hundert . . .	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Mittelwert . .	8,20	16,32	22,60	26,54	32,26	36,70	41,96	45,80	50,30	52,36

¹ Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII^{ème} siècle, publiée par P.-H. FUSSE, T. I, St. Petersburg 1843, S. 127 und 135; vgl. auch die Angaben von CATALAN und ENESTRÖM, Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche, pubblicato da B. BONCOMPAGNI, T. 18, 1865, S. 464—468.

² G. CANTOR, Vérification jusqu'à 1000 du théorème empirique de GOLDBACH, Association française pour l'avancement des sciences, Congrès de Caen, 1894.

³ R. HAUSSNER, Tafeln für das GOLDBACHSche Gesetz, Nova Acta, Abhandl. der Kaiserl. Leop.-Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher, Bd. LXXII, Nr. 1, Halle 1897.

Das Anwachsen des durchschnittlichen Wertes von $G(2n)$ für die einzelnen Hunderter ganzer Zahlen läßt auch die folgende Tafel für die zehn Hunderter des fünften Tausends, 4000 bis 4998, erkennen.

TAFEL 2

Mittelwerte der Funktion $G(2n)$ für die Hunderte des fünften Tausends

Hundert . . .	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Mittelwert . .	151,6	152,9	160,3	159,5	160,6	164,7	167,8	167,8	171,7	175,4

Dabei schwanken die Werte der Funktion zwischen dem kleinsten Werte 87 für 4022 und dem größten Werte 380 für 4620.

Wie ich 1896 bemerkt habe¹, hat der Verlauf der Funktion $G(2n)$ eine gewisse Ähnlichkeit mit dem der zahlentheoretischen Funktion $\varphi(2n)$, die angibt, wieviel ganze Zahlen kleiner als $2n$ und dazu teilerfremd sind. Bedeuten nämlich $p, q, r, \dots$ die ungeraden Primteiler von $2n$, so gilt die Formel

$$(1) \quad \varphi(2n) = n \cdot \frac{p-1}{p} \cdot \frac{q-1}{q} \cdot \frac{r-1}{r} \dots$$

Hierin ist der erste Faktor, n , eine beständig wachsende Funktion von $2n$. Zu ihm tritt, um die Schwankungen der Funktion $\varphi(2n)$ zu erzeugen, für jeden in $2n$ enthaltenen ungeraden Primteiler p , gleichgültig wie oft er als solcher auftritt, der Multiplikator $\frac{p-1}{p}$.

Während die Formel (1) in aller Strenge gilt, ist es wahrscheinlich, daß die zahlentheoretische Funktion $G(2n)$ näherungsweise durch eine Formel

$$(2) \quad G(2n) \sim W(2n) \cdot M(p) \cdot M(q) \cdot M(r) \dots$$

dargestellt wird, die folgende Bedeutung hat².

$W(2n)$ bezeichnet eine beständig wachsende Funktion von $2n$, und zwar ist nach dem Ansatz, den ich 1896 gemacht habe,

¹ P. STÄCKEL, Über das GOLDBACHSche empirische Theorem: Jede gerade Zahl kann als Summe von zwei Primzahlen dargestellt werden, Göttinger Nachrichten, Math.-Phys. Klasse, 1896, S. 292.

² Das Zeichen $\sim$ soll hier und im folgenden besagen, daß der Quotient der Funktionen auf der linken und der rechten Seite, wenn n ins Unendliche wächst, dem Grenzwert Eins zustrebt.

wenn $P(2n)$ die Anzahl der ungeraden Primzahlen von 1 bis $2n$ bezeichnet:

$$(3) \quad W(2n) = x \cdot \frac{P^2(2n)}{2n}.$$

Der erste Faktor x ist eine numerische Konstante, von deren Bestimmung noch zu reden sein wird, der zweite läßt sich als die Dichtigkeit der Primzahlpaare deuten, die dem Bereiche der Zahlen von 1 bis $2n$ angehören; daß diese Dichtigkeit den Wert von $G(2n)$ beeinflußt, ist einleuchtend.

Zu der Wachstumsfunktion $W(2n)$ kommt auch bei $G(2n)$ für jeden in $2n$ enthaltenen ungeraden Primteiler p , gleichgültig wie oft er als solcher auftritt, ein die Schwankungen der Funktion erzeugender Multiplikator, und die Multiplikatoren $M(p)$, $M(q)$, $M(r)$, ... zusammengekommen bilden die der Zahl $2n$ zugeordnete Schwankungsfunktion $S(2n)$. Im Unterschied gegen $\varphi(2n)$ sind die Multiplikatoren von $G(2n)$ größer als Eins, so daß diese Funktion gegenüber den Werten in der Nachbarschaft um so größer ausfällt, je mehr ungerade Primteiler in $2n$ vorkommen; zum Beispiel ist die Zahl 4620, der im Bereiche der geraden Zahlen von 2 bis 4998 der größte Wert von $G(2n)$, 380, zugehört, durch 3, 5, 7, 11 teilbar. Wie bei $\varphi(2n)$ nähern sich die Multiplikatoren mit wachsenden Werten von p rasch der Eins; es soll daher

$$(4) \quad M(p) = 1 + \varepsilon(p)$$

gesetzt werden.

§ 2

Beziehung der Multiplikatoren zur numerischen Konstanten x in der Näherungsformel für $G(2n)$

Wenn eine zahlentheoretische Funktion $g(n)$ näherungsweise durch eine Funktion $\gamma(n)$ dargestellt werden soll, darf man nicht fordern, daß der Unterschied zwischen $g(n)$ und $\gamma(n)$, der Fehler, wie groß auch n gewählt werde, dem Betrage nach unter einer gewissen vorgegebenen Schranke bleibe, wohl aber müssen bei einer guten Näherung erstens die Beträge der einzelnen Fehler verglichen mit den zugehörigen Funktionswerten klein sein und zweitens die mit ihren Vorzeichen genommenen Fehler sich im

Mittel ausgleichen. Die zweite Forderung soll hier dahin ausgelegt werden, daß

$$(5) \quad \lim_{n=\infty} \left(\sum_{v=n-m+1}^n \gamma(v) : \sum_{v=n-m+1}^n g(v) \right) = 1$$

ist, wenn die ganze Zahl m mit wachsendem n so ins Unendliche wächst, daß

$$(6) \quad \lim_{n=\infty} \frac{m}{n} = 0$$

wird, das heißt, daß die Länge m des Intervalles, das man betrachtet, zwar immer größer wird, aber gegen die zugehörigen Werte von n verschwindet¹. Man genügt der Bedingung (6), indem man zum Beispiel die ganze Zahl m von der Ordnung $\sqrt{2n}$ wählt.

Für die Funktion $G(2n)$ und die Näherungsfunktion

$$(7) \quad \gamma(2n) = x \cdot \frac{P^2(2n)}{2n} \cdot M(p) \cdot M(q) \cdot M(r) \dots$$

führt die Bedingung (5) zu einer Beziehung zwischen den Multiplikatoren $M(p)$ und der numerischen Konstanten x , so daß der Wert von x nach Festsetzung der Multiplikatoren durch die Forderung des Fehlerausgleichs bereits vollständig bestimmt ist.

Um diese Beziehung herzuleiten, benutze ich eine von LANDAU² in aller Strenge hergeleitete Formel, der ich eine für die folgenden Untersuchungen wichtige Deutung gebe. Bei den Festsetzungen, die in § 1 getroffen wurden, gibt es genau $P^2(2n)$ Primzahlpaare x, y , die dem Bereich der Zahlen von 1 bis $2n$ angehören, und unter ihnen liefern diejenigen, bei denen $x+y \leq 2n$ ist, die GOLDBACHSchen Darstellungen der geraden Zahlen von 2 bis $2n$. Weil nun die Dichtigkeit der Primzahlen mit wachsenden Werten von $2n$ abnimmt, so darf man schließen, daß die summatorische Funktion der GOLDBACHSchen Zahlen

$$\sum_{v=1}^n G(2v) > \frac{1}{2} P^2(2n)$$

¹ Bei E. LANDAU, Über die zahlentheoretische Funktion $\varphi(n)$ und ihre Beziehung zum GOLDBACHSchen Satz, Göttinger Nachrichten, Math.-phys. Klasse, 1900, S. 185 wird die Forderung des Fehlerausgleichs so verstanden, daß der Quotient der summatorischen Funktionen von $g(n)$ und $\gamma(n)$ für $n = \infty$ dem Grenzwerte Eins zustreben soll; hiernach wäre in der Formel (5) $m = n$ zu setzen.

² E. LANDAU, a. a. O., S. 180.

ist, denn es wird mehr Primzahlpaare x, y des betrachteten Bereichs geben, bei denen $x+y \leq 2n$ ist, als solche, bei denen $x+y > 2n$ ausfällt. Der Satz von LANDAU besagt nun, daß die asymptotische Beziehung gilt:

$$\sum_{v=1}^n G(2v) \sim \frac{1}{2} P^2(2n)$$

oder, da nach einer bekannten Formel

$$(8) \quad P(2n) \sim \frac{2n}{\log 2n}$$

ist¹, die Formel

$$(9) \quad \sum_{v=1}^n G(2v) \sim \frac{1}{2} \left(\frac{2n}{\log 2n} \right)^2;$$

das Zeichen $\log$ bedeutet hier und im folgenden stets den natürlichen Logarithmus. Unter Beachtung der Gleichung (6) folgt hieraus für den Nenner in der Gleichung (5):

$$(10) \quad \sum_{v=n-m+1}^n G(2v) \sim \frac{1}{2} \left(\frac{2n}{\log 2n} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{2n-2m}{\log(2n-2m)} \right)^2 \sim \frac{2n}{\log^2 2n} \cdot 2m.$$

Beim Zähler wird nach der Formel (8)

$$(11) \quad \gamma(2n) \sim \kappa \cdot \frac{2n}{\log^2 2n} \cdot S(2n).$$

Mithin kommt unter Beachtung der Gleichung (6):

$$(12) \quad \sum_{v=n-m+1}^n \gamma(2v) \sim \kappa \cdot \sum_{v=n-m+1}^n \frac{2v}{\log^2 2v} \cdot S(2v) \sim \kappa \cdot \frac{2n}{\log^2 2n} \cdot \sum_{v=n-m+1}^n S(2v).$$

Nunmehr führt die Bedingung des Fehlerausgleichs zu der Gleichung

$$(13) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{v=n-m+1}^n S(2v) = \frac{2}{\kappa};$$

die linke Seite läßt sich auffassen als die Grenze des Mittels der Schwankungsfunktion, genommen für ein Intervall der Länge m

¹ Vgl. etwa E. LANDAU, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, Bd. I, Leipzig 1909, S. 197.

im Bereiche großer Werte des Argumentes $2n$, wobei m zwar über alle Grenzen wachsen, aber gegen n verschwinden muß.

Es soll jetzt gezeigt werden, daß unter der soeben angegebenen Voraussetzung, im übrigen aber bei beliebiger Wahl von m der Grenzwert (13) stets derselbe ist, nämlich gleich einem durch die Multiplikatoren $M(p) = 1 + \varepsilon(p)$ bestimmten unendlichen Produkt.

Eine Primzahl p heiße wirksam für die GOLDBACHSche Zahl $G(2n)$, wenn sie ein Teiler von n ist und daher einen Beitrag zur Schwankungsfunktion $S(2n)$ liefert.

Wäre bei den geraden Zahlen $2n - 2m + 2, 2n - 2m + 4, \dots, 2n$ für die zugehörigen GOLDBACHSchen Zahlen nur die Primzahl 3 wirksam, so würden die betreffenden Schwankungsfunktionen in einer sich beständig wiederholenden Folge der drei Glieder

$$1, 1, 1 + \varepsilon(3)$$

bestehen. Mithin wäre bei großen m das arithmetische Mittel der m Schwankungsfunktionen nahezu und in der Grenze für $m = \infty$ genau gleich

$$1 + \frac{1}{3} \varepsilon(3).$$

Wird weiter angenommen, daß nur die Primzahlen 3 und 5 wirksam seien, so wiederholen sich bei der Schwankungsfunktion beständig Folgen von je 3 · 5 Gliedern, deren arithmetisches Mittel, wie man leicht erkennt, gleich

$$\left(1 + \frac{1}{3} \varepsilon(3)\right) \left(1 + \frac{1}{5} \varepsilon(5)\right)$$

ist, und es würde daher, wenn m über alle Grenzen wächst, das Mittel der Schwankungsfunktionen dasselbe Produkt zum Grenzwert haben.

So fortfahrend lasse man der Reihe nach neben 3 und 5 die ungeraden Primzahlen 7, 11, 13, ... wirksam werden. Jede neue Primzahl p wird dann zu dem alten Produkte den Faktor

$$1 + \frac{1}{p} \varepsilon(p)$$

hinzufügen, und indem man zur Grenze für $n = \infty$ übergeht, folgt schließlich

$$(14) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{v=n-m+1}^n S(2v) = \prod_{(p)} \left(1 + \frac{1}{p} \varepsilon(p)\right),$$

wo das unendliche Produkt über alle ungeraden Primzahlen $p=3, 5, 7, 11, 13, \dots$ zu erstrecken ist. Aus der Verbindung der Gleichungen (13) und (14) erhält man endlich die Beziehung

$$(15) \quad x = 2 : \prod_{(p)} \left(1 + \frac{1}{p} \varepsilon(p)\right).$$

Hiermit ist der Lehrsatz bewiesen:

Wenn man als Näherungsfunktion von $G(2n)$ einen Ausdruck der Form

$$\gamma(2n) = x \cdot \frac{P^2(2n)}{2n} \cdot (1 + \varepsilon(p)) \cdot (1 + \varepsilon(q)) \cdot (1 + \varepsilon(r)) \dots$$

nimmt, in dem x eine numerische Konstante bezeichnet, während $p, q, r, \dots$ die ungeraden Primteiler von $2n$ bedeuten, so muß, damit die positiven und negativen Fehler sich im Sinne der Bedingungen (5) und (6) ausgleichen, die Konstante

$$x = 2 : \prod_{(p)} \left(1 + \frac{1}{p} \varepsilon(p)\right) \quad (p=3, 5, 7, 11, 13, \dots)$$

gesetzt werden.

Es wird mithin alles darauf ankommen, einen Aufschluß über die Multiplikatoren $1 + \varepsilon(p)$ zu gewinnen.

§ 3

Numerische Ansätze zur Bestimmung von Näherungswerten der Multiplikatoren

Bereits 1896 habe ich einen Versuch gemacht, die Multiplikatoren $M(p)$ numerisch zu bestimmen. Bei dem geringen Umfange der damals allein vorliegenden Tafel von G. CANTOR beschränkte ich mich auf die Primzahlen 3, 5, 7, 11, 13 und verfuhr folgendermaßen¹.

¹ In den Göttinger Nachrichten habe ich damals nur die Ergebnisse der Rechnungen kurz angezeigt (a. a. O., S. 293); mit Rücksicht auf die folgenden Betrachtungen erschien hier ein ausführlicherer Bericht angebracht.

Der Tafel wurden für den Bereich von 200 bis 1000 diejenigen Werte von $G(2n)$ entnommen, bei denen $2n$ durch keine der genannten fünf Primzahlen teilbar ist. Weil bei den Zahlen des Bereichs die folgenden Primzahlen 17, 19, ... keinen allzu großen Einfluß auf die Funktion $G(2n)$ haben, so darf man bei einer ersten Näherung jene Werte als Werte der Wachstumsfunktion $W(2n)$ ansehen. Auf diese Art konnte $W(2n)$ für den Bereich von 200 bis 1000 näherungsweise durch die lineare Funktion

$$(16) \quad L(2n) = 9,64 + 0,029 \cdot 2n$$

dargestellt werden.

Nunmehr wurde für die Zahlen $2n$ des Bereichs, die durch 3, aber keine andere der genannten fünf Primzahlen teilbar sind, der Quotient $G(2n) : L(2n)$ gebildet. Das arithmetische Mittel der Quotienten lieferte einen Näherungswert für den Multiplikator $M(3)$, und zwar ergab sich 1,86. Weiter wurden die Zahlen $2n$ des Bereichs herangenommen, die durch 3 und 5, aber keine andere der genannten fünf Primzahlen teilbar sind, und bei den durch 3 teilbaren Zahlen, um den Einfluß des Teilers 3 auszuschalten, $G(2n)$ durch 1,86 dividiert. Dasselbe Verfahren wie bei der Primzahl 3 lieferte für den Multiplikator $M(5)$ den Näherungswert 1,26. Auf entsprechende Art wurden für $M(7)$, $M(11)$, $M(13)$ der Reihe nach die Näherungswerte 1, 15; 1,08; 1,07 hergeleitet.

Zur Probe habe ich für den Bereich von 400 bis 498 unter der Annahme von $L(2n)$ als Wachstumsfunktion mittels der gefundenen fünf ersten Multiplikatoren die Näherungswerte von $G(2n)$ berechnet. Die Summe der Beträge der Fehler ist 96, und da die Summe der wahren Werte sich auf 1635 beläuft, so findet eine durchschnittliche Abweichung von 5,9% statt. Die Summe der Näherungswerte ist 1595, und das Verhältnis $1595 : 1635 = 0,976$ kommt dem Werte Eins ziemlich nahe.

Das Erscheinen der ausgedehnteren HAUSSNERSchen Tafeln veranlaßte mich zu einer erneuten Bestimmung der ersten vier Multiplikatoren, bei der ich jedoch auf andere Art vorging. Aus den geraden Zahlen von 4000 bis 4498 wurden diejenigen ausgeschlossen, die durch Primzahlen ≤ 61 teilbar sind und für jedes der zehn Hunderte das arithmetische Mittel der übrig gebliebenen Werte von $G(2n)$ gebildet. Da die Unterschiede der zehn Mittel durchschnittlich nur 1,7 betrugen, durfte innerhalb eines jeden Hunderts das Mittel selbst als Näherungswert für die Wachstums-

funktion genommen werden und damit war die Grundlage für eine Berechnung der ersten vier Multiplikatoren gewonnen, die der vorher geschilderten entspricht, nur daß jetzt, um eine größere Genauigkeit zu erzielen, der Reihe nach die durch 3, aber keine andere Primzahl ≤ 61 teilbaren Zahlen $2n$, dann die durch 3 oder 5, aber durch keine andere Primzahl ≤ 61 teilbaren Zahlen $2n$ usw. herausgenommen wurden. Das Ergebnis der Rechnung zeigt die Tafel 3.

TAFEL 3
Näherungswerte für die Multiplikatoren $M(p)$

$p =$	3	5	7	11
Erste Bestimmung	1,88	1,26	1,15	1,08
Zweite Bestimmung	1,98	1,32	1,19	1,09

Daß die Werte der Multiplikatoren bei der zweiten Bestimmung größer als bei der ersten ausgefallen sind, kann nicht überraschen; bei dieser wurden nämlich nur die fünf ersten Primzahlen berücksichtigt und daher entsprangen dem Ausdruck $L(2n)$ Werte, die größer sind als die Wachstumsfunktion, mithin wurden die Quotienten $G(2n) : L(2n)$ kleiner, als sie bei Berücksichtigung aller Primteiler geworden wären. Auch die Werte bei der zweiten Bestimmung, wo die Primzahlen bis 61 berücksichtigt wurden, sind zwar als genauer, aber immerhin als noch etwas zu klein anzusehen; zahlentheoretische Betrachtungen in § 5 werden diese Behauptung bestätigen.

§ 4

Bestimmung von Näherungswerten der Multiplikatoren durch eine Wahrscheinlichkeitsbetrachtung

In meiner Abhandlung vom Jahre 1896 habe ich versucht, durch eine Wahrscheinlichkeitsbetrachtung Näherungswerte für die Multiplikatoren abzuleiten.

Aus den ungeraden Zahlen, die kleiner als $2n$ und dazu teilerfremd sind, mögen nach irgend einem Gesetz gewisse ausgezeichnete Zahlen ausgesondert werden; ihre Anzahl sei $Q(2n)$. Unter den Darstellungen der geraden Zahl $2n$ als Summe von zwei ungeraden, zu $2n$ teilerfremden Zahlen kann es dann ausgezeichnete geben, bei denen nämlich beide Summanden ausgezeichnet sind.

Man denke sich, daß für alle möglichen Arten, aus den $\varphi(2n)$ ungeraden Zahlen, die zu $2n$ teilerfremd und kleiner als $2n$ sind, je $Q(2n)$ Zahlen auszusondern, die Anzahl der ausgezeichneten Darstellungen ermittelt werde, und bilde das arithmetische Mittel dieser Anzahlen; es darf als der wahrscheinliche Wert der Anzahl der ausgezeichneten Darstellungen der betrachteten Art aufgefaßt werden. Die Durchführung der Rechnung ergibt für die wahrscheinliche Anzahl den einfachen Ausdruck

$$(17) \quad \frac{Q(2n)(Q(2n)-1)}{2\varphi(2n)-1} \sim \frac{Q^2(2n)}{2\varphi(2n)} \\ \sim 2 \cdot \frac{Q^2(2n)}{2n} \cdot \left(1 + \frac{1}{p-1}\right) \left(1 + \frac{1}{q-1}\right) \left(1 + \frac{1}{r-1}\right) \dots,$$

wo $p, q, r, \dots$ wie früher die ungeraden Primteiler von $2n$ bedeuten; dabei muß $Q(2n)$ von höherer Ordnung unendlich werden als $\sqrt{2n}$. Der erste Faktor

$$2 \cdot \frac{Q^2(2n)}{2n}$$

ist die Wachstumsfunktion, während der Multiplikator $M(p)$ der Schwankungsfunktion gleich

$$1 + \frac{1}{p-1}$$

wird.

Für $p = 3, 5, 7, 11$ folgen hieraus die Werte

$$1,50; \quad 1,25; \quad 1,17; \quad 1,10,$$

die erheblich kleiner sind als die Näherungswerte, die für den Fall der GOLDBACHschen Darstellungen aus den numerischen Bestimmungen (Tafel 3) erhalten waren. Hierin liegt kein Widerspruch, denn aus der durchschnittlichen Anzahl der Darstellungen bei $P(2n)$ ausgezeichneten Zahlen im Bereiche der Zahlen von 1 bis $2n$ läßt sich kein bindender Schluß auf die Anzahl der besonderen Darstellungen ziehen, bei denen die ausgezeichneten Zahlen die Primzahlen sind. Der Wert der Wahrscheinlichkeitsbetrachtung liegt vielmehr darin, daß man dazu veranlaßt wird, für $G(2n)$ einen asymptotischen Ausdruck der Form

$$(2) \quad G(2n) \sim W(2n) \cdot M(p) \cdot M(q) \cdot M(r) \dots$$

anzusetzen, wo die Wachstumsfunktion von der Form

$$(3) \quad W(2n) = \kappa \cdot \frac{P^2(2n)}{2n}$$

ist.

Daß der Ausdruck (2) mit

$$(18) \quad W(2n) = 2 \cdot \frac{P^2(2n)}{2n}, \quad M(p) = 1 + \frac{1}{p-1}$$

keine befriedigende Annäherung an die Funktion $G(2n)$ gewährt, habe ich schon 1896 ausdrücklich gesagt. Mein damaliger Vorschlag, die Formel dadurch zu verbessern, daß man die ersten und die letzten $[\sqrt{2n}]$ Zahlen vom Bereiche abschneidet, führt zwar, wie die numerische Rechnung zeigte, für den Bereich von 400 bis 498 zu einer besseren Darstellung, leidet aber, wie E. LANDAU mit Recht eingewendet hat¹, an dem Mangel, daß beim asymptotischen Ausdruck dasselbe ausschlaggebende Glied wie vorher herauskommt.

Um die Formel (18) zu verbessern, hat LANDAU empfohlen, den Faktor 2 in $W(2n)$ durch 1,544 ... zu ersetzen, weil dann ein Fehlerausgleich in dem Sinne eintritt, daß die summatorische Funktion der Näherungswerte asymptotisch gleich ist der summatorischen Funktion der GOLDBACHSchen Zahlen. Während es, wie bereits erwähnt wurde, möglich ist, mit verhältnismäßig einfachen Mitteln die Formel

$$(9) \quad \sum_{v=1}^n G(2v) \sim \frac{1}{2} \left(\frac{2n}{\log 2n} \right)^2$$

herzuleiten, erfordert die Herstellung eines asymptotischen Ausdrucks für die summatorische Funktion der Näherungsausdrücke (18), die LANDAU mit $\mathfrak{G}(2n)$ bezeichnet, die Heranziehung tiefliegender Eigenschaften der zahlentheoretischen Funktion $\varphi(2n)$. Das Ergebnis ist die Formel²:

$$(19) \quad \sum_{v=1}^n \mathfrak{G}(2v) \sim \frac{105 \zeta(3)}{2\pi^4} \cdot \left(\frac{2n}{\log 2n} \right)^2,$$

¹ E. LANDAU, a. a. O., S. 186.

² E. LANDAU, a. a. O., S. 185.

aus der, weil der numerische Faktor den Wert 0,648... hat, LANDAU'S Verbesserungsvorschlag folgt.

Wenn man, abweichend von LANDAU, für den Fehlerausgleich die Bedingung (5) stellt, muß in der Formel (3) für $W(2n)$ der numerische Faktor z gemäß der Gleichung (15) gewählt werden. Im vorliegenden Falle ist

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{p-1},$$

und es wird daher

$$(20) \quad z = 2 \prod_{(p)} \frac{p(p-1)}{p(p-1)+1} \quad (p=3, 5, 7, 11, 13, \dots).$$

LANDAU hat den Wert des unendlichen Produktes, wenn es über die Werte $p=2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots$ erstreckt wird, durch eine leichte Umformung ermittelt¹. Hieraus findet man das Produkt in der Gleichung (20)

$$(21) \quad \prod_{(p)} \frac{p(p-1)}{p(p-1)+1} = \frac{\pi^4}{105\zeta(3)} = 0,772 \dots,$$

und es wird

$$(22) \quad z = \frac{2\pi^4}{105\zeta(3)} = 1,544 \dots,$$

so daß man genau zu der Formel gelangt, die aus der LANDAU'schen Forderung hervorgeht.

Die Übereinstimmung der beiden Ergebnisse ist kein Zufall. Wenn nämlich

$$\lim_{n=\infty} \left(\sum_{v=n-m+1}^n \gamma(v) : \sum_{v=n-m+1}^n g(v) \right) = 1$$

ist, so beweist man nach einer bekannten, auf CAUCHY zurückgehenden Schlußweise², daß, wenn der Grenzwert

$$\lim_{n=\infty} \left(\sum_{v=1}^n \gamma(v) : \sum_{v=1}^n g(v) \right)$$

existiert, er nur gleich Eins sein kann.

¹ E. LANDAU, a. a. O., S. 182.

² A. CAUCHY, *Analyse algébrique*, Paris 1821; deutsche Ausgabe von C. ITZIGSOHN, Berlin 1885, S. 33.

Die numerische Prüfung der verbesserten Formel zeigt, daß sie ebenso wenig befriedigende Werte liefert, wie die ursprüngliche Formel. Man erhält nur ein abgeblaßtes Bild des wirklichen Verlaufes der Funktion $G(2n)$; die Maxima werden verkleinert, die Minima vergrößert. Die Schuld hieran trägt die Wahl der Multiplikatoren, die erheblich unter den numerisch ermittelten Werten liegen. Zu besseren Werten für die Multiplikatoren führen gewisse zahlentheoretische Betrachtungen; zu denen wir jetzt übergehen.

§ 5

Bestimmung der Multiplikatoren durch zahlentheoretische Betrachtungen

Daß die auffallenden Schwankungen der Funktion $G(2n)$ mit den ungeraden Primteilern von $2n$ in Zusammenhang stehen, hat auch HAUSSNER¹ bemerkt. Er hat versucht, diese Erscheinung durch eine zahlentheoretische Betrachtung zu erklären. In bezug auf den Modul 3 haben nämlich die geraden Zahlen $2n$ die drei Formen $6m$, $6m+2$, $6m+4$. Gestattet eine Zahl der Form $6m$ eine Darstellung als Summe von zwei Primzahlen x und y , so ist entweder $x=3r+1$ und $y=3s+2$ oder $x=3r+2$ und $y=3s+1$. Dagegen gestatten die Zahlen der Form $6m+2$ nur Darstellungen, bei denen $x=3r+1$ und $y=3s+1$ ist, und die Zahlen der Form $6m+4$ nur solche, bei denen $x=3r+2$ und $y=3s+2$ ist; falls $2n-3$ eine Primzahl ist, tritt noch die Zerlegung $x=3$, $y=2n-3$ hinzu. Allgemein gibt es in bezug auf eine Primzahl p als Modul p Klassen von geraden Zahlen, denen die Formen $2pm$, $2pm+2$, $2pm+4, \dots, 2pm+2p-2$ zukommen. Die Zahlen der ersten Klasse, $2pm$, gestatten $p-1$ Arten der Darstellung als Summe von zwei Primzahlen x und y , weil hier x alle $p-1$ Formen $pr+1$, $pr+2, \dots, pr+p-1$ haben darf. Dagegen gestatten die Zahlen der übrigen $p-2$ Klassen nur $p-2$ Arten der Darstellung, weil x für die Zahlen der Form $2pm+2p$ nicht die Form $pr+2p$ haben darf; falls $2n-p$ eine Primzahl ist, tritt noch die Zerlegung $x=p$, $y=2n-p$ hinzu.

HAUSSNER schließt hieraus, daß „von je zwei geraden Zahlen, die in der Nähe voneinander liegen, d. h. deren Differenz im Ver-

¹ R. HAUSSNER, a. a. O., S. 11; HAUSSNER hat meine Abhandlung in den Göttinger Nachrichten erst während des Druckes seiner Arbeit kennen gelernt und die folgenden Betrachtungen unabhängig davon angestellt.

gleich zu den Zahlen selbst klein ist, im allgemeinen diejenige eine größere Anzahl von GOLDBACHschen Zerlegungen zulassen wird, welche die größere Anzahl von verschiedenen ungeraden Primfaktoren besitzt oder bei welcher die Primfaktoren kleinere Zahlenwerte als bei der andern haben; treffen beide Umstände zusammen, so wird die Anzahl ihrer Zerlegungen um so mehr die Anzahl der Zerlegungen der andern Zahl übertreffen.“

Nimmt man den Gedanken der Multiplikatoren hinzu, der HAUSSNER fremd ist, so wird man durch die vorstehenden Überlegungen dazu veranlaßt,

$$(23) \quad M(p) = \frac{p-1}{p-2} = 1 + \frac{1}{p-2}$$

zu setzen. Für die Primzahlen 3, 5, 7, 11 wird daher der Reihe nach der Multiplikator gleich

$$2,00; 1,33; 1,20; 1,11;$$

bei der numerischen Bestimmung ergab sich

$$1,98; 1,32; 1,19; 1,10,$$

und zwar waren diese Näherungswerte etwas zu klein. Man wird daher die Formel (23) als vollen Ersatz für die numerische Bestimmung ansehen dürfen.

Das Vertrauen zu dieser Formel wird dadurch bestärkt, daß neuerdings V. BRUN durch zahlentheoretische Überlegungen anderer Art ebenfalls zu ihr gelangt ist¹. Man denke sich die ganzen Zahlen von 0 bis $2n$ der Reihe nach aufgeschrieben und darunter dieselben Zahlen in umgekehrter Reihenfolge, genau so wie ich es 1896 bei der Wahrscheinlichkeitsbetrachtung getan hatte. Jetzt wende man auf die beiden Reihen das Verfahren der Streichung von Zahlen an, das als das Sieb des ERATOSTHENES bekannt ist². Die übrigbleibenden Zahlenpaare, bei denen also die beiden untereinander stehenden Zahlen nicht gestrichen sind, ergeben dann die Darstellungen der Zahl $2n$ als eine Summe von zwei Primzahlen, die zwischen $\sqrt{2n}$ und $2n - \sqrt{2n}$ liegen. Es ist übrigens unnötig,

¹ V. BRUN, Über das GOLDBACHsche Gesetz und die Anzahl der Primzahlpaare, Archiv for Mathematik og Naturvidenskab, Bd. 24, Nr. 8, Kristiania 1915; die Abhandlung ist datiert vom November 1915.

² Derselbe Gedanke findet sich in einer März 1915 erschienenen Abhandlung von J. MERLIN, Bulletin des sciences mathématiques, 2. série, t. 39, 1. partie, S. 121.

die zweite Reihe wirklich hinzuschreiben, denn man braucht nur die zweite Folge von Streichungen in der ersten Reihe bei $2n$ zu beginnen und von rechts nach links durchzuführen. Man erkennt bei der doppelten Siebung, daß die zweimalige Streichung jeder zweiten Zahl nur einer einmaligen entspricht. Ebenso entspricht, wenn $2n$ durch 3 teilbar ist, der zweimaligen Streichung jeder dritten Zahl nur einer einmaligen, und allgemein, wenn $2n$ durch eine ungerade Primzahl p , kleiner als $\sqrt{2n}$, teilbar ist, der zweimaligen Streichung jeder p -ten Zahl nur eine einmalige. Bei dem angenäherten Ausdruck für die Anzahl der Darstellungen von $2n$ als Summe von zwei Primzahlen, die zwischen $\sqrt{2n}$ und $2n - \sqrt{2n}$ liegen, wird daher der Multiplikator

$$M(p) = \frac{1 - \frac{1}{p}}{1 - \frac{1}{p}} = \frac{p-1}{p-2}$$

zu setzen sein, mit der Maßgabe, daß nur diejenigen Primteiler von $2n$ für die Schwankungsfunktion wirksam werden, die kleiner als $\sqrt{2n}$ sind. Man überzeugt sich leicht, daß bei der asymptotischen Formel sowohl die Beschränkung auf Zerlegungen, deren Bestandteile zwischen $\sqrt{2n}$ und $2n - \sqrt{2n}$ liegen, als auch die Forderung, daß nur Primteiler kleiner als $\sqrt{2n}$ als wirksam angesehen werden sollen, unwesentlich sind.

§ 6

Eine neue Näherungsformel für $G(2n)$

Die numerischen Bestimmungen (§ 3) wie die zahlentheoretischen Betrachtungen (§ 5) zeigen, daß es sich empfiehlt, die Schwankungsfunktion $S(2n)$ aus den Multiplikatoren

$$M(p) = 1 + \frac{1}{p-2}$$

aufzubauen, und führen in Verbindung mit der Wahrscheinlichkeitsbetrachtung (§ 4) zu dem Ansatz

$$(24) \quad G(2n) \sim z \cdot \frac{P^2(2n)}{2n} \cdot \left(1 + \frac{1}{p-2}\right) \left(1 + \frac{1}{q-2}\right) \left(1 + \frac{1}{r-2}\right) \dots$$

Die numerische Konstante z hat vermöge der Forderung des Fehlerausgleichs nach dem in § 2 bewiesenen Lehrsatz den Wert

$$(25) \quad z = 2 : \prod_{(p)} \left(1 + \frac{1}{p(p-2)}\right) = 2 \prod_{(p)} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \quad (p=3, 5, 7, 11, \dots).$$

Um die Formel (24) numerisch zu erproben, habe ich nach ihr die Näherungswerte von $G(2n)$ für den Bereich von 4000 bis 4998 berechnet. Die Werte von

$$\frac{P^2(2n)}{2n}$$

liegen dabei zwischen 76 und 89, die Werte der Schwankungsfunktion zwischen 1 und 3,56, der Wert des Produktes zwischen 76 und 317. Wenn also die auf ganze Zahlen abgerundeten Näherungswerte von $G(2n)$ die Einheiten genau angeben sollen, so muß der Wert von z bis auf einen Fehler bekannt sein, der kleiner als $1/634$ ist. Es entsteht daher die Frage, wie man das unendliche Produkt

$$(26) \quad \omega = \prod_{(p)} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right)$$

mit einer gegebenen Genauigkeit δ berechnen kann und wie sich die Berechnung im besonderen für die Annahme

$$\delta < \frac{1}{1268}$$

gestaltet.

Zu diesem Zweck mögen die aufeinander folgenden ungeraden Primzahlen 3, 5, 7, 11, ... der Reihe nach mit $p_1, p_2, p_3, p_4, \dots$ bezeichnet werden, und es sei

$$(27) \quad \prod_{v=1}^n \left(1 - \frac{1}{(p_v-1)^2}\right) = \omega_n.$$

Dann wird

$$\omega_{n+1} = \omega_n - \frac{\omega_n}{(p_{n+1}-1)^2},$$

$$\omega_{n+2} = \omega_{n+1} - \frac{\omega_{n+1}}{(p_{n+2}-1)^2},$$

.....

und daher

$$\omega = \omega_n - \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\omega_{n+v-1}}{(p_{n+v}-1)^2},$$

so daß die unendliche Summe den Fehler angibt, den man begeht, wenn man ω durch das Produkt ω_n der ersten n Faktoren ersetzt. Nun werden die Näherungswerte ω_n mit wachsendem Zeiger immer kleiner, folglich ist, wenn $m \leq n$ gewählt wird:

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{\omega_{n+v-1}}{(p_{n+v}-1)^2} < \omega_m \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{(p_{n+v}-1)^2}.$$

Um die Summe auf der rechten Seite abzuschätzen, nehme ich an, daß $p_n > 500$ sei. Bei den folgenden Hunderten ist die Anzahl der Primzahlen höchstens $1/6$ aller Zahlen; sie nimmt, wenn man weitergeht, beständig ab. Mithin ist

$$\begin{aligned} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{(p_{n+v}-1)^2} &< \frac{1}{6} \cdot \sum_{\rho=p_{n+1}-1}^{\infty} \frac{1}{\rho^2} \\ &< \frac{1}{6} \cdot \sum_{\rho=p_{n+1}-1}^{\infty} \frac{1}{\rho(\rho-1)} \\ &< \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{p_{n+1}-2}. \end{aligned}$$

Unter den gemachten Voraussetzungen ist demnach der Fehler von ω_n kleiner als

$$\frac{\omega_m}{6 \cdot 507} = \frac{\omega_m}{3042}.$$

Geht man bis zur Primzahl $p_m=503$, so wird bei siebenstelliger Rechnung

$$\omega_m = 0,6603362,$$

mithin ist bei

$$\omega_{m+1} = 0,6603337$$

der Fehler kleiner als

$$\frac{0,67}{3042} = 0,00022,$$

das heißt, ω liegt zwischen 0,66034 und 0,66011, z also zwischen 1,32068 und 1,32022. Wenn man daher

$$(28) \quad z = 1,320$$

setzt, so ist der Fehler kleiner als $1/1000$, so daß die geforderte Genauigkeit von $1/634$ gesichert ist.

Auf Grund der Näherungsformel

$$(A) \quad G(2n) \sim \alpha(2n) = 1,320 \cdot \frac{P^2(2n)}{2n} \cdot \left(1 + \frac{1}{p-2}\right) \left(1 + \frac{1}{q-2}\right) \left(1 + \frac{1}{r-2}\right) \dots$$

habe ich eine Tafel für den Bereich von 4000 bis 4498 berechnet, die man am Schluß dieser Abhandlung findet¹. Hier möge nur in der Tafel 4 für jedes der zehn Hunderte des fünften Tausends die Summe „der wahren Werte, der Näherungswerte, der positiven und die der negativen Fehler, der vom Vorzeichen befreiten Fehler geteilt durch die Summe der wahren Werte und die algebraische Summe der Fehler geteilt durch die Summe der wahren Werte zusammengestellt werden.

Wenn man an der Hand der Tafel die Vergleichung zwischen den wahren Werten und den Näherungswerten im einzelnen durchführt, zeigt sich eine sonderbare Erscheinung. Im allgemeinen ist nämlich die Übereinstimmung zwischen diesen Werten erheblich besser, als man es nach der Tafel 4 erwarten müßte, und es sind nur einzelne Werte von $2n$, bei denen die Abweichung größer, dann aber auch sogleich recht groß wird. In jedem der zehn Hunderte sind durchschnittlich 7 bis 8 solche Ausnahmewerte vorhanden, die ganz unregelmäßig verteilt sind. Die Abweichungen sind bald positiv, bald negativ und gleichen sich im Mittel aus. Untersucht man die Ausnahmewerte von $2n$ auf ihre Teilbarkeitseigenschaften, so sind unter ihnen auffallend häufig solche, bei denen n oder $\frac{1}{2}n$ eine Primzahl ist: jedoch gibt es noch mehr

¹ Für die umfangreichen Rechnungen, die bei der vorliegenden Untersuchung nötig wurden, konnte ich eine Rechenmaschine benutzen, die mir von der Heidelberger Akademie zur Verfügung gestellt wurde; ich möchte auch an dieser Stelle meinen Dank dafür aussprechen.

TAFEL 4

Berechnung von Näherungswerten für $G(2n)$ auf Grund der Formel (A)

Hunderte	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Summe der wahren Werte	7582	7646	8015	7973	8029	8234	8388	8391	8584	8772
Summe der Näherungswerte	7688	7724	8108	8085	8150	8378	8512	8514	8751	8909
Summe der positiven Fehler	95	77	84	88	95	86	75	81	87	98
Summe der negativen Fehler	201	155	177	200	216	230	199	204	254	235
Relativer Wert der Summe der Fehlerbeträge	0,039	0,030	0,033	0,036	0,039	0,038	0,033	0,035	0,034	0,038
Relativer Wert der algebraischen Summe der Fehler	0,014	0,010	0,012	0,014	0,015	0,017	0,015	0,015	0,019	0,016

solcher Zahlen $2n$, die keine Ausnahmewerte sind. Eine Aufklärung wird man nur erhoffen dürfen, wenn die Tafeln der GOLDBACHSchen Zahlen weitergeführt und womöglich bis zur Grenze 10 000 ausgedehnt werden; die Mühe der Berechnung nimmt freilich mit jedem Schritte zu, den man vorwärts tut.

Die Ausnahmewerte treten besonders deutlich in die Erscheinung, wenn man aus den wahren Werten von $G(2n)$ die Quotienten $G(2n) : S(2n) = \Omega(2n)$ berechnet; diese Werte, auf Einheiten abgerundet, findet man für den Bereich von 4000 bis 4998 in der Tafel am Schluß der Abhandlung. Man könnte $\Omega(2n)$ als die wahre Wachstumsfunktion bezeichnen. Werden für die einzelnen Hunderte des fünften Tausends die Mittel von $\Omega(2n)$ gebildet, so sind sie, wie die Tafel 5 zeigt, von den entsprechenden Mitteln der Wachstumsfunktion $W(2n)$ des Näherungsausdrucks $\alpha(2n)$ nur wenig verschieden, ein Zeichen, daß die Multiplikatoren $M(p)$ von $\alpha(2n)$ richtig gewählt wurden.

TAFEL 5

Vergleichung der Wachstumsfunktionen $\Omega(2n)$ und $W(2n)$ für den Bereich von 4000 bis 4998

Hunderte	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\Omega(2n)$	99,96	102,50	103,98	105,96	106,48	108,34	109,32	112,38	113,16	115,36
$W(2n)$	101,46	103,46	105,36	107,26	108,42	110,18	111,96	113,76	115,00	116,72

§ 7

Die GOLDBACHschen Zahlen und die Anzahlen der Paare von Primzahlen, die sich um zwei unterscheiden

V. BRUN hat nicht nur, das Sieb des ERATOSTHENES verallgemeinernd, die Multiplikatoren $M(p) = 1 + \frac{1}{p-2}$ angegeben, sondern ist auch, auf diesem Wege weitergehend, zu wichtigen Aufschlüssen über die Wachstumsfunktion gelangt. Wie BRUN selbst hervorhebt, sind die Überlegungen, die er anstellt, keine strengen Beweise, sondern besitzen nur einen heuristischen Wert. Auf ihre Wiedergabe an dieser Stelle kann daher verzichtet werden, und es wird sich nur darum handeln, BRUNS Vermutungen mit den vorhergehenden Betrachtungen in Zusammenhang zu bringen.

Die Untersuchungen von mir und LANDAU hatten zu dem Ansatz

$$(3) \quad W(2n) \sim z \cdot \frac{P^2(2n)}{2n} \sim z \cdot \frac{2n}{\log^2 2n}$$

geführt. BRUN kommt von ganz anderer Seite her zu demselben Ausdruck, der dadurch eine willkommene Bestätigung erfährt. Die numerische Konstante z bleibt bei ihm zunächst noch unbestimmt. Um ihren Wert zu ermitteln, bringt er in bemerkenswerter Weise die GOLDBACHschen Zahlen in Zusammenhang mit den Anzahlen der Paare von Primzahlen, die sich um zwei unterscheiden. BRUN nennt solche Paare von Primzahlen einfach Primzahlpaare. Dieses Wort wird jedoch zu oft in anderer Bedeutung gebraucht — handelt es sich doch beim GOLDBACHschen Satze selbst auch um gewisse Primzahlpaare —, als daß es jenem besonderen Zweck dienen könnte, und ich werde daher Paare von Primzahlen, die sich um zwei unterscheiden, Primzahlzwillinge nennen.

Auch die Primzahlzwillinge lassen sich nach BRUN aussieben¹, wenn man nämlich beim Sieben des Bereiches der ganzen Zahlen von 0 bis $2n$ als Ausgangszahlen die Stellen -1 und $+1$ wählt. Man erhält auf diese Art die zwischen $\sqrt{2n}$ und $2n$ liegenden Primzahlzwillinge, deren Anzahl der Anzahl $Z(2n)$ aller zwischen 0 und $2n$ liegenden Primzahlzwillinge asymptotisch gleich ist.

¹ Dasselbe hatte schon MERLIN bemerkt, a. a. O., S. 132, ohne jedoch auf eine Beziehung zum GOLDBACHschen Satze zu schließen.

Nach BRUN ist nun

$$(29) \quad Z(2n) \sim \kappa \cdot \frac{P^2(2n)}{2n} \sim \kappa \cdot \frac{2n}{\log^2 2n},$$

wo κ dieselbe numerische Konstante wie in der Formel (3) bedeutet.

Um κ hieraus zu bestimmen, setzt BRUN $2n = 100\,000$. Es ist

$$Z(100\,000) = 1225.$$

Da jedoch die linke Seite der Formel ursprünglich die Anzahl der aus der doppelten Siebung hervorgegangenen Primzahlzwillinge darstellt, wird von $Z(100\,000)$ der Wert $Z(\sqrt{100\,000}) = 19$ abgezogen, wodurch sich 1209 ergibt. Für die rechte Seite benutzt BRUN den Näherungsausdruck $\kappa \cdot \frac{2n}{\log^2 2n}$ und gelangt so zu der Gleichung

$$\kappa = \frac{1206 \cdot \log^2 100\,000}{100\,000},$$

aus der sich

$$(30) \quad \kappa = 1,5985$$

ergibt.

Der BRUNsche Wert ist merklich verschieden von dem in § 6 ermittelten Werte

$$\kappa = 1,320 \dots,$$

der aus der Forderung des Fehlerausgleichs folgt. Die Abweichung erklärt sich aus dem Umstande, daß BRUN auf der rechten Seite statt $\kappa \cdot \frac{P^2(2n)}{2n}$ den Näherungsausdruck $\kappa \cdot \frac{2n}{\log^2 2n}$ einsetzt, der davon erheblich abweicht. Dies zeigt schon die analytische Formel¹:

$$(31) \quad P(x) = \frac{x}{\log x} + \frac{x}{\log^2 x} + O\left(\frac{x}{\log^3 x}\right),$$

in der O das LANDAUSCHE Ordnungssymbol bedeutet, und numerisch wird

$$P(100\,000) = 9591, \quad \frac{200\,000}{\log 100\,000} = 8686, \quad \frac{200\,000}{\log^2 100\,000} = 754.$$

¹ Vgl. etwa E. LANDAU, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen Bd. I, Leipzig 1909, S. 197.

Um z aus der Formel (29) genauer zu berechnen, hat man also anzusetzen

$$z = \frac{1206 \cdot 100000}{P^2(100000)}$$

und erhält jetzt

$$(32) \quad z = 1,311 \dots,$$

einen Wert, der mit dem in § 6 berechneten genauer übereinstimmt, als man es bei $2n = 100000$ erwarten durfte.

Mithin ist der BRUNSCHE Wert 1,5985 durch den Wert 1,320 zu ersetzen.

Aus der Verbindung der Formeln (3) und (29) folgt BRUN endlich, daß

$$(33) \quad Z(2n) \sim W(2n)$$

ist. Um diese Vermutung numerisch zu prüfen, sollen für die einzelnen Hunderte des fünften Tausends die mittleren Werte von $W(2n)$ mit den mittleren Werten von $Z(2n)$ verglichen werden. Die Übereinstimmung ist unverkennbar.

TAFEL 6

Vergleichung der Funktionen $W(2n)$ und $Z(2n)$ für den Bereich von 4000 bis 4998

Hunderte	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$W(2n)$	101,46	103,46	105,36	107,26	108,42	110,18	111,96	113,76	115,00	116,72
$Z(2n)$	105,28	108,10	111,68	114,60	115,92	118,30	120,08	121,76	121,94	123,96

Auf der Formel (33) fußend, gibt BRUN für die Funktion $G(2n)$ die Näherungsformel

$$(B) \quad G(2n) \sim \beta(2n) = Z(2n) \cdot \left(1 + \frac{1}{p-2}\right) \left(1 + \frac{1}{q-2}\right) \left(1 - \frac{1}{r-2}\right) \dots,$$

die den Vorzug hat, daß man die Wachstumsfunktion $Z(2n)$ den Tafeln der Primzahlen leicht entnehmen kann.

Auch für die Formel (B) habe ich eine numerische Probe angestellt, und zwar für denselben Bereich von 4000 bis 4498, für den ich die Formel (A) benutzt hatte. In derselben Anordnung wie bei

der Tafel 4 gebe ich in der Tafel 7 eine Zusammenstellung der Mittel für die einzelnen Hunderte; die berechneten Werte selbst findet man in der Tafel am Schluß der Abhandlung.

TAFEL 7

Berechnung von Näherungswerten für $G(2n)$ auf Grund der Formel (B)

Hunderte	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Summe der wahren Werte	7582	7646	8015	7973	8029	8234	8388	8391	8584	8772
Summe der Näherungswerte	7961	8052	8564	8619	8693	8976	9115	9091	9333	9444
Summe der positiven Fehler	38	10	17	8	5	2	8	0	5	9
Summe der negativen Fehler	417	416	566	654	669	744	735	700	754	681
Relativer Wert der Summe der Fehlerbeträge	0,060	0,056	0,071	0,083	0,084	0,091	0,089	0,083	0,088	0,079
Relativer Wert der algebraischen Summe der Fehler	0,050	0,053	0,068	0,081	0,070	0,090	0,087	0,083	0,087	0,077

Die Vergleichung der Tafeln 4 und 7 ergibt, daß die Formel (B) eine erheblich geringere Annäherung an die wahren Werte gewährt als die Formel (A); sie hat im besonderen den Mangel, daß kein Ausgleich der positiven und negativen Fehler stattfindet.

§ 8

Ein neuer Zusammenhang zwischen den GOLDBACHSchen Darstellungen der geraden Zahlen und den Primzahlzwillingen

Ein Zusammenhang zwischen den GOLDBACHSchen Darstellungen der geraden Zahlen als Summen von zwei ungeraden Primzahlen und den Primzahlzwillingen ergibt sich auch, wenn man, wie ich es in der Abhandlung vom Jahre 1896 getan habe, die erzeugende Funktion der GOLDBACHSchen Zahlen:

$$(34) \quad \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} G(2n) x^{2n}$$

betrachtet.

Aus den Identitäten¹

$$(35) \quad \varphi(x) = \left(\sum_{(p)} x^p \right)^2 \quad (p = 1, 3, 5, 7, 11, 13, \dots)$$

und

$$(36) \quad \sum_{(p)} x^p = \sum_{\lambda=1}^{\infty} (P(2\lambda) - P(2\lambda-2)) x^{2\lambda-1} \\ = (1-x^2) \sum_{\lambda=1}^{\infty} P(2\lambda) x^{2\lambda-1}$$

folgt sogleich

$$\varphi(x) = (1-x^2)^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{\mu=1}^n P(2n+2-2\mu) P(2\mu) \right) x^{2n} \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{\mu=1}^n (P(2n+2-2\mu) - 2P(2n-2\mu) + P(2n-2-2\mu)) P(2\mu) \right\} x^{2n};$$

hierin ist $P(0)=0$, $P(-2)=0$ zu setzen. Mithin gilt die Formel

$$(37) \quad G(2n) = \sum_{v=0}^{n-1} (P(2v+2) - 2P(2v) + P(2v-2)) P(2n-2v),$$

durch die $G(2n)$ vermöge $P(0)$, $P(2)$, $P(4)$, $P(6)$, ..., $P(2n)$ dargestellt wird.

Um $G(2n)$ aus der Formel (37) zu berechnen, empfiehlt es sich, wie HAUSSNER bemerkt hat, zunächst aus $P(0)$, $P(2)$, $P(4)$, ..., $P(2n)$ die zahlentheoretische Funktion

$$(38) \quad \xi(2v) = P(2v+2) - 2P(2v) + P(2v-2)$$

¹ Die Identität (36) ist ein besonderer Fall einer Identität, die immer gilt, wenn aus einer arithmetischen Reihe

$$av + b \quad (v = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

eine Folge ausgezeichneten Zahlen ω ausgesondert wird. Bezeichnet man nämlich die Anzahl der ausgezeichneten Zahlen des Bereichs $v = 0, 1, 2, \dots, n$ mit $A(n)$, so ist die über alle ausgezeichneten Werte ω erstreckte Summe

$$\sum x^{\omega} = (1-x^a) \sum_{n=0}^{\infty} A(n) x^{an+b}.$$

Bei der Anwendung auf die Reihe $\sum x^p$ hat man zu beachten, daß $P(2\lambda) = P(2\lambda-1)$ ist.

zu bilden, und zwar erhält man $\xi(2\nu)=0$, wenn $2\nu-1$ und $2\nu+1$ beide zusammengesetzte Zahlen oder beide Primzahlen sind, $\xi(2\nu)=-1$, wenn $2\nu-1$ Primzahl, $2\nu+1$ zusammengesetzt, $\xi(2\nu)=+1$, wenn $2\nu-1$ zusammengesetzt, $2\nu+1$ Primzahl ist. HAUSSNER hat für den Bereich von $\nu=1$ bis 5000 die Werte von $\xi(2n)$ angegeben¹. Insbesondere ist

$$(39) \quad \xi(0)=1, \quad \xi(2)=0, \quad \xi(4)=0, \quad \xi(6)=0, \quad \xi(8)=-1, \quad \xi(10)=+1.$$

Die Berechnung der GOLDBACHschen Zahlen auf Grund der Formel

$$(37') \quad G(2n) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \xi(2\nu) P(2n-2\nu)$$

soll jetzt genauer untersucht werden; hierbei wird sich zugleich für sie ein neuer rein arithmetischer Beweis ergeben.

Damit die zahlentheoretische Funktion $\xi(2\nu)$ von Null verschieden ausfällt, muß die eine der beiden Zahlen $2\nu-1$, $2\nu+1$ eine Primzahl, die andere eine zusammengesetzte Zahl sein. Dabei macht es einen wesentlichen Unterschied, ob diese Primzahl p eine vereinzelte Primzahl ist, das heißt $p-2$ und $p+2$ zusammengesetzte Zahlen sind, oder ob das nicht der Fall, das heißt, auch eine der Zahlen $p-2$ und $p+2$ Primzahl ist, mithin p einem Primzahlzwilling angehört.

Ist erstens $2\nu-1=p$ eine vereinzelte Primzahl, so wird

$$\xi(2\nu-2)=+1, \quad \xi(2\nu)=-1,$$

mithin geben die Werte $\nu-1$ und ν des Zeigers zur Summe (37') den Beitrag

$$P(2n-2\nu+2) - P(2n-2\nu),$$

und dieser ist gleich Null, wenn $2n-2\nu+1=2n-p$ eine zusammengesetzte Zahl, gleich +1, wenn es eine Primzahl ist. Das bedeutet aber nichts anderes, als daß eine vereinzelte Primzahl p zur Summe

¹ HAUSSNER erklärt (a. a. O., S. 17) die Funktion ξ auf eine etwas andere Art, er setzt nämlich

$$P(2\rho+1) - 2P(2\rho-1) + P(2\rho-3) = \xi(2\rho+1);$$

seine Funktion $\xi(2\rho+1)$ ist daher das $\xi(2\rho)$ des Textes.

(37') den Beitrag 1 oder 0 gibt, je nachdem sie eine GOLDBACHsche Darstellung der geraden Zahl $2n$ liefert oder nicht.

Gehört zweitens $2v-1=p$ zu einem Primzahlzwilling, so möge auch $2v+1=p+2$ eine Primzahl sein. Wenn man von den Zahlen 1, 3, 5, 7 absieht, die eine besondere Behandlung erfordern, so sind in diesem Falle die Zahlen $2v-3=p-2$ und $2v+3=p+4$ zusammengesetzt, und es geben daher die Werte des Zeigers $v-1$, v , $v+1$ zur Summe (37') den Beitrag

$$P(2n-2v+2) - P(2n-2v-2).$$

Dieser ist gleich Null, wenn die beiden Zahlen $2n-2v+1$ und $2n-2v-1$ zusammengesetzt sind, gleich +1, wenn eine davon Primzahl ist, gleich +2, wenn beide Primzahlen sind. Hierin liegt wiederum, daß ein Primzahlzwilling p , $p+2$ zur Summe den Beitrag 2, 1, 0 gibt, je nachdem er zwei, eine oder keine GOLDBACHsche Darstellung der geraden Zahl $2n$ liefert. Ist der Beitrag 1, so bedarf es noch der Untersuchung, zu welcher der beiden Primzahlen p und $p+2$ die GOLDBACHsche Darstellung gehört.

Handelt es sich endlich um die Zahlen 1, 3, 5, 7, so zeigen die Gleichungen (39), daß die Werte des Zeigers $v=0, 1, 2, 3, 4$ zur Summe (37') den Beitrag

$$P(2n) - P(2n-8)$$

geben, dies ist aber die Anzahl der Primzahlen unter den Zahlen $2n-1, 2n-3, 2n-5, 2n-7$. Hieraus folgt, daß die Primzahlen 1, 3, 5, 7 zur Summe den Beitrag 3, 2, 1, 0 geben, je nachdem sie 3, 2, 1, 0 GOLDBACHsche Darstellungen der geraden Zahl $2n$ liefern. Ist der Beitrag 3, 2, 1, so bedarf es noch der Untersuchung, zu welcher der Primzahlen 1, 3, 5, 7 die GOLDBACHschen Darstellungen gehören.

Hiermit ist der angekündigte rein arithmetische Beweis der Formel (37) erbracht. Gleichzeitig erkennt man, daß die wirkliche Ausrechnung der Summe nicht nur den Wert von $G(2n)$ finden läßt, sondern auch zu den GOLDBACHschen Darstellungen der geraden Zahl $2n$ führt. Diese ergeben sich nämlich unmittelbar für die vereinzelter Primzahlen, dagegen ist bei den Primzahlzwillingen zu unterscheiden, ob beide Primzahlen eine Darstellung liefern, oder ob dies nur für die eine von ihnen gilt; in diesem Fall bedarf es noch einer Untersuchung, welche von beiden die Darstellung liefert.

Die vorhergehenden Betrachtungen lenken die Aufmerksamkeit auf die eigenartigen Paare GOLDBACHscher Darstellungen einer geraden Zahl $2n$, bei denen dem Primzahlzwilling $p, p+2$ ein Primzahlzwilling $2n-p-2=q, 2n-p=q+2$ entspricht, und umgekehrt. Im allgemeinen sind die beiden Zwillingspaare voneinander verschieden. Sie fallen dann und nur dann zusammen, wenn $2n=2p+2$ ist; dies tritt ein für

$$2n = 4, 8, 12, 24, 36, 60, 84, 120, 144, 204 \text{ usw.}$$

Entsprechend der Festsetzung, daß bei der GOLDBACHschen Zahl $G(2n)$ die Darstellungen $2n=x+y$ und $y+x$, falls x und y verschieden sind, als verschieden angesehen werden sollten, sodaß $G(2n)$ nur dann eine ungerade Zahl wird, wenn $2n=2p$ ist, sollen auch die Zwillingsdarstellungen $(p, 2n-p)$, womit die Darstellungen

$$2n = p + (2n-p) = (p+2) + (2n-p-2)$$

gemeint sind, als verschieden angesehen werden, falls p und $q=2n-p-2$ verschieden sind, sodaß die Anzahl $G_1(2n)$ dieser Darstellungspaare im allgemeinen gerade ist und nur ungerade wird, wenn $2n=2p+2$ ist.

Man erkennt leicht, daß nicht alle geraden Zahlen $2n$ Zwillingsdarstellungen zulassen. Abgesehen von den Paaren 1, 3 und 3, 5 ist nämlich bei jedem Primzahlzwilling $p, p+2$ notwendig

$$(40) \quad p = 6\rho - 1, \quad p+2 = 6\rho + 1.$$

Sind auch $2n-p-2$ und $2n-p$ Primzahlen, wie es einer Zwillingsdarstellung eignet, so hat man ebenso

$$(41) \quad 2n-p-2 = 6\sigma - 1, \quad 2n-p = 6\sigma + 1,$$

und daher ist

$$(42) \quad 2n = 6(\rho + \sigma),$$

das heißt, aus den eigentlichen Zwillingspaaren $p=6\rho-1, p+2=6\rho+1$ entspringen nur gerade Zahlen der Form 6τ .

Demnach besteht zwischen den geraden Zahlen der Form 6τ und denen der Formen $6\tau+2$ und $6\tau+4$ in bezug auf die Zwillingsdarstellungen ein wesentlicher Unterschied.

Die geraden Zahlen $6\tau+2$ und $6\tau+4$ gestatten dann und nur dann eine (doppelt zählende) Zwillingsdarstellung, wenn zufällig $6\tau-1$ und $6\tau+1$ ein Zwillingspaar von Primzahlen ist. Nun wird die Anzahl $Z(2n)$ der Zwillingspaare nach der Formel (29) mit wachsendem n von geringerer Ordnung unendlich als $2n$ selbst. Wenn man also in der Reihe der geraden Zahlen immer weiter geht, so besitzen verhältnismäßig immer weniger Zahlen der Formen $6\tau+2$ und $6\tau+4$ Zwillingsdarstellungen.

Im Gegensatz hierzu folgt aus der Formel (29), daß bei den geraden Zahlen der Form 6τ die durchschnittliche Anzahl der Zwillingsdarstellungen mit wachsendem τ unbegrenzt wächst, denn durch die getroffene Verabredung über die Zählung der Zwillingsdarstellungen erreicht man, daß die summatorische Funktion

$$\sum_{\nu=1}^n G_1(2\nu)$$

asymptotisch größer oder gleich $\frac{1}{2}Z^2(2n)$ wird, ähnlich wie die summatorische Funktion

$$\sum_{\nu=1}^n G(2\nu)$$

asymptotisch größer oder gleich $\frac{1}{2}P^2(2n)$ war. Wie dort LANDAU bewiesen hatte, daß

$$(8) \quad \sum_{\nu=1}^n G(2\nu) \sim \frac{1}{2}P^2(2n)$$

ist, so wird man hier vermuten dürfen, daß auch die Formel

$$(43) \quad \sum_{\nu=1}^n G_1(2\nu) \sim \frac{1}{2}Z^2(2n)$$

gilt. Hieraus würde folgen, wenn wiederum m eine mit n wachsende ganze Zahl bedeutet, mit der Maßgabe, daß

$$(6) \quad \lim_{n=\infty} \frac{m}{n} = 0$$

sein soll, daß der mittlere Wert von $G_1(2\nu)$ für den Bereich $\nu=n-m+1$ bei $\nu=n$, also

$$\frac{1}{m} \sum_{v=n-m+1}^n G_1(2v) \sim \frac{1}{2} (Z^2(2n) - Z^2(2n-2m)),$$

mithin nach Gleichung (43):

$$(44) \quad \frac{1}{m} \sum_{v=n-m+1}^n G_1(2v) \sim 2x^2 \frac{2n}{\log^4 2n}$$

wäre. Die vorhergehenden Überlegungen zeigen, daß die Formel (44) ihre Gültigkeit behält, wenn man auf der linken Seite die Summation nur über die durch drei teilbaren Werte von v erstreckt; mithin hätte, unter Voraussetzung der Formel (29), die Funktion $G_1(6\tau)$ den mittleren Wert

$$6x^2 \frac{6\tau}{\log^4 6\tau}.$$

Der Verlauf der zahlentheoretischen Funktion $G_1(6\tau)$ hat eine gewisse Ähnlichkeit mit dem Verlauf der Funktion $G(2n)$, im besonderen stehen die Schwankungen der Werte im Zusammenhang mit der arithmetischen Beschaffenheit der ganzen Zahl τ , sodaß sich $G_1(6\tau)$ ebenfalls als das Produkt einer Wachstumsfunktion $W_1(6\tau)$ und einer Schwankungsfunktion $S_1(6\tau)$ darstellen läßt, und zwar wird man

$$(45) \quad W_1(6\tau) = x_1 \frac{6\tau}{\log^4 6\tau}$$

als die Wachstumsfunktion ansehen dürfen; x_1 bedeutet wieder eine numerische Konstante.

Weitere Untersuchungen über die Funktion $G_1(6\tau)$ sollen den Gegenstand einer besonderen Abhandlung bilden. Hier möge nur noch hervorgehoben werden, daß im Gegensatz zu den GOLDBACHSchen Darstellungen nicht alle geraden Zahlen der Form 6τ Zwillingsdarstellungen gestatten. Im ersten Tausend entziehen sich einer solchen Darstellung die fünf Zahlen

$$96, 402, 516, 786, 906,$$

und auch im fünften Tausend ist noch die eine Ausnahme

vorhanden. Wohl aber wird man die Vermutung aussprechen dürfen, daß von einer gewissen Grenze an jede gerade Zahl 6τ mindestens ein Paar GOLDBACHscher Darstellungen $p, 2n-p$ und $p+2, 2n-p-2$ gestattet, ja daß die Anzahl $G_1(6\tau)$ solcher Zwillingsdarstellungen mit zunehmenden Werten von τ unbeschränkt wächst.

TAFEL
für die GOLDBACHschen Zahlen und ihre Näherungswerte
im Bereiche von 4000 bis 4498

ERKLÄRUNG

$G(2n)$: GOLDBACHsche Zahl, Anzahl der Zerlegungen der geraden Zahl $2n$ in Summen von zwei Primzahlen.

$\Omega(2n)$: Wahre Wachstumsfunktion, $G(2n):S(2n)$, hierbei ist die Schwankungsfunktion $S(2n)$ gleich dem Produkt der für $2n$ wirksamen Multiplikatoren $M(p) = 1 + \frac{1}{p-2}$.

$W(2n)$: Wachstumsfunktion, gleich $1,320 \cdot \frac{P^2(2n)}{2n}$, $P(2n)$ Anzahl der ungeraden Primzahlen von 1 bis $2n$.

$\alpha(2n)$: Näherungsausdruck für $G(2n)$ nach Formel (A), S. 20; und zwar ist $\alpha(2n) = (W 2n) \cdot S(2n)$.

$Z(2n)$: Anzahl der Primzahlzwillinge zwischen 1 und $2n$.

$\beta(2n)$: Näherungsausdruck für $G(2n)$ nach Formel (B), S. 24; und zwar ist $\beta(2n) = Z(2n) \cdot S(2n)$.

$2n$	Primteiler	$G(2n)$	$\Omega(2n)$	$W(2n)$	$\alpha(2n)$	Fehler	$Z(2n)$	$\beta(2n)$	Fehler
4000	5	130	98	100	133	- 3	103	137	- 7
02	3, 23, 29	214	98		217	- 3		224	-10
04	7, 11, 13	146	100		145	+ 1	104	151	- 5
06	2003	103	103		100	+ 3		104	- 1
08	3, 167	212	105	101	203	+ 9		208	+ 4
4010	5, 401	130	98		135	- 5		139	- 9
12	17, 59	108	100		110	- 2		113	- 5
14	3, 223	218	109		202	+16		208	+10
16	251	110	110		101	+ 9		104	+ 6
18	7, 41	130	106		124	+ 6		128	+ 2
4020	3, 5, 67	268	99		273	- 5		277	- 9
22	2011	87	87		101	-14	105	105	-18
24	503	110	110		101	+ 9		105	+ 5
26	3, 11, 61	228	101		228	+ 0		237	- 9
28	19, 53	90	83		109	-19		113	-23
4030	5, 13, 31	160	106		152	+ 8		158	+ 2
32	3, 7	236	98		242	- 6		252	-16
34	2017	107	107		101	+ 6		105	+ 2
36	1009	96	96		101	- 5		105	- 9
38	3, 673	198	99		202	- 4		210	-12

$2n$	Primteiler	$G(2n)$	$\Omega(2n)$	$W(2n)$	$\alpha(2n)$	Fehler	$Z(2n)$	$\beta(2n)$	Fehler
4040	5, 101	140	104	101	136	+ 4	105	140	± 0
42	43, 47	102	97		106	- 4		110	- 8
44	3, 337	200	100		202	- 2		210	-10
46	7, 17	126	98		129	- 3		134	- 8
48	11, 23	118	101		118	± 0		122	- 4
4050	3, 5	252	94		269	-17		280	-28
52	1013	90	90	102	102	-12	106	106	-16
54	2027	109	109		102	+ 7		106	+ 3
56	3, 13	216	99		223	- 7		231	-15
58	2029	89	89		102	-13		106	-17
4060	5, 7, 29	162	98		169	- 7		176	-14
62	3, 677	194	97		204	-10		212	-18
64	127	102	102		103	- 1		106	- 4
66	19, 107	108	101		109	- 1		112	- 4
68	3, 113	196	97		206	-10		212	-16
4070	5, 11, 37	148	97		155	- 7		162	-14
72	509	102	102		102	± 0		106	- 4
74	3, 7, 97	246	101		247	- 1		254	- 8
76	1019	98	98		102	- 4		106	- 8
78	2039	101	101		102	- 1		106	- 5
4080	3, 5, 17	286	101		290	- 4		302	-16
82	13, 157	114	104		112	+ 2		116	- 2
84	1021	100	100		102	- 2		106	- 6
86	3, 227	216	108		204	+12		212	+ 4
88	7, 73	116	95		124	- 8		127	-11
4090	5, 409	130	98		136	- 6		141	-11
92	3, 11, 31	228	99		234	- 6		244	-16
94	23, 89	104	98	103	109	- 5	107	112	- 8
96	—	106	106		103	+ 3		107	- 1
98	3, 683	202	101		206	- 4		214	-12
4100	5, 41	136	99		141	- 5		146	-10
02	7, 293	122	102		124	- 2		128	- 6
04	3, 19	210	99		218	- 8		227	-17
06	2053	105	105		103	+ 2		107	- 2
08	13, 79	110	100		114	- 4		117	- 7

$2n$	Primteiler	$G(2n)$	$\Omega(2n)$	$W(2n)$	$\alpha(2n)$	Fehler	$Z(2n)$	$\beta(2n)$	Fehler
4110	3, 5, 137	276	103	103	277	- 1	107	285	-90
12	257	96	96		103	- 7		107	-11
14	11, 17	120	101		122	- 2		127	- 7
16	3, 7	244	102		247	- 3		257	-13
18	29, 71	110	105		108	+ 2		111	- 1
4120	5, 103	142	105		139	+ 3		143	- 1
22	3, 229	192	96		206	-14		214	-22
24	1031	106	106		103	+ 3		107	- 1
26	2063	99	99		103	- 4		107	- 8
28	3, 43	216	105		211	+ 5		219	- 3
4130	5, 7, 59	166	102		168	- 2	108	176	-10
32	1033	108	108		103	+ 5		108	± 0
34	3, 13, 53	228	102		229	- 1		240	-12
36	11, 47	110	97		117	- 7		123	-13
38	2069	111	111		103	+ 8		108	+ 3
4140	3, 5, 23	296	106		288	+ 8		302	- 6
42	19, 109	104	98		110	- 6		114	-10
44	7, 37	126	102		127	- 1		133	- 7
46	3, 691	200	100		206	- 6		216	-16
48	17, 61	104	96		112	- 8		117	-13
4150	5, 83	140	104		139	+ 1		144	- 4
52	3, 173	214	106		207	+ 7		216	- 2
54	31, 67	110	105	104	109	+ 1		112	- 2
56	1039	106	106		104	+ 2		108	- 2
58	3, 7, 11	278	104		277	+ 1		288	-10
4160	5, 13	140	96		151	-11	109	159	-19
62	2081	113	113		104	+ 9		109	+ 4
64	3, 347	208	104		208	± 0		218	-10
66	2083	109	109		104	+ 5		109	± 0
68	521	112	112		104	+ 8		109	+ 3
4170	3, 5, 139	274	102		279	- 5		291	-17
72	7, 149	122	101		126	- 4		131	- 9
74	2087	93	93		104	-11		109	-16
76	3, 29	216	104		216	± 0		226	-10
78	2089	107	107		104	+ 3		109	- 2

$2n$	Primteiler	$G(2n)$	$\Omega(2n)$	$W(2n)$	$\alpha(2n)$	Fehler	$Z(2n)$	$\beta(2n)$	Fehler
4180	5, 11, 19	162	103	104	163	- 1	109	171	- 9
82	3, 17, 41	212	97		228	-16		238	-26
84	523	100	100		104	- 4		109	- 9
86	7, 13, 23	144	105		143	+ 1		149	- 5
88	3, 349	206	103		208	- 2		218	-12
4190	5, 419	130	98		139	- 9		145	-15
92	131	108	107		105	+ 3		109	- 1
94	3, 233	204	102		208	- 4		218	-14
96	1049	98	98		104	- 6		109	-11
98	2099	103	103		104	- 1		109	- 6
4200	3, 5, 7	328	102		333	- 5		349	-21
02	11, 191	110	98		116	- 6		121	-11
04	1051	100	100		104	- 4		109	- 9
06	3, 701	208	104		208	± 0		208	-10
08	263	90	90		104	-14		109	-19
4210	5, 421	132	99		139	- 7		145	-13
12	3, 13	216	99		227	-11		238	-22
14	7, 43	124	101		128	- 4		134	-10
16	17, 31	110	100		115	- 5		120	-10
18	3, 19, 37	234	107		227	+ 7		237	- 3
4220	5, 211	138	104	105	140	- 2	110	147	- 9
22	2111	109	109		105	+ 4		110	- 1
24	3, 11	224	101		233	- 9		244	-20
26	2113	105	105		105	± 0		110	- 5
28	7, 151	126	105		127	- 1		132	- 6
4230	3, 5, 47	276	101		286	-10	111	300	-24
32	23	104	99		110	- 6		116	-12
34	29, 73	110	105		110	± 0		115	- 5
36	3, 353	210	105		210	± 0		222	-12
38	13, 163	114	104		115	- 1		121	- 7
4240	5, 53	144	106		143	+ 1	112	152	- 8
42	3, 7, 101	244	101		255	-11		266	-22
44	1061	106	106		105	+ 1		112	- 6
46	11, 193	118	106		117	+ 1		124	- 6
48	3, 59	210	103		214	- 4		228	-18

$2n$	Primteiler	$G(2n)$	$\Omega(2n)$	$W(2n)$	$\alpha(2n)$	Fehler	$Z(2n)$	$\beta(2n)$	Fehler
4250	5, 17	150	105	105	149	+ 1	112	159	- 9
52	1063	104	104		105	- 1		112	- 8
54	3, 709	212	106		210	+ 2		224	-12
56	7, 19	128	101		133	- 5		142	-14
58	2129	107	107		105	+ 2		112	- 5
4260	3, 5, 71	280	103	106	287	- 7		299	-19
62	2131	103	103		106	- 3	113	113	-10
64	13, 41	126	113		119	+ 7		126	± 0
66	3, 79	210	104		215	- 5		226	-16
68	11, 97	110	98		119	- 9		126	-16
4270	5, 7, 61	170	104		172	- 2		184	-14
72	3, 89	232	115		214	+18		226	+ 6
74	2137	111	111		106	+ 5	114	114	- 3
76	1069	122	122		106	+16		114	+ 8
78	3, 23, 31	230	106		230	± 0		247	-17
4280	5, 107	142	105		143	- 1		152	-10
82	2141	117	117		106	+11		114	+ 3
84	3, 7, 17	266	104	107	274	- 8		292	-26
86	2143	111	111		107	+ 4		114	- 3
88	67	112	110		109	+ 3		114	- 2
4290	3, 5, 11, 13	332	103		346	-14		368	-36
92	29, 37	112	105		114	- 2		122	-10
94	19, 113	96	90		114	-18		121	-25
96	3, 179	216	107		215	+ 1		228	-12
98	7, 307	126	105		128	- 2		137	-11
4300	5, 43	160	117		146	+14		156	+ 4
02	3, 239	204	102		214	-10		228	-24
04	269	112	112		107	+ 5		114	- 2
06	2153	115	115		107	+ 8		114	+ 1
08	3, 359	202	101		214	-12		228	-26
4310	5, 431	134	100		143	- 9		152	-18
12	7, 11	140	105		143	- 3		152	-12
14	3, 719	212	106		214	- 2		228	-16
16	13, 83	120	109		118	+ 2		124	- 4
18	17, 127	116	108		115	+ 1		122	- 6

$2n$	Primteiler	$G(2n)$	$\Omega(2n)$	$W(2n)$	$\alpha(2n)$	Fehler	$Z(2n)$	$\beta(2n)$	Fehler
4320	3, 5	280	105	107	285	- 5	114	304	-24
22	2161	97	97		107	-10		114	-17
24	23, 47	116	108		115	+ 1		122	- 6
26	3, 7, 103	248	103		259	-11		274	-26
28	541	102	102		107	- 5		114	-12
4330	5, 433	144	108		143	+ 1		152	- 8
32	3, 19	220	104		227	- 7		241	-21
34	11, 197	120	107		119	+ 1		127	- 7
36	271	106	106		107	- 1		114	- 8
38	3, 241	220	110		214	+ 6		228	- 8
4340	5, 7, 31	172	104		177	- 5	115	180	- 8
42	13, 167	122	111		117	+ 5		125	- 3
44	3, 181	224	111		215	+ 9		228	- 4
46	41, 53	104	99		112	- 8		120	-16
48	1087	110	110		107	+ 3		115	- 5
4350	3, 5, 29	286	103		296	-10		318	-32
52	17	112	105		114	- 2		123	-11
54	7, 311	130	108		128	+ 2		138	- 8
56	3, 11	236	106		238	- 2		256	-20
58	2179	101	101		107	- 6		115	-14
4360	5, 109	140	104		144	- 4		153	-13
62	3, 727	204	102		214	-10		230	-26
64	1091	108	108		107	+ 1		115	- 7
66	37, 59	120	115		112	+ 8		120	± 0
68	3, 7, 13	272	104		280	- 8		301	-29
4370	5, 19, 23	152	103	108	158	- 6		170	-18
72	1093	110	110		107	+ 3		115	- 5
74	3	204	102		216	-12		230	-26
76	547	118	109		108	+10		115	+ 3
78	11, 199	120	108		121	- 1		128	- 8
4380	3, 5, 73	280	104		292	-12		307	-27
82	7, 313	130	108		130	± 0		138	- 8
84	137	100	99		109	- 9		115	-15
86	3, 17, 43	234	107		236	- 2		251	-17
88	1097	98	98		108	-10		115	-17

$2n$	Primteiler	$G(2n)$	$\Omega(2n)$	$W(2n)$	$\alpha(2n)$	Fehler	$Z(2n)$	$\beta(2n)$	Fehler
4390	5, 439	144	108	108	144	± 0	115	153	- 9
92	3, 61	214	105		220	- 6		234	-20
94	13	110	101		118	- 8		125	-15
96	7, 157	138	114		130	+ 8		138	± 0
98	3, 733	212	106		216	- 4		230	-18
4400	5, 11	162	109		160	+ 2		170	- 8
02	31, 71	116	111		113	+ 3		119	- 3
04	3, 367	226	113		216	+10		230	- 4
06	2203	101	101		108	- 7		115	-14
08	19, 29	124	113		119	+ 5		126	- 2
4410	3, 5, 7	344	108		345	- 1		368	-24
12	1103	90	90		108	-18		115	-25
14	2207	97	97		108	-11		115	-18
16	3, 23	222	106		226	- 4		241	-19
18	47	98	96		110	-12		118	-20
4420	5, 13, 17	172	111		168	+ 4		178	- 6
22	3, 11, 67	226	100		244	-18		256	-30
24	7, 79	140	115		131	+ 9	116	139	+ 1
26	2213	107	107		108	- 1		116	- 9
28	3, 41	220	107		222	- 2		238	-18
4430	5, 443	140	105		144	- 4		155	-15
32	277	106	106		108	- 2		116	-10
34	3, 739	210	105		216	- 6		232	-22
36	1109	106	106		108	- 2		116	-10
38	7, 317	134	112		130	+ 4		139	- 5
4440	3, 5, 37	276	101		296	-20		318	-42
42	2221	101	101		108	- 7		116	-15
44	11, 101	122	109		121	+ 1		129	- 7
46	3, 13, 19	248	107		249	- 1		268	-20
48	139	94	93		109	-15		116	-22
4450	5, 89	154	114		146	+ 8		155	- 1
52	3, 7, 53	256	105		264	- 8		284	-28
54	17, 131	122	113		116	+ 6		124	- 2
56	557	104	104		108	- 4		116	-12
58	3, 743	212	106	109	218	- 6		232	-20

$2n$	Primteiler	$G(2n)$	$\Omega(2n)$	$W(2n)$	$\alpha(2n)$	Fehler	$Z(2n)$	$\beta(2n)$	Fehler
4460	5, 223	146	110	109	145	+ 1	116	155	- 9
62	23, 97	118	111		115	+ 3		122	- 4
64	3, 31	220	106		226	- 6		240	-20
66	7, 11, 29	146	106		151	- 5		160	-14
68	1117	114	114		109	+ 5		116	- 2
4470	3, 5, 149	296	110		293	+ 3		309	-13
72	13, 43	98	88		122	-24		130	-32
74	2237	111	111		109	+ 2		116	- 5
76	3, 373	216	108		218	- 2		232	-16
78	2239	95	95		109	-14		116	-21
4480	5, 7	176	110		174	+ 2	117	186	-10
82	3, 83	216	107		221	- 5		232	-16
84	19, 59	122	113		117	+ 5		126	- 4
86	2243	121	121		109	+12		117	+ 4
88	3, 11, 17	254	107		258	- 4		277	-23
4490	5, 449	142	106		145	- 3		156	-14
92	1123	106	106		109	- 3		117	-11
94	3, 7, 107	266	110		264	+ 2		281	-15
96	281	108	108		109	- 1		117	- 9
98	13, 173	128	117		120	+ 8		128	± 0
4500	3, 5	276	104		291	-15		312	-36
02	2251	103	103		109	- 6		117	-14
04	563	116	116		109	+ 7		117	- 1
06	3, 751	202	101		218	-16		234	-32
08	7, 23	124	99		137	-13		147	-23
4510	5, 11, 41	180	118	110	166	+14		178	+ 2
12	3, 47	230	113		223	+ 7		239	- 9
14	37, 61	112	107		115	- 3		122	-10
16	1129	114	114		110	+ 4		117	- 3
18	3, 251	204	102		220	-16		234	-30
4520	5, 113	146	109		148	- 2	118	157	-11
22	7, 17, 19	152	112		149	+ 3		160	- 8
24	3, 13, 29	254	112		249	+ 5		267	-13
26	31, 73	114	109		115	- 1		122	- 8
28	283	116	116		110	+ 6		118	- 2

$2n$	Primteiler	$G(2n)$	$\Omega(2n)$	$W(2n)$	$\alpha(2n)$	Fehler	$Z(2n)$	$\beta(2n)$	Fehler
4530	3, 5, 151	294	110	110	295	- 1	118	315	-21
32	11, 103	102	91		123	-21		131	-29
34	2267	113	113		110	+ 3		118	- 5
36	3, 7	262	109		264	- 2		283	-21
38	2269	107	107		110	- 3		118	-11
4540	5, 227	144	108		147	- 3		157	-13
42	3, 757	214	107		220	- 6		236	-22
44	71	110	108		112	- 2		118	- 8
46	2273	109	109		110	- 1		118	- 9
48	3, 379	224	112		220	+ 4		236	-12
4550	5, 7, 13	182	104		192	-10	119	208	-26
52	569	114	114		110	+ 4		119	- 5
54	3, 11, 23	262	113		256	+ 6		277	-15
56	17, 67	110	102		119	- 9		129	-19
58	43, 53	116	111		115	+ 1		124	- 8
4560	3, 5, 19	294	104	111	311	-17		336	-42
62	2281	105	105		110	- 5		119	-14
64	7, 163	140	116		133	+ 7		143	- 3
66	3, 761	222	111		220	+ 2		238	-16
68	571	110	110		111	- 1		119	- 9
4570	5, 457	144	108		148	- 4		159	-15
72	3, 127	220	109		224	- 4		238	-18
74	2287	99	99		111	-12		119	-20
76	11, 13	136	112		135	+ 1		144	- 8
78	3, 7, 109	258	107		269	-11		286	-28
4580	5, 229	154	116		148	+ 6		159	- 5
82	29, 79	104	99		117	-13		123	-19
84	3, 191	220	109		223	- 3		238	-18
86	2293	107	107		111	- 4		119	-12
88	31, 37	122	115		118	+ 4		127	- 5
4590	3, 5, 17	316	111		316	± 0		338	-22
92	7, 41	124	101		137	-13		146	-22
94	2297	113	113		111	+ 2		119	- 6
96	3, 383	220	110		222	- 2		238	-18
98	11, 19	120	102		131	-11		140	-20

$2n$	Primteiler	$G(2n)$	$\Omega(2n)$	$W(2n)$	$\alpha(2n)$	Fehler	$Z(2n)$	$\beta(2n)$	Fehler
4600	5, 23	142	102	111	155	-13	119	166	-24
02	3, 13, 59	224	101		246	-22		264	-40
04	1151	112	112		111	+ 1		119	- 7
06	7, 47	134	109		136	- 2		146	-12
08	3	232	116		222	+10		238	- 6
4610	5, 461	144	108		148	- 4		159	-15
12	1153	106	106		111	- 5		119	-13
14	3, 769	228	114		222	+ 6		238	-10
16	577	108	106		111	- 3		119	-11
18	2309	115	115		111	+ 4		119	- 4
4620	3, 5, 7, 11	380	107		395	-15		423	-43
22	2311	109	109		111	- 2		119	-10
24	17	112	105		118	- 6		127	-15
26	3, 257	220	110		222	- 2		238	-18
28	13, 89	120	109		122	- 2		130	-10
4630	5, 463	134	100		148	-14		159	-25
32	3, 193	214	106		223	- 9		238	-24
34	7, 331	136	113		133	+ 3		143	- 7
36	19, 61	116	108		120	- 4		128	-12
38	3, 773	214	107		222	- 8		238	-24
4640	5, 29	142	103	112	155	-13	120	166	-24
42	11, 211	128	115		124	+ 4		133	- 5
44	3, 43	228	111		229	- 1		246	-18
46	23, 101	118	112		119	- 1		126	- 8
48	7, 83	138	114		136	+ 2		144	- 6
4650	3, 5, 31	304	110		309	- 5	121	331	-27
52	1163	108	108		112	- 4		121	-13
54	13, 179	118	108		123	- 5		132	-14
56	3, 97	228	113		226	+ 2		242	-14
58	17, 137	120	112		120	± 0		129	- 9
4660	5, 233	146	110	113	149	- 3		161	-15
62	3, 7, 37	270	109		276	- 6		299	-29
64	11, 53	142	125		128	+14		137	+ 5
66	2333	111	111		113	- 2		121	-10
68	3, 389	226	113		226	± 0		242	-16

$2n$	Primteiler	$G(2n)$	$\Omega(2n)$	$W(2n)$	$\alpha(2n)$	Fehler	$Z(2n)$	$\beta(2n)$	Fehler
4670	5, 467	148	111	113	151	- 3	121	161	-13
72	73	114	112		115	- 1		121	- 7
74	3, 19, 41	244	112		245	- 1		263	-19
76	7, 167	140	117		136	+ 4		145	- 5
78	2339	113	113		113	± 0		121	- 8
4680	3, 5, 13	332	114		329	+ 3		352	-20
82	2341	107	107		113	- 6		121	-14
84	1171	124	124		113	+11		121	+ 3
86	3, 11, 71	254	113		255	- 1		269	-15
88	293	100	100		113	-13		121	-21
4690	5, 7, 67	192	118		184	+ 8		197	- 5
92	3, 17, 23	238	106		253	-15		270	-32
94	2347	111	111		113	- 2		121	-10
96	587	116	116		113	+ 3		121	- 5
98	3, 29	228	110		234	- 6		251	-23
4700	5, 47	150	110		154	- 4		165	-15
02	2351	113	113		113	± 0		121	- 8
04	3, 7	264	110		271	- 7		290	-26
06	13, 181	122	111		124	- 2		132	-10
08	11, 107	132	118		127	+ 5		134	- 2
4710	3, 5, 157	294	110		303	- 9		323	-29
12	19, 31	108	99		124	-16		133	-25
14	2357	109	109		113	- 4		121	-12
16	3, 131	224	111		228	- 4		242	-18
18	7, 337	122	102		136	-14		145	-23
4720	5, 59	162	119		153	+ 9		164	- 2
22	3, 787	220	110		226	- 6		242	-22
24	1181	116	116		113	+ 3	122	122	- 6
26	17, 139	118	110		121	- 3		130	-12
28	3, 197	226	112		227	- 1		244	-18
4730	5, 11, 43	158	104	114	173	-15		185	-27
32	7, 13	150	115		149	+ 1		160	-10
34	3, 263	238	119		228	+10		242	- 4
36	37	118	115		117	+ 1		125	- 7
38	23, 103	112	106		121	- 9		128	-16

$2n$	Primteiler	$G(2n)$	$\Omega(2n)$	$W(2n)$	$\alpha(2n)$	Fehler	$Z(2n)$	$\beta(2n)$	Fehler
4740	3, 5, 79	302	112	114	308	- 6	122	325	-23
42	2371	115	115		114	+ 1		122	- 7
44	593	120	120		114	+ 6		122	- 2
46	3, 7, 113	276	114		276	± 0		293	-17
48	1187	108	108		114	- 6		122	-14
4750	5, 19	166	118		161	+ 5		172	- 6
52	3, 11	244	110	114	253	- 9	122	271	-27
54	2377	121	121		114	+ 7		122	- 1
56	29, 41	122	115		121	+ 1		130	- 8
58	3, 13, 61	244	110		253	- 9		271	-27
4760	5, 7, 17	176	103		195	-19		208	-32
62	2381	117	117		114	+ 3		122	- 5
64	3, 397	226	113	114	228	- 2	122	244	-18
66	2383	107	107		114	- 7		122	-15
68	149	114	113		115	- 1		122	- 8
4770	3, 5, 53	294	108		310	-16	122	332	-38
72	1193	110	110		114	- 4		122	-12
74	7, 11, 31	158	115		157	+ 1		168	-10
76	3, 199	232	115		229	+ 3		244	-12
78	2389	111	111		114	- 3		122	-11
4780	5, 239	146	110	114	152	- 6	122	163	-17
82	3, 797	214	107		228	-14		244	-30
84	13, 23	124	108		130	- 6		139	-15
86	2393	117	117		114	+ 3		122	- 5
88	3, 7, 19	288	113		290	- 2		310	-22
4790	5, 479	158	118	115	152	+ 6	123	163	- 5
92	599	122	122		114	+ 8		122	± 0
94	3, 17, 47	256	117		251	+ 5		266	-10
96	11, 109	132	118		129	+ 3		136	- 4
98	2399	115	115		115	± 0		122	- 7
4800	3, 5	302	113		307	- 5	123	325	-23
02	7	130	108	115	138	- 8		148	-18
04	1201	122	122		115	+ 7		123	- 1
06	3, 89	228	113		233	- 5		246	-18
08	601	104	104		115	-11		123	-19

$2n$	Primteiler	$G(2n)$	$\Omega(2n)$	$W(2n)$	$\alpha(2n)$	Fehler	$Z(2n)$	$\beta(2n)$	Fehler
4810	5, 13, 37	170	114	115	172	- 2	123	184	-14
12	3, 401	216	108		230	-14		246	-30
14	29, 83	124	118		121	+ 3		128	- 4
16	7, 43	146	119		141	+ 5		151	- 5
18	3, 11, 73	256	114		259	- 3		273	-17
4820	5, 241	158	118		153	+ 5		164	- 6
22	2411	121	121		115	+ 6		123	- 2
24	3, 67	240	118		234	+ 6		250	-10
26	19, 127	116	109		123	- 7		130	-14
28	17, 71	128	118		124	+ 4		131	- 3
4830	3, 5, 7, 23	378	113		386	- 8		412	-34
32	151	120	119		116	+ 4		123	- 3
34	2417	125	125		115	+10		123	+ 2
36	3, 13, 31	242	107		260	-18		278	-36
38	41, 59	116	111		120	- 4		128	-12
4840	5, 11	164	111		170	- 6		182	-18
42	3, 269	228	114		230	- 2		246	-18
44	7, 173	138	114		139	- 1		148	-10
46	2423	115	115		115	± 0		123	- 8
48	3, 101	210	104		232	-22		246	-36
4850	5, 97	148	110		155	- 7		164	-16
52	1213	124	124		115	+ 9		123	+ 1
54	3, 809	226	113		230	- 4		246	-20
56	607	106	106		115	- 9		123	-17
58	7, 347	136	113		138	- 2		148	-12
4860	3, 5	308	116		307	+ 1		328	-20
62	11, 13, 17	142	110		149	- 7		159	-17
64	19	114	108		122	- 8		130	-16
66	3, 811	228	114		230	- 2		246	-18
68	1217	108	108		115	- 7		123	-15
4870	5, 487	146	110		153	- 7		164	-18
72	3, 7, 29	280	113		286	- 6		306	-26
74	2437	105	105		115	-10		123	-18
76	23, 53	128	120		123	+ 5		131	- 3
78	3, 271	220	110		230	-10		246	-26

$2n$	Primteiler	$G(2n)$	$\Omega(2n)$	$W(2n)$	$\alpha(2n)$	Fehler	$Z(2n)$	$\beta(2n)$	Fehler
4880	5, 61	148	109	115	156	- 8	123	167	-19
82	2441	125	125		115	+10		123	+ 2
84	3, 11, 37	250	109		263	-13		281	-31
86	7, 349	138	115		138	± 0		148	-10
88	13, 47	134	120		128	+ 6		137	- 3
4890	3, 5, 163	300	112		309	- 9		328	-28
92	1223	102	102		115	-13		123	-21
94	2447	121	121		115	+ 6		123	- 2
96	3, 17	244	114		245	- 1		262	-18
98	31, 79	106	101		121	-15		127	-21
4900	5, 7	190	119		184	+ 6		197	- 7
02	3, 19, 43	242	112		249	- 7		267	-25
04	613	116	116		115	+ 1		123	- 7
06	11, 233	130	117		128	+ 2		137	- 7
08	3, 409	208	104		230	-22		246	-38
4910	5, 491	152	114	116	155	- 3		164	-12
12	307	122	122		116	+ 6		123	- 1
14	3, 7, 13	298	114		304	- 6		322	-24
16	1229	106	106		116	-10		123	-17
18	2459	111	111		116	- 5		123	-12
4920	3, 5, 41	304	111		317	-13		336	-32
22	23, 107	120	113		123	- 3		129	- 9
24	1231	110	110		116	- 6		123	-13
26	3, 821	234	117		232	+ 2		246	-12
28	7, 11	140	105		155	-15		164	-24
4930	5, 17, 29	166	113		171	- 5	124	181	-15
32	3, 137	238	118		234	+ 4		248	-10
34	2467	125	125		116	+ 9		124	+ 1
36	617	120	120		116	+ 4		124	- 4
38	3, 823	212	106		232	-20		248	-36
4940	5, 13, 19	178	116	117	179	- 1		191	-13
42	7, 353	144	120		139	+ 5		149	- 5
44	3, 103	242	120		236	+ 6		248	- 6
46	2473	113	113		117	- 4		124	-11
48	1237	122	122		117	+ 5		124	- 2

$2n$	Primteiler	$G(2n)$	$\Omega(2n)$	$W(2n)$	$\alpha(2n)$	Fehler	$Z(2n)$	$\beta(2n)$	Fehler
4950	3, 5, 11	332	112	117	347	-15	124	367	-35
52	619	110	110		117	-7		124	-14
54	2477	127	127		117	+10		124	+3
56	3, 7, 59	286	117		286	± 0		303	-17
58	37, 67	112	107		122	-10		130	-18
4960	5, 31	162	117		161	+1		171	-9
62	3, 827	224	112		234	-10		248	-24
64	17, 73	122	113		127	-5		132	-10
66	13, 191	140	128		128	+12		135	+5
68	3, 23	240	115		245	-5		260	-20
4970	5, 7, 71	186	115	118	190	-4	125	200	-14
72	11, 113	134	120		131	+3		139	-5
74	3, 829	232	116		236	-4		250	-18
76	311	110	110		118	-8		125	-15
78	19, 131	122	114		126	-4		132	-10
4980	3, 5, 83	318	118		319	-1		333	-15
82	47, 53	116	111		123	-7		130	-14
84	7, 89	140	116		143	-3		150	-10
86	3, 277	232	116		236	-4		250	-18
88	29, 43	132	124		125	+7		133	-1
4990	5, 499	166	124		157	+9		167	-1
92	3, 13	252	116		257	-5		273	-21
94	11, 227	122	110		131	-9		139	-17
96	1249	124	124		118	+6		125	-1
98	3, 7, 17	288	112		302	-14		320	-32

Zusatz. Wie nachträglich bemerkt wurde, ist bei der Berechnung von $Z(2n)$ das Zwillingsspaar 4787, 4789 übersehen worden. Von $2n=4790$ ab erhöhen sich daher die Werte $Z(2n)$ um eine Einheit und die entsprechenden Werte $\beta(2n)$ um den Betrag $S(2n)$. Dies hat zur Folge, daß die Abweichung der BRUNSchen Näherungswerte $\beta(2n)$ von den wahren Werten $G(2n)$ noch größer wird.