Universitätsbibliothek
Heidelberg

Heidelberger Akademie
der Wissenschaften

Heidelberger Akademie der Wissenschaften

Mathematische Abhandlungen

Autor: **Koenigsberger, Leo** (1837 – 1921)

Titel: **Über die Hamiltonschen Differentialgleichungen der Dynamik. III.**

Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse : Abt. A ; 1918, 7

Signatur UB Heidelberg: L 1598-10-30

Nachdem zunächst einige Beziehungen zwischen der Discriminante einer algebraischen Funktion und derjenigen ihrer Ableitung entwickelt worden, werden die in der letzten Arbeit gewonnenen Resultate bezüglich der Jacobi-Weierstraßschen Form der Hamiltonschen Differentialgleichungen in wesentlich veränderter und vereinfachter Form zusammengestellt und mit den Eigenschaften der Koeffizienten der Energie in Verbindung gebracht. Nach einer weiteren Untersuchung über die Bestimmung der Ordnungszahl des Nullwerdens einer endlichen oder unendlichen eindeutigen Potenzreihe wird die Frage nach der Ordnungszahl der Integrale der Hamiltonschen Differentialgleichungen näher erörtert.

(Zsfassung aus: Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften / Jahresheft 1918, S. XVI)

Sitzungsberichte
der Heidelberger Akademie der Wissenschaften
Stiftung Heinrich Lanz
Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse
Abteilung A. Mathematisch-physikalische Wissenschaften
Jahrgang 1918. 7. Abhandlung

Über die HAMILTONschen Differentialgleichungen der Dynamik

III.

Von

LEO KOENIGSBERGER
in Heidelberg

+ L 1538 70/20

Eingegangen am 17. April 1918

Heidelberg 1918
Carl Winters Universitätsbuchhandlung

Verlags-Nr. 1431

Bevor die bisher gewonnenen Resultate in etwas veränderter und vereinfachter Form zusammengefaßt werden, sollen, um die nachfolgende Darstellung nicht zu unterbrechen, einige Bemerkungen über die Beziehungen der Differentialquotienten einer algebraischen Funktion zu deren Diskriminante vorausgeschickt werden.

Für die Lösung y_1 einer algebraischen Gleichung

$$(1) \qquad f(x_1, x_2, \dots x_n, y) = \gamma_0 y^\nu + \gamma_1 y^{\nu-1} + \dots + \gamma_\nu = 0 ,$$

in welcher $\gamma_0, \gamma_1, \dots \gamma_\nu$ ganze Funktionen von $x_1, x_2, \dots x_n$ sind, ergibt sich

$$(2) \qquad \frac{\partial y_1}{\partial x_\rho} = - \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x_\rho}\right)_{y_1}}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{y_1}} = - \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x_\rho}\right)_{y_1}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{y_2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{y_3} \cdots \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{y_\nu}}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{y_1}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{y_2} \cdots \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{y_\nu}} ,$$

oder, da die Diskriminante D der Gleichung (1), welche eine ganze Funktion ihrer Koeffizienten ist, und deren Verschwinden die notwendige und hinreichende Bedingung unter den Koeffizienten darstellt, unter welcher jene Gleichung mehrfache Lösungen besitzt, durch den Ausdruck

$$(3) \qquad \left| \begin{aligned} D &= \gamma_0^{2\nu-2}(y_1-y_2)^2 (y_1-y_3)^2 \cdots (y_{\nu-1}-y_\nu)^2 \\ &= (-1)^{\frac{\nu(\nu-1)}{2}} \gamma_0^{\nu-2} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{y_1}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{y_2} \cdots \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{y_\nu} \end{aligned} \right.$$

oder

$$D = (-1)^{\frac{\nu(\nu-1)}{2}} \frac{S}{\gamma_0} ,$$

worin S die Sylvester-Determinante zwischen $f=0$ und $\frac{\partial f}{\partial y}=0$

$$S = \begin{vmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_\nu & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \gamma_0 & \cdots & \gamma_{\nu-1} & \gamma_\nu & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \nu\gamma_0 & (\nu-1)\gamma_0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \nu\gamma_0 & \cdots & \gamma_{\nu-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & (\nu-1)\gamma_1 & (\nu-2)\gamma_2 & \cdots & \gamma_{\nu-1} \end{vmatrix}$$

bezeichnet, definiert ist,

$$(4) \qquad \frac{\partial y_1}{\partial x_\rho} = -(-1)^{\frac{\nu(\nu-1)}{2}} \gamma_0^{\nu-2} \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x_\rho}\right)_{y_1} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{y_2} \cdots \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{y_\nu}}{D}.$$

Da nun die Gleichung

$$(5) \begin{cases} F(x_1, \ldots x_n, y) = \dfrac{f(x_1, \ldots x_n, y)}{y - y_1} = \gamma_0 y^{\nu-1} + (\gamma_1 + \gamma_0 y_1) y^{\nu-2} \\ \quad + (\gamma_2 + \gamma_1 y_1 + \gamma_0 y_1^2) y^{\nu-3} + \cdots + (\gamma_{\nu-1} + \gamma_{\nu-2} y_1 + \cdots + \gamma_0 y_1^{\nu-1}) = 0 \end{cases}$$

die Lösungen $y_2, y_3, \ldots y_\nu$ besitzt, so wird die Diskriminante D_1 derselben, welche wieder eine ganze Funktion der Koeffizienten dieser Gleichung, also eine ganze Funktion von $x_1, \ldots x_n$ und y_1 ist, durch den Ausdruck gegeben sein

$$(6) \begin{cases} D_1 = \gamma_0^{2\nu-4} (y_2 - y_3)^2 (y_2 - y_4)^2 \cdots (y_{\nu-1} - y_\nu)^2 \\ \qquad = (-1)^{\frac{(\nu-1)(\nu-2)}{2}} \gamma_0^{\nu-3} \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{y_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{y_3} \cdots \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{y_\nu}, \end{cases}$$

und daher, da nach (5)

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (y - y_1) \frac{\partial F}{\partial y} + F,$$

also

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{y_1} = (F)_{y_1}, \text{ und, für } \varkappa \neq 1, \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{y_\varkappa} = (y_\varkappa - y_1)\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{y_\varkappa},$$

und somit

$$(7)\quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{y_2}\cdots\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{y_\nu} = (y_2-y_1)(y_3-y_1)\cdots(y_\nu-y_1)\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{y_2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{y_3}\cdots\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{y_\nu}$$

ist, vermöge (6) die Beziehung (4) die Form annehmen

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_\rho} = \frac{-\gamma_0\left(\frac{\partial f}{\partial x_\rho}\right)_{y_1}(y_1-y_2)(y_1-y_3)\cdots(y_1-y_\nu)\,D_1}{D},$$

worin

$$D = \gamma_0^2 (y_1-y_2)^2 (y_1-y_3)^2 \cdots (y_1-y_\nu)^2 D_1$$

ist, oder

$$(8)\quad \frac{\partial y_1}{\partial x_\rho} = (-1)^{\frac{\nu(\nu+1)}{2}} \gamma_0^{\nu-2} \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x_\rho}\right)_{y_1}(y_1-y_2)(y_1-y_3)\cdots(y_1-y_\nu)\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{y_2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{y_3}\cdots\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{y_\nu}}{D}.$$

Da nun nach Gleichung (5), deren Koeffizienten mit $p_0, p_1, \cdots p_{\nu-1}$ bezeichnet werden mögen,

$$\frac{\partial F}{\partial y} = (\nu-1)\,p_0 y^{\nu-2} + (\nu-2)\,p_1 y^{\nu-3} + \cdots + p_{\nu-2}$$

ist, und sich die ganze symmetrische Funktion der Lösungen $y_2, y_3, \cdots y_\nu$ jener Gleichung

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{y_2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{y_3}\cdots\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{y_\nu} = \prod_2^\nu{}_\varkappa \left\{(\nu-1)\,p_0 y_\varkappa^{\nu-2} + (\nu-2)\,p_1 y_\varkappa^{\nu-3} + \cdots + p_{\nu-2}\right\}$$

$$= \sum_{\alpha_2,\alpha_3,\ldots\alpha_\nu = 2,3,\ldots\nu} \left\{(\nu-\alpha_2+1)(\nu-\alpha_3+1)\cdots(\nu-\alpha_\nu+1)\,p_{\alpha_2-2}\,p_{\alpha_3-2}\cdots p_{\alpha_\nu-2} \sum_y y_2^{\nu-\alpha_2} y_3^{\nu-\alpha_3}\cdots y_\nu^{\nu-\alpha_\nu}\right\}$$

als ganze Funktion der Koeffizienten derselben in der Form ausdrücken läßt

$$\sum_{\alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_\nu} \left| A_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\nu} p_{\alpha_2 - 2}\, p_{\alpha_3 - 2} \cdots p_{\alpha_\nu - 2} \sum_m a \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{m_1} \left(\frac{p_2}{p_0}\right)^{m_2} \cdots \left(\frac{p_{\nu-1}}{p_0}\right)^{m_{\nu-1}} \right| ,$$

worin die Größen A und a ganzzahlige Konstanten bedeuten, und für welche die Gradzahl der einzelnen Posten der nach den m genommenen Summe, wenn α die kleinste der Zahlen $\alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_\nu$ ist, durch

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_{\nu-1} = \nu - \alpha ,$$

deren Gewichtszahlen durch

$$1 \cdot m_1 + 2 \cdot m_2 + \cdots + (\nu-1)\, m_{\nu-1} = \nu(\nu-1) - \sum_2^\nu \alpha_\lambda$$

definiert sind, so wird

$$(9) \quad \left| \begin{array}{l} \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{y_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{y_3} \cdots \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{y_\nu} \\ = \sum_{\alpha_2 \ldots \alpha_\nu} \left\{ A \cdot \begin{array}{l} \left(\gamma_{\alpha_2 - 2} + \gamma_{\alpha_2 - 3} y_1 + \cdots + \gamma_0 y_1^{\alpha_2 - 2}\right) \cdots \left(\gamma_{\alpha_\nu - 2} + \cdots + \gamma_0 y_1^{\alpha_\nu - 2}\right) \\ \times \sum a \left(\gamma_1 + \gamma_0 y_1\right)^{m_1} \cdots \left(\gamma_{\nu-1} + \cdots + \gamma_0 y_1^{\nu-1}\right)^{m_{\nu-1}} \\ \hline \gamma_0^{\nu - \alpha} \end{array} \right\} \\ = \sum_{\alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_\nu} \dfrac{\gamma_0^{2\nu-\alpha-1} \delta_0^{(\alpha)}(y_1) + \gamma_0^{2\nu-\alpha-2} \delta_1^{(\alpha)}(y_1) + \cdots + \gamma_0 \delta_{2\nu-\alpha-2}^{(\alpha)}(y_1) + \delta_{2\nu-\alpha-1}^{(\alpha)}(y_1)}{\gamma_0^{\nu-\alpha}} , \end{array} \right.$$

worin $\delta_\sigma^{(\alpha)}(y_1)$ eine ganze Funktion von y_1 vom Grade $(\nu-1)(\nu-2)-\sigma$ mit in $x_1, x_2, \ldots x_n$ ganzen Koeffizienten ist, welche homogene ganze Funktionen σ^{ten} Grades der Koeffizienten $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_{\nu-1}$ der Gleichung (1) sind.

Daraus folgt nun nach (8), da

$$\gamma_0 (y_1 - y_2)(y_1 - y_3) \cdots (y_1 - y_\nu) = \nu \gamma_0 y_1^{\nu-1} + (\nu-1)\gamma_1 y_1^{\nu-2} + \cdots + \gamma_{\nu-1}$$

und

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_\rho}\right)_{y_1} = \frac{\partial \gamma_0}{\partial x_\rho} y_1^\nu + \frac{\partial \gamma_1}{\partial x_\rho} y_1^{\nu-1} + \cdots + \frac{\partial \gamma_\nu}{\partial x_\rho}$$

ist, daß

$$(10)\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_\rho} = \dfrac{\gamma_0^{\nu-3}}{D} \\ \times \sum\limits_{\alpha_2, \ldots \alpha_\nu} \dfrac{\gamma_0^{2\nu-\alpha}\, \varepsilon_0^{(\alpha)}(y_1) + \gamma_0^{2\nu-\alpha-1}\, \varepsilon_1^{(\alpha)}(y_1) + \cdots + \gamma_0\, \varepsilon_{2\nu-\alpha-1}^{(\alpha)}(y_1) + \varepsilon_{2\nu-\alpha}^{(\alpha)}(y_1)}{\gamma_0^{\nu-\alpha}} \end{array} \right.$$

ist, worin $\varepsilon_\sigma^{(\alpha)}(y_1)$ eine ganze Funktion von y_1 vom Grade $\nu^2-\nu+1-\sigma$ mit in $x_1, x_2, \ldots x_n$ ganzen Koeffizienten darstellt, welche ganze homogene Funktionen vom $\sigma+1^{\text{ten}}$ Grade der Koeffizienten $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_{\nu-1}$ und der nach x_ρ genommenen ersten partiellen Differentialquotienten von $\gamma_0, \gamma_1, \ldots \gamma_{\nu-1}, \gamma_\nu$ sind.

Bemerkt man endlich, daß sich aus der Gleichung (1) für positive ganzzahlige $\varkappa$

$$(11)\qquad y_1^{\nu-1+\varkappa} = \frac{a_0^{(\varkappa)} y_1^{\nu-1} + a_1^{(\varkappa)} y_1^{\nu-2} + \cdots + a_{\nu-1}^{(\varkappa)}}{\gamma_0^{\varkappa}}$$

ergibt, worin die $a_0^{(\varkappa)}$ ganze, homogene, durch γ_0 nicht sämtlich teilbare Funktionen von $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_\nu$ vom Grade $\varkappa$ sind, so folgt für den Differentialquotienten einer durch die Gleichung (1) definierten algebraischen Funktion nach (10) der Ausdruck

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_\rho} = \frac{\varphi_1 y_1^{\nu-1} + \varphi_2 y_1^{\nu-2} + \cdots + \varphi_{\nu-1}}{\gamma_0^{(\nu-2)^2+1} D},$$

wenn D die Diskriminante der Gleichung (1), und $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{\nu-1}$ ganze Funktionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ und zwar ganz aus den Funktionen

$$\gamma_0, \gamma_1, \ldots \gamma_{\nu-1}, \frac{\partial \gamma_0}{\partial x_\rho}, \frac{\partial \gamma_1}{\partial x_\rho}, \ldots \frac{\partial \gamma_\nu}{\partial x_\rho}$$

zusammengesetzt sind. Setzt man nun für y_1 die $\nu-1$ anderen Zweige $y_2, y_3, \ldots y_\nu$ der algebraischen Funktion y ein, um die Gleichung ν^{ten} Grades für $\dfrac{\partial y}{\partial x_\rho}$ zu bilden, so erhält man leicht durch Ausführung der Summe der Kombinationen zur $1^{\text{ten}}, 2^{\text{ten}}, \ldots \nu^{\text{ten}}$ Klasse der Werte

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_\varrho}, \frac{\partial y_2}{\partial x_\varrho}, \cdots \frac{\partial y_\nu}{\partial x_\varrho}$$

und durch Gradbestimmung der in diese Ausdrücke eintretenden symmetrischen Funktionen von $y_1, y_2, \ldots y_\nu$ – ganz ähnlich, wie oben geschehen – für die Koeffizienten der gesuchten Gleichung die Ausdrücke

$$P^\lambda = \frac{\dfrac{M_1^{(\lambda)}(x_1, \ldots x_n)}{\gamma_0^{\nu-1}} + \dfrac{M_2^{(\lambda)}(x_1, \ldots x_n)}{\gamma_0^{\nu-2}} + \cdots + M_\nu^{(\lambda)}(x_1, \ldots x_n)}{\gamma_0^{\lambda[(\nu-2)^2+1]}\, D^\lambda},$$

worin die $M^{(\lambda)}$ ganze Funktionen der eingeschlossenen Größen bedeuten, so daß sich für $\frac{\partial y}{\partial x_\varrho}$, wenn $(\nu-2)^2+1=\alpha'$ gesetzt wird, die algebraische Gleichung ergibt

$$(12)\quad \left\{ \begin{aligned} &\gamma_0^{\nu\alpha'+\nu-1} D^\nu \left(\frac{\partial y}{\partial x_\varrho}\right)^\nu + \gamma_0^{(\nu-1)\alpha'} D^{\nu-1} G_1(x_1, \ldots x_n) \left(\frac{\partial y}{\partial x_\varrho}\right)^{\nu-1} \\ &\quad + \gamma_0^{(\nu-2)\alpha'} D^{\nu-2} G_2(x_1, \ldots x_n) \left(\frac{\partial y}{\partial x_\varrho}\right)^{\nu-2} + \cdots + G_\nu(x_1, \ldots x_n) = 0, \end{aligned} \right.$$

worin $G_1, G_2, \ldots G_{\nu-1}$ ganze Funktionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ sind, die alle oder zum Teil noch den gemeinsamen Teiler γ_0 besitzen können.

So wird z. B. für die Gleichung

$$(13)\qquad x y^2 + 2y = x^2$$

die Diskriminante durch den Ausdruck

$$D = 4(x^3+1)$$

gegeben sein, und da

$$\frac{dy_1}{dx} = -\frac{2[y_1(2-x^3)-3x^2]}{xD}, \quad \frac{dy_2}{dx} = -\frac{2[y_2(2-x^3)-3x^2]}{xD}$$

ist, sich die Werte der Kombinationen zur ersten und zweiten Klasse vermöge (13) in der Form ergeben

$$\frac{dy_1}{dx}+\frac{dy_2}{dx}=\frac{8(x^3+1)}{x^2D},\quad \frac{dy_1}{dx}\,\frac{dy_2}{dx}=\frac{-4(x^8-7x^5-8x^2)}{x^3D^2},$$

so daß die quadratische Gleichung für $\frac{dy}{dx}$ lautet

$$(14)\qquad x^2D^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-8(x^3+1)D\,\frac{dy}{dx}-4(x^7-7x^4-8x)=0,$$

oder durch Division mit $4(x^3+1)$

$$(15)\qquad 4x^2(x^3+1)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-8(x^3+1)\,\frac{dy}{dx}-x(x^3-8)=0.$$

Es möge zunächst noch zu diesem Beispiel bemerkt werden, daß die algebraische Funktion y für $x=0$ die Werte $y_1=\infty$, $y_2=0$ annimmt, und daß sich durch Entwicklung von y in der Umgebung dieses Eindeutigkeitspunktes $y_1'=\infty$, $y_2'=0$ ergibt, was auch unmittelbar aus der Gleichung (15) ersichtlich ist; bezeichnet jedoch ε eine Lösung der Gleichung $x^3+1=0$, wofür also die Diskriminante verschwindet, so werden in dem Verzweigungspunkte $x=\varepsilon$ sich aus (13) die beiden gleichen Werte $y_1=y_2=\frac{1}{\varepsilon}$ und wiederum durch Entwicklung der y-Werte um diesen Verzweigungspunkt $y_1'=y_2'=\infty$ ergeben, was auch wieder unmittelbar aus der Gleichung (15) folgt. Die Diskriminante D′ der Gleichung (15) ergibt sich unmittelbar in der Form

$$D'=16(x^3+1)(x^3-2)^2,$$

und es besteht somit zwischen den beiden Diskriminanten D und D′ der Gleichungen (13) und (15) die Beziehung

$$D'=4D(x^3-2)^2.$$

An diese für das vorliegende Beispiel gefundene Relation möge noch eine allgemeine Bemerkung über die Beziehung der Diskriminante einer algebraischen Funktion einer unabhängigen Variabeln und der Diskriminante der Gleichung für die Ableitung derselben geknüpft werden.

Zunächst ist aus der Gleichung (12) unmittelbar zu ersehen, daß, wenn die Diskriminante D mit G_y keinen gemeinsamen Teiler hat, die Diskriminante D' der Gleichung (12), wie aus der Darstellung derselben durch die SYLVESTER-Determinante hervorgeht, durch die Diskriminante D teilbar sein wird, wie dies in dem obigen Beispiel in der Tat der Fall war, während für die algebraische Gleichung

$$y^2 - 2xy + x^3 = 0 ,$$

deren Diskriminante

$$D = 4x^2(1-x)$$

ist, die quadratische Gleichung für die Ableitung von y sich in der Form ergibt

$$D^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 8x^2(x-1)D\frac{dy}{dx} + 4x^5(9x^2-17x+8) = 0 ,$$

in welcher D und $x^5(9x^2-17x+8)$ den gemeinsamen Teiler $x^2(x-1)$ besitzen, und deren Diskriminante

$$D' = 16(1-x)(9x^2-12x+4)$$

mit D den gemeinsamen Teiler $x-1$ besitzt, aber nicht durch D teilbar ist.

Sei nun allgemein $x=\xi$ eine Lösung der Diskriminantengleichung $D=0$ einer algebraischen, durch eine Gleichung n^{ten} Grades definierten Funktion y einer unabhängigen Variabeln x, und somit ein mehrfacher Punkt jener Funktion, welche einen endlichen Wert η annehmen möge, so wird, wenn ξ ein s-facher Verzweigungspunkt, also in dessen Umgebung

$$y = \eta + a_0(x-\xi)^{\frac{r}{s}} + a_1(x-\xi)^{\frac{r+1}{s}} + \cdots$$

ist, worin $r>0$, $\frac{dy}{dx}$ für $x=\xi$ endlich, oder Null oder unendlich sein können, jedenfalls aber wieder in $x=\xi$ eine s-fache Verzweigung besitzen, und daher die Diskriminante D' der algebraischen Gleichung n^{ten} Grades, welcher $\frac{dy}{dx}$ genügt, ebenfalls für $x=\xi$ verschwinden. War der mehrfache Punkt ξ jedoch ein Eindeutigkeitspunkt, gelten also für zwei Zweige derselben die Entwicklungen

$$y_1=\eta+a_0(x-\xi)^m+a_1(x-\xi)^{m+1}+\cdots,\quad y_2=\eta+\alpha_0(x-\xi)^\mu+\alpha_1(x-\xi)^{\mu+1}+\cdots,$$

worin a_0 und $\alpha_0\neq 0$ sind, so werden, wenn $m>1$ und $\mu>1$ sind, die beiden zugehörigen Werte der Ableitung für $x=\xi$ den gleichen Wert 0 annehmen und ebenso für $m=1$, $\mu=1$, wenn $a_0=\alpha_0$ in den einen Wert a_0 zusammenfallen, und somit $x=\xi$ wieder der Gleichung $D'=0$ genügen, während für $m>1$, $\mu=1$; $m=1$, $\mu>1$ und $m=1$, $\mu=1$, wenn $a_0\neq\alpha_0$, $x=\xi$ ein einfacher Punkt für $\frac{dy}{dx}$ ist und daher die Diskriminante D' nicht zu Null macht.

Ist jedoch für die Lösung ξ der Diskriminantengleichung $D=0$ der Wert $y=\infty$ und wieder ein s-facher Verzweigungspunkt, lautet also die Entwicklung von y in der Umgebung dieses Punktes, in dem die algebraische Funktion von einer endlichen Ordnung unendlich wird,

$$y=a_{-\rho}(x-\xi)^{-\frac{\rho}{s}}+a_{-\rho+1}(x-\xi)^{-\frac{\rho-1}{s}}+\cdots+a_0+a_1(x-\xi)^{\frac{1}{s}}+\cdots,$$

so werden sonst verschiedene Werte der Ableitung für $x=\xi$ in den gemeinsamen Wert unendlich zusammenfallen, und somit wieder $D'(\xi)=0$ sein, indem in diesem Falle die beiden ersten Koeffizienten der für $\frac{dy}{dx}$ bestehenden algebraischen Gleichung für $x=\xi$ den Wert Null annehmen und daher deren Diskriminante, wie aus deren Ausdruck durch die SYLVESTER-Determinante zwischen der Gleichung für die gegebene algebraische Funktion und der für deren Ableitung unmittelbar ersichtlich ist, den Wert Null annimmt. Ist jedoch der Wert $x=\xi$, für den y unendlich werden soll, ein mehrfacher Eindeutigkeitspunkt, sind also die Entwicklungen von y_1 und y_2 in der Umgebung von $x=\xi$

$$y_1 = a_{-\lambda_1}(x-\xi)^{-\lambda_1} + a_{-\lambda_1+1}(x-\xi)^{-\lambda_1+1} + \cdots + a_0 + a_1(x-\xi) + a_2(x-\xi)^2 + \cdots$$

$$y_2 = \alpha_{-\lambda_2}(x-\xi)^{-\lambda_2} + \alpha_{-\lambda_2+1}(x-\xi)^{-\lambda_2+1} + \cdots + \alpha_0 + \alpha_1(x-\xi) + \alpha_2(x-\xi)^2 + \cdots,$$

so werden auch $\frac{dy_1}{dx}$ und $\frac{dy_2}{dx}$ den gemeinsamen Wert ∞ annehmen, also $x=\xi$ wiederum der Gleichung $D'=0$ genügen.

Es werden somit alle Lösungen ξ der Diskriminantengleichung $D=0$ einer algebraischen Funktion y von x auch die Diskriminante D' der algebraischen Gleichung für die Ableitung von y zu Null machen, mit Ausnahme derjenigen Werte von ξ, welche mehrfache Eindeutigkeitspunkte der Funktion y darstellen, in deren Umgebung die Entwicklungen der beiden zugehörigen Zweige der Funktion y, welche einen gemeinsamen endlichen Wert η annehmen, mit einer Potenz von $(x-\xi)$ beginnen, deren Exponenten >1 resp. $=1$ oder beide $=1$ sind, wenn im letzteren Falle die Koeffizienten der beiden Anfangsglieder voneinander verschieden sind.

So wird z. B. die durch die Gleichung

$$y^2 - 2y + 1 - x^2 - x^5 = 0$$

definierte algebraische Funktion y, da die Diskriminantengleichung

$$D = 4(x^2 + x^5) = 0$$

lautet, für $x=0$ und für die Lösungen der Gleichung $1+x^3=0$ gleiche Werte und zwar in beiden Fällen den Wert 1 annehmen; während aber die Lösungen der Gleichung $x^3+1=0$ Verzweigungspunkte von y sind, charakterisiert $x=0$ einen mehrfachen Eindeutigkeitspunkt und zwar sind die Entwicklungen von y in der Umgebung des Nullpunktes

$$y_1 = 1 + x + \cdots, \quad y_2 = 1 - x + \cdots,$$

also in den obigen Bezeichnungen $m=1$, $\mu=1$, $a_0 \neq \alpha_0$. In der Tat hat die Gleichung für die Ableitung dieser algebraischen Funktion

$$4(1+x^3)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-(2+5x^3)^2=0$$

die Diskriminante

$$D'=16(1+x^3)(2+5x^3)^2$$

und also mit D den Faktor x nicht gemein.

Da somit für eine algebraische Funktion einer unabhängigen Variabeln nur diejenigen Lösungen ξ von $D=0$ nicht Lösungen von $D'=0$ sind, welche mehrfache Eindeutigkeitspunkte der algebraischen Funktion definieren, von der je zwei Zweige in der Umgebung derselben Entwicklungen besitzen von der Eigenschaft, daß, wenn eine derselben mit der ersten Potenz von $x-\xi$ beginnt, dies nicht für alle Zweige der Fall ist, oder wenn dies für alle Zweige statthat, die Koeffizienten dieser ersten Potenzen für alle Zweige verschieden sind, so wird man, um D von diesen Werten frei zu machen, nur zwischen D und D' den größten gemeinsamen Teiler d zu suchen brauchen, und es wird dann die Gleichung $d=0$ nur Lösungen und zwar alle besitzen, für welche nicht nur die algebraische Funktion y, sondern auch deren Ableitung gleiche Werte annehmen, während die Auflösung der Gleichung $\frac{D}{d}=0$ als Lösungen diejenigen und alle Werte von x liefert, welche mehrfache Eindeutigkeitspunkte der Funktion sind, für welche die Ableitungen sämtlich verschieden sind.

So hat in der Tat in dem obigen Beispiel die algebraische Gleichung

$$y^2-2y+1-x^2-x^5=0$$

die Diskriminante

$$D=4(x^2+x^5),$$

und die algebraische Gleichung für die Ableitung dieser Funktion die Diskriminante

$$D'=16(25x^9+45x^6+24x^3+4),$$

und es ergibt sich als größter gemeinsamer Teiler von D und D'

$$d = 4(x^3 + 1),$$

so daß für alle Lösungen der Gleichung

$$x^3 - 1 = 0$$

die beiden Werte von y sowie die beiden zugehörigen Werte von $\frac{dy}{dx}$ einander gleich werden, während für die Lösungen der Gleichung

$$\frac{D}{d} = x^2 = 0$$

sich zwei Werte von y ergeben, deren beide Entwicklungen, wie oben bemerkt, mit der ersten Potenz von x beginnen und die verschiedenen Koeffizienten $+1$ und -1 besitzen.

Es möge endlich noch bemerkt werden, daß, wenn $x = \xi$ der Gleichung $D = 0$ nicht genügt, also die algebraische Funktion y in $x = \xi$ einen einfachen Punkt besitzt, wenn dieselbe endlich ist, die Ableitung derselben endlich und eindeutig sein wird, daß aber der Wert $x = \xi$ die Diskriminante $D' = 0$ zu Null machen kann, da die Ableitung y' in diesem Punkte zwar endlich und eindeutig sein wird, aber dort einen mehrfachen Punkt haben kann. So wird z. B. $x = \sqrt[3]{2}$ die Determinante

$$D = 4(x^3 + 1)$$

der algebraischen Funktion (13) nicht zu Null machen, während die Diskriminante

$$D' = 16(x^3 + 1)(x^3 - 2)^2$$

für diesen Wert von x verschwindet, und in der Tat nehmen dann die beiden Lösungen der Gleichung (15) den gleichen endlichen Wert an

$$y' = -\frac{1}{(\sqrt[3]{2})^2}.$$

Es möge endlich noch hervorgehoben werden, daß, wie aus den Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x^2}+2\frac{\partial f}{\partial x\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^2y}{dx^2}=0$$

. . . . . .

hervorgeht, keine der Ableitungen der algebraischen Funktion y nach x genommen für einen endlichen Wert ξ von x und den entsprechenden endlichen Wert η von y unendlich groß werden kann, wenn nicht die Diskriminante D für $x=\xi$ verschwindet, da vermöge der obigen Beziehungen die beiden Gleichungen bestehen müßten

$$f(x,y)_{\xi,\eta}=0\,,\quad \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)_{\xi,\eta}=0\,,$$

also $D(\xi)=0$ sein muß, was übrigens auch schon aus der Gleichung (12) unmittelbar hervorgeht.

9.

Sei die lebendige Kraft T eines Systems materieller Punkte als homogene Funktion zweiten Grades der ersten Ableitungen von μ freien Parametern $p_1, p_2, \ldots p_\mu$ nach der Zeit t ausgedrückt mit Koeffizienten, welche von diesen Parametern algebraisch, aber nicht von der Zeit abhängen, so kann man dieselbe durch die Substitution

$$q_s=\frac{\partial T}{\partial p_s'}$$

in die Form setzen

$$T=\tfrac{1}{2}\Delta_{11}^{(1)}q_1^2+\tfrac{1}{2}\Delta_{22}^{(1)}q_2^2+\cdots+\tfrac{1}{2}\Delta_{\mu\mu}^{(1)}q_\mu^2+\Delta_{12}^{(1)}q_1q_2+\Delta_{13}^{(1)}q_1q_3+\cdots+\Delta_{\mu-1\,\mu}^{(1)}q_{\mu-1}q_\mu\,,$$

worin die $\Delta^{(1)}$ bestimmte Zweige von der Zeit t unabhängiger algebraischer Funktionen von $p_1, p_2, \ldots p_\mu$ sind, welche durch die mit Adjungierung eben dieser Größen irreduktibeln Gleichungen vom Grade $\nu_{\alpha\beta}$

$$(1)\quad \gamma_0^{(\alpha\beta)}(p_1,\dots p_\mu)\,\Delta_{\alpha\beta}^{\nu_{\alpha\beta}} + \gamma_1^{(\alpha\beta)}(p_1,\dots p_\mu)\,\Delta_{\alpha\beta}^{\nu_{\alpha\beta}-1} + \dots + \gamma_{\nu_{\alpha\beta}}^{(\alpha\beta)}(p_1,\dots p_\mu) = 0$$

definiert sind, in welchen die Funktionen γ ganze Funktionen von $p_1, p_2, \dots p_\mu$ sind; sei ferner $U^{(1)}$ ein bestimmter Zweig einer algebraisch von den Parametern $p_1, \dots p_\mu$ und der Zeit t abhängigen Kräftefunktion, welche der mit Adjungierung von $p_1, \dots p_\mu$ und t irreduktibeln Gleichung

$$(2)\quad \gamma_0(p_1,\dots p_\mu, t)\,U^{\nu_0} + \gamma_1(p_1,\dots p_\mu, t)\,U^{\nu_0-1} + \dots + \gamma_{\nu_0}(p_1,\dots p_\mu, t) = 0$$

genügt, so wird mit Hilfe der in der Form

$$E^{(1)} = \tfrac{1}{2}\Delta_{11}^{(1)} q_1^2 + \dots + \tfrac{1}{2}\Delta_{\mu\mu}^{(1)} q_\mu^2 + \Delta_{12}^{(1)} q_1 q_2 + \dots + \Delta_{\mu-1\mu}^{(1)} q_{\mu-1} q_\mu - U^{(1)}$$

dargestellten Energie das HAMILTONsche Differentialgleichungssystem $2\mu^{\text{ter}}$ Ordnung die Gestalt haben

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{dp_\rho}{dt} = \dfrac{\partial E^{(1)}}{\partial q_\rho} = \Delta_{\rho 1}^{(1)} q_1 + \Delta_{\rho 2}^{(1)} q_2 + \dots + \Delta_{\rho\rho}^{(1)} q_\rho + \dots + \Delta_{\rho\mu}^{(1)} q_\mu \\ \qquad\qquad (\rho = 1, 2, \dots \mu) \\ \dfrac{dq_\rho}{dt} = -\dfrac{\partial E^{(1)}}{\partial p_\rho} = -\tfrac{1}{2}\dfrac{\partial \Delta_{11}^{(1)}}{\partial p_\rho} q_1^2 - \dots - \tfrac{1}{2}\dfrac{\partial \Delta_{\mu\mu}^{(1)}}{\partial p_\rho} q_\mu^2 \\ \qquad - \dfrac{\partial \Delta_{12}^{(1)}}{\partial p_\rho} q_1 q_2 - \dots - \dfrac{\partial \Delta_{\mu-1\mu}^{(1)}}{\partial p_\rho} q_{\mu-1} q_\mu + \dfrac{\partial U^{(1)}}{\partial p_\rho}. \end{cases}$$

Führt man sodann die ganze lineare homogene Funktion der willkürlichen Konstanten $a_{\alpha\beta}^{(\lambda)}$ und $a^{(\lambda)}$ ein

$$(4)\quad \begin{cases} v_1 = \sum_{\substack{\alpha,\beta=1,2,\dots\mu \\ \alpha\le\beta}} \left(a_{\alpha\beta}^{(0)} \Delta_{\alpha\beta}^{(1)} - a_{\alpha\beta}^{(1)} \dfrac{\partial \Delta_{\alpha\beta}^{(1)}}{\partial p_1} + \dots + a_{\alpha\beta}^{(\mu)} \dfrac{\partial \Delta_{\alpha\beta}^{(1)}}{\partial p_\mu} \right) \\ \qquad + a^{(1)} \dfrac{\partial U^{(1)}}{\partial p_1} + \dots + a^{(\mu)} \dfrac{\partial U^{(1)}}{\partial p_\mu}, \end{cases}$$

worin die partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\partial \Delta_{\alpha\beta}^{(1)}}{\partial p_\rho} \quad \text{und} \quad \frac{\partial U^{(1)}}{\partial p_\rho}$$

rationale ganze Funktionen von $\Delta_{\alpha\beta}^{(1)}$ und $U^{(1)}$ mit in $p_1, \dots p_\mu$ resp. $p_1, \dots p_\mu$ und t rationalen Koeffizienten bedeuten, welche wieder gleichartigen irreduktibeln algebraischen Gleichungen vom $\nu_{\alpha\beta}^{\text{ten}}$ resp. ν_0^{ten} Grade genügen, und bildet man durch Substitution aller Zweige der algebraischen Funktionen $\Delta_{\alpha\beta}$ und U in den Ausdruck (4) mittels der Gleichungen (1) und (2) und der dazu gehörigen Gleichungen für die nach p_ρ genommenen Ableitungen von $\Delta_{\alpha\beta}$ und U die in v ganze Funktion

$$(5)\quad \left|\begin{aligned} &G(v, t, p_1, \dots p_\mu, a) \\ &= \prod \left\{ v - \sum_{\substack{\alpha,\beta=1,2,\dots\mu \\ \alpha \le \beta}} \left(a_{\alpha\beta}^{(0)} \Delta_{\alpha\beta} + a_{\alpha\beta}^{(1)} \frac{\partial \Delta_{\alpha\beta}}{\partial p_1} + \dots + a_{\alpha\beta}^{(\mu)} \frac{\partial \Delta_{\alpha\beta}}{\partial p_\mu} \right) \right. \\ &\qquad \left. - \left(a^{(1)} \frac{\partial U}{\partial p_1} + \dots + a^{(\mu)} \frac{\partial U}{\partial p_\mu} \right) \right\} \\ &= g_0(t, p_1, \dots p_\mu) v^\nu + g_1(t, p_1, \dots p_\mu, a) v^{\nu-1} + \dots + g_\nu(t, p_1, \dots p_\mu, a) \end{aligned}\right.$$

vom Grade

$$\nu = \nu_0 \prod_{\substack{\alpha,\beta=1,2,\dots\mu \\ \alpha \le \beta}} \nu_{\alpha\beta} ,$$

worin die g_λ ganze rationale Funktionen der eingeschlossenen Größen bedeuten, welche in bezug auf die willkürlichen Konstanten a homogen vom λ^{ten} Grade sind, so wird die Gleichung

$$(6) \qquad G(v, t, p_1, \dots p_\mu, a) = 0 ,$$

welche die durch die angegebenen Substitutionen erhaltenen Lösungen $v_1, v_2, \dots v_\nu$ hat, als irreduktibel vorausgesetzt werden dürfen, da man anderenfalls statt der Gleichung (6) den irreduktibeln Faktor derselben zugrunde legen kann, welcher die den Zweigen $\Delta^{(1)}$ und $U^{(1)}$ zugehörige Lösung v_1 besitzt. Die Gleichung (6) wird die Zeit t nicht explizite enthalten, wenn die Kräftefunktion nur von den Parametern, aber nicht von der Zeit abhängig ist.

Da dann, wie unmittelbar zu sehen, die Beziehungen bestehen

$$(7)\qquad \Delta_{\alpha\beta} = -\left(\frac{\frac{\partial G}{\partial a^{(0)}_{\alpha\beta}}}{\frac{\partial G}{\partial v}}\right),\quad \frac{\partial \Delta_{\alpha\beta}}{\partial p_\varrho} = -\left(\frac{\frac{\partial G}{\partial a^{(\varrho)}_{\alpha\beta}}}{\frac{\partial G}{\partial v}}\right),\quad \frac{\partial U}{\partial p_\varrho} = -\left(\frac{\frac{\partial G}{\partial a^{(\varrho)}}}{\frac{\partial G}{\partial v}}\right),$$

worin die eingeklammerten Ausdrücke die Werte derselben für den den Zweigen von $\Delta_{\alpha\beta}$ und U zugehörigen Wert von v bedeuten, und worin die rechten Seiten dieser Gleichungen, wie aus den linken Seiten derselben hervorgeht, von den willkürlichen Konstanten a unabhängig sind, so wird das Differentialgleichungssystem $2\mu^{\text{ter}}$ Ordnung (3) durch die ν Differentialgleichungssysteme $2\mu+1^{\text{ter}}$ Ordnung ersetzt werden können

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial G}{\partial v}\dfrac{dp_\varrho}{dt} = -\dfrac{\partial G}{\partial a^{(0)}_{\varrho 1}}q_1 - \dfrac{\partial G}{\partial a^{(0)}_{\varrho 2}}q_2 - \cdots - \dfrac{\partial G}{\partial a^{(0)}_{\varrho\mu}}q_\mu \\ \dfrac{\partial G}{\partial v}\dfrac{dq_\varrho}{dt} = \frac{1}{2}\dfrac{\partial G}{\partial a^{(\varrho)}_{11}}q_1^2 + \cdots + \frac{1}{2}\dfrac{\partial G}{\partial a^{(\varrho)}_{\mu\mu}}q_\mu^2 + \dfrac{\partial G}{\partial a^{(\varrho)}_{12}}q_1 q_2 + \cdots \\ \qquad\qquad + \dfrac{\partial G}{\partial a^{(\varrho)}_{\mu-1\,\mu}}q_{\mu-1}q_\mu - \dfrac{\partial G}{\partial a^{(\varrho)}} \qquad\qquad (\varrho = 1, 2, \ldots \mu) \\ \dfrac{\partial G}{\partial v}\dfrac{dv}{dt} = \left(\dfrac{\partial G}{\partial v}\right)^{-1}\left[-\dfrac{\partial G}{\partial t}\dfrac{\partial G}{\partial v} + \dfrac{\partial G}{\partial p_1}\left(\dfrac{\partial G}{\partial a^{(0)}_{11}}q_1 + \cdots + \dfrac{\partial G}{\partial a^{(0)}_{1\mu}}q_\mu\right)\right. \\ \qquad\qquad \left. + \cdots + \dfrac{\partial G}{\partial p_\mu}\left(\dfrac{\partial G}{\partial a^{(0)}_{\mu 1}}q_1 + \cdots + \dfrac{\partial G}{\partial a^{(0)}_{\mu\mu}}q_\mu\right)\right], \end{cases}$$

in denen für v die Werte $v_1, v_2, \ldots v_\nu$ zu substituieren sind.

Um nun die Integrale $p_1, \ldots p_\mu, q_1, \ldots q_\mu, v$ dieses Differentialgleichungssystems zu untersuchen, welche für $t=\tau$ die Werte $\pi_1, \ldots \pi_\mu, \varkappa_1, \ldots \varkappa_\mu$ und einen der als Lösungen der Gleichung

$$(9)\qquad G(v_1, \tau, \pi_1, \ldots \pi_\mu, a) = 0$$

sich ergebenden Wert $\bar{v}_1$ annehmen sollen, sind zunächst die beiden wesentlich voneinander verschiedenen Fälle zu trennen, je nachdem $\bar{v}_1$ eine einfache oder mehrfache Lösung der Gleichung (9) ist, für welche noch besonders in Betracht kommt, daß die Lösungen derselben nicht von den Anfangswerten $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_\mu$ der q-Integrale abhängen.

Für den Fall, daß $\bar{v}_1$ eine endliche und einfache Lösung der Gleichung (9) ist, also neben der Gleichung (9) die Ungleichheit besteht

$$\left(\frac{\partial G(v_1, \pi_1, \ldots \pi_\mu, \tau, a)}{\partial v_1}\right)_{v_1=\bar{v}_1} \neq 0, \tag{10}$$

werden die Differentialgleichungen (8), da der reziproke Wert der Ableitung $\frac{\partial G}{\partial v_1}$ der ganzen Funktion G sich in eine konvergente Reihe entwickeln läßt, die nach positiven steigenden ganzen Potenzen der Differenzen

$$(\alpha) \qquad v_1 - \bar{v}_1,\ p_1 - \pi_1, \ldots p_\mu - \pi_\mu,\ t - \tau$$

fortschreitet und als konstantes Glied den reziproken Wert des Ausdruckes (10) enthält, die Form annehmen

$$(11)\quad \begin{cases} \dfrac{dp_\rho}{dt} = \mathfrak{P}_\rho^{(1)} q_1 + \mathfrak{P}_\rho^{(2)} q_2 + \cdots + \mathfrak{P}_\rho^{(\mu)} q_\mu & (\rho = 1, 2, \ldots \mu) \\ \dfrac{dq_\rho}{dt} = \mathfrak{P}_\rho^{(11)} q_1^2 + \cdots + \mathfrak{P}_\rho^{(\mu\mu)} q_\mu^2 + \mathfrak{P}_\rho^{(12)} q_1 q_2 + \cdots + \mathfrak{P}_\rho^{(\mu-1\,\mu)} q_{\mu-1} q_\mu + \mathfrak{P}_\rho^{(0)} \\ \dfrac{dv_1}{dt} = \mathfrak{P}^{(1)} q_1 + \mathfrak{P}^{(2)} q_2 + \cdots + \mathfrak{P}^{(\mu)} q_\mu + \mathfrak{P}^{(0)}, \end{cases}$$

worin die $\mathfrak{P}$ eindeutige Potenzreihen der Differenzen (α) darstellen, und es werden somit nach dem CAUCHYschen Satze diejenigen Integrale dieses Differentialgleichungssystems, welche für $t = \tau$ die Werte $\pi_1, \ldots \pi_\mu$, $\varkappa_1, \ldots \varkappa_\mu, \bar{v}_1$ annehmen sollen, durch eindeutige Potenz-

reihen von $t-\tau$ sich darstellen lassen, die nur dann in konstante Integrale des Systems übergehen, wenn die Ausdrücke

$$(12)\left\{\begin{array}{ll}\left[\mathfrak{P}_\rho^{(1)}\right]\varkappa_1+\left[\mathfrak{P}_\rho^{(2)}\right]\varkappa_2+\cdots+\left[\mathfrak{P}_\rho^{(\mu)}\right]\varkappa_\mu & (\rho=1,2,\ldots\mu)\\ \left[\mathfrak{P}_\rho^{(11)}\right]\varkappa_1^2+\cdots+\left[\mathfrak{P}_\rho^{(\mu\mu)}\right]\varkappa_\mu^2+\left[\mathfrak{P}_\rho^{(12)}\right]\varkappa_1\varkappa_2+\cdots+\left[\mathfrak{P}_\rho^{(\mu-1\,\mu)}\right]\varkappa_{\mu-1}\varkappa_\mu+\left[\mathfrak{P}_\rho^{(0)}\right] & \\ \left[\mathfrak{P}^{(1)}\right]\varkappa_1+\left[\mathfrak{P}^{(2)}\right]\varkappa_2+\cdots+\left[\mathfrak{P}^{(\mu)}\right]\varkappa_\mu+\left[\mathfrak{P}^{(0)}\right], & \end{array}\right.$$

in denen die eingeklammerten Größen die Werte derselben für $p_1=\pi_1,\ldots p_\mu=\pi_\mu$, $v_1=\bar{v}_1$ bedeuten, für jeden Wert von t verschwinden oder in der Entwicklung der rechten Seiten der Gleichungen (11) nach Potenzen der Differenzen (α) und $q_\rho-\varkappa_\rho$ keine nur von der Differenz $t-\tau$ abhängigen Glieder vorkommen. Soll letzteres für jedes Anfangssystem $\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots\varkappa_\mu$ der q der Fall sein, so müssen die einzelnen $\mathfrak{P}$ für $p_1=\pi_1,\ldots p_\mu=\pi_\mu$, $v_1=\bar{v}_1$ verschwinden, dies also auch nach (8) für die nach t und den Konstanten a genommenen partiellen Differentialquotienten von G statthaben, und es würde weiter aus (7) folgen, daß dann auch die Funktionen

$$\Delta_{\alpha\beta}\quad\text{und}\quad\frac{\partial\Delta_{\alpha\beta}}{\partial p_\rho}$$

für das Wertesystem $p_1=\pi_1,\ldots p_\mu=\pi_\mu$ den Wert Null haben und $\dfrac{\partial U}{\partial p_\rho}$ für eben dieses unabhängig von t verschwindet. Daraus ergibt sich aber nach (4), daß auch v_1 unabhängig von t für $p_1=\pi_1,\ldots p_\mu=\pi_\mu$ verschwinden müßte, und umgekehrt wird, wenn letzteres der Fall ist, wegen der Willkürlichkeit der Konstanten a aus $v_1=0$ sich das von t unabhängige Verschwinden der Konstanten auf den rechten Seiten der Differentialgleichungen (11) für willkürliche Anfangswerte $\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots\varkappa_\mu$ der q ergeben.

Die Differentialgleichungen (11) können aber auch wieder von der Variabeln v_1 unabhängig gemacht, und damit eine direkte Transformation von (3) auf ein Differentialgleichungssystem der $2\mu^{\text{ten}}$ Ordnung hergestellt werden, da, weil $\bar{v}_1$ eine einfache und endliche Lösung der Gleichung $(G)_{\tau,\pi_1,\ldots\pi_\mu}=0$ ist, sich für $v_1-\bar{v}_1$

eine eindeutige Potenzreihe der Differenzen $t-\tau$, $p_\rho-\pi_\rho$ ergibt, und wir durch Substitution dieser Entwicklung in die 2μ ersten Differentialgleichungen (11) das Differentialgleichungssystem $2\mu^{\text{ter}}$ Ordnung erhalten

$$(11a)\quad \begin{cases} \dfrac{dp_\rho}{dt} = \overline{\mathfrak{P}}_\rho^{(1)} q_1 + \overline{\mathfrak{P}}_\rho^{(2)} q_2 + \cdots + \overline{\mathfrak{P}}_\rho^{(\mu)} q_\mu & (\rho = 1, 2, \ldots \mu) \\ \dfrac{dq_\rho}{dt} = \overline{\mathfrak{P}}_\rho^{(11)} q_1^2 + \cdots + \overline{\mathfrak{P}}_\rho^{(\mu\mu)} q_\mu^2 + \overline{\mathfrak{P}}_\rho^{(12)} q_1 q_2 + \cdots + \overline{\mathfrak{P}}_\rho^{(\mu-1\,\mu)} q_{\mu-1} q_\mu + \overline{\mathfrak{P}}_\rho^{(0)}, \end{cases}$$

worin die $\overline{\mathfrak{P}}_\rho$ wieder eindeutige Potenzreihen der Differenzen $t-\tau$, $p_\rho-\pi_\rho$ darstellen, aus welchen sich dann wieder p_ρ und q_ρ als eindeutige Potenzreihen von $t-\tau$ ergeben, welche für $t=\tau$ die Werte π_ρ und $\varkappa_\rho$ annehmen, welches auch die gegebenen Anfangswerte $\varkappa$ der q sein mögen, und konstante Integrale nur dann, wenn

$$\left|\overline{\mathfrak{P}}_\rho^{(1)}\right| \varkappa_1 + \left|\overline{\mathfrak{P}}_\rho^{(2)}\right| \varkappa_2 + \cdots + \left|\overline{\mathfrak{P}}_\rho^{(\mu)}\right| \varkappa_\mu$$

$$\left|\overline{\mathfrak{P}}_\rho^{(11)}\right| \varkappa_1^2 + \left|\overline{\mathfrak{P}}_\rho^{(22)}\right| \varkappa_2^2 + \cdots + \left|\overline{\mathfrak{P}}_\rho^{(\mu\mu)}\right| \varkappa_\mu^2 + \left|\overline{\mathfrak{P}}_\rho^{(12)}\right| \varkappa_1 \varkappa_2 + \cdots + \left|\overline{\mathfrak{P}}_\rho^{(\mu-1\,\mu)}\right| \varkappa_{\mu-1} \varkappa_\mu$$

für jeden Wert von t verschwinden.

Wir können aber die eben gewonnenen Resultate auch unmittelbar aus den ursprünglichen HAMILTONschen Differentialgleichungen (3) herleiten, ohne dieselben durch Einführung der algebraischen Funktion v auf die JACOBI-WEIERSTRASSsche Normalform zu reduzieren, indem wir die Bedingung, daß $\bar{v}_1$ eine endliche und einfache Lösung der Gleichung (9) ist, auf äquivalente Eigenschaften der Funktionen Δ und der Kräftefunktion U übertragen.

Soll nämlich die Größe $\bar{v}_1$ endlich sein, so müssen nach (4) die Größen

$$(\beta)\qquad \left(\Delta_{\alpha\beta}^{(1)}\right), \quad \left(\frac{\partial \Delta_{\alpha\beta}^{(1)}}{\partial p_\rho}\right), \quad \left(\frac{\partial U^{(1)}}{\partial p_\rho}\right),$$

welche die Werte der eingeklammerten Ausdrücke für das Wertesystem $\tau, \pi_1, \ldots \pi_\mu$ bedeuten sollen, wegen der Willkürlichkeit der

Konstanten a ebenfalls sämtlich endlich sein; ferner darf aber auch keine der Diskriminanten der algebraischen Gleichungen, welche die Funktionen

$$(\gamma) \qquad \Delta_{\alpha\beta}, \quad \frac{\partial \Delta_{\alpha\beta}}{\partial p_\rho} \cdot \frac{\partial U}{\partial p_\rho}$$

definieren, für eben jenes Wertesystem verschwinden, wenn $\bar{v}_1$ eine einfache endliche Lösung der Gleichung (9) sein soll. Denn, wenn auch nur eine derselben den Wert Null annimmt, so werden diejenigen Werte der Lösungen v der Gleichung (6) für jenes Wertesystem einander gleich werden, welche denselben Zweigen aller andern dieser Größen zugehören und nur einem anderen Zweige dieser einen, deren Diskriminante verschwindet, und wenn umgekehrt zwei Werte von v für jenes Wertesystem einander gleich sind, so werden zwei Zweige mindestens einer jener Größen für das bezeichnete Wertesystem einander gleich sein müssen, also deren Diskriminante Null werden. Damit also $\bar{v}_1$ eine einfache und endliche Lösung der Gleichung (9) ist, ist notwendig und hinreichend, daß keine der Diskriminanten der algebraischen Gleichungen, welchen die Größen (γ) genügen, für das gegebene Wertesystem verschwindet, und keine dieser Größen unendlich wird. Da aber $\left(\frac{\partial \Delta_{\alpha\beta}}{\partial p_\rho}\right)$, wenn $(\Delta_{\alpha\beta})$ endlich ist, nur dann unendlich werden kann, wenn die zu $\Delta_{\alpha\beta}$ gehörige Diskriminante für jenes Wertesystem verschwindet[1], so wird $\bar{v}_1$ dann und nur dann eine endliche und einfache Lösung der Gleichung (9) sein, wenn keine der zu den Größen (γ) gehörigen Diskriminanten für das Wertesystem $\tau, \pi_1, \ldots \pi_\mu$ verschwindet, und keine der Größen $(\Delta_{\alpha\beta})$ und $\left(\frac{\partial U}{\partial p_\rho}\right)$ unendlich wird.

Unter diesen Voraussetzungen lassen sich aber die Größen (γ) als Lösungen der ihnen zugehörigen algebraischen Gleichungen bekanntlich in Reihen entwickeln, welche nach positiven steigenden ganzen Potenzen von $t-\tau, p_1-\pi_1, \ldots p_\mu-\pi_\mu$ fortschreiten — wobei jedoch zu bemerken ist, daß dies auch der Fall sein kann, wenn eine der Diskriminanten verschwindet —, und es werden so-

[1] Vergl. die Auseinandersetzungen des Abschnittes 8.

mit die rechten Seiten der 2μ Differentialgleichungen (3) in eindeutige Potenzreihen von $t-\tau, p_\rho-\pi_\rho, q_\rho-\varkappa_\rho$ entwickelbar sein, für welche die von den Differenzen $p_1-\pi_1, \dots p_\mu-\pi_\mu, q_1-\varkappa_1, \dots q_\mu-\varkappa_\mu$ freien Glieder durch die Ausdrücke gegeben sind

$$(\delta) \qquad \left[\Delta^{(1)}_{\rho 1}\right]\varkappa_1+\left[\Delta^{(1)}_{\rho 2}\right]\varkappa_2+\cdots+\left[\Delta^{(1)}_{\rho\mu}\right]\varkappa_\mu$$

$$(\varepsilon)\quad \left\{\begin{aligned} &-\tfrac{1}{2}\left[\frac{\partial\Delta^{(1)}_{11}}{\partial p_\rho}\right]\varkappa_1^2-\cdots-\tfrac{1}{2}\left[\frac{\partial\Delta^{(1)}_{\mu\mu}}{\partial p_\rho}\right]\varkappa_\mu^2-\left[\frac{\partial\Delta^{(1)}_{12}}{\partial p_\rho}\right]\varkappa_1\varkappa_2-\cdots \\ &\qquad -\left[\frac{\partial\Delta^{(1)}_{\mu-1\,\mu}}{\partial p_\rho}\right]\varkappa_{\mu-1}\varkappa_\mu+\left[\frac{\partial U^{(1)}}{\partial p_\rho}\right], \end{aligned}\right.$$

worin die eingeklammerten Ausdrücke die Werte derselben für beliebige t und für $p_1=\pi_1, \dots p_\mu=\pi_\mu$ bedeuten, und wir erhalten somit nach dem CAUCHYschen Satze unmittelbar aus der Form (3) der HAMILTONschen Gleichungen das nachfolgende Theorem:

Wenn die Werte $\left(\Delta^{(1)}_{\alpha\beta}\right)$ und $\left(\frac{\partial U^{(1)}}{\partial p_\rho}\right)$ endlich sind, und keine der zu den Funktionen $\Delta_{\alpha\beta}$, $\frac{\partial\Delta_{\alpha\beta}}{\partial p_\rho}$, $\frac{\partial U}{\partial p_\rho}$ gehörigen Diskriminanten für das Wertesystem $t=\tau$, $p_1=\pi_1$, $\dots p_\mu=\pi_\mu$ verschwindet, dann werden die Integrale p_ρ und q_ρ des Differentialgleichungssystems (9), welche für $t=\tau$ die Werte $\pi_1, \dots \pi_\mu, \varkappa_1, \dots \varkappa_\mu$ annehmen sollen, sich in eindeutige Potenzreihen nach $t-\tau$ entwickeln lassen, und diese Integrale werden konstant sein, wenn die Ausdrücke (δ) und (ε) für jeden Wert von t verschwinden.

Aber auch ohne den Übergang durch die charakteristische Eigenschaft der Größe $\bar{v}_1$ zu machen, unter den für die Δ und die Kräftefunktion angegebenen Bedingungen für das gegebene Wertesystem eine endliche und einfache Lösung der Gleichung (9) zu sein, ist das eben gefundene Resultat auch unmittelbar aus den ursprünglichen HAMILTONschen Differentialgleichungen ersichtlich. Genügen nämlich die Funktionen (γ), den Gleichungen (1) und (2) entsprechend, den irreduktibeln algebraischen Gleichungen

$$(13)\quad \begin{cases} \gamma_0^{(\alpha\beta)}(p_1,\dots p_\mu)\,\Delta_{\alpha\beta}^{\nu_{\alpha\beta}} + \gamma_1^{(\alpha\beta)}(p_1,\dots p_\mu)\,\Delta_{\alpha\beta}^{\nu_{\alpha\beta}-1} + \dots + \gamma_{\nu_{\alpha\beta}}^{(\alpha\beta)}(p_1,\dots p_\mu) = 0 \\ \gamma_{0\varrho}^{(\alpha\beta)}(p_1,\dots p_\mu)\left(\dfrac{\partial \Delta_{\alpha\beta}}{\partial p_\varrho}\right)^{\nu_{\alpha\beta}} + \gamma_{1\varrho}^{(\alpha\beta)}(p_1,\dots p_\mu)\left(\dfrac{\partial \Delta_{\alpha\beta}}{\partial p_\varrho}\right)^{\nu_{\alpha\beta}-1} + \dots \\ \qquad + \gamma_{\nu_{\alpha\beta}\varrho}^{(\alpha\beta)}(p_1,\dots p_\mu) = 0 \\ \gamma_{0\varrho}(p_1,\dots p_\mu,t)\left(\dfrac{\partial U}{\partial p_\varrho}\right)^{\nu_0} + \gamma_{1\varrho}(p_1,\dots p_\mu,t)\left(\dfrac{\partial U}{\partial p_\varrho}\right)^{\nu_0-1} + \dots \\ \qquad + \gamma_{0\varrho}(p_1,\dots p_\mu,t) = 0\,, \end{cases}$$

und werden die Zweige

$$\Delta_{\alpha\beta}^{(1)},\quad \frac{\partial \Delta_{\alpha\beta}^{(1)}}{\partial p_\varrho},\quad \frac{\partial U^{(1)}}{\partial p_\varrho}$$

für das Wertesystem $p_1=\pi_1,\dots p_\mu=\pi_\mu, t=\tau$ nicht unendlich, sind also

$$(\zeta)\qquad \gamma_0^{(\alpha\beta)}(\pi_1,\dots\pi_\mu)\neq 0,\ \gamma_{0\varrho}^{(\alpha\beta)}(\pi_1,\dots\pi_\mu)\neq 0,\ \gamma_{0\varrho}(\pi_1,\dots\pi_\mu;\tau)\neq 0\,,$$

und sind ferner die Werte derselben, welche je einer der Gleichungen (13) angehören, für eben jenes Wertesystem sämtlich verschieden — was stets der Fall sein wird, wenn die Diskriminanten von (13) für dieses nicht verschwinden —, so werden sich die algebraischen Funktionen (γ) in Reihen entwickeln lassen, welche nach positiven steigenden ganzen Potenzen von $p_1-\pi_1,\dots p_\mu-\pi_\mu$ resp. $p_1-\pi_1,\dots p_\mu-\pi_\mu, t-\tau$ fortschreiten, deren von den Differenzen $p_1-\pi_1,\dots p_\mu-\pi_\mu$ freien Glieder oder deren Werte für $p_1=\pi_1,\dots p_\mu-\pi_\mu$ durch

$$\left[\Delta_{\alpha\beta}^{(1)}\right],\quad \left[\frac{\partial \Delta_{\alpha\beta}^{(1)}}{\partial p_\varrho}\right],\quad \left[\frac{\partial U^{(1)}}{\partial p_\varrho}\right]$$

dargestellt werden. Sind aber die Koeffizienten der q-Potenzen auf den rechten Seiten der Differentialgleichungen (3) in so ge-

artete Potenzreihen entwickelbar, so werden die rechten Seiten selbst in Reihen entwickelbar sein, welche für jedes beliebig gegebene System der Anfangswerte $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_\mu$ der Größen $q_1, q_2, \ldots q_\mu$ nach positiven steigenden ganzen Potenzen von $t-\tau$, $p_1-\pi_1, \ldots$ $p_\mu-\pi_\mu$, $q_1-\varkappa_1, \ldots q_\mu-\varkappa_\mu$ fortschreiten, und deren von den Differenzen $p_1-\pi_1, \ldots q_1-\varkappa_1$ freien Glieder durch die Ausdrücke (δ) und (ε) dargestellt werden. Daraus folgt aber wieder, daß unter den für die Funktionen $\Delta^{(1)}_{\alpha\beta}$, deren partiellen Ableitungen nach den Parametern p_ρ und den Ableitungen der Kräftefunktion angegebenen Bedingungen die Integrale $p_1, \ldots p_\mu, q_1, \ldots q_\mu$ der Differentialgleichungen (3), welche für $t=\tau$ die Werte $\pi_1, \ldots \pi_\mu, \varkappa_1, \ldots \varkappa_\mu$ annehmen sollen, sich in der Umgebung von $t=\tau$ in Reihen entwickeln lassen, welche nach positiven steigenden ganzen Potenzen von $t-\tau$ fortschreiten, und daß jene Integrale wieder konstant sein werden, wenn die oben angegebenen Anfangsglieder (δ) und (ε) für jeden Wert von t den Wert Null annehmen.

Wenn für ein endliches Wertesystem $\tau, \pi_1, \ldots \pi_\mu$ der Wert $\bar{v}_1$ eine einfache, aber unendlich große Lösung der Gleichung (9) darstellt, und man das Differentialgleichungssystem (8) durch die Substitution $v=\frac{1}{u}$ in ein solches mit der unabhängigen Variabeln t und den abhängigen Variabeln $p_1, \ldots p_\mu, q_1, \ldots q_\mu, u$ transformiert, so ergibt sich aus (8), da

$$G(v, t, p_1, \ldots p_\mu, a) = g_0(t, p_1, \ldots p_\mu)\, v^\nu + g_1(t, p_1, \ldots p_\mu, a)\, v^{\nu-1} + \cdots + g_\nu(t, p_1, \ldots p_\mu, a) = u^{-\nu}\Gamma(u),$$

wenn

$$\Gamma(u) = g_\nu u^\nu + g_{\nu-1} u^{\nu-1} + \cdots + g_1 u + g_0 \tag{14}$$

gesetzt wird, für die der Lösung v_1 der Gleichung (9) entsprechende Lösung u_1 der Gleichung $\Gamma(u)=0$, wenn

$$H(u) = g_{\nu-1} u^{\nu-1} + 2g_{\nu-2} u^{\nu-2} + \cdots + (\nu-2) g_2 u^2 + (\nu-1) g_1 u + \nu g_0 \tag{15}$$

gesetzt wird, das Differentialgleichungssystem

$$(16)\quad \left|\begin{array}{l} u_1 H(u_1)\dfrac{dp_\varrho}{dt} = -\dfrac{\partial \Gamma(u_1)}{\partial a^{(0)}_{\varrho 1}} q_1 - \cdots - \dfrac{\partial \Gamma(u_1)}{\partial a^{(0)}_{\varrho\mu}} q_\mu \\ u_1 H(u_1)\dfrac{dq_\varrho}{dt} = \frac{1}{2}\dfrac{\partial \Gamma(u_1)}{\partial a^{(\varrho)}_{11}} q_1^2 + \cdots - \dfrac{\partial \Gamma(u_1)}{\partial a^{(\varrho)}_{12}} q_1 q_2 - \cdots - \dfrac{\partial \Gamma(u_1)}{\partial a^{(\varrho)}} \\ H(u_1)^2 \dfrac{du_1}{dt} = u_1 \dfrac{\partial \Gamma(u_1)}{\partial t} H(u_1) \\ \qquad\qquad - \sum_1^\mu \dfrac{\partial \Gamma(u_1)}{\partial p_\varrho}\left(\dfrac{\partial \Gamma(u_1)}{\partial a^{(0)}_{\varrho 1}} q_1 + \cdots + \dfrac{\partial \Gamma(u_1)}{\partial a^{(0)}_{\varrho\mu}} q_\mu\right), \end{array}\right.$$

worin die Koeffizienten der q auf den rechten Seiten dieser Gleichungen ganze Funktionen von $u_1; p_1, \ldots p_\mu$ und t sind, oder, da g_0 von den Konstanten a unabhängig war, und also, wenn

$$(17)\qquad K(u_1) = g_\nu u_1^{\nu-1} - g_{\nu-1} u^{\nu-2} + \cdots + g_1$$

gesetzt wird,

$$\frac{\partial \Gamma(u_1)}{\partial a} = \frac{\partial g_\nu}{\partial a} u_1^\nu + \frac{\partial g_{\nu-1}}{\partial a} u_1^{\nu-1} - \frac{\partial g_1}{\partial a} u_1 = u_1 \frac{\partial K(u_1)}{\partial a}$$

ist, das Differentialgleichungssystem

$$(18)\quad \left|\begin{array}{l} H(u_1)\dfrac{dp_\varrho}{dt} = -\dfrac{\partial K(u_1)}{\partial a^{(0)}_{\varrho 1}} q_1 - \cdots - \dfrac{\partial K(u_1)}{\partial a^{(0)}_{\varrho\mu}} q_\mu \\ H(u_1)\dfrac{dq_\varrho}{dt} = \frac{1}{2}\dfrac{\partial K(u_1)}{\partial a^{(\varrho)}_{11}} q_1^2 + \cdots + \dfrac{\partial K(u_1)}{\partial a^{(\varrho)}_{12}} q_r q_2 + \cdots - \dfrac{\partial K(u_1)}{\partial a^{(\varrho)}} \\ H(u_1)\dfrac{du_1}{dt} = u_1\left(u_1 \dfrac{\partial K(u_1)}{\partial t} + \dfrac{\partial g_0}{\partial t}\right) - \\ -\sum_1^\mu \left(u_1 \dfrac{\partial K(u_1)}{\partial p_\varrho} + \dfrac{\partial g_0}{\partial p_\varrho}\right)\left(u_1 \dfrac{\dfrac{\partial K(u_1)}{\partial a^{(0)}_{\varrho 1}}}{H} q_1 + \cdots + u_1 \dfrac{\dfrac{\partial K(u_1)}{\partial a^{(0)}_{\varrho\mu}}}{H} q_\mu\right). \end{array}\right.$$

Da sich aber für das Wertesystem $t=\tau$, $p_\rho=\pi_\rho$ der Voraussetzung nach die einfache und unendlich große Lösung der Gleichung (9), also die Lösung $\bar{u}_1=0$ der Gleichung $\Gamma(u_1)=0$ ergeben sollte, so werden nunmehr die Integrale des Differentialgleichungssystems (18) zu untersuchen sein, welche für $t=\tau$ die Werte $\pi_1, \dots \pi_\mu, \varkappa_1, \dots \varkappa_\mu, 0$ annehmen, wobei der Annahme nach

$$g_0(\tau, \pi_1, \dots \pi_\mu) = 0, \quad g_1(\tau, \pi_1, \dots \pi_\mu, a) \neq 0,$$

und daher $u_1=0$ eine einfache Lösung der Gleichung

$$\Gamma(u_1, \tau, \pi_1, \dots \pi_\mu, a) = 0$$

ist. Da sich aber hiernach u_1 in der Umgebung der Werte $t=\tau, p_\rho=\pi_\rho$ in eine eindeutige Potenzreihe der Differenzen $t-\tau$, $p_\rho-\pi_\rho$ entwickeln läßt, die kein von diesen Differenzen freies Glied enthält, und durch Substitution dieser Reihenentwicklung für u_1 in die ersten 2μ Differentialgleichungen (18) für die rechten Seiten derselben als Koeffizienten der q und q^2 eindeutige Potenzreihen von $t-\tau$, $p_\rho-\pi_\rho$ sich ergeben, die im allgemeinen nach (17), da $g_1(\tau, \pi_1, \dots \pi_\mu, a) \neq 0$, konstante Glieder besitzen, während $H(u_1)$ nach (15) für $t=\tau$, $p_\rho=\pi_\rho$, $u_1=0$ verschwindet, also in eine von einem konstanten Gliede freie eindeutige Potenzreihe von $t-\tau, p_\rho-\pi_\rho$ übergeht, so gelangen wir zu einem System von Differentialgleichungen

$$(19)\quad \begin{cases} \dfrac{dp_\rho}{dt} = \dfrac{\mathfrak{P}_\rho^{(1)} q_1 + \mathfrak{P}_\rho^{(2)} q_2 + \dots + \mathfrak{P}_\rho^{(\mu)} q_\mu}{\mathfrak{P}} & (\rho = 1, 2, \dots \mu) \\ \dfrac{dq_\rho}{dt} = \dfrac{\mathfrak{P}_\rho^{(11)} q_1^2 + \dots + \mathfrak{P}_\rho^{(\mu\mu)} q_\mu^2 + \mathfrak{P}_\rho^{(12)} q_1 q_2 + \dots + \mathfrak{P}_\rho^{(\mu-1\,\mu)} q_{\mu-1} q_\mu + \mathfrak{P}_\rho^{(0)}}{\mathfrak{P}}, \end{cases}$$

worin die $\mathfrak{P}_\rho$ eindeutige Potenzreihen von $t-\tau, p_\rho-\pi_\rho$ sind, und die Potenzreihe $\mathfrak{P}$ kein von diesen Differenzen freies Glied enthält.

Nun ist aber leicht zu sehen, daß in der Entwicklung der rechten Seiten der 2μ ersten Differentialgleichungen (18) nach Potenzen von $t-\tau, p_\rho-\pi_\rho, q_\rho-\varkappa_\rho, u_1$ die von diesen Differenzen freien Glieder, da nach (17)

$$(20)\qquad \left(\frac{\partial K(u_1)}{\partial a}\right)_{t=\tau,\, p_\varrho=\pi_\varrho,\, u_1=0} = \left(\frac{\partial g_1}{\partial a}\right)_{t=\tau,\, p_\varrho=\pi_\varrho}$$

ist, durch die Ausdrücke

$$(21)\quad \begin{cases} C_\rho^{(1)} = \sum\limits_{\sigma=1,2,\ldots\mu} \left(\dfrac{\partial g_1}{\partial a_{\rho\sigma}^{(0)}}\right)_{\tau,\pi_1,\ldots\pi_\mu} \varkappa_\sigma & (\rho=1,2,\ldots\mu) \\ C_\rho^{(2)} = \frac{1}{2}\sum\limits_{\sigma,\sigma_1=1,2,\ldots\mu} \left(\dfrac{\partial g_1}{\partial a_{\sigma\sigma_1}^{(\rho)}}\right)_{\tau,\pi_1,\ldots\pi_\mu} \varkappa_\sigma \varkappa_{\sigma_1} - \left(\dfrac{\partial g_1}{\partial a^{(\rho)}}\right)_{\tau,\pi_1,\ldots\pi_\mu} \end{cases}$$

dargestellt werden, und sich daher nach Substitution der von einem konstanten Gliede freien Reihenentwicklung von u_1 nach den angegebenen Differenzen für die von den Differenzen $t-\tau$, $p_1-\pi_1, \ldots q_1-\varkappa_1, \ldots$ freien Glieder der Zähler der rechten Seiten der Differentialgleichungen (19) dieselben Werte (21) ergeben, die, weil g_1 eine lineare Funktion der a ist, von diesen willkürlichen Konstanten unabhängig sind und sich vermöge der aus (4), (5) und (13) hervorgehenden Beziehungen unmittelbar durch die Δ und die Kräftefunktion ausdrücken lassen.

Ist nun eine der Konstanten (21), z. B. $C^{(1)}$, von Null verschieden, und bildet man das Differentialgleichungssystem

$$(22)\quad \begin{cases} \dfrac{dt}{dp_1} = \dfrac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{P}_1^{(1)} q_1 + \mathfrak{P}_1^{(2)} q_2 + \cdots + \mathfrak{P}_1^{(\mu)} q_\mu} \\ \dfrac{dp_\sigma}{dp_1} = \dfrac{\mathfrak{P}_\sigma^{(1)} q_1 + \mathfrak{P}_\sigma^{(2)} q_2 + \cdots + \mathfrak{P}_\sigma^{(\mu)} q_\mu}{\mathfrak{P}_1^{(1)} q_1 + \mathfrak{P}_1^{(2)} q_2 + \cdots + \mathfrak{P}_1^{(\mu)} q_\mu} & (\sigma=2,3,\ldots\mu) \\ \dfrac{dq_\rho}{dp_1} = \dfrac{\mathfrak{P}_\rho^{(11)} q_1^2 + \cdots + \mathfrak{P}_\rho^{(\mu\mu)} q_\mu^2 + \mathfrak{P}_\rho^{(12)} q_1 q_2 + \cdots + \mathfrak{P}_\rho^{(0)}}{\mathfrak{P}_1^{(1)} q_1 + \mathfrak{P}_1^{(2)} q_2 + \cdots + \mathfrak{P}_1^{(\mu)} q_\mu} & (\rho=1,2,\ldots\mu), \end{cases}$$

so werden sich die rechten Seiten dieser Differentialgleichungen mit der unabhängigen Variabeln p_1 und den abhängigen Variabeln t, p_σ und q_ρ in eindeutige Potenzreihen von $p_1-\pi_1$, $t-\tau$, $p_\sigma-\pi_\sigma$, $q_\rho-\varkappa_\rho$ entwickeln, und somit t, p_σ, q_ϱ als eindeutige Potenzreihen

von $p_1-\pi_1$ darstellen lassen, wenn nicht die Entwicklung aller rechten Seiten der Differentialgleichungen (22) für das Wertesystem $\tau, \pi_2, \ldots \pi_\mu, \varkappa_1, \ldots \varkappa_\mu$ für jeden Wert von p_1 verschwindet und somit konstante Integrale liefert. Wenn aber

$$t-\tau = a_n(p_1-\pi_1)^n + \cdots, \quad \text{also} \quad p_1-\pi_1 = a_n^{-\frac{1}{n}}(t-\tau)^{\frac{1}{n}} + \cdots$$

ist, so werden sich auch alle p und q in Reihen entwickeln lassen, welche nach positiven steigenden ganzen Potenzen von $(t-\tau)^{\frac{1}{n}}$ fortschreiten. Hat jedoch keine der Konstanten (21) einen von Null verschiedenen Wert, so ist die Untersuchung auf das Differentialgleichungssystem (19) reduziert, worin die $\mathfrak{P}_\rho$ und $\mathfrak{P}$ eindeutige Potenzreihen von $t-\tau, p_\rho-\pi_\rho$ sind, und die Entwicklungen der Zähler und des Nenners der rechten Seiten der Differentialgleichungen nach steigenden Potenzen von $t-\tau, p_\rho-\pi_\rho, q_\rho-\varkappa_\rho$ keine konstanten Glieder besitzen, also in den früheren Bezeichnungen

$$(\mathfrak{P}) = 0, \quad (\mathfrak{P}_\rho^{(1)})\varkappa_1 + \cdots + (\mathfrak{P}_\rho^{(\mu)})\varkappa_\mu = 0,$$
$$(\mathfrak{P}_\rho^{(11)})\varkappa_1^2 + \cdots + (\mathfrak{P}_\rho^{(\mu\mu)})\varkappa_\mu^2 + (\mathfrak{P}_\rho^{(12)})\varkappa_1\varkappa_2 + \cdots + (\mathfrak{P}_\rho^{(\mu-1\,\mu)})\varkappa_{\mu-1}\varkappa_\mu + (\mathfrak{P}_\rho^{(0)}) = 0$$

sind, und es handelt sich um die Untersuchung der Integrale p_ρ und q_ρ in der Umgebung von $t=\tau$, wenn sie die Werte π_ρ und $\varkappa_\rho$ für diesen Wert von t annehmen sollen — worauf wir später wieder zurückkommen.

Ist $\bar{v}_1$ eine endliche, aber mehrfache Lösung der Gleichung (9), bestehen also die Gleichungen

$$(23) \quad G(v_1, \tau, \pi_1, \ldots \pi_\mu, a)_{\bar{v}_1} = 0, \quad \left(\frac{\partial G(v_1, \tau, \pi_1, \ldots \pi_\mu, a)}{\partial v_1}\right)_{\bar{v}_1} = 0$$

und sind, wie oben gezeigt, die Ausdrücke

$$\Delta_{\alpha\beta}^{(1)}, \quad \frac{\partial \Delta_{\alpha\beta}^{(1)}}{\partial p_\rho}, \quad \frac{\partial U^{(1)}}{\partial p_\rho}$$

für $t=\tau$, $p_\rho=\pi_\rho$ endlich, so folgt aus (7), daß für ebendiese Werte die Ausdrücke

$$\frac{\partial G}{\partial a^{(0)}_{\alpha\beta}}, \quad \frac{\partial G}{\partial a^{(\rho)}_{\alpha\beta}}, \quad \frac{\partial G}{\partial a^{(\rho)}}$$

den Wert Null annehmen müssen, und daß sich somit das Differentialgleichungssystem (8) in die Form setzen läßt

$$(24)\quad \left|\begin{aligned} \frac{dp_\rho}{dt} &= \frac{g^{(1)}_\rho q_1 + g^{(2)}_\rho q_2 + \cdots + g^{(\mu)}_\rho q_\mu}{g} \\ \frac{dq_\rho}{dt} &= \frac{g^{(11)}_\rho q_1^2 + \cdots + g^{(\mu\mu)}_\rho q_\mu^2 + g^{(12)}_\rho q_1 q_2 + \cdots + g^{(\mu-1\,\mu)}_\rho q_{\mu-1} q_\mu + g^{(0)}_\rho}{g} \\ \frac{dv_1}{dt} &= \frac{1}{g}\left[g^{(0)} + \left(g^{(1)}\frac{g^{(1)}_1}{g} + \cdots + g^{(\mu)}\frac{g^{(1)}_\mu}{g}\right)q_1 + \cdots \right. \\ &\qquad \left. + \left(g^{(1)}\frac{g^{(\mu)}_1}{g} + \cdots + g^{(\mu)}\frac{g^{(\mu)}_\mu}{g}\right)q_\mu\right] = \frac{V_1}{g}, \end{aligned}\right.$$

worin die g sämtlich ganze Funktionen von $v_1-\bar{v}_1$, $t-\tau$, $p_\rho-\pi_\rho$ sind, von denen alle — im allgemeinen von den Funktionen $g^{(0)}$, $g^{(1)}, \ldots g^{(\mu)}$ abgesehen — keine konstanten Glieder enthalten, also für $v_1=\bar{v}_1$, $t=\tau$, $p_\rho=\pi_\rho$ verschwinden, und dasselbe für die Zähler der rechten Seiten der 2μ ersten Differentialgleichungen unabhängig von den Anfangswerten $\varkappa_\rho$ der q_ρ stattfindet; es werden sich daher die Koeffizienten der q auf den rechten Seiten eben dieser Differentialgleichungen, weil sich wegen des endlichen Wertes von $\bar{v}_1$ die Funktionen $\frac{g^{(\alpha)}_\rho}{g}$, $\frac{g^{(\alpha\beta)}_\rho}{g}$, $\frac{g^{(0)}_\rho}{g}$, welche nach (7) für die bezeichneten Werte ebenfalls endliche Werte annehmen, als rationale Funktionen von $v_1-\bar{v}_1$, $t-\tau$, $p_\rho-\pi_\rho$ in eindeutige Potenzreihen dieser Differenzen entwickeln lassen, auch die rechten Seiten selbst sich als eindeutige Potenzreihen der Differenzen $v_1-\bar{v}_1$, $t-\tau$, $p_\rho-\pi_\rho$, $q_\rho-\varkappa_\rho$ ergeben, deren konstante Glieder durch die Ausdrücke

$$\left(\frac{g_\rho^{(1)}}{g}\right)\varkappa_1+\left(\frac{g_\rho^{(2)}}{g}\right)\varkappa_2+\cdots+\left(\frac{g_\rho^{(\mu)}}{g}\right)\varkappa_\mu$$

$$\left(\frac{g_\rho^{(11)}}{g}\right)\varkappa_1^2+\cdots+\left(\frac{g_\rho^{(\mu\mu)}}{g}\right)\varkappa_\mu^2+\left(\frac{g_\rho^{(12)}}{g}\right)\varkappa_1\varkappa_2+\cdots+\left(\frac{g_\rho^{(\mu-1\,\mu)}}{g}\right)\varkappa_{\mu-1}\varkappa_\mu+\left(\frac{g_\rho^{(0)}}{g}\right)$$

dargestellt werden, und worin die Entwicklungen selbst die Differenz $q_\rho-\varkappa_\rho$ nur im ersten resp. im zweiten Grade enthalten. Was jedoch die letzte der Differentialgleichungen (24) betrifft, so ist unmittelbar zu sehen, daß sich wieder der Zähler V_1 der rechten Seite als eindeutige Potenzreihe der Differenzen $v_1-\bar{v}_1$, $t-\tau$, $p_\rho-\pi_\rho$, $q_\rho-\varkappa_\rho$ darstellen läßt, welche für das bezeichnete Wertesystem einen endlichen, im allgemeinen von Null verschiedenen Wert annehmen wird. In *diesem* Falle wird man dem Differentialgleichungssystem (24) die Form geben können

$$(25)\quad\left|\begin{array}{l}\dfrac{dt}{dv_1}=\dfrac{g}{V_1}\\[2ex]\dfrac{dp_\rho}{dv_1}=\dfrac{g_\rho^{(1)}q_1+g_\rho^{(2)}q_2+\cdots+g_\rho^{(\mu)}q_\mu}{V_1}\qquad(\rho=1,2,\ldots\mu)\\[2ex]\dfrac{dq_\rho}{dv_1}=\dfrac{g_\rho^{(11)}q_1^2+\cdots+g_\rho^{(\mu\mu)}q_\mu^2+g_\rho^{(12)}q_1q_2+\cdots+g_\rho^{(\mu-1\,\mu)}q_{\mu-1}q_\mu+g_\rho^{(0)}}{V_1},\end{array}\right.$$

und es werden die rechten Seiten dieser Differentialgleichungen, weil (V_1) endlich und von Null verschieden, in eindeutige Potenzreihen nach jenen Differenzen entwickelbar sein, welche vermöge der vorher angegebenen Eigenschaften der g-Funktionen keine konstanten Glieder haben. Besitzen diese Entwicklungen alle oder zum Teil nur von der Differenz $v_1-\bar{v}_1$ abhängige Glieder – anderenfalls würde das System wieder konstante Integrale haben –, dann werden sich $t-\tau$, $p_\rho-\pi_\rho$, $q_\rho-\varkappa_\rho$ als eindeutige Potenzreihen von $v_1-\bar{v}_1$ darstellen lassen, und daher wieder – nach einem ähnlichen Schlusse wie oben – $v_1-\bar{v}_1$, $p_\rho-\pi_\rho$, $q_\rho-\varkappa_\rho$ sich in Reihen entwickeln lassen, welche nach positiven

steigenden ganzen Potenzen von $(t-\tau)^{\frac{1}{n}}$ fortschreiten, worin n eine positive ganze Zahl ist.

Ein endlicher, von Null verschiedener Wert von V_1, wie wir ihn eben angenommen haben, würde aber vermöge der Beziehung

$$\left(\frac{dv_1}{dt}\right)\left(\frac{\partial G}{\partial v_1}\right) = \left(\frac{dv_1}{dt}\right)(g) = (V_1),$$

worin die eingeklammerten Größen die Werte derselben für $v_1 = \bar{v}_1$, $t = \tau$, $p_\rho = \pi_\rho$, $q_\rho = \varkappa_\rho$ bedeuten, erfordern, daß $\left(\frac{dv_1}{dt}\right)$ unendlich wird, und es müßte daher nach (4), da die Werte von $\left(\frac{dp_\rho}{dt}\right)$ endlich sind, einer der zweiten nach den Parametern p_ρ genommenen partiellen Differentialquotienten der Δ und der Kräftefunktion oder einer der zweiten nach den Parametern und der Zeit genommenen partiellen Differentialquotienten der letzteren für das Wertesystem $t = \tau$, $p_\rho = \pi_\rho$ unendlich groß sein. Da aber $\bar{v}_1$ eine mehrfache, aber endliche Lösung der Gleichung $G = 0$ sein sollte, also

$$(\Delta_{\alpha\beta}),\ \left(\frac{\partial \Delta_{\alpha\beta}}{\partial p_\rho}\right),\ \left(\frac{\partial U}{\partial p_\rho}\right)$$

nicht unendlich groß sein durften, so wird für die Annahme, daß die Größen

$$(\Delta_{\alpha\beta}),\ \left(\frac{\partial \Delta_{\alpha\beta}}{\partial p_\rho}\right),\ \left(\frac{\partial^2 \Delta_{\alpha\beta}}{\partial p_\rho \partial p_\sigma}\right),\ \left(\frac{\partial U}{\partial p_\rho}\right),\ \left(\frac{\partial^2 U}{\partial p_\rho \partial p_\sigma}\right),\ \left(\frac{\partial^2 U}{\partial p_\rho \partial t}\right)$$

für das Wertesystem $t = \tau$, $p_\rho = \pi_\rho$ endlich sein sollen, oder daß in den Gleichungen (13)

$$\gamma_0^{(\alpha\beta)}(\pi_1, \ldots \pi_\mu) \neq 0,\ \gamma_{0\rho}^{(\alpha\beta)}(\pi_1, \ldots \pi_\mu) \neq 0,\ \gamma_{0\rho}(\pi_1, \ldots \pi_\mu, \tau) \neq 0,$$

und daß die Diskriminanten dieser Gleichungen für das gegebene Wertesystem nicht verschwinden, der Zähler V_1 der letzten Diffe-

rentialgleichung (24) für jenes Wertesystem nicht einen endlichen, von Null verschiedenen Wert annehmen können, welches auch die Anfangswerte der q sein mögen, da die Bedingungen nur von den Werten τ und π_ρ abhängen – aber er wird auch Null sein können, wenn die eben bezeichneten zweiten partiellen Ableitungen für das gegebene Wertesystem unendlich werden.

Hat (V_1) jedoch den Wert Null, läßt sich also V_1 in eine eindeutige Potenzreihe der Differenzen $v_1-\bar{v}_1$, $t-\tau$, $p_\rho-\pi_\rho$, $q_\rho-\varkappa_\rho$ entwickeln, deren konstantes Anfangsglied wieder den Wert Null hat, so wird die Untersuchung auf ein Differentialgleichungssystem der Form (24), worin

$$(26)\quad \left|\begin{array}{l} (g^{(0)}) + \left((g^{(1)})\left(\frac{g_1^{(1)}}{g}\right) + (g^{(2)})\left(\frac{g_2^{(1)}}{g}\right) + \cdots + (g^{(\mu)})\left(\frac{g_\mu^{(1)}}{g}\right)\right)\varkappa_1 + \cdots \\ \qquad + \left((g^{(1)})\left(\frac{g_1^{(\mu)}}{g}\right) + \cdots + (g^{(\mu)})\left(\frac{g_\mu^{(\mu)}}{g}\right)\right)\varkappa_\mu = 0 \end{array}\right.$$

ist, wenn die eingeklammerten Ausdrücke die Werte derselben für $v_1=\bar{v}_1$, $t=\tau$, $p_\rho=\pi_\rho$ darstellen, oder auch auf das System

$$(27)\quad \left|\begin{array}{ll} \frac{dp_\rho}{dt} = \mathfrak{P}_\rho^{(1)} q_1 + \mathfrak{P}_\rho^{(2)} q_2 + \cdots + \mathfrak{P}_\rho^{(\mu)} q_\mu & (\rho = 1, 2, \ldots \mu) \\ \frac{dq_\rho}{dt} = \mathfrak{P}_\rho^{(11)} q_1^2 + \cdots + \mathfrak{P}_\rho^{(\mu\mu)} q_\mu^2 + \mathfrak{P}_\rho^{(12)} q_1 q_2 + \cdots + \mathfrak{P}_\rho^{(\mu-1\,\mu)} q_{\mu-1} q_\mu + \mathfrak{P}^{(\rho)} & \\ \frac{dv_1}{dt} = \frac{\mathfrak{P}^{(1)} q_1 + \mathfrak{P}^{(2)} q_2 + \cdots + \mathfrak{P}^{(\mu)} q_\mu + \mathfrak{P}^{(0)}}{\mathfrak{P}} & \end{array}\right.$$

zurückgeführt sein, worin die $\mathfrak{P}$ sämtlich eindeutige Potenzreihen der Differenzen $v_1-\bar{v}_1$, $t-\tau$, $p_\rho-\pi_\rho$ bedeuten, welche im allgemeinen mit Ausnahme des Nenners $\mathfrak{P}$ konstante Glieder enthalten können, und das konstante Glied des Zählers der rechten Seite der $2\mu+1^{\text{ten}}$ Differentialgleichung nach (26) verschwindet. Wird $(V_1)=0$, und ist die Annahme erfüllt, daß die ersten

und zweiten partiellen Differentialquotienten der Δ und U für das bezeichnete Wertesystem nicht unendlich werden, also nach (4) $\left(\frac{\partial v_1}{\partial t}\right)$ und $\left(\frac{\partial v_1}{\partial p_\rho}\right)$ endliche Werte annehmen, so folgt, daß, weil nach (5)

$$\left(\frac{\partial G}{\partial t}\right)_{v_1} = -\left(\frac{\partial G}{\partial v}\right)_{v_1} \frac{\partial v_1}{\partial t}, \quad \left(\frac{\partial G}{\partial p_\rho}\right)_{v_1} = -\left(\frac{\partial G}{\partial v}\right)_{v_1} \frac{\partial v_1}{\partial p_\rho}$$

ist, für das gegebene Wertesystem $t = \tau$, $v_1 = \bar{v}_1$, $p_\rho = \pi_\rho$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial t}\right) = 0, \quad \left(\frac{\partial G}{\partial p_\rho}\right) = 0, \text{ oder in (24): } \left(g^{(0)}\right) = 0, \quad \left(g^{(\rho)}\right) = 0$$

sein muß, und daß umgekehrt, wenn diese Bedingungen erfüllt sind, nach (26) auch $(V_1) = 0$ sein wird, und zwar unabhängig von den Anfangswerten $\varkappa_\rho$ der q_ρ.

Ist endlich $\bar{v}_1$ eine mehrfache, aber unendlich große Lösung der Gleichung $(G) = 0$, so ist wieder genau wie oben mittels der Substitution $v = \frac{1}{u}$ zu ersehen, daß sich das Differentialgleichungssystem (24) in die Form transformieren läßt

$$(28)\begin{cases} \dfrac{dp_\rho}{dt} = \dfrac{\mathfrak{P}_\rho^{(1)} q_1 + \mathfrak{P}_\rho^{(2)} q_2 + \cdots + \mathfrak{P}_\rho^{(\mu)} q_\mu}{\mathfrak{P}} & (\rho = 1, 2, \ldots \mu) \\ \dfrac{dq_\rho}{dt} = \dfrac{\mathfrak{P}_\rho^{(11)} q_1^2 + \cdots + \mathfrak{P}_\rho^{(\mu\mu)} q_\mu^2 + \mathfrak{P}_\rho^{(12)} q_1 q_2 + \cdots + \mathfrak{P}_\rho^{(\mu-1\,\mu)} q_{\mu-1} q_\mu + \mathfrak{P}^{(\rho)}}{\mathfrak{P}} & \\ \dfrac{du_1}{dt} = \dfrac{\mathfrak{P}^{(1)} q_1 + \mathfrak{P}^{(2)} q_2 + \cdots + \mathfrak{P}^{(\mu)} q_\mu + \mathfrak{P}^{(0)}}{\mathfrak{P}}, & \end{cases}$$

worin die $\mathfrak{P}$ rationale Funktionen von $u_1, t-\tau, p_\rho - \pi_\rho$ sind, und, wenn man von den Fällen absieht, für welche wieder der CAUCHYsche Satz unmittelbar zur Feststellung der Beschaffenheit der Integrale hin-

reicht, angenommen werden darf, daß sowohl die Zähler als auch der Nenner der rechten Seiten dieser Differentialgleichungen eindeutige Potenzreihen von $t-\tau$, $p_\rho-\pi_\rho$, $q_\rho-\varkappa_\rho$, u_1 sind, welche für $t=\tau$, $p_\rho=\pi_\rho$, $q_\rho=\varkappa_\rho$, $u_1=0$ verschwinden.

Fassen wir nunmehr die gefundenen Resultate zusammen, so ergibt sich, wenn wir von den oben behandelten, durch den CAUCHYschen Satz unmittelbar zu erledigenden Fällen absehen, daß zum Zwecke der Untersuchung der Integrale p_ρ und q_ρ des HAMILTONschen Differentialgleichungssystems $2\mu^{\text{ter}}$ Ordnung in der Umgebung von $t=\tau$, wofür die Integrale die Werte π_ρ und $\varkappa_\rho$ annehmen sollen, die nachfolgenden Differentialgleichungssysteme zugrunde gelegt werden können:

I. Wenn $\bar{v}_1$ eine einfache Lösung der Gleichung $G(v_1, \tau, \pi_1, \dots \pi_\mu, a) = 0$ ist, das System $2\mu^{\text{ter}}$ Ordnung

$$(29)\quad \begin{cases} \dfrac{dp_\rho}{dt} = \dfrac{\mathfrak{P}_\rho^{(1)} q_1 + \mathfrak{P}_\rho^{(2)} q_2 + \cdots + \mathfrak{P}_\rho^{(\mu)} q_\mu}{\mathfrak{P}} & (\rho = 1, 2, \dots \mu) \\ \dfrac{dq_\rho}{dt} = \dfrac{\mathfrak{P}_\rho^{(11)} q_1^2 + \cdots + \mathfrak{P}_\rho^{(\mu\mu)} q_\mu^2 + \mathfrak{P}_\rho^{(12)} q_1 q_2 + \cdots + \mathfrak{P}_\rho^{(\mu-1\,\mu)} q_{\mu-1} q_\mu + \mathfrak{P}_\rho^{(0)}}{\mathfrak{P}}, \end{cases}$$

worin,

1. wenn $\bar{v}_1$ eine einfache endliche Lösung von $G=0$ ist,

die Quotienten

$$\frac{\mathfrak{P}_\rho^{(\alpha)}}{\mathfrak{P}}, \quad \frac{\mathfrak{P}_\rho^{(\alpha\beta)}}{\mathfrak{P}}, \quad \frac{\mathfrak{P}_\rho^{(0)}}{\mathfrak{P}}$$

eindeutige Potenzreihen von $t-\tau$, $p_1-\pi_1, \dots p_\mu-\pi_\mu$ sind, woraus sich dann nach dem CAUCHYschen Satze unmittelbar ergibt, daß p_ρ und q_ρ selbst eindeutige Potenzreihen von $t-\tau$ sind;

2. wenn $\bar{v}_1$ eine einfache unendlich große Lösung ist,

$\mathfrak{P}_\rho^{(\alpha)}$, $\mathfrak{P}_\rho^{(\alpha\beta)}$, $\mathfrak{P}_\rho^{(0)}$ eindeutige Potenzreihen von $t-\tau$, $p_\rho-\pi_\rho$ sind, und die Entwicklungen aller Zähler der rechten Seiten nach positiven

steigenden ganzen Potenzen von $t-\tau$, $p_1-\pi_1, \dots p_\mu-\pi_\mu$, $q_1-\varkappa_1, \dots q_\mu-\varkappa_\mu$, sowie die Entwicklung des gemeinsamen Nenners $\mathfrak{P}$ nach Potenzen von $t-\tau, p_1-\pi_1, \dots p_\mu-\pi_\mu$ keine konstanten Glieder besitzen, oder in den früheren Bezeichnungen

$$(\mathfrak{P})=0,\ (\mathfrak{P}_\rho^{(1)})\varkappa_1+\cdots+(\mathfrak{P}_\rho^{(\mu)})\varkappa_\mu=0,\ (\mathfrak{P}_\rho^{(11)})\varkappa_1^2+\cdots+(\mathfrak{P}_\rho^{(12)})\varkappa_1\varkappa_2+\cdots+(\mathfrak{P}_\rho^{(0)})=0$$

ist.

II. Wenn $\bar{v}_1$ eine mehrfache Lösung der Gleichung $G=0$ ist, das Differentialgleichungssystem $2\mu+1^{\text{ter}}$ Ordnung

$$(30)\quad \left|\begin{array}{l} \dfrac{dp_\rho}{dt}=\dfrac{\mathfrak{P}_\rho^{(1)}q_1+\mathfrak{P}_\rho^{(2)}q_2+\cdots-\mathfrak{P}_\rho^{(\mu)}q_\mu}{\mathfrak{P}} \qquad (\rho=1,2,\dots\mu) \\[2ex] \dfrac{dq_\rho}{dt}=\dfrac{-\mathfrak{P}_\rho^{(11)}q_1^2+\cdots+\mathfrak{P}_\rho^{(\mu\mu)}q_\mu^2-\mathfrak{P}_\rho^{(12)}q_1q_2+\cdots-\mathfrak{P}_\rho^{(\mu-1\,\mu)}q_{\mu-1}q_\mu+\mathfrak{P}_\rho^{(0)}}{\mathfrak{P}} \\[2ex] \dfrac{dv_1}{dt}=\dfrac{1}{\mathfrak{P}}\left|\mathfrak{P}_0+\left(\mathfrak{P}_1\dfrac{\mathfrak{P}_1^{(1)}}{\mathfrak{P}}+\mathfrak{P}_2\dfrac{\mathfrak{P}_2^{(1)}}{\mathfrak{P}}+\cdots+\mathfrak{P}_\mu\dfrac{\mathfrak{P}_\mu^{(1)}}{\mathfrak{P}}\right)q_1+\cdots\right. \\ \qquad\qquad \left.+\left(\mathfrak{P}_1\dfrac{\mathfrak{P}_1^{(\mu)}}{\mathfrak{P}}+\cdots+\mathfrak{P}_\mu\dfrac{\mathfrak{P}_\mu^{(\mu)}}{\mathfrak{P}}\right)q_\mu\right| , \end{array}\right.$$

worin,

1. wenn $\bar{v}_1$ eine mehrfache endliche Lösung von $G=0$ ist,

die sämtlichen Funktionen $\mathfrak{P}$ ganze Funktionen von $t-\tau$, $p_\rho-\pi_\rho$, $v_1-\bar{v}_1$ sind, von welchen $\mathfrak{P}_\rho^{(\alpha)}$, $\mathfrak{P}_\rho^{(\alpha\beta)}$, $\mathfrak{P}_\rho^{(0)}$ für $t=\tau$, $p_\rho=\pi_\rho$, $v_1=\bar{v}_1$ den Wert Null annehmen, so daß die Zähler der rechten Seiten der 2μ ersten Differentialgleichungen für eben jene Werte unabhängig von den Werten $\varkappa$ der q Null werden, die Quotienten

$$\frac{\mathfrak{P}_\rho^{(\alpha)}}{\mathfrak{P}}\cdot\frac{\mathfrak{P}_\rho^{(\alpha\beta)}}{\mathfrak{P}}\cdot\frac{\mathfrak{P}_\rho^{(0)}}{\mathfrak{P}}$$

eindeutige Potenzreihen der bezeichneten Differenzen sind, und das konstante Glied des Zählers der rechten Seite der $2\mu+1^{\text{ten}}$ Differentialgleichung verschwindet; während,

2. wenn $\bar{v}_1$ eine mehrfache unendlich große Lösung von $G=0$ ist,

das System (30) durch die Substitution $v=\frac{1}{u}$ in das Differentialgleichungssystem übergeht

$$(31)\quad \begin{cases} \dfrac{dp_\rho}{dt} = \dfrac{\mathfrak{P}_\rho^{(1)} q_1 + \mathfrak{P}_\rho^{(2)} q_2 + \cdots + \mathfrak{P}_\rho^{(\mu)} q_\mu}{\mathfrak{P}} & (\rho = 1, 2, \ldots \mu) \\ \dfrac{dq_\rho}{dt} = \dfrac{\mathfrak{P}_\rho^{(11)} q_1^2 + \cdots + \mathfrak{P}_\rho^{(\mu\mu)} q_\mu^2 + \mathfrak{P}_\rho^{(12)} q_1 q_2 + \cdots + \mathfrak{P}_\rho^{(0)}}{\mathfrak{P}} & \\ \dfrac{du_1}{dt} = \dfrac{\mathfrak{P}^{(1)} q_1 + \mathfrak{P}^{(2)} q_2 + \cdots + \mathfrak{P}^{(\mu)} q_\mu + \mathfrak{P}^{(0)}}{\mathfrak{P}}, & \end{cases}$$

worin die sämtlichen Funktionen $\mathfrak{P}$ in eindeutige Potenzreihen von $t-\tau, p_\rho-\pi_\rho, u_1$ entwickelbar sind, sowohl die Zähler als auch der Nenner der rechten Seiten der Differentialgleichungen für $t=\tau, p_\rho=\pi_\rho, q_\rho=\varkappa_\rho, u_1=0$ verschwinden und die Integrale p_ρ, q_ρ, u_1 zu untersuchen sind, welche für $t=\tau$ die Werte $\pi_\rho, \varkappa_\rho, 0$ annehmen.

Setzt man nunmehr

$$t-\tau=t', \; p_\rho-\pi_\rho=p_\rho', \; q_\rho-\varkappa_\rho=q_\rho', \; v_1-\bar{v}_1=v_1', \text{ resp. } u_1=u_1',$$

so ist somit die Untersuchung der Integrale der HAMILTONschen Differentialgleichungen – von den durch den CAUCHYschen Satz unmittelbar zu erledigenden Fällen abgesehen – auf die Ermittlung der Eigenschaften der für $t=0$ selbst verschwindenden Integrale für Differentialgleichungssysteme paarer Ordnung von der Form reduziert

$$(32)\quad \begin{cases} \dfrac{dp_\rho}{dt} = \dfrac{\mathfrak{P}_\rho^{(0)} + \mathfrak{P}_\rho^{(1)} q_1 + \mathfrak{P}_\rho^{(2)} q_2 + \cdots + \mathfrak{P}_\rho^{(\mu)} q_\mu}{\mathfrak{P}} & (\rho = 1, 2, \ldots \mu) \\ \dfrac{dq_\rho}{dt} = \dfrac{1}{\mathfrak{P}} \left[\mathfrak{P}_\rho^{(00)} + \mathfrak{P}_\rho^{(10)} q_1 + \cdots + \mathfrak{P}_\rho^{(\mu 0)} q_\mu + \mathfrak{P}_\rho^{(11)} q_1^2 + \cdots + \mathfrak{P}_\rho^{(\mu\mu)} q_\mu^2 \right. & \\ \qquad \left. + \mathfrak{P}_\rho^{(12)} q_1 q_2 + \cdots + \mathfrak{P}_\rho^{(\mu-1\,\mu)} q_{\mu-1} q_\mu \right], & \end{cases}$$

worin die $\mathfrak{P}$ eindeutige Potenzreihen von t und p_ρ sind, von denen die Funktionen $\mathfrak{P}_\rho^{(0)}, \mathfrak{P}_\rho^{(00)}$ und $\mathfrak{P}$ keine konstanten Glieder besitzen, oder auf ein solches unpaarer Ordnung

$$(33)\quad \begin{cases} \dfrac{dp_\rho}{dt} = \dfrac{\mathfrak{P}_\rho^{(0)} + \mathfrak{P}_\rho^{(1)} q_1 + \mathfrak{P}_\rho^{(2)} q_2 + \cdots + \mathfrak{P}_\rho^{(\mu)} q_\mu}{\mathfrak{P}} \\ \dfrac{dv_1}{dt} = \dfrac{\mathfrak{P}^{(0)} + \mathfrak{P}^{(1)} q_1 + \mathfrak{P}^{(2)} q_2 + \cdots + \mathfrak{P}^{(\mu)} q_\mu}{\mathfrak{P}} \qquad (\rho = 1, 2, \ldots \mu) \\ \dfrac{dq_\rho}{dt} = \dfrac{1}{\mathfrak{P}} \big[\mathfrak{P}_\rho^{(00)} + \mathfrak{P}_\rho^{(10)} q_1 + \cdots + \mathfrak{P}_\rho^{(\mu 0)} q_\mu + \mathfrak{P}_\rho^{(11)} q_1^2 + \cdots + \mathfrak{P}_\rho^{(\mu\mu)} q_\mu^2 \\ \qquad\qquad + \mathfrak{P}_\rho^{(12)} q_1 q_2 \cdots + \mathfrak{P}_\rho^{(\mu-1\,\mu)} q_{\mu-1} q_\mu\big]. \end{cases}$$

worin die $\mathfrak{P}$ eindeutige Potenzreihen von t, p_ρ und v_1 sind, von denen $\mathfrak{P}_\rho^{(0)}, \mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_\rho^{(00)}$ und $\mathfrak{P}$ keine konstanten Glieder besitzen.

Durch Zusammenfassen dieser beiden Fälle eines Differentialgleichungssystems gerader und ungerader Ordnung ist somit die Untersuchung der Integrale des HAMILTONschen Differentialgleichungssystems auf das nachfolgende Problem reduziert:

Ist ein Differentialgleichungssystem $\varkappa+\lambda^{\text{ter}}$ Ordnung mit der unabhängigen Variabeln t und den $\varkappa+\lambda$ abhängigen Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_\varkappa, y_1, y_2, \ldots y_\lambda$, worin $\varkappa \geqq \lambda$, in der Form gegeben

$$(34)\quad \begin{cases} \dfrac{dx_\rho}{dt} = \dfrac{\mathfrak{P}_\rho^{(0)} + \mathfrak{P}_\rho^{(1)} y_1 + \mathfrak{P}_\rho^{(2)} y_2 + \cdots + \mathfrak{P}_\rho^{(\lambda)} y_\lambda}{\mathfrak{P}} \qquad (\rho = 1, 2, \ldots \varkappa) \\ \dfrac{dy_\sigma}{dt} = \dfrac{1}{\mathfrak{P}} \big[\mathfrak{P}_\sigma^{(00)} + \mathfrak{P}_\sigma^{(10)} y_1 + \mathfrak{P}_\sigma^{(20)} y_2 + \cdots + \mathfrak{P}_\sigma^{(\lambda 0)} y_\lambda + \mathfrak{P}_\sigma^{(11)} y_1^2 + \cdots \\ \qquad\qquad + \mathfrak{P}_\sigma^{(\lambda\lambda)} y_\lambda^2 + \mathfrak{P}_\sigma^{(12)} y_1 y_2 + \cdots + \mathfrak{P}_\sigma^{(\lambda-1,\lambda)} y_{\lambda-1} y_\lambda\big] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\sigma = 1, 2, \ldots \lambda), \end{cases}$$

worin die Funktionen $\mathfrak{P}_\rho^{(\varkappa)}, \mathfrak{P}_\sigma^{(\varkappa\beta)}$ und $\mathfrak{P}$ eindeutige Potenzreihen von $t, x_1, x_2, \ldots x_\varkappa$ sind, von denen die Reihen $\mathfrak{P}_\rho^{(0)}, \mathfrak{P}_\sigma^{(00)}$ und $\mathfrak{P}$ keine konstanten Glieder besitzen, also für die Nullwerte dieser Größen ver-

schwinden, so soll die Entwicklung der Integrale x_ρ und y_σ in der Umgebung des Nullpunktes von t untersucht werden, wenn diese für $t=0$ sämtlich den Wert Null annehmen sollen.

10.

Bevor ich mich nun zur Untersuchung der für $t=0$ verschwindenden Integrale x_ρ und y_σ des Differentialgleichungssystems (34) wende, soll eine Bemerkung vorausgeschickt werden, welche sich unmittelbar an die ursprüngliche Form (9.3) der HAMILTONschen Differentialgleichungen anschließt und welche die Integrale betrifft, die für $t=\tau$ die Werte $\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_\rho, \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_\rho$ annehmen sollten.

Wir werden im folgenden sagen, die Integrale p_ρ und q_ρ haben für $t=\tau$ die Werte π_ρ und $\varkappa_\rho$ von der m_ρ^{ten} resp. n_ρ^{ten} Ordnung, wenn

$$\left(\frac{p_\rho-\pi_\rho}{(t-\tau)^{m_\rho}}\right)_{t=\tau} \quad \text{und} \quad \left(\frac{q_\rho-\varkappa_\rho}{(t-\tau)^{n_\rho}}\right)_{t=\tau}$$

endliche Werte annehmen, worin die m_ρ, n_ρ reelle positive Zahlen sind, und, indem wir zunächst den Fall einer unendlich hohen Ordnung ausschließen, soll die Beschaffenheit der endlichen Ordnungszahlen unter der Annahme bestimmter Eigenschaften der Δ und U untersucht werden.

Nehmen wir an, daß die Werte

$$(\Delta_{\alpha\beta}^{(1)}), \left(\frac{\partial \Delta_{\alpha\beta}^{(1)}}{\partial p_\rho}\right), \left(\frac{\partial U^{(1)}}{\partial p_\rho}\right) \qquad (\rho=1,2,\ldots\mu)$$

für das Wertesystem $t=\tau, p_\rho=\pi_\rho$ endliche Werte annehmen – was der Fall sein würde, wenn $(\Delta_{\alpha\beta}^{(1)})$ und $\left(\frac{\partial U^{(1)}}{\partial p_\rho}\right)$ endlich sind und die zu den algebraischen Funktionen $\Delta_{\alpha\beta}^{(1)}$ gehörigen Diskriminanten nicht verschwinden –, dann werden nach den Differentialgleichungen (9.3) $\left(\frac{dp_\rho}{dt}\right)$ und $\left(\frac{dq_\rho}{dt}\right)$ für $t=\tau$ endlich sein und somit die

Ordnungszahlen m_ρ und n_ρ nicht kleiner als 1 sein können, also $=1$ oder >1 sein müssen. Sind dieselben nicht der Einheit gleich und liegen sie zwischen 1 und 2, so müßten $\left(\frac{d^2 p_\rho}{dt^2}\right)$ und $\left(\frac{d^2 q_\rho}{dt^2}\right)$ unendlich groß sein, und es würde daher nach (3) die Annahme, daß nicht nur die ersten, sondern auch die zweiten partiellen Differentialquotienten der Δ und U für das gegebene Wertesystem nicht unendlich groß sein sollen, bedingen, daß die Ordnungszahlen m_ρ und n_ρ gleich 2 oder größer als 2 sein müssen; schließt man so weiter, so folgt,

daß, wenn die sämtlichen partiellen Differentialquotienten der $1^{ten}, 2^{ten}, \ldots w^{ten}$ Ordnung der Funktionen Δ und U für das gegebene Wertesystem endliche Werte annehmen, die Ordnungszahlen m_ρ und n_ρ Zahlen aus der Reihe der positiven ganzen Zahlen $1, 2, 3, \ldots w$ sind oder reelle rationale oder irrationale Zahlen $>w$ oder auch unendlich groß sind.

Um nun zur Bestimmung der Ordnungszahlen m_ρ und n_σ der x_ρ und y_σ für das allgemeinere Differentialgleichungssystem (34) oder

$$(1)\quad \begin{cases} \mathfrak{P}\dfrac{dx_\rho}{dt} = \mathfrak{P}_\rho^{(0)} + \mathfrak{P}_\rho^{(1)} y_1 + \mathfrak{P}_\rho^{(2)} y_2 + \cdots + \mathfrak{P}_\rho^{(\lambda)} y_\lambda \qquad (\rho = 1, 2, \ldots \varkappa) \\ \mathfrak{P}\dfrac{dy_\sigma}{dt} = \mathfrak{P}_\sigma^{(00)} + \mathfrak{P}_\sigma^{(10)} y_1 + \cdots + \mathfrak{P}_\sigma^{(\lambda 0)} y_\lambda + \mathfrak{P}_\sigma^{(11)} y_1^2 + \cdots + \mathfrak{P}_\sigma^{(\lambda-1\,\lambda)} y_{\lambda-1} y_\lambda \\ \qquad\qquad (\varkappa > \lambda) \qquad\qquad (\sigma = 1, 2, \ldots \lambda), \end{cases}$$

in welchem dem $t=0$ die Werte der Integrale $x_\rho = 0$, $y_\sigma = 0$ entsprechen sollen, überzugehen, möge zunächst bemerkt werden, daß, wenn man die aus den unbekannten Ordnungszahlen m_ρ der Größen x_ρ linear und ganzzahlig zusammengesetzten Ordnungszahlen der Potenzreihen $\mathfrak{P}$ mit

$$O, O_\rho^{(0)}, \ldots O_\rho^{(\lambda)}, O_\sigma^{(00)}, \ldots O_\sigma^{(\lambda 0)}, O_\sigma^{(11)} \ldots O_\sigma^{(\lambda-1\,\lambda)}$$

bezeichnet, sich durch Gleichsetzen der Ordnungszahlen der beiden Seiten der Gleichungen (34) für die $\varkappa+\lambda$ Ordnungszahlen m_ρ und

n_σ die $\varkappa+\lambda$ in diesen linear und ganzzahlig zusammengesetzten Bestimmungsgleichungen ergeben

$$(2)\quad \begin{cases} O+m_\rho-1=\left(O_\rho^{(0)}, O_\rho^{(1)}+n_1, O_\rho^{(2)}+n_2, \ldots O_\rho^{(\lambda)}+n_\lambda\right) & (\rho=1,2,\ldots\varkappa) \\ O+n_\sigma-1=\left(O_\sigma^{(00)}, O_\sigma^{(10)}+n_1, \ldots O_\sigma^{(\lambda 0)}+n_\sigma,\right. & \\ \qquad\qquad \left. O_\sigma^{(11)}+2n_1, \ldots O_\sigma^{(\lambda-1\,\lambda)}+n_{\lambda-1}+n_\lambda\right) & (\sigma=1,2,\ldots\lambda), \end{cases}$$

worin die beiden in Klammern geschlossenen Größen die Ordnungszahlen der rechten Seiten der Differentialgleichungen, oder im allgemeinen die kleinste unter den Zahlen

$$O_\rho^{(0)}, O_\rho^{(1)}+n_1, \ldots O_\rho^{(\lambda)}+n_\lambda$$

resp.

$$O_\sigma^{(00)}, O_\sigma^{(10)}+n_1, \ldots O_\sigma^{(11)}+2n_1, \ldots O_\sigma^{(\lambda-1\,\lambda)}+n_{\lambda-1}+n_\lambda \qquad (\sigma=1,2,\ldots\lambda)$$

darstellen, wenn nicht zwei der Potenzreihen dieselbe niedrigste Ordnungszahl besitzen und vermöge spezieller Werte der Koeffizienten der Reihen die entsprechenden Glieder herausfallen. Aus diesen Gleichungen werden sich im allgemeinen, vorausgesetzt, daß es gelungen ist, unter bestimmten Annahmen für die Beziehungen der m_ρ und n_ρ zueinander, die Ordnungszahlen der einzelnen Potenzreihen zu bestimmen, die Ordnungszahlen m_ρ und n_σ als rationale Zahlen ergeben, welche aber auch bei Verschwinden der Determinanten der linearen Bestimmungsgleichungen (2) unbestimmt, irrational oder unendlich groß sein können.

So wird sich in der Differentialgleichung

$$t\frac{dx}{dt}=3\dot{x}+t^4$$

für das für $t=0$ von der Ordnung m verschwindende Integral durch Gleichsetzen der Ordnungszahlen der beiden Seiten der Differentialgleichung, wenn $m\leq 4$ angenommen wird, die identische Gleichung

$$1+m-1=m$$

ergeben, und somit m unbestimmt bleiben, während die Unmöglichkeit der Gleichung $1+m-1=4$ für $m>4$ anzeigt, daß die Differentialgleichung kein in $t=0$ verschwindendes Integral von höherer Ordnung als der 4^{ten} hat; in der Tat werden alle in der Form

$$x = c\,t^3 + t^4$$

dargestellten Integrale von der ganzzahligen Ordnung 3 verschwinden, während nur das für $c=0$ sich ergebende Integral von der 4^{ten} Ordnung Null ist.

Für die Differentialgleichung

$$t\,\frac{dx}{dt} = x \not| 2$$

dagegen, die wiederum für die Ordnungszahl m eine Identität liefert, diese als unbestimmt bleibt. zeigt das allgemeine Integral

$$x = c\,t^{\not| 2},$$

daß kein von einer rationalen Ordnung verschwindendes Integral existiert, da alle von der irrationalen Ordnung $\not| 2$ Null werden.

Endlich liefert die Differentialgleichung

$$t^3\,\frac{dx}{dt} = 2x + 2t^1 - 2t^2$$

für $m<2$ die Bestimmungsgleichung

$$3+m-1=m,$$

also $m=\infty$, während sich für $m>2$ aus der Gleichung $3+m-1=2$ der unmögliche Wert $m=0$ ergibt, außer für das Integral $x=t^2$, für welches t^2 auf der rechten Seite der Differentialgleichung wegfällt, und die Beziehung in $3+m-1=4$, also $m=2$ übergeht; in der Tat liefert das allgemeine Integral

$$x = c\,e^{-t^{-2}} + t^2$$

nur Integrale, welche in $t=0$ von unendlich hoher Ordnung Null werden, von dem partikulären Integral $x=t^2$ abgesehen, welches von der zweiten Ordnung Null wird.

Für den Fall, daß sich für einzelne Werte der m und n negative Zahlen ergeben, werden Integrale von endlicher oder unendlicher Ordnungszahl überhaupt nicht existieren; so liefert die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = x^3 t$$

für m die Bestimmungsgleichung

$$m-1 = 3m+1 \quad \text{oder} \quad m = -1,$$

und in der Tat zeigt das allgemeine Integral

$$x = \frac{1}{\sqrt{c-t^2}},$$

daß die Differentialgleichung mit Ausnahme des dem $c=\infty$ entsprechenden konstanten Integrales $x=0$ kein Integral besitzt, welches für $t=0$ selbst verschwindet.

Um die Zusammensetzung der oben definierten Ordnungszahlen O der Potenzreihe $\mathfrak{P}$, welche kein konstantes Glied besitzt – im entgegengesetzten Falle ist die Ordnungszahl der Potenzreihen Null –, aus den unbekannten Ordnungszahlen m_ρ der Größen x_ρ zu ermitteln, wird man für jeden Posten dieser Potenzreihe

$$a\, t^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_\varkappa^{\alpha_\varkappa}$$

die Ordnungszahl

$$\alpha_0 + \alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2 + \cdots + \alpha_\varkappa m_\varkappa \tag{3}$$

zu bilden und unter allen diesen Ordnungszahlen diejenige auszuwählen haben, welche für beliebige positive Werte von $m_1, m_2, \dots m_\varkappa$ oder für bestimmte Beziehungen unter den letzteren die kleinste ist, vorausgesetzt, daß, wenn mehrere solche Posten kleinster Ordnungszahl existieren, diese vermöge der speziellen Werte der kon-

stanten Koeffizienten nicht aus der Summe herausfallen; die zur Bestimmung der Ordnungszahl O angenommenen Beziehungen zwischen den Ordnungszahlen m_ϱ der x_ϱ müssen dann durch die Auflösungen der linearen Gleichungen (2) erfüllt werden, wenn diese die gesuchten Ordnungszahlen sein sollen.

Wie die Zahlenformen (3) miteinander zu vergleichen sind, möge an dem Falle von Potenzreihen, welche von zwei Variabeln x_1 und x_2 abhängen, näher erläutert werden.

Denkt man sich die von einer Konstanten freie Potenzreihe nach ganzen homogenen Funktionen des ersten, zweiten, dritten usw. Grades von x_1 und x_2 geordnet, so werden die Ordnungszahlen der Posten dieser einzelnen homogenen Funktionen in der Form dargestellt sein

$$\begin{array}{llllll}
m_1 & m_2 & & & & \\
2m_1 & m_1+m_2 & 2m_2 & & & \\
3m_1 & 2m_1+m_2 & m_1+2m_2 & 3m_2 & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\
\varkappa m_1 & (\varkappa-1)m_1+m_2 & (\varkappa-2)m_1+2m_2\ldots & \underline{(\varkappa-\rho)m_1+\rho m_2} & (\varkappa-\rho-1)m_1+(\rho+1)m_2\ldots & \\
(\varkappa+1)m_1 & \varkappa m_1+m_2 & (\varkappa-1)m_1+2m_2\ldots & (\varkappa+1-\rho)m_1+\rho m_2 & (\varkappa+1-\rho-1)m_1+(\rho+1)m_2\ldots & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & ,
\end{array}$$

unter denen nun die kleinste zu suchen ist. Mögen nun die Koeffizienten der ersten $\varkappa-1$ homogenen Funktionen und die der homogenen Funktion $\varkappa^{\text{ten}}$ Grades bis zum Gliede $x_1^{\varkappa-\rho}x_2^{\rho}$ den Wert Null haben, so daß in dem obigen Schema das erste von Null verschiedene Glied $(\varkappa-\rho)m_1+\rho m_2$ ist. Weil jedes Glied des Schemas für willkürliche m_1 und m_2 kleiner ist als alle nach unten folgenden Glieder derselben Vertikalreihe und, unter der Annahme, daß $m_1<m_2$ ist, zugleich kleiner als alle nach rechts folgenden Glieder derselben Horizontalreihe, so kommen bei der Aufsuchung der kleinsten Zahl des Schemas alle Glieder rechts und unterhalb der Zahl $(\varkappa-\rho)m_1+\rho m_2$ nicht mehr in Betracht, und es bleiben sonach mit dieser Zahl nur die Zahlen des nachfolgenden Schemas zu vergleichen

$$
\begin{array}{llll}
(\varkappa+1)\,m_1 & \varkappa m_1+m_2 & (\varkappa-1)\,m_1+2m_2 \ldots . & (\varkappa+1-(\rho-1))\,m_1+(\rho-1)\,m_2 \\
(\varkappa+2)\,m_1 & (\varkappa+1)\,m_1+m_2 & \varkappa m_1+2m_2 \ldots . & (\varkappa+2-(\rho-1))\,m_1+(\rho-1)\,m_2 \\
(\varkappa+3)\,m_1 & (\varkappa+2)\,m_1+m_2 & (\varkappa+1)\,m_1+2m_2 \ldots . & (\varkappa+3-(\rho-1))\,m_1+(\rho-1)\,m_2 \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
(\varkappa+\delta)\,m_1 & (\varkappa+\delta-1)\,m_1+m_2 & (\varkappa+\delta-2)\,m_1+2m_2 \ldots . & (\varkappa+\delta-(\rho-1))\,m_1+(\rho-1)\,m_2 \\
(\varkappa+\delta+1)\,m_1 & (\varkappa+\delta)\,m_1+m_2 & (\varkappa+\delta-1)\,m_1+2m_2 \ldots . & (\varkappa+\delta+1-(\rho-1))\,m_1+(\rho-1)\,m_2 \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots
\end{array}
$$

Ist nun in der homogenen Funktion $\varkappa+1^{\text{ten}}$ Grades der Koeffizient von $x_1^{\varkappa+1}$ von Null verschieden, fehlt also in diesem Schema das erste Glied nicht, so werden, weil dieses wieder, wie vorher bemerkt worden, für beliebige Werte von m_1 und m_2 unter der oben gemachten Voraussetzung $m_1 < m_2$ kleiner ist als alle übrigen Glieder dieses Schemas, somit nur die beiden Zahlen

$$(\varkappa-\rho)\,m_1+\rho m_2 \quad \text{und} \quad (\varkappa+1)\,m_1$$

miteinander zu vergleichen sein, und somit die Ordnungszahl der Potenzreihe $(\varkappa-\rho)\,m_1+\rho m_2$ sein, wenn $\frac{m_1}{m_2}$ zwischen $\frac{\rho}{\rho+1}$ und 1 liegt, und $(\varkappa+1)\,m_1$ sein, wenn $\frac{m_1}{m_2} < \frac{\rho}{\rho+1}$ ist, während die beiden Ordnungszahlen, wenn $\frac{m_1}{m_2} = \frac{\rho}{\rho+1}$ ist, denselben Wert $\frac{\rho(\varkappa+1)}{\rho+1}\,m_2$ annehmen, und dies also auch die Ordnungszahl der gesamten Potenzreihe sein wird, wenn nicht in den beiden Posten

$$a\,x_1^{\varkappa-\rho}\,x_2^{\rho} \quad \text{und} \quad \alpha\,x_1^{\varkappa+1}$$

$a = -\alpha$ ist.

Sind jedoch in der Darstellung der Potenzreihe die Koeffizienten der ersten ρ Glieder der homogenen Funktionen $\varkappa+1^{\text{ten}}$, $\varkappa+2^{\text{ten}}$, $\ldots\ \varkappa-\delta-1^{\text{ten}}$ Grades Null und ebenso die Koeffizienten der ersten $\rho-\varepsilon \leq \rho-1$ Glieder der homogenen Funktion $\varkappa+\delta^{\text{ten}}$ Grades, so würden in dem letzten Schema alle Zahlen rechts und unterhalb der Zahl

$$(\varkappa+\delta-(\rho-\varepsilon))\,m_1+(\rho-\varepsilon)\,m_2$$

unberücksichtigt bleiben dürfen, da sie größer als diese Zahlen sind, und mit den beiden Zahlen

$$(\varkappa-\rho)m_1+\rho m_2 \quad \text{und} \quad (\varkappa+\delta-(\rho-\varepsilon))m_1+(\rho-\varepsilon)m_2$$

nur noch die Zahlen des Schemas

$$\begin{array}{l}(\varkappa+\delta+1)m_1 \quad (\varkappa+\delta)m_1+m_2 \ldots\ldots (\varkappa+\delta+1-(\rho-\varepsilon-1))m_1+(\rho-\varepsilon-1)m_2\\ (\varkappa+\delta+2)m_1 \quad (\varkappa+\delta+1)m_1+m_2 \ldots\ldots (\varkappa+\delta+2-(\rho-\varepsilon-1))m_1+(\rho-\varepsilon-1)m_2\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}$$

zu vergleichen sein.

Fahren wir so fort, so wird eine endliche und durch eine endliche Anzahl von Operationen sich ergebende Reihe von Zahlen von der Form $(\varkappa-\rho)m_1+\rho m_2$, worin $\rho<\varkappa$, mit wachsenden $\varkappa$ und fallenden ρ miteinander zu vergleichen sein, die wir in die Form

$$Z_0=(\varkappa-\rho)m_1+\rho m_2,\ Z_1=(\varkappa+\delta_1-(\rho-\varepsilon_1))m_1+(\rho-\varepsilon_1)m_2,$$
$$Z_2=(\varkappa+\delta_2-(\rho-\varepsilon_2))m_1+(\rho-\varepsilon_2)m_2,\ldots$$

setzen können, worin die δ und ε positive ganze Zahlen bedeuten, welche den Ungleichheiten

(d) $$\delta_1<\delta_2<\delta_3<\cdots,\quad \varepsilon_1<\varepsilon_2<\varepsilon_3<\cdots$$

genügen, und für welche $\rho-\varepsilon_\lambda<\varkappa+\delta_\lambda$ ist, da $\rho<\varkappa$ war.

Wir können aber die Anzahl der zu vergleichenden Zahlen $Z_0, Z_1, Z_2, \ldots$ durch Grenzbedingungen für die Zahlen m_1 und m_2 noch weiter verkleinern, wenn wir die Größenordnung der echten Brüche

(e) $$\frac{\varepsilon_1}{\delta_1+\varepsilon_1},\quad \frac{\varepsilon_2}{\delta_2+\varepsilon_2},\quad \frac{\varepsilon_3}{\delta_3+\varepsilon_3},\ldots$$

in Betracht ziehen.

Sei in der Reihe dieser Zahlen $\frac{\varepsilon_\varkappa}{\delta_\varkappa+\varepsilon_\varkappa}$ die größte, so daß für jeden Wert $\beta\gtrless\alpha$ die Ungleichheit besteht

$$\frac{\varepsilon_\beta}{\delta_\beta+\varepsilon_\beta} < \frac{\varepsilon_\alpha}{\delta_\alpha+\varepsilon_\alpha}$$

oder

$$(\delta_\beta+\varepsilon_\beta)\,m_1-\varepsilon_\beta\,m_2 > \left[(\delta_\alpha+\varepsilon_\alpha)\,m_1-\varepsilon_\alpha\,m_2\right]\cdot\frac{\delta_\beta+\varepsilon_\beta}{\delta_\alpha+\varepsilon_\alpha}\,.$$

Ist nun $\beta>\alpha$, so wird vermöge der Ungleichheiten (d) $\frac{\delta_\beta+\varepsilon_\beta}{\delta_\alpha+\varepsilon_\alpha}$ ein unechter Bruch sein, und daher, wenn

$$(\delta_\alpha+\varepsilon_\alpha)\,m_1-\varepsilon_\alpha\,m_2>0 \quad \text{oder} \quad \frac{m_1}{m_2}>\frac{\varepsilon_\alpha}{\delta_\alpha+\varepsilon_\alpha}$$

angenommen wird,

$$(\delta_\beta+\varepsilon_\beta)\,m_1-\varepsilon_\beta\,m_2>(\delta_\alpha+\varepsilon_\alpha)\,m_1-\varepsilon_\alpha\,m_2$$

oder $Z_\beta-Z_\alpha>0$ sein, somit Z_α kleiner als alle darauffolgenden Zahlen $Z_{\alpha+1}, Z_{\alpha+2}, \ldots$, so daß zur Ermittlung der kleinsten in der Zahlenreihe der Z, da $m_1<m_2$ sein sollte, für alle m_1 und m_2, für welche $\frac{m_1}{m_2}$ zwischen $\frac{\varepsilon_\alpha}{\delta_\alpha+\varepsilon_\alpha}$ und 1 liegen, die Reihe der Zahlen, welche auf Z_α folgen, nicht mehr in Betracht kommen.

Ist jedoch $\beta<\alpha$, so folgt aus der oben aufgestellten Ungleichheit, daß, wenn

$$(\delta_\alpha+\varepsilon_\alpha)\,m_1-\varepsilon_\alpha\,m_2<0 \quad \text{oder} \quad \frac{m_1}{m_2}<\frac{\varepsilon_\alpha}{\delta_\alpha+\varepsilon_\alpha}$$

ist, weil $\frac{\delta_\beta+\varepsilon_\beta}{\delta_\alpha+\varepsilon_\alpha}$ ein echter Bruch ist, wieder

$$(\delta_\beta+\varepsilon_\beta)\,m_1-\varepsilon_\beta\,m_2>(\delta_\alpha+\varepsilon_\alpha)\,m_1-\varepsilon_\alpha\,m_2\,,$$

also $Z_\beta-Z_\alpha>0$, also die Zahlen, welche Z_α vorausgehen, nicht in Betracht kommen, und es zeigt sich somit, daß, wenn $\frac{\varepsilon_\alpha}{\delta_\alpha+\varepsilon_\alpha}$ die größte der Zahlen in der Zahlenreihe (e) ist, für

alle m_1 und m_2, für welche $\frac{m_1}{m_2}$ zwischen $\frac{\varepsilon_\alpha}{\delta_\alpha+\varepsilon_\alpha}$ und 1 liegt, alle Zahlen, welche auf Z_α folgen, und wenn $\frac{m_1}{m_2} < \frac{\varepsilon_\alpha}{\delta_\alpha+\varepsilon_\alpha}$, alle Zahlen, welche Z_α vorausgehen, nicht in Betracht kommen.

Ist $\frac{\varepsilon_\alpha}{\delta_\alpha+\varepsilon_\alpha}$ die kleinste der Zahlen in der Zahlenreihe (e), so ergibt sich durch die ähnlichen Schlüsse für $\beta > \alpha$ und $\frac{m_1}{m_2} < \frac{\varepsilon_\alpha}{\delta_\alpha+\varepsilon_\alpha}$ die Ungleichheit

$$(\delta_\beta+\varepsilon_\beta)m_1 - \varepsilon_\beta m_2 < (\delta_\alpha+\varepsilon_\alpha)m_1 - \varepsilon_\alpha m_2 \quad \text{oder} \quad Z_\beta - Z_\alpha < 0,$$

oder es ist Z_α größer als alle die auf Z_α folgenden Zahlen, und entsprechendes ergibt sich für $\beta<\alpha$ und $\frac{m_1}{m_2} > \frac{\varepsilon_\alpha}{\delta_\alpha+\varepsilon_\alpha}$; wenn daher $\frac{\varepsilon_\alpha}{\delta_\alpha+\varepsilon_\alpha}$ die kleinste der Zahlen in der Zahlenreihe (e) ist, so wird für $\frac{m_1}{m_2} < \frac{\varepsilon_\alpha}{\delta_\alpha+\varepsilon_\alpha}$ Z_α größer sein als alle folgenden, und, wenn $\frac{m_1}{m_2}$ zwischen $\frac{\varepsilon_\alpha}{\delta_\alpha+\varepsilon_\alpha}$ und der Einheit liegt, Z_α größer als alle vorhergehenden Zahlen Z sein.

Nehmen wir nun an, daß für die Reihe der Zahlen

$$Z_0, Z_1, Z_2, \ldots Z_{\alpha-1}, Z_\alpha, Z_{\alpha+1}, \ldots$$

in der entsprechenden Zahlenreihe (e) $\frac{\varepsilon_\alpha}{\delta_\alpha+\varepsilon_\alpha}$ die größte ist, so wurde, wenn $m_1<m_2$ und $\frac{m_1}{m_2} > \frac{\varepsilon_\alpha}{\delta_\alpha+\varepsilon_\alpha}$ war, Z_α kleiner als alle folgenden Zahlen $Z_{\alpha+1}, Z_{\alpha+2}, \ldots$, und um die kleinste aller Zahlen zu finden, wird man mit Ausschluß von Z_α zunächst nur noch die Zahlen der Zahlenreihe

$$Z_0, Z_1, Z_2, \ldots Z_{\alpha-1}$$

zu ermitteln haben. Ist nun in der Zahlenreihe

$$(e_1) \qquad \frac{\varepsilon_1}{\delta_1+\varepsilon_1}, \quad \frac{\varepsilon_2}{\delta_2+\varepsilon_2}, \cdots \frac{\varepsilon_{\alpha-1}}{\delta_{\alpha-1}+\varepsilon_{\alpha-1}}$$

wieder $\frac{\varepsilon_{\alpha_1}}{\delta_{\alpha_1}+\varepsilon_{\alpha_1}}$ die größte, so wird für $\frac{m_1}{m_2}<1$, $\frac{m_1}{m_2}>\frac{\varepsilon_{\alpha_1}}{\delta_{\alpha_1}+\varepsilon_{\alpha_1}}$ – und diese Bedingungen sind infolge der oben aufgestellten von selbst erfüllt, da $\frac{\varepsilon_\alpha}{\delta_\alpha+\varepsilon_\alpha}$ die größte der Zahlen in der gesamten Zahlenreihe (e) war –, so werden wie oben alle Zahlen $Z_{\alpha_1+1}, \ldots Z_{\alpha-1}$ gegen Z_{α_1} nicht in Betracht kommen, und es bleiben somit mit Ausschluß von Z_{α_1} nur noch die Zahlen

$$Z_0, Z_1, \ldots Z_{\alpha_1-1} \quad \text{und} \quad Z_{\alpha_1}, Z_\alpha$$

miteinander zu vergleichen; schließt man so weiter, so wird die Anzahl der miteinander zu vergleichenden Zahlen Z auf eine geringere reduziert

$$Z_{\alpha_\lambda} Z_{\alpha_{\lambda-1}} \ldots Z_{\alpha_1} Z_\alpha ,$$

worin $\alpha_\lambda<\alpha_{\lambda-1}<\cdots<\alpha_1<\alpha$, und verfährt man für diese Zahlen mittels der zugehörigen Zahlen der Zahlenreihe

$$\frac{\varepsilon_1'}{\delta_1'+\varepsilon_1'}, \quad \frac{\varepsilon_2'}{\delta_2'+\varepsilon_2'}, \cdots$$

genau wie oben, indem man von

$$Z_{\alpha_\lambda} = (\varkappa'-\rho')m_1+\rho' m_2$$

ausgeht usw., so gelangt man unter der Bedingung, daß $\frac{m_1}{m_2}$ zwischen $\frac{\varepsilon_\alpha}{\delta_\alpha+\varepsilon_\alpha}$ und der Einheit liegt, zur kleinsten Zahl der Zahlenreihe

$$Z_0, Z_1, Z_2, \ldots .$$

Seien z. B. die Zahlen

$$\begin{aligned} Z_0 &= m_1 + 50m_2 & Z_3 &= 8m_1 + 46m_2 & Z_6 &= 48m_1 + 10m_2 \\ Z_1 &= 3m_1 + 49m_2 & Z_4 &= 10m_1 + 45m_2 & Z_7 &= 66m_1 + 5m_2 \\ Z_2 &= 5m_1 + 48m_2 & Z_5 &= 41m_1 + 15m_2 & Z_8 &= 72m_1 \end{aligned}$$

gegeben, denen die Zahlenreihe (e)

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{5}{9}, \frac{7}{8}, \frac{40}{47}, \frac{9}{13}, \frac{50}{71}$$

entspricht, so braucht, da $\frac{7}{8}$ der größte dieser Brüche ist, für alle Werte von m_1 und m_2, für welche $\frac{m_1}{m_2}$ zwischen $\frac{7}{8}$ und der Einheit liegt, nur die Zahlenreihe

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{5}{9}$$

untersucht zu werden, so daß es sich, da $\frac{4}{7}$ der größte dieser Brüche ist, nur um die den Brüchen $\frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{7}{8}$ zugehörigen Zahlenformen

$$\begin{aligned} Z_0 &= m_1 + 50m_2, & Z_3 &= 8m_1 + 46m_2 \\ Z_1 &= 3m_1 + 49m_2, & Z_5 &= 41m_1 + 15m_2 \\ Z_2 &= 5m_1 + 48m_2, \end{aligned}$$

handeln wird, und für diese sieht man unmittelbar, daß, wenn man der oben gefundenen Bedingung gemäß $\frac{m_1}{m_2} = \frac{7}{8} + \delta$ setzt, worin $\delta > 0$,

$$Z_1 - Z_0,\ Z_2 - Z_0,\ Z_3 - Z_0,\ Z_5 - Z_0$$

positiv sind, Z_0 die kleinste der Zahlen Z_0 bis Z_8 ist.

Wie man die vorstehenden Betrachtungen auf die Bestimmung der Ordnungszahl einer Potenzreihe anwendet, möge nun an der folgenden endlichen Potenzreihe gezeigt werden.

Sei zur Bestimmung der Ordnungszahl um $x_1=0$, $\dot{x}_2=0$ die Potenzreihe

$$\begin{aligned}\mathfrak{P} &= (a_{22}\,x_1^2\,x_2^2 + a_{13}\,x_1\,x_2^3 + a_{04}\,x_2^4)\\ &+ (a_{41}\,x_1^4\,x_2 + a_{32}\,x_1^3\,x_2^2 + a_{23}\,x_1^2\,x_2^3 + a_{14}\,x_1\,x_2^4)\\ &+ (a_{60}\,x_1^6 + a_{51}\,x_1^5\,x_2 + a_{42}\,x_1^4\,x_2^2 + a_{33}\,x_1^3\,x_2^3 + a_{15}\,x_1\,x_2^5)\end{aligned}$$

gegeben, so wird dieser Funktion das Schema entsprechen

0	0					
0	0	0				
0	0	0	0			
0	0	$2m_1+2m_2$	m_1+3m_2	$4m_2$		
0	$4m_1+m_2$	$3m_1+2m_2$	$2m_1+3m_2$	m_1+4m_2	0	
$6m_1$	$5m_1+m_2$	$4m_1+2m_2$	$3m_1+3m_2$	0	m_1+5m_2	0,

und nach den obigen Auseinandersetzungen nur die Zahlform

$$2m_1+2m_2$$

mit dem Schema

$$\begin{array}{cc} 0 & 4m_1+m_2 \\ 6m_1 & 5m_1+m_2, \end{array}$$

und weiter $4m_1+m_2$ mit $6m_1$ zusammenzustellen, so daß es sich nur um die Vergleichung der 3 Zahlen

$$Z_0 = 2m_1+2m_2,\quad Z_1 = 4m_1+m_2,\quad Z_2 = 6m_1$$

handelt, für welche in den früheren Bezeichnungen $\delta_1=1$, $\varepsilon_1=1$, $\delta_2=2$, $\varepsilon_2=2$, also

$$\frac{\varepsilon_1}{\delta_1+\varepsilon_1} = \frac{\varepsilon_2}{\delta_2+\varepsilon_2} = \frac{1}{2},\quad \text{und}\quad \frac{\delta_2+\varepsilon_2}{\delta_1+\varepsilon_1} = 2$$

ist. Da nun

$$(\delta_2+\varepsilon_2)m_1-\varepsilon_2 m_2=[(\delta_1-\varepsilon_1)m_1-\varepsilon_1 m_2]\cdot 2$$

wird, so folgt, daß, wenn

$$(\delta_1+\varepsilon_1)m_1-\varepsilon_1 m_2=2m_1-m_2>0,\ \text{also}\ m_1>\tfrac{1}{2}m_2$$

ist,

$$Z_1-Z_0=2m_1-m_2>0,\ Z_2-Z_0=4m_1-2m_2>0$$

oder

$$Z_1>Z_0,\ Z_2>Z_0$$

und somit Z_0 die kleinste der Zahlen Z_0, Z_1, Z_2 ist.

Ist dagegen $m_1<\frac{1}{2}m_2$, also $Z_1<Z_0$, $Z_2<Z_1$, so wird Z_2 die kleinste jener Zahlen sein, während für $m_1=\frac{1}{2}m_2$ die 3 Zahlen denselben Wert annehmen, wobei in dem ersten dieser drei Fälle die oben gemachte Voraussetzung $m_1<m_2$ zu beachten ist.

Benutzen wir das für die Ordnungszahl der speziellen endlichen Potenzreihe

$$\begin{aligned}\mathfrak{P}=\ &a_{22}x_1^2x_2^2+a_{13}x_1x_2^3+a_{04}x_2^4+a_{41}x_1^4x_2+a_{32}x_1^3x_2^2+a_{23}x_1^2x_2^3\\&+a_{14}x_1x_2^4+a_{60}x_1^6+a_{51}x_1^5x_2+a_{42}x_1^4x_2^2+a_{33}x_1^3x_2^3+a_{15}x_1x_2^5\end{aligned}$$

gefundene Resultat, wonach diese, wenn die Ordnungszahlen der für $t=0$ verschwindenden Größen x_1 und x_2 mit m_1 und m_2 bezeichnet werden, unter der Voraussetzung, daß $m_1<m_2$ und $m_1>\frac{1}{2}m_2$ sind, durch $2m_1+2m_2$ gegeben war, zur Bestimmung der Ordnungszahlen m_1, m_2, n_1 der für $t=0$ verschwindenden Integrale x_1, x_2, y_1 der drei der Form (1) analogen Differentialgleichungen

$$\mathfrak{P}\cdot\frac{dx_1}{dt}=\alpha_1x_1^3+\beta_1 t\,x_2^3y_1$$

$$\mathfrak{P}\cdot\frac{dx_2}{dt}=\alpha_2t^2x_1^3x_2+\beta_2x_1x_2y_1$$

$$\mathfrak{P}\cdot\frac{dy_1}{dt}=\alpha_3x_1^2y_1+\beta_3x_1x_2y_1^2,$$

so werden zunächst die Ordnungszahlen der linken Seiten der drei Differentialgleichungen in der Form gegeben sein

$$2m_1+2m_2+m_1-1,\quad 2m_1+2m_2+m_2-1,\quad 2m_1+2m_2+n_1-1.$$

Um die Ordnungszahlen der rechten Seiten der Differentialgleichungen zu finden, ist von den je zwei Zahlen

$$\begin{aligned} &3m_1 && \text{und} && 1+3m_2+n_1\\ &2+3m_1+m_2 && \text{und} && m_1+m_2+n_1\\ &2m_1+n_1 && \text{und} && m_1+m_2+2n_1 \end{aligned}$$

unter der oben gemachten Annahme, daß $m_1<m_2$ und $m_1>\frac{1}{2}m_2$, die kleinere zu suchen. Für das erste Zahlenpaar ist unmittelbar zu sehen, daß $3m_1$ die kleinere, also die Ordnungszahl der rechten Seite der ersten Differentialgleichung ist; für das zweite ergibt sich unter der Annahme, daß $n_1<m_2$, also, weil $m_1>\frac{1}{2}m_2$ sein sollte, $2m_1>m_2>n_1$ ist, $n_1+m_1+m_2<3m_1+m_2+2$ und somit $m_1+m_2+n_1$ als Ordnungszahl der rechten Seite der zweiten Differentialgleichung, und endlich folgt, da n_1 positiv, aus $n_1>m_1-m_2$ oder $2n_1>n_1+m_1-m_2$, also $2n_1+m_1+m_2>n_1+2m_1$, als Ordnungszahl für die rechte Seite der dritten Differentialgleichung $2m_1+n_1$, so daß sich unter den Bedingungen

$$m_1<m_2,\quad m_1>\tfrac{1}{2}m_2,\quad n_1<m_2$$

durch Gleichsetzen der Ordnungszahlen der beiden Seiten der Differentialgleichungen für m_1, m_2, n_1 die linearen Bestimmungsgleichungen

$$\begin{aligned} 2m_1+2m_2+m_1-1 &= 3m_1\\ 2m_1+2m_2+m_2-1 &= m_1+m_2+n_1\\ 2m_1+2m_2+n_1-1 &= 2m_1+n_1, \end{aligned}$$

ergeben, aus welchen $m_2=\frac{1}{2}$ folgt, während $m_1=n_1$ unbestimmt bleibt. Den angenommenen Ungleichheiten würden also z. B. die Werte

$$m_1=\tfrac{1}{3},\quad m_2=\tfrac{1}{2},\quad n_1=\tfrac{1}{3}$$

genügen und die gegebenen Differentialgleichungen könnten somit drei für $t=0$ verschwindende Integrale besitzen, für welche

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \\ t^3 \end{pmatrix}_0 \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ 1 \\ t^2 \end{pmatrix}_0 \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ 1 \\ t^3 \end{pmatrix}_0$$

endlich sind.

Sei allgemein ein Differentialgleichungssystem von der Form gegeben

$$\mathfrak{P}_1 \frac{dx_1}{dt} = \mathfrak{Q}_1, \quad \mathfrak{P}_2 \frac{dx_2}{dt} = \mathfrak{Q}_2, \ldots \mathfrak{P}_\rho \frac{dx_\rho}{dt} = \mathfrak{Q}_\rho,$$

worin die $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ endliche oder unendliche eindeutige Potenzreihen von $t, x_1, x_2, \ldots x_\rho$ sind mit oder ohne konstante Glieder, und seien in der Umgebung von $t=0$ diejenigen Integrale $x_1, x_2, \ldots x_\rho$ zu untersuchen, welche für $t=0$ selbst, und zwar von der m_1^{ten}, $m_2^{ten}, \ldots m_\rho^{ten}$ Ordnung verschwinden sollen, worin diese Ordnungszahlen der abhängigen Variabeln endliche positive Größen sein sollen. Bestimmt man unter den bei der Untersuchung, wie oben gezeigt, sich ergebenden Gleichheiten oder Ungleichheiten zwischen $m_1, m_2, \ldots m_\rho$, deren Komplex mit

$$M_\alpha(m_1, m_2, \ldots m_\rho) < 0$$

bezeichnet werden möge, die Ordnungszahlen $O_1, O_2, \ldots O_\rho$, $\Omega_1, \Omega_2, \ldots \Omega_\rho$ der Funktionen $\mathfrak{P}_1, \ldots \mathfrak{P}_\rho, \mathfrak{Q}_1, \ldots \mathfrak{Q}_\rho$, welche sich als ganze lineare Funktionen der $m_1, m_2, \ldots m_\rho$ mit ganzzahligen Koeffizienten ergeben, so liefern dann die durch Gleichsetzen der Ordnungszahlen der beiden Seiten der Differentialgleichungen sich ergebenden Beziehungen

$$O_1 + m_1 - 1 = \Omega_1, \; O_2 + m_2 - 1 = \Omega_2, \ldots O_\rho + m_\rho - 1 = \Omega_\rho$$

ρ lineare ganzzahlige Bestimmungsgleichungen für $m_1^{(\alpha)}, m_2^{(\alpha)}, \ldots m_\rho^{(\alpha)}$. Nehmen wir nun an, daß die Determinante dieser Gleichungen sowie deren Unterdeterminanten von Null verschieden sind, daß also die sich ergebenden Werte von $m_1^{(\alpha)}, m_2^{(\alpha)}, \ldots m_\rho^{(\alpha)}$, worin der Index α dem Wertekomplex der Ungleichheiten $M_\alpha < 0$ entspricht, nicht unendlich sind und sich nicht in unbestimmter Form darstellen, wie dies in dem behandelten Beispiel der Fall war, so werden sich die Ordnungszahlen der abhängigen Variabeln eindeutig

als rationale Zahlen ergeben, vorausgesetzt, daß dieselben die oben zur Bestimmung der Ordnungszahlen O und Ω angenommenen Gleichheiten oder Ungleichheiten $M_\alpha \leqq 0$ befriedigen.

Um die vorstehenden Betrachtungen auf die JACOBI-WEIERSTRASSsche Form der HAMILTONschen Differentialgleichungen $(9._{(8)})$ anzuwenden, möge die folgende Bemerkung vorausgeschickt werden.

Hat eine ganze Funktion G_1 der Variabeln $x_1, x_2, x_3, \ldots$, deren Ordnungszahlen ihrer Nullwerte für $t=0$ mit $m_1, m_2, m_3, \ldots$ bezeichnet werden, die Ordnungszahl O, und gehe diese aus den Gliedern

$$A\, x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} x_3^{\lambda_3} \ldots, \quad A' x_1^{\lambda'_1} x_2^{\lambda'_2} x_3^{\lambda'_3} \ldots, \ldots$$

hervor, so daß für die zur Ermittlung von O aufgestellten Ungleichheiten zwischen $m_1, m_2, m_3, \ldots$

$$O = \lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2 + \lambda_3 m_3 + \cdots = \lambda'_1 m_1 + \lambda'_2 m_2 + \lambda'_3 m_3 + \cdots = \cdots$$

ist, habe ferner eine ganze Funktion G_2 derselben Variabeln dieselbe Ordnungszahl O, welche aus den Posten

$$B\, x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} x_3^{\mu_3} \ldots, \quad B' x_1^{\mu'_1} x_2^{\mu'_2} x_3^{\mu'_3} \ldots, \ldots$$

entspringt, sodaß bei Beibehaltung derselben Ungleichheiten zwischen $m_1, m_2, m_3, \ldots$

$$O = \mu_1 m_1 + \mu_2 m_2 + \mu_3 m_3 + \cdots = \mu'_1 m_1 + \mu'_2 m_2 + \mu'_3 m_3 + \cdots = \cdots$$

ist, so wird die Funktion

$$\varkappa_1 G_1 + \varkappa_2 G_2 ,$$

worin $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ Konstanten sind, dieselbe Ordnungszahl O nur dann nicht besitzen, wenn unter der Voraussetzung, daß

$$\left(\frac{x_\alpha}{t^{m_\alpha}}\right)_0 = \xi_\alpha$$

gesetzt wird, worin ξ_α endlich ist,

$$\varkappa_1\left(A\,\xi_1^{\lambda_1}\xi_2^{\lambda_2}\cdots+A'\,\xi_1^{\lambda'_1}\xi_2^{\lambda'_2}\cdots+\cdots\right)-\varkappa_2\left(B\,\xi_1^{\mu_1}\xi_2^{\mu_2}\cdots+B'\,\xi_1^{\mu'_1}\xi_2^{\mu'_2}\cdots+\cdots\right)=0$$

ist.

Sollen nun für die Differentialgleichungen

$$(4)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial G}{\partial v}\frac{dp_\rho}{dt}=-\frac{\partial G}{\partial a^{(0)}_{\rho 1}}q_1-\frac{\partial G}{\partial a^{(0)}_{\rho 2}}q_2-\cdots-\frac{\partial G}{\partial a^{(0)}_{\rho\mu}}q_\mu\quad(\rho=1,2,\ldots\mu)\\
&\frac{\partial G}{\partial v}\frac{dq_\rho}{dt}=\tfrac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial a^{(\rho)}_{11}}q_1^2+\cdots-\tfrac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial a^{(\rho)}_{\mu\mu}}q_\mu^2-\frac{\partial G}{\partial a^{(\rho)}_{12}}q_1q_2+\cdots\\
&\qquad\qquad+\frac{\partial G}{\partial a^{(\rho)}_{\mu-1\,\mu}}q_{\mu-1}q_\mu-\frac{\partial G}{\partial a^{(\rho)}}\\
&\left(\frac{\partial G}{\partial v}\right)^2\frac{dv}{dt}=-\frac{\partial G}{\partial t}\frac{\partial G}{\partial v}+\frac{\partial G}{\partial p_1}\left(\frac{\partial G}{\partial a^{(0)}_{11}}q_1+\cdots+\frac{\partial G}{\partial a^{(0)}_{1\mu}}q_\mu\right)+\cdots\\
&\qquad\qquad+\frac{\partial G}{\partial p_\mu}\left(\frac{\partial G}{\partial a^{(0)}_{\mu 1}}q_1+\cdots+\frac{\partial G}{\partial a^{(0)}_{\mu\mu}}q_\mu\right)
\end{aligned}\right.$$

diejenigen Integrale p_ρ, q_ρ, v in der Umgebung von $t=\tau$ untersucht werden, welche die Werte $\pi_\rho, \varkappa_\rho, \bar{v}$ und zwar von der Ordnung $m_\rho, n_\rho, \mathfrak{v}$ annehmen sollen, worin $\bar{v}$ eine Lösung der Gleichung

$$G\left(v,\tau,\pi_1,\ldots\pi_\mu,a\right)=0$$

ist, so möge zunächst die unter bestimmten Bedingungen für die Ordnungszahlen der abhängigen Variabeln sich ergebende Ordnungszahl Ω der Funktion G durch Glieder der Form

$$(5)\quad\left\{\begin{aligned}
&A\,t^\nu\left(v-\bar{v}\right)^\sigma\left(p_1-\pi_1\right)^{\lambda_1}\cdots\left(p_\mu-\pi_\mu\right)^{\lambda_\mu}\\
&A'\,t^{\nu'}\left(v-\bar{v}\right)^{\sigma'}\left(p_1-\pi_1\right)^{\lambda'_1}\cdots\left(p_\mu-\pi_\mu\right)^{\lambda'\mu},\ \ldots
\end{aligned}\right.$$

repräsentiert werden, so daß

$$\Omega=\nu+\sigma\mathfrak{v}+\lambda_1m_1+\cdots+\lambda_\mu m_\mu=\nu'+\sigma'\mathfrak{v}+\lambda'_1m_1+\cdots+\lambda'_\mu m_\mu=\cdots$$

ist; es wird sich dann nach der oben vorausgeschickten Bemerkung für $\frac{\partial G}{\partial v}$ die Ordnungszahl $\Omega-\mathfrak{v}$ ergeben, wenn unter der Voraussetzung, daß

$$\left(\frac{v-\bar{v}}{(t-\tau)^{\mathfrak{v}}}\right)_{t=\tau}=\bar{\eta},\quad \left(\frac{p_\rho-\pi_\rho}{(t-\tau)^{m_\rho}}\right)_{t=\tau}=\xi_\rho,\quad \left(\frac{q_\rho-\varkappa_\rho}{(t-\tau)^{n_\rho}}\right)_{t=\tau}=\eta_\rho$$

gesetzt wird, worin $\bar{\eta}, \xi_\rho$ und η_ρ endliche Konstanten sind,

$$A\,\sigma\,\bar{\eta}^{\sigma-1}\,\xi_1^{\lambda_1}\,\xi_2^{\lambda_2}\cdots+A'\,\sigma'\,\bar{\eta}^{\sigma'-1}\,\xi_1^{\lambda'1}\,\xi_2^{\lambda'2}\cdots+\cdots\neq 0 \tag{6}$$

ist, und daher die Ordnungszahlen der linken Seiten der Differentialgleichungen (4)

$$\Omega-\mathfrak{v}+m_\rho-1,\ \Omega-\mathfrak{v}+n_\rho-1,\ 2\Omega-2\mathfrak{v}+\mathfrak{v}-1=2\Omega-\mathfrak{v}-1$$

sind, während sie, wenn die Ungleichheit (6) nicht erfüllt ist, größer sein können.

Um die Ordnungszahlen der rechten Seiten der Differentialgleichungen (4) zu bestimmen, diene die Bemerkung, daß aus einem der Glieder (5) von G für $\frac{\partial G}{\partial a}$, worin a irgendeine der Größen $a^{(0)}_{\rho\alpha}$, $a^{(\rho)}_{\alpha\beta}$, $a^{(\rho)}$ darstellt, als Glieder zur Bestimmung der Ordnungszahl nur

$$\frac{\partial A}{\partial a}\,t^{\nu}(v-\bar{v})^{\sigma}(p_1-\pi_1)^{\lambda_1}\cdots(p_\mu-\pi_\mu)^{\lambda_\mu}$$
$$-A\,\sigma\,t^{\nu}(v-\bar{v})^{\sigma-1}(p_1-\pi_1)^{\lambda_1}\cdots(p_\mu-\pi_\mu)^{\lambda_\mu}\frac{\partial\bar{v}}{\partial a}$$

und die ähnlichen in Frage kommen, und somit die Ordnungszahl von $\frac{\partial G}{\partial a}$

$$\nu+(\sigma-1)\mathfrak{v}+\lambda_1 m_1+\cdots+\lambda_\mu m_\mu=\Omega-\mathfrak{v}$$

ist, vorausgesetzt, daß die Ungleichheit (6) besteht, und $\frac{\partial\bar{v}}{\partial a}$ nicht

für jede Wahl der Größen a gleich Null oder unendlich ist, d. h., wie aus der der Gleichung (9.4) entspringenden Beziehung

$$(7)\quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{\nu} = \sum\limits_{\substack{\alpha,\beta=1,2,\ldots,\mu \\ \alpha<\beta}} \left[a_{\alpha\beta}^{(0)} \left(\Delta_{\alpha\beta}^{(1)}\right) + a_{\alpha\beta}^{(1)} \left(\frac{\partial \Delta_{\alpha\beta}^{(1)}}{\partial p_1}\right) + \cdots + a_{\alpha\beta}^{(\mu)} \left(\frac{\partial \Delta_{\alpha\beta}^{(1)}}{\partial p_\mu}\right) \right] \\ \qquad\qquad - \sum\limits_{\varrho}^{\mu} a^{(\varrho)} \left(\frac{\partial U^{(1)}}{\partial p_\varrho}\right) \end{array} \right.$$

hervorgeht, wenn nicht die Größen

$$\left(\Delta_{\alpha\beta}^{(1)}\right), \left(\frac{\partial \Delta_{\alpha\beta}^{(1)}}{\partial p_\varrho}\right), \left(\frac{\partial U^{(1)}}{\partial p_\varrho}\right),$$

welche die Werte der eingeklammerten Ausdrücke für $t=\tau$ und $p_\varrho=\pi_\varrho$ darstellen, sämtlich verschwinden oder mindestens eine derselben unendlich groß ist. Die Ordnungszahl eines jeden Postens der rechten Seiten der 2μ ersten Differentialgleichungen wird somit, da

$$q_\varrho = \varkappa_\varrho + (q_\varkappa - \varkappa_\varrho),\ q_\varrho^2 = \varkappa_\varrho^2 + 2\varkappa_\varrho (q_\varrho - \varkappa_\varrho) + (q_\varrho - \varkappa_\varrho)^2$$

ist, unter den gemachten Voraussetzungen $\Omega-\upsilon$ sein, und die Ordnungszahl der gesamten rechten Seiten dieser Differentialgleichungen bleibt daher nach den früheren Bemerkungen dieselbe, wenn die Bedingungen

$$(8)\quad \sum_{1}^{\mu} \varkappa_\alpha \frac{\partial \bar{\nu}}{\partial a_{\varrho\alpha}^{(0)}} \neq 0 \quad \text{und} \quad \sum_{\alpha,\beta=1,2,\ldots,\mu} \varkappa_\alpha \varkappa_\beta \frac{\partial \bar{\nu}}{\partial a_{\alpha\beta}^{(\varrho)}} - \frac{\partial \bar{\nu}}{\partial a^{(\varrho)}} \neq 0$$

hinzugefügt werden. Wir finden somit unter der für die Größen

$$\left(\Delta_{\alpha\beta}^{(1)}\right), \left(\frac{\partial \Delta_{\alpha\beta}^{(1)}}{\partial p_\varrho}\right), \left(\frac{\partial U^{(1)}}{\partial p_\varrho}\right)$$

festgestellten Bedingung und unter Voraussetzung der Gültigkeit der Ungleichheiten (6) und (8) durch

Gleichsetzen der Ordnungszahlen der beiden Seiten der 2μ ersten Differentialgleichungen

$$\Omega-\mathfrak{v}+m_\rho-1=\Omega-\mathfrak{v},\quad \Omega-\mathfrak{v}+n_\rho-1=\Omega-\mathfrak{v},$$

also $m_\rho=1$ und $n_\rho=1$ als Ordnungszahlen der Integrale p_ρ und q_ρ.

Was endlich die $2\mu+1^{te}$ Differentialgleichung (4) betrifft, so wird die Ordnungszahl von $\frac{\partial G}{\partial t}$, wie wieder leicht zu sehen, Ω–1 sein, wenn

$$(9)\qquad A\nu\bar{\eta}^{\sigma}\xi_1^{\lambda_1}\xi_2^{\lambda_2}\cdots+A'\nu'\bar{\eta}^{\sigma'}\xi_1^{\lambda'_1}\xi_2^{\lambda'_2}\cdots+\cdots\neq 0,$$

und die von $\frac{\partial G}{\partial p_\rho}$ $\Omega-m_\rho$ sein, wenn

$$(10)\quad A\lambda_\rho\bar{\eta}^{\sigma}\xi_1^{\lambda_1}\xi_2^{\lambda_2}\cdots\xi_\rho^{\lambda\rho-1}\cdots+A'\lambda'_\rho\bar{\eta}^{\sigma'}\xi_1^{\lambda'_1}\xi_2^{\lambda'_2}\cdots\xi_\rho^{\lambda'\rho-1}\cdots+\cdots\neq 0$$

ist, und daher die Ordnungszahlen der Funktionen

$$\frac{\partial G}{\partial t}\ \frac{\partial G}{\partial v}\ \text{und}\ \frac{\partial G}{\partial p_\rho}\ \frac{\partial G}{\partial a}$$

wegen $m_\rho=1$

$$\Omega-1+\Omega-\mathfrak{v}=2\Omega-\mathfrak{v}-1,$$

welches auch die Ordnungszahl der linken Seite dieser Differentialgleichung ist, so daß sich für die Ordnungszahl $\mathfrak{v}$ von $v-\bar{v}$ keine Bestimmung ergibt, woraus wieder das Bestehen der Ungleichheiten (9) und (10) folgt.

Da sich $m_\rho=1, n_\rho=1$ nur dann ergab, wenn die Ungleichheiten (6) und (8) befriedigt waren, so setze man zur Ermittlung der Werte $\xi_1, \xi_2, \ldots$

$$(11)\qquad \left(\frac{p_\rho-\pi_\rho}{t-\tau}\right)_\tau=\xi_\rho,\quad \left(\frac{q_\rho-\varkappa_\rho}{t-\tau}\right)_\tau=\eta_\rho,$$

so daß sich durch Substitution der Werte $p_\rho - \pi_\rho = \xi_\rho (t-\tau)$ aus der Gleichung $G=0$ der Wert von $v-\bar{v}$ als Funktion von $t-\tau$ ergibt, und somit die Ordnungszahl υ sowie der Quotient $\left(\frac{v-\bar{v}}{(t-\tau)^\upsilon}\right)_\tau = \bar{\eta}$ bekannt ist. Substituiert man diesen Wert von $v-\bar{v}$ sowie die Werte von $p_\rho - \pi_\rho = \xi_\rho (t-\tau)$, $q_\varkappa - \varkappa_\rho = (t-\tau)\eta_\rho$ in die 2μ ersten Differentialgleichungen des Systems (4), so erhält man für $t=\tau$ 2μ Gleichungen zur Bestimmung der 2μ Größen ξ und η, und somit die zur Prüfung der Ungleichheiten (6) und (8) erforderlichen Werte von $\xi_1, \xi_2, \ldots$.

Wenden wir die vorigen Betrachtungen auf den Fall

$$\Delta = p^{\frac{3}{2}}, \quad U = \frac{p^2}{2} + \frac{2}{5} p^{\frac{5}{2}},$$

also auf das HAMILTONsche Differentialgleichungssystem

$$\frac{dp}{dt} = p^{\frac{3}{2}} q, \quad \frac{dq}{dt} = -\frac{3}{4} p^{\frac{1}{2}} q^2 + p + p^{\frac{3}{2}} \tag{12}$$

an, welches vermöge der Substitution

$$v = a_1 p^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2} a_2 p^{\frac{1}{2}} + a\left(p + p^{\frac{3}{2}}\right), \tag{13}$$

die der Gleichung genügt

$$G(v,p,a) = v^2 - 2apv + a^2 p^2 - p\left(\frac{9}{4} a_2^2 + 3a_2(a+a_1)p + (a+a_1)^2 p^2\right) = 0, \tag{14}$$

in die Form übergeht

$$\frac{\partial G}{\partial v}\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial G}{\partial a_1} q, \quad \frac{\partial G}{\partial v}\frac{dq}{dt} = \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial a_2} q^2 - \frac{\partial G}{\partial a} \tag{15}$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial v}\right)^2 \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial G}{\partial p}\frac{\partial G}{\partial a_1} q, \tag{16}$$

worin

$$(17)\quad \left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial G}{\partial v} = 2v - 2ap \\[2ex] \dfrac{\partial G}{\partial a_1} = -3p^2 a_2 - 2(a+a_1)p^3, \quad \dfrac{\partial G}{\partial a_2} = -\dfrac{9}{2} a_2 p - 3(a+a_1)p^2 \\[2ex] \dfrac{\partial G}{\partial a} = -2pv + (2a - 3a_2)p^2 - 2(a+a_1)p^3 \\[2ex] \dfrac{\partial G}{\partial p} = -2av + 2a^2 p - \dfrac{9}{4} a_2^2 - 6a_2(a+a_1)p - 3(a+a_1)^2 p^2, \end{array}\right.$$

und suchen zunächst, ohne von dem CAUCHYschen Satze Gebrauch zu machen, diejenigen Integrale der Differentialgleichungen (15) und (16) zu bestimmen, welche für $t=\tau$ die von Null verschiedenen Werte $p=\pi$, $q=\varkappa$ und $v=\bar{v}$ annehmen, worin $\bar{v}$ eine Lösung der Gleichung

$$G(\bar{v}, \pi, a) = 0$$

ist.

Ordnet man zur Bestimmung der Ordnungszahlen O der durch die Gleichungen (17) definierten Funktionen diese nach Potenzen von $v-\bar{v}$ und $p-\pi$, so ergibt sich unmittelbar

$$O\left(\frac{\partial G}{\partial v}\right) = 0, \quad O\left(\frac{\partial G}{\partial a_1}\right) = 0, \quad O\frac{\partial G}{\partial a_2} = 0, \quad O\left(\frac{\partial G}{\partial a}\right) = 0, \quad O\left(\frac{\partial G}{\partial p}\right) = 0$$

und daher aus (14) und Gleichsetzen der Ordnungszahlen der beiden Seiten der Differentialgleichungen (15)

$$\mathfrak{v} = 1, \; m = 1, \; n = 1;$$

es folgt somit, daß, wenn π von Null verschieden, also — wegen der Unbestimmtheit der Größen a — $\bar{v}$ eine einfache Lösung von G ist, $p-\pi$, $q-\varkappa$, $v-\bar{v}$ von der ersten Ordnung Null, also

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)_{t=\tau}, \quad \left(\frac{dq}{dt}\right)_{t=\tau}, \quad \left(\frac{dv}{dt}\right)_{t=\tau}$$

endlich sind – was aus den Differentialgleichungen (12) unmittelbar ersichtlich ist.

Sollen dagegen dem Werte $t=\tau$ die Werte $p=0$, $q=\varkappa$ entsprechen, so ergibt sich aus der Gleichung (14) $v=\frac{m}{2}$ und aus den Gleichungen (17)

$$O\left(\frac{\partial G}{\partial v}\right)=\frac{m}{2},\ O\left(\frac{\partial G}{\partial a_1}\right)=2m,\ O\left(\frac{\partial G}{\partial a_2}\right)=m,\ O\left(\frac{\partial G}{\partial a}\right)=\frac{3m}{2},\ O\left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)=0$$

und somit durch Gleichsetzen der Ordnungszahlen der beiden Seiten der ersten der Gleichungen (15)

$$\frac{m}{2}+m-1=2m \qquad \text{oder} \qquad \frac{m}{2}=-1,$$

was für positive endliche Ordnungszahlen von p und q unmöglich ist. In der Tat gehen die Differentialgleichungen (12) durch die Substitution

$$p^{\frac{1}{2}}=P$$

in das Differentialgleichungssystem

$$\frac{dP_3}{dt}=\frac{1}{2}P^2q,\quad \frac{dq}{dt}=-\frac{3}{4}Pq^2+P^2+P^3$$

über, dessen rechte Seiten eindeutige Funktionen von P und q sind, die für $P=0$, $q=\varkappa$ für jeden Wert von t verschwinden, so daß die für $t=\tau$ zu ermittelnden Integrale, also auch die Integrale von (12) in der Umgebung von $t=\tau$ konstant sein und die Werte 0 und $\varkappa$ annehmen werden.

Wir gehen nun zunächst zu einigen Anwendungen dieser letzten Überlegungen über.

Es war oben das System der HAMILTONschen Differentialgleichungen für die Untersuchung derjenigen Integrale, welche für $t=\tau$ die Werte $p_\rho=\pi_\rho$, $q_\rho=\varkappa_\rho$ annehmen, auf das Differentialgleichungssystem zurückgeführt worden.

$$(18)\quad \begin{cases} \mathfrak{P}\dfrac{dx_\rho}{dt} = \mathfrak{P}_\rho^{(0)} + \mathfrak{P}_\rho^{(1)} y_1 + \cdots + \mathfrak{P}_\rho^{(\lambda)} y_\lambda & (\rho = 1,2,\ldots\varkappa) \\ \mathfrak{P}\dfrac{dy_\sigma}{dt} = \mathfrak{P}_\sigma^{(00)} + \mathfrak{P}_\sigma^{(10)} y_1 + \cdots + \mathfrak{P}_\sigma^{(\lambda 0)} y_\lambda + \mathfrak{P}_\sigma^{(11)} y_1^2 + \cdots \\ \qquad + \mathfrak{P}_\sigma^{(12)} y_1 y_2 + \cdots + \mathfrak{P}_\sigma^{(\lambda-1\,\lambda)} y_{\lambda-1} y_\lambda & (\sigma = 1,2,\ldots\lambda), \end{cases}$$

worin $\varkappa \geq \lambda$, die $\mathfrak{P}$ sämtlich eindeutige Potenzreihen von $t, x_1, x_2, \ldots x_\varkappa$ sind, von denen $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_\rho^{(0)}$, $\mathfrak{P}_\sigma^{(00)}$ keine konstanten Glieder enthalten, also für $t=0$, $x_\rho = 0$ verschwinden, und für welches diejenigen Integrale $x_1, x_2, \ldots x_\varkappa, y_1, y_2, \ldots y_\lambda$ untersucht werden sollen, welche für $t=0$ selbst den Wert Null erhalten.

Nehmen wir nun an, daß die Integrale x_ρ und y_σ von der m_ρ^{ten} und n_σ^{ten} Ordnung Null werden sollen, worin m_ρ und n_σ endliche positive rationale oder irrationale Zahlen sind, daß also

$$(19)\qquad \left(\frac{x_\rho}{t^{m_\rho}}\right)_{t=0} = \bar{\xi}_\rho\,, \quad \left(\frac{y_\sigma}{t^{n_\sigma}}\right)_{t=0} = \bar{\eta}_\sigma$$

endliche Größen darstellen, so kann man nach den in dem Vorigen entwickelten Methoden unter Festlegung der dort näher angegebenen Gleichheiten oder Ungleichheiten zwischen den Zahlen $m_1, m_2, \ldots m_\varkappa$ die Ordnungszahlen der Potenzreihen $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}_\rho^{(\alpha)}, \mathfrak{P}_\sigma^{(\alpha\beta)}$ ermitteln, die mit $O, O_\rho^{(\alpha)}, O_\sigma^{(\alpha\beta)}$ bezeichnet werden mögen, und welche ganze und ganzzahlige lineare Funktionen von $m_1, m_2, \ldots m_\varkappa$ sein werden.

Bestimmt man sodann die Ordnungszahlen O'_ρ und O''_σ der rechten Seiten der Differentialgleichungen, welche ganze und ganzzahlige lineare Funktionen der m_ρ und n_σ sein werden, und setzt die Ordnungszahlen der beiden Seiten der Differentialgleichungen einander gleich, so werden sich aus den $\varkappa+\lambda$ Gleichungen

$$O + m_\rho - 1 = O'_\rho\,, \quad O + n_\sigma - 1 = O''_\sigma\,,$$

unter der Annahme, daß die Determinante und die Unterdeterminanten von Null verschieden sind, also m_ρ und n_σ weder unbestimmt noch unendlich werden, für diese Ordnungszahlen rationale Werte ergeben, welche den vorausgesetzten Gleichheiten oder Ungleichheiten genügen müssen.

Substituiert man nunmehr statt der abhängigen Variabeln x_ρ und y_σ die durch die Gleichungen

$$x_\rho = t^{m_\rho}\,\xi_\rho,\quad y_\sigma = t^{n_\sigma}\,\eta_\sigma$$

definierten Größen ξ_ρ und η_σ, welche nach (19) für $t=0$ die Werte $\bar{\xi}_\rho$ und $\bar{\eta}_\sigma$ annehmen, so gehen die Differentialgleichungen über in

$$t^{m_\rho-1}\,\mathfrak{P}\left(t, t^{m_1}\xi_1, t^{m_2}\xi_2, \ldots\right)\left(t\,\frac{d\,\xi_\rho}{d\,t} - m_\rho\,\xi_\rho\right) = \mathfrak{P}_\rho^{(0)}\left(t, t^{m_1}\xi_1, t^{m_2}\xi_2, \ldots\right)$$
$$+\,\mathfrak{P}_\rho^{(1)}\left(t, t^{m_1}\xi_1, \ldots\right)t^{n_1}\eta_1 + \cdots + \mathfrak{P}_\rho^{(\lambda)}\left(t, t^{m_1}\xi_1, \ldots\right)t^{n_\lambda}\eta_\lambda$$

$$t^{n_\sigma-1}\,\mathfrak{P}\left(t, t^{m_1}\xi_1, \ldots\right)\left(t\,\frac{d\,\eta_\sigma}{d\,t} + n_\sigma\,\eta_\sigma\right) = \mathfrak{P}_\sigma^{(00)}\left(t, t^{m_1}\xi_1, \ldots\right)$$
$$+\,\mathfrak{P}_\sigma^{(10)}\left(t, t^{m_1}\xi_1, \ldots\right)t^{n_1}\eta_1 + \cdots + \mathfrak{P}_\sigma^{(11)}\left(t, t^{m_1}\xi_1, \ldots\right)t^{2n_1}\eta_1^2 + \cdots$$

und, unter der gemachten Voraussetzung, daß $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}_\rho^{(0)}, \mathfrak{P}_\sigma^{(00)}$ keine konstanten Glieder enthalten, durch Division mit t^{Ω_ρ} resp. $t^{\Omega'_\sigma}$, wenn Ω_ρ und Ω'_σ die gemeinsamen Ordnungszahlen der beiden Seiten der Differentialgleichungen sind, und durch Befreiung der linken Seite von einem Faktor, dessen reziproker Wert in eine Potenzreihe entwickelbar ist, in die Differentialgleichungen

$$t\,\frac{d\,\xi_\rho}{d\,t} = P_\rho^{(0)}\left(t, \xi_1, \ldots\right) + P_\rho^{(1)}\left(t, \xi_1, \ldots\right)\eta_1 + \cdots$$

$$t\,\frac{d\,\eta_\sigma}{d\,t} = P_\sigma^{(00)}\left(t, \xi_1, \ldots\right) + P_\sigma^{(10)}\left(t, \xi_1, \ldots\right)\eta_1 + \cdots$$
$$+\,P_\sigma^{(11)}\left(t, \xi_1, \ldots\right)\eta_1^2 + \cdots,$$

deren Integrale um $t=0$ zu untersuchen sind, wenn diese die Werte $\bar{\xi}_\rho, \bar{\eta}_\sigma$ annehmen sollen, die aber bekannt sind, da man nur in die letzten Gleichungen $t=0$, also $t\,\frac{d\,\xi_\rho}{d\,t}$, $t\,\frac{d\,\eta_\sigma}{d\,t}$ gleich Null zu

setzen braucht, um $\varkappa+\lambda$ Gleichungen zu erhalten, aus denen sich jene $\varkappa+\lambda$ Größen bestimmen lassen.

Setzt man endlich die Größen

$$m_1 = \frac{\mu_1}{N}, \ldots m_\varkappa = \frac{\mu_\varkappa}{N}, \quad n_1 = \frac{\nu_1}{N}, \ldots n_\lambda = \frac{\nu_\lambda}{N},$$

und ersetzt die unabhängige Variable t durch die Größe

$$t^{\frac{1}{N}} = u,$$

und die abhängigen Variabeln vermöge der Beziehungen

$$\xi_\rho - \bar{\xi}_\rho = x_\rho, \quad \eta_\rho - \bar{\eta}_\rho = y_\rho$$

durch x_ρ und y_σ, so gehen die obigen Gleichungen über in

$$u \frac{dx_\rho}{du} = P_\rho^{(0)}(u, x_1, \ldots x_\varkappa) + P_\rho^{(1)}(u, x_1, \ldots x_\varkappa) y_1 + \cdots + P_\rho^{(\lambda)}(u, x_1, \ldots x_\varkappa) y_\lambda$$

$$(\rho = 1, 2, \ldots \varkappa)$$

$$u \frac{dy_\sigma}{du} = P_\sigma^{(00)}(u, x_1, \ldots x_\varkappa) + P_\sigma^{(10)}(u, x_1, \ldots x_\varkappa) y_1 + \cdots$$

$$+ P_\sigma^{(11)}(u, x_1, \ldots x_\varkappa) y_1^2 + \cdots + P_\sigma^{(\lambda-1\,\lambda)}(u, x_1, \ldots x_\varkappa) y_{\lambda-1} y_\lambda$$

$$(\sigma = 1, 2, \ldots \lambda),$$

worin $\varkappa \geq \lambda$, die P eindeutige Potenzreihen der eingeschlossenen Größen bedeuten, von denen $P_\rho^{(0)}$ und $P_\sigma^{(00)}$ für die Nullwerte dieser Größen verschwinden, und in welchen diejenigen Integrale zu untersuchen sind, welche für $u=0$ selbst den Wert Null annehmen.

Durch Absonderung der in den Größen $u, x_1, \ldots x_\varkappa, y_1, \ldots y_\lambda$ linearen Glieder auf den rechten Seiten der Differentialgleichungen erhält man

$$u\frac{dx_1}{du}=\sum_{1}^{\varkappa_\alpha}\mu_{1\alpha}x_\alpha+\sum_{1}^{\lambda_\alpha}\nu_{1\alpha}y_\alpha-a_1u-\sum_{2}^{\infty_m}U_{10}^{(m)}(u,x_1,\dots x_\varkappa)$$

$$+y_1\sum_{1}^{\infty_m}U_{11}^{(m)}(u,x_1,\dots x_\varkappa)-\dots+y_\lambda\sum_{1}^{\infty_m}U_{1\lambda}^{(m)}(u,x_1,\dots x_\varkappa)$$

. . . . . .

$$u\frac{dx_\varkappa}{du}=\sum_{1}^{\varkappa_\alpha}\mu_{\varkappa\alpha}x_\alpha+\sum_{1}^{\lambda_\alpha}\nu_{\varkappa\alpha}y_\alpha-a_\varkappa u-\sum_{2}^{\infty_m}U_{\varkappa0}^{(m)}(u,x_1,\dots x_\varkappa)$$

$$+y_1\sum_{1}^{\infty_m}U_{\varkappa1}^{(m)}(u,x_1,\dots x_\varkappa)-\dots-y_\lambda\sum_{1}^{\infty_m}U_{\varkappa\lambda}^{(m)}(u,x_1,\dots x_\varkappa)$$

$$u\frac{dy_1}{du}=\sum_{1}^{\varkappa_\alpha}\mu'_{1\alpha}x_\alpha+\sum_{1}^{\lambda_\alpha}\nu'_{1\alpha}y_\alpha-a'_1u-\sum_{2}^{\infty_m}{}'U_{10}^{(m)}(u,x_1,\dots x_\varkappa)$$

$$+y_1\sum_{1}^{\infty_m}{}'U_{11}^{(m)}(u,x_1,\dots x_\varkappa)-\dots+y_\lambda\sum_{1}^{\infty_m}{}'U_{1\lambda}^{(m)}(u,x_1,\dots x_\varkappa)$$

$$+y_1^2\sum_{1}^{\infty_m}{}'U_{111}^{(m)}(u,x_1,\dots x_\varkappa)+\dots+y_{\lambda-1}y_\lambda\sum_{1}^{\infty_m}{}'U_{1\lambda-1\lambda}^{(m)}(u,x_1,\dots x_\varkappa)$$

. . . . . .

$$u\frac{dy_\lambda}{du}=\sum_{1}^{\varkappa_\alpha}\mu'_{\lambda\alpha}x_\alpha+\sum_{1}^{\lambda_\alpha}\nu'_{\lambda\alpha}y_\alpha-a'_\lambda u+\sum_{2}^{\infty_m}{}'U_{\lambda0}^{(m)}(u,x_1,\dots x_\varkappa)$$

$$+y_1\sum_{1}^{\infty_m}{}'U_{\lambda1}^{(m)}(u,x_1,\dots x_\varkappa)+\dots+y_\lambda\sum_{1}^{\infty_m}{}'U_{\lambda\lambda}^{(m)}(u,x_1,\dots x_\varkappa)$$

$$+y_1^2\sum_{1}^{\infty_m}U_{\lambda11}^{(m)}(u,x_1,\dots x_\varkappa)+\dots+y_{\lambda-1}y_\lambda\sum_{1}^{\infty_m}U_{\lambda\lambda-1\lambda}^{(m)}(u,x_1,\dots x_\varkappa),$$

worin die Funktionen

$$U^m(u,x_1,\dots x_\varkappa)\ \text{und}\ {}'U^{(m)}(u,x_1,\dots x_\varkappa)$$

ganze homogene Funktionen m^{ten} Grades der eingeschlossenen Größen bedeuten.

Multipliziert man nunmehr diese Differentialgleichungen mit den zunächst noch unbestimmten Konstanten

$$A_1, A_2, \ldots A_\varkappa, \; A_1', A_2', \ldots A_\lambda'$$

und addiert die so erhaltenen Gleichungen, setzt man ferner

$$(20) \quad A_1 x_1 + A_2 x_2 + \cdots + A_\varkappa x_\varkappa + A_1' y_1 + A_2' y_2 + \cdots + A_\lambda' y_\lambda = X$$

$$\text{und} \quad A_1 a_1 + A_2 a_2 + \cdots + A_\varkappa a_\varkappa + A_1' a_1' + A_2' a_2' + \cdots + A_\lambda' a_\lambda' = \mathfrak{A},$$

so wird man durch nähere Bestimmung der noch unbestimmten Konstanten A und A′ das obige Differentialgleichungssystem für die weitere Untersuchung wesentlich vereinfachen können.

Unterwirft man nämlich die Konstanten A und A′ der Bedingung, daß

$$A_1 \left(\sum_1^\varkappa{}_\alpha \mu_{1\alpha} x_\alpha + \sum_1^\lambda{}_\alpha \nu_{1\alpha} y_\alpha \right) + A_2 \left(\sum_1^\varkappa{}_\alpha \mu_{2\alpha} x_\alpha + \sum_1^\lambda{}_\alpha \nu_{2\alpha} y_\alpha \right) + \cdots$$

$$+ A_1' \left(\sum_1^\varkappa{}_\alpha \mu_{1\alpha}' x_\alpha + \sum_1^\lambda{}_\alpha \nu_{1\alpha}' y_\alpha \right) + A_2' \left(\sum_1^\varkappa{}_\alpha \mu_{2\alpha}' x_\alpha + \sum_1^\lambda{}_\alpha \nu_{2\alpha}' y_\alpha \right) + \cdots$$

$$= M X = M \left(\sum_1^\varkappa{}_\alpha A_\alpha x_\alpha + \sum_1^\lambda{}_\alpha A_\alpha' y_\alpha \right)$$

für alle x und y identisch erfüllt sein soll, so ergeben sich für die $\varkappa+\lambda$ Größen A und A′ die $\varkappa+\lambda$ homogenen linearen Gleichungen

$$A_1 \mu_{1\alpha} + A_2 \mu_{2\alpha} + \cdots + A_\alpha (\mu_{\alpha\alpha} - M) + \cdots + A_\varkappa \mu_{\varkappa\alpha} + A_1' \mu_{1\alpha}' + A_2' \mu_{2\alpha}' + \cdots$$
$$+ A_\lambda' \mu_{\lambda\alpha}' = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots \varkappa)$$

$$A_1 \nu_{1\beta} + A_2 \nu_{2\beta} + \cdots + A_\varkappa \nu_{\varkappa\beta} + A_1' \nu_{1\beta}' + A_2' \nu_{2\beta}' + \cdots + A_\beta' (\nu_{\beta\beta}' - M) + \cdots$$
$$+ A_\lambda' \nu_{\lambda\beta}' = 0 \qquad (\beta = 1, 2, \ldots \lambda),$$

wonach M eine Lösung der Determinante $\varkappa+\lambda^{\text{ter}}$ Ordnung sein wird

$$\begin{vmatrix} (\mu_{11}-M) & \mu_{21} & \cdots & \mu_{\varkappa 1} & \mu'_{11} & \mu'_{21} & \cdots & \mu'_{\lambda 1} \\ \mu_{12} & (\mu_{22}-M) & \cdots & \mu_{\varkappa 2} & \mu'_{12} & \mu'_{22} & \cdots & \mu'_{\lambda 2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mu_{1\varkappa} & \mu_{2\varkappa} & \cdots & (\mu_{\varkappa\varkappa}-M) & \mu'_{1\varkappa} & \mu'_{2\varkappa} & \cdots & \mu'_{\lambda\varkappa} \\ \nu_{11} & \nu_{21} & \cdots & \nu_{\varkappa 1} & (\nu'_{11}-M) & \nu'_{21} & \cdots & \nu'_{\lambda 1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \nu_{1\lambda} & \nu_{2\lambda} & \cdots & \nu_{\varkappa\lambda} & \nu'_{1\lambda} & \nu'_{2\lambda} & \cdots & (\nu'_{\lambda\lambda}-M) \end{vmatrix} = 0$$

und jeder Lösung

$$M_1, M_2, \ldots M_\varkappa, M'_1, M'_2, \ldots M'_\lambda$$

dieser Determinante ein bis auf eine der Konstanten eindeutig bestimmtes Wertesystem der Größen A und A′ entsprechen wird.

Ergeben sich nun aus den der Gleichung (20) entsprechenden Beziehungen

$$\begin{aligned} &A_{11}\ x_1 + \cdots + A_{\varkappa 1}\ x_\varkappa + A'_{11}\ y_1 + \cdots + A'_{\lambda 1}\ y_\lambda = X_1 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &A_{1\varkappa}\ x_1 + \cdots + A_{\varkappa\varkappa}\ x_\varkappa + A'_{1\varkappa}\ y_1 + \cdots + A'_{\lambda\varkappa}\ y_\lambda = X_\varkappa \\ &A_{1\varkappa+1}\ x_1 + \cdots + A_{\varkappa\varkappa+1}\ x_\varkappa + A'_{1\varkappa+1}\ y_1 + \cdots + A'_{\lambda\varkappa+1}\ y_\lambda = Y_1 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &A_{1\varkappa+\lambda}\ x_1 + \cdots + A_{\varkappa\varkappa+\lambda}\ x_\varkappa + A'_{1\varkappa+\lambda}\ y_1 + \cdots + A'_{\lambda\varkappa+\lambda}\ y_\lambda = Y_\lambda \end{aligned}$$

die Werte

$$\begin{aligned} x_\alpha &= \mathfrak{B}_{\alpha 1} X_1 + \cdots + \mathfrak{B}_{\alpha\varkappa} X_\varkappa + \mathfrak{C}_{\alpha 1} Y_1 + \cdots + \mathfrak{C}_{\alpha\lambda} Y_\lambda \quad (\alpha = 1, 2, \ldots \varkappa) \\ y_\beta &= \mathfrak{B}'_{\beta 1} X_1 + \cdots + \mathfrak{B}'_{\beta\varkappa} X_\varkappa + \mathfrak{C}'_{\beta 1} Y_1 + \cdots + \mathfrak{C}'_{\beta\lambda} Y_\lambda \quad (\beta = 1, 2, \ldots \lambda), \end{aligned}$$

so gehen die obigen Gleichungen, nachdem zur Vereinfachung die Buchstaben $X, Y, M, M', \ldots \mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \ldots$ durch $x, y, m, n, \ldots a, b, \ldots$ ersetzt sind, in das Differentialgleichungssystem über

$$u\frac{dx_\rho}{du} = m_\rho x_\rho + a_\rho u + \sum_2^\infty{}_m\, u_{\rho 0}^{(m)}\left(u, \mathfrak{B}_{\alpha 1}x_1 + \cdots + \mathfrak{B}_{\alpha\varkappa}x_\varkappa + \mathfrak{C}_{\alpha 1}y_1 + \cdots + \mathfrak{C}_{\alpha\lambda}y_\lambda\right)$$

$$+\left(\mathfrak{B}'_{11}x_1 + \cdots + \mathfrak{B}'_{1\varkappa}x_1 + \mathfrak{C}'_{11}y_1 + \cdots + \mathfrak{C}'_{1\lambda}y_\lambda\right)\sum_1^\infty{}_m\, u_{\rho 1}^{(m)}\left(u, \mathfrak{B}_{\alpha 1}x_1 + \cdots + \mathfrak{C}_{\alpha 1}y_1 + \cdots\right)$$

$$+\left(\mathfrak{B}'_{21}x_1 + \cdots + \mathfrak{B}'_{2\varkappa}x_\varkappa + \mathfrak{C}'_{21}y_1 + \cdots + \mathfrak{C}'_{2\lambda}y_\lambda\right)\sum_1^\infty{}_m\, u_{\rho 2}^{(m)}\left(u, \mathfrak{B}_{\alpha 1}x_1 + \cdots + \mathfrak{C}_{\alpha 1}y_1 + \cdots\right)$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\left(\mathfrak{B}'_{\lambda 1}x_1 + \cdots + \mathfrak{B}'_{\lambda\varkappa}x_\varkappa + \mathfrak{C}'_{\lambda 1}y_1 + \cdots + \mathfrak{C}'_{\lambda\lambda}y_\lambda\right)\sum_1^\infty{}_m\, u_{\rho\lambda}\left(u, \mathfrak{B}_{\alpha 1}x_1 + \cdots + \mathfrak{C}_{\alpha 1}y_1 + \cdots\right)$$

$$(\rho = 1, 2, \ldots \varkappa)$$

$$u\frac{dy_\sigma}{du} = n_\sigma y_\sigma + b_\sigma u + \sum_2^\infty{}_m\, {}'u_{\sigma 0}^{(m)}\left(u, \mathfrak{B}_{\alpha 1}x_1 + \cdots + \mathfrak{C}_{\alpha 1}y_1 + \cdots\right)$$

$$+\left(\mathfrak{B}'_{11}x_1 + \cdots + \mathfrak{B}'_{1\varkappa}x_\varkappa + \mathfrak{C}'_{11}y_1 + \cdots + \mathfrak{C}'_{1\lambda}y_\lambda\right)\sum_1^\infty{}_m\, {}'u_{\sigma 1}^{(m)}\left(u, \mathfrak{B}_{\alpha 1}x_1 + \cdots + \mathfrak{C}_{\alpha 1}y_1 + \cdots\right)$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\left(\mathfrak{B}'_{\lambda 1}x_1 + \cdots + \mathfrak{B}'_{\lambda\varkappa}x_\varkappa + \mathfrak{C}'_{\lambda 1}y_1 + \cdots + \mathfrak{C}'_{\lambda\lambda}y_\lambda\right)\sum_1^\infty{}_m\, {}'u_{\sigma\lambda}^{(m)}\left(u, \mathfrak{B}_{\alpha 1}x_1 + \cdots + \mathfrak{C}_{\alpha 1}y_1 + \cdots\right)$$

$$+\left(\mathfrak{B}'_{11}x_1 + \cdots + \mathfrak{B}'_{1\varkappa}x_\varkappa + \mathfrak{C}'_{11}y_1 + \cdots + \mathfrak{C}'_{1\lambda}y_\lambda\right)^2\sum_1^\infty{}_m\, u_{\sigma 11}^{(m)}\left(u, \mathfrak{B}_{\alpha 1}x_1 + \cdots + \mathfrak{C}_{\alpha 1}y_1 + \cdots\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\left(\mathfrak{B}'_{\lambda-11}x_1 + \cdots + \mathfrak{C}'_{\lambda-11}y_1 + \cdots\right)\left(\mathfrak{B}'_{\lambda 1}x_1 + \cdots + \mathfrak{C}'_{\lambda 1}y_1 + \cdots\right)$$

$$\times\sum_1^\infty{}_m\, u_{\sigma\lambda-1\lambda}\left(u, \mathfrak{B}_{\alpha 1}x_1 + \cdots + \mathfrak{C}_{\alpha 1}y_1 + \cdots\right) \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots \lambda)\,,$$

worin die Funktionen $u^{(m)}$ und $'u^{(m)}$ homogene ganze Funktionen m^{ten} Grades der eingeschlossenen Größen bedeuten und die Faktoren derselben aus 1^{ten} oder 2^{ten} Potenzen von $\varkappa+\lambda$ in $x_1, \ldots x_\varkappa$, $y_1, \ldots y_\lambda$ linearen Formen bestehen, und für ein solches, in kurzer Form zusammengefaßtes Differentialgleichungssystem

$$u\frac{dx_1}{du} = m_1 x_1 + a_1 u + f_1(u, x_1, \ldots y_1, \ldots)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$u\frac{dx_\varkappa}{du} = m_\varkappa x_\varkappa + a_\varkappa u + f_\varkappa(u, x_1, \ldots y_1, \ldots)$$

$$u\frac{dy_1}{du} = n_1 y_1 + b_1 u + \varphi_1(u, x_1, \ldots y_1, \ldots)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$u\frac{dy_\lambda}{du} = n_\lambda y_\lambda + b_\lambda u + \varphi_\lambda(u, x_1, \ldots y_1, \ldots),$$

in welchem die Funktionen f und φ eindeutige Potenzreihen der eingeschlossenen Glieder bedeuten, welche keine Glieder erster Dimension in $x_1, \ldots x_\varkappa, y_1, \ldots y_\lambda$ enthalten, sollen diejenigen Integrale untersucht werden, welche für $u=0$ selbst den Wert Null annehmen.

Nachdem im vorhergehenden gezeigt worden, daß ein Differentialgleichungssystem von der Form

$$u\frac{dx_\varkappa}{du} = \mu_{\varkappa 1} x_1 + \mu_{\varkappa 2} x_2 + \cdots + \mu_{\varkappa n} x_n + a_\varkappa u + (u, x_1, \ldots x_n)_2^{(\varkappa)} + (u, x_1, \ldots x_n)_3^{(\varkappa)} + \cdots \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots n)$$

in ein System

$$u\frac{dX_\varkappa}{du} = M_\varkappa X_\varkappa + \alpha_\varkappa u + {}'(u, X_1, \ldots X_n)_2^{(\varkappa)} + {}'(u, X_1, \ldots X_n)_3^{(\varkappa)} + \cdots \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots n)$$

transformiert werden kann, worin die abhängigen Variabeln $x_1, \ldots x_n$ und $X_1, \ldots X_n$ homogen miteinander verbunden sind, wenn die Lösungen $M_1, M_2, \ldots M_n$ der Determinante

$$\begin{vmatrix} \mu_{11} - M & \mu_{12} & \ldots & \mu_{1n} \\ \mu_{21} & \mu_{22} - M & \ldots & \mu_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mu_{n1} & \mu_{n2} & \ldots & \mu_{nn} - M \end{vmatrix} = 0$$

sämtlich verschieden sind, möge endlich noch bemerkt werden, daß für den Fall gleicher Lösungen dies im allgemeinen nicht möglich sein wird. Sei z. B. das Differentialgleichungssystem 2^{ter} Ordnung gegeben

$$u\frac{dx_1}{du} = \mu_{11}x_1 + \mu_{12}x_2 + a_1 u + (u, x_1, x_2)_2^{(1)} + (u, x_1, x_2)_3^{(1)} + \cdots$$

$$u\frac{dx_2}{du} = \mu_{21}x_1 + \mu_{22}x_2 + a_2 u + (u, x_1, x_2)_2^{(2)} + (u, x_1, x_2)_3^{(2)} + \cdots,$$

so geht dieses nach der oben angegebenen Methode, wenn M_1 eine Lösung der Gleichung

$$\begin{vmatrix} \mu_{11} - M & \mu_{21} \\ \mu_{12} & \mu_{22} - M \end{vmatrix} = 0,$$

und die Konstanten A_1 und A_2 den Gleichungen genügen

$$A_1(\mu_{11} - M_1) + A_2\mu_{21} = 0, \quad A_1\mu_{12} + A_2(\mu_{22} - M_1) = 0,$$

in die Differentialgleichungen über

$$u\frac{dX_1}{du} = M_1 X_1 + \alpha_1 u + {}'(u, X_1, x_2)_2^{(1)} + {}'(u, X_1, x_2)_3^{(1)} + \cdots$$

$$u\frac{dx_2}{du} = \frac{\mu_{21}}{A_1}X_1 + \frac{A_1\mu_{22} - A_2\mu_{21}}{A_1}x_2 + \alpha_2 u + {}'(u, X_1, x_2)_2^{(2)} + {}'(u, X_1, x_2)_3^{(2)} + \cdots,$$

wenn $X_1 = A_1 x_1 + A_2 x_2$ gesetzt wird, und worin sich aus den obigen Gleichungen

$$\frac{A_2}{A_1} = -\frac{\mu_{11} - M_1}{\mu_{21}} = -\frac{\mu_{12}}{\mu_{22} - M_1}$$

ergibt. Multipliziert man nunmehr die beiden so erhaltenen Differentialgleichungen mit B_1 und B_2, so erhält man durch dieselben Schlüsse, wenn diese Konstanten den Gleichungen genügen

$$B_1(M_1 - M_2) + B_2 \frac{\mu_{21}}{A_1} = 0, \quad B_2\left(\frac{A_1\mu_{22} - A_2\mu_{21}}{A_1} - M_2\right) = 0,$$

und daher

$$M_2 = \frac{A_1\mu_{22} - A_2\mu_{21}}{A_1}$$

ist, und die Variabeln durch die Gleichung verbunden sind

$$B_1 X_1 + B_2 x_2 = X_2,$$

die beiden Differentialgleichungen

$$u\frac{dX_1}{du} = M_1 X_1 + \beta_1 u + \varphi(u, X_1, X_2)_2^{(1)} + \varphi(u, X_1, X_2)_3^{(1)} + \cdots$$

$$u\frac{dX_2}{du} = M_2 X_2 + \beta_2 u + \varphi(u, X_1, X_2)_2^{(2)} + \varphi(u, X_1, X_2)_3^{(2)} + \cdots,$$

in denen vermöge des oben für $\frac{A_2}{A_1}$ angegebenen Wertes die Größen M_1 und M_2 durch die Beziehung miteinander verbunden sind

$$M_2 = \mu_{22} + \mu_{21}\frac{(\mu_{11} - M_1)}{\mu_{21}} = \mu_{22} + \frac{\mu_{21}\mu_{12}}{\mu_{22} - M_1}$$

oder

$$M_1 + M_2 = \mu_{11} + \mu_{22}, \quad M_1 M_2 = \mu_{11}\mu_{22} - \mu_{12}\mu_{21},$$

also M_1 und M_2 Lösungen der Gleichung sind

$$\begin{vmatrix} \mu_{11} - M & \mu_{21} \\ \mu_{12} & \mu_{22} - M \end{vmatrix} = 0.$$

Die Reduktion auf das letztere Differentialgleichungssystem wäre somit stets möglich, wenn die erste der Bestimmungsgleichungen für B_1 und B_2 erfüllbar wäre, was dann und nur dann nicht der Fall ist, wenn die beiden Lösungen M_1 und M_2 einander gleich

sind und μ_{21} von Null verschieden ist; ist $\mu_{21}=0$ und sind die Lösungen der Determinante voneinander verschieden, so kann die Beziehung zwischen B_1 und B_2 durch $B_1=0$ befriedigt werden, und dann gehen für $x_2=X_2$ die beiden Differentialgleichungen in die verlangte Normalform über.

Ich darf es nicht unterlassen, an dieser Stelle meinem verehrten Freunde und Kollegen KARL BOEHM in Karlsruhe meinen herzlichsten Dank auszusprechen, der meines Augenleidens wegen die Mühen der Korrektur mir abzunehmen die Güte hatte und auch an vielen Stellen der Arbeit für die Präzision des Textes Sorge getragen hat.