INAUGURAL - DISSERTATION

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Naturwissenschaftlich-Mathematischen Gesamtfakultät

der

Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg

vorgelegt von

Diplom-Mathematiker Johannes to Baben

aus Lübeck

Tag der mündlichen Prüfung: 25.02.2011

Thema

Die lokale Struktur des étalen Homotopietyps einer über einem p-adischen Zahlring gefaserten Fläche.

Gutachter: Prof. Dr. Alexander Schmidt
Prof. Dr. Otmar Venjakob

Abstract:

This thesis is concerned with the question, whether for every point P of a fibred surface over a ring of p-adic integers $\mathcal{O}$ there exists a fundamental system of Zariski-neighborhoods of type $K(\pi, 1)$ for a set of primes S. A positive answer is given in the case of a normal fibred surface with semi-stable reduction $\mathcal{X}$ over a ring of p-adic numbers $\mathcal{O}$ containing all lth roots of unity for all $l \in S$ for a set of primes S not containing p. In order to prove this, explicit coverings of $\mathcal{X}$ are constructed and the étale cohomology together with the maps between the cohomology groups of open subsets of these coverings are computed.

Zusammenfassung:

Diese Doktorarbeit beschäftigt sich mit der Frage, ob für eine gefaserte Fläche $\mathcal{X}$ über einem p-adischen Zahlring $\mathcal{O}$ um jeden Punkt P von $\mathcal{X}$ eine Zariski-Umgebungsbasis von $K(\pi, 1)$en für eine Menge von Primzahlen S existiert. Es wird eine positive Antwort gegeben, für den Fall, dass $p \notin S$ und $\mathcal{X}$ eine normale gefaserte Fläche mit semi-stabiler Reduktion ist und $\mathcal{O}$ die l-ten Einheitswurzeln enthält für jedes $l \in S$. Dazu werden Überlagerungen der gefaserten Fläche $\mathcal{X}$ konstruiert und die étale Kohomologie sowie die Abbildungen zwischen den étalen Kohomologiegruppen offener Teilmengen der Überlagerungen beschrieben.

Inhaltsverzeichnis

0 Einleitung

Aufbauend auf den Arbeiten von A. Grothendieck [SGA1], in denen die étale Fundamentalgruppe eingeführt wurde, entwickelten A. Artin und B. Mazur in [AM] eine étale Homotopietheorie und daraus abgeleitet eine Definition höherer étaler Homotopiegruppen. Dabei wird jedem punktierten lokal noetherschen Schema (X, x) eine punktierte pro-simpliziale Menge (X_{et}, x), die wir im folgenden den étalen Homotopietyp von (X, x) nennen werden, zugeordnet. Die Homotopiegruppen von (X, x) werden definiert als die Homotopiegruppen der topologischen Realisierung des étalen Homotopietyps (X_{et}, x).

Als Beispiel sei hier der Fall $X = \operatorname{Spec} K$ für einen Körper K und $x = \operatorname{Spec} \bar{K}$ für einen separablen Abschluss $\bar{K}$ von K angegeben:

$$\pi_i(\operatorname{Spec} K, \operatorname{Spec} \bar{K}) = \begin{cases} Gal(\bar{K}/K), & \text{falls } i = 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Definition einer étalen Homotopietheorie ermöglicht die Übertragung einiger aus der Topologie bekannten Termini in die algebraische Geometrie. Dazu gehört unter anderem der Begriff des einer Gruppe G und einer natürlichen Zahl $n \geq 1$ zugeordneten Eilenberg-MacLane-Raumes $K(G, n)$. Diese Räume existieren für jede Gruppe G und $n = 1$ und für jede abelsche Gruppe G und jedes $n \in \mathbb{N}$ und haben für jeden Punkt $x \in K(G, n)$ die folgende Eigenschaft:

$$\pi_i(K(G, n), x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } i \neq n, \\ G, & \text{falls } i = n. \end{cases}$$

Ist X ein beliebiger topologischer Raum, so sagen wir, dass X ein $K(G, n)$ ist, falls X homotopieäquivalent zu $K(G, n)$ ist. Ist X ein Schema, so sagen wir, dass X ein $K(G, n)$ ist, falls der étale Homotopietyp X_{et} homotopieäquivalent ist zu $K(G, n)$. Aus obigen Beispiel sehen wir, dass $\operatorname{Spec} K$ ein $K(Gal(\bar{K}/K), 1)$ ist.

Betrachtet man eine Mannigfaltigkeit M, so sieht man leicht, dass es um jeden Punkt $m \in M$ beliebig kleine offene Umgebungen gibt, die zusammenziehbar sind, also nur triviale Homotopiegruppen besitzen. Diese Beobachtung überträgt sich allerdings nicht auf die algebraische Geometrie, da sogar einpunktige Räume wie $\operatorname{Spec} K$ für einen Körper K, eine nicht triviale Fundamentalgruppe besitzen können. Statt zu fragen, ob es um jeden Punkt eines Schemas X eine Umgebungsbasis von einfach zusammenziehbaren Teilmengen gibt, ist es natürlicher, zu fragen, ob es um jeden Punkt eine Umgebungsbasis von $K(G, 1)$en gibt. Wie oben bemerkt ist dies für $\operatorname{Spec} K$ gegeben, und auch für glatte Varietäten über Körpern [Fr] und Ringe von ganzen Zahlen [Sch1] und [Sch2] ist dies der Fall.

Eine weitere Problematik, die in der algebraischen Geometrie auftritt, ist die folgende: Ist C eine glatte projektive Kurve vom Geschlecht g über einem algebraisch abgeschlossenen Körper $\mathbb{F}$ der Charakteristik p, so wird die maximale prim-zu-p Faktorgruppe von $\pi_1(C, \bar{z})$ durch $2g$ Erzeuger und eine Relation beschrieben, aber die maximale p-Faktorgruppe von $\pi_1(C, \bar{z})$ ist im Allgemeinen keine endlich erzeugte pro-p-Gruppe. Diese Diskrepanz macht es oftmals nötig den p-Teil der Fundamentalgruppe zu ignorieren und nur den prim-zu-p-Teil, oder auch nur den l-Teil für eine Primzahl $l \neq p$ zu betrachten.

Dazu führten A. Artin und B. Mazur in [AM] den Begriff der C-Vervollständigung eines pro-topologischen Raumes für eine vollständige Klasse C von Gruppen ein. Hierbei wird jedem pro-topologischen Raum X ein pro-topologischer Raum X^C, die C-Vervollständigung, zugeordnet. Für X^C gilt, dass jede stetige Abbildung von X in einen pro-topologischen Raum Y mit $\pi_i(Y,y) \in pro - C$ durch X^C faktorisiert. Wir sagen, dass ein pro-topologischer Raum X ein $K(G,n)$ für C ist, falls X^C ein $K(G,n)$ ist.

Da für eine Menge S von Primzahlen die Klasse, bestehend aus den endlichen Gruppen, deren Ordnungen nur Primfaktoren in S haben, eine vollständige Klasse ist, kann man um die Restklassenkörpercharakteristiken eines Schemas X zu vermeiden die Vervollständigung von X nach der zu einer Primzahlmenge S assoziierten Klasse betrachten.

Ziel dieser Arbeit ist es für jeden semi-stabilen Punkt eines regulären zweidimensionalen Schemas $\mathfrak{X}$, projektiv über dem Ring der ganzen Zahlen eines p-adischen Zahlkörpers k, eine Umgebungsbasis von $K(G,1)$en für eine Primzahlmenge S mit $p \notin S$ zu finden.

Um dieses Ziel zu erreichen wird benutzt, dass für ein Schema X die folgenden Aussagen äquivalent sind ([AM, Theorem 4.3]):

(i) X ist ein $K(\pi_1(X^S,\bar{x}),1)$ für eine Primzahlmenge S.

(ii) $H^i(\pi_1(X^S,\bar{x}),M) \to H^i(X,\underline{M})$ ist ein Isomorphismus für jedes $i \geq 0$ und jeden S-torsion $\pi_1(X^S,\bar{x})$-Modul M und die zu M assoziierte étale Garbe $\underline{M}$ auf X.

(iii) Für die universelle pro-étale S-Überlagerung $\tilde{X}^S$ von X und jede konstante S-Torsionsgarbe M auf $\tilde{X}^S$ gilt: $H^i(\tilde{X}^S,M) = 0$ falls $i > 0$.

Da für jede konstante S-Torsionsgarbe M auf $\tilde{X}^S$ gilt

$$H^i(\tilde{X}^S,M) = \varinjlim_{Y} H^i(Y,M),$$

wobei der Limes alle endlichen étalen S-Überlagerungen von X durchläuft, können wir (iii) umformen zu:

(iv) Für jede endliche étale S-Überlagerung Y von X und jede konstante S-Torsionsgarbe M auf Y, gibt es eine endliche étale S-Überlagerung Y' von Y, so dass $H^i(Y,M) \to H^i(Y',M)$ identisch Null ist für jedes $i > 0$.

Um die nötigen Überlagerungen zu konstruieren wird in dieser Arbeit wie folgt vorgegangen: Zuerst werden einige Konventionen und Bezeichnungen eingeführt und allgemeine Sätze der étalen Kohomologie sowie der Theorie der gefaserten Flächen, insbesondere der gefaserten Flächen mit semi-stabiler Reduktion, angegeben. Besonders herauszustellen ist dabei die absolute kohomologische Reinheit ([Fu, Theorem 2.1.1]):

Theorem 0.1 *Sei X ein reguläres Schema und D ein reguläres abgeschlossenes Unterschema von reiner Kodimension d. Dann gibt es einen Isomorphismus zwischen den étalen Kohomologiegruppen*

$$H^i_D(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to H^{i-2d}_{et}(D, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(-d))$$

für jedes auf X invertierbare $n \in \mathbb{N}$ und alle $i \in \mathbb{N}$.

Außerdem wird kurz auf die étale Homotopietheorie eingegangen und [AM, Theorem 4.3] genauer dargestellt. Damit sind die theoretischen Grundlagen gelegt und die Arbeit wendet sich der folgenden Situation zu:

- $\mathcal{X}$ ist eine gefaserte Fläche über einem p-adischen Zahlring $\mathcal{O}$.
- P ist ein abgeschlossener Punkt von $\mathcal{X}$.
- $\mathcal{U}$ ist eine offene Umgebung von P.

Es wird die étale Kohomologie von $\mathcal{U}$ mithilfe der absoluten kohomologischen Reinheit berechnet. Dabei wird sich zeigen, dass diese sich aus der Kohomologie von $\mathcal{X}$ und der Kohomologie der in $\mathcal{X} - \mathcal{U}$ enthaltenen Divisoren von $\mathcal{X}$ zusammensetzt. Damit die von den Divisoren aus $\mathcal{X}$ kommende Kohomologie in der universellen S-Überlagerung zu Null wird, ist es ausreichend, S-Überlagerungen zu finden, so dass die Divisoren einen beliebig großen Verzweigungsindex in diesen besitzen.

Um dies zu bewerkstelligen werden Wurzelüberlagerungen konstruiert, die über $\mathcal{U}$ étale sind und so, dass jeder Divisor von $\mathcal{X}$, der in $\mathcal{X} - \mathcal{U}$ enthalten ist einen beliebig hohen Verzweigungsindex in den Wurzelüberlagerungen hat.

Mithilfe dieser Wurzelüberlagerungen wird das folgende Theorem 2.34 gezeigt:

Theorem 0.2 *Es sei S eine Menge von Primzahlen mit $p \notin S$ und $\mathcal{X}$ eine semi-stabile gefaserte Fläche über einer Erweiterung $\mathcal{O}$ von $\mathbb{Z}_p$ mit endlichem Verzweigungsindex, die die l-ten Einheitswurzeln enthält für jedes $l \in S$. Dann gibt es um jeden Punkt $P \in \mathcal{X}$ eine Umgebungsbasis von $K(\pi, 1)$en für S.*

Eine weitere Frage, die in dieser Arbeit partiell beantwortet wird, ist:

Welche lokalen Erweiterungen werden in der maximalen S Erweiterung von U realisiert?

Hierauf wird folgende Antwort in 2.36 gegeben:

Theorem 0.3 *Es sei S eine Menge von Primzahlen mit $p \notin S$ und $\mathcal{X}$ eine semi-stabile gefaserte Fläche über einer Erweiterung $\mathcal{O}$ von $\mathbb{Z}_p$ mit endlichem Verzweigungsindex, die die l-ten Einheitswurzeln enthält für jedes $l \in S$. Dann gibt es um jeden Punkt $P \in \mathcal{X}$ eine Umgebungsbasis von $K(\pi, 1)$en für S, so dass für jeden abgeschlossenen Punkt Q der generischen Faser von $\mathcal{X} - \mathcal{U}$ und jedes $Q' \in \mathcal{X}^{K(\mathcal{U}^S)} - \mathcal{U}^S$ über Q der Körper $k(Q')$ die maximale S-Erweiterung von $k(Q)$ ist.*

Danksagung

Ich möchte mich bei Alexander Schmidt für die hervorragende Betreuung dieser Arbeit bedanken. Er hat mir bei vielen Fragen und Problemen mit seinen konstruktiven Ratschlägen weitergeholfen, sowie mein Interesse an der Thematik der $K(\pi, 1)$ durch seine Anmerkungen geweckt und wachgehalten.

Weiterhin möchte ich mich bei Patrick Forré für das Gegenlesen dieser Arbeit bedanken. Seine Anmerkungen haben dieser Arbeit zu einer abgerundeteren Form verholfen.

1 Grundlagen

1.1 Konventionen

In diesem Kapitel wird zur Vermeidung von Unklarheiten die in dieser Arbeit verwendete Terminologie und Notation eingeführt, sowie einige Konventionen getroffen.

Definition 1.1 *Für eine Teilmenge Y eines topologischen Raumes X bezeichnet $\overline{Y}^X$ den topologischen Abschluss von Y in X. Besteht keine Verwechselungsgefahr, in welchem Raum der topologische Abschluss gebildet wird, so schreiben wir einfach $\overline{Y}$. Dies ist im folgenden vor allem dann relevant, wenn wir einen Morphismus $X \to Y$ integrer Schema haben und einen Punkt P der generischen Faser X_η von X. Dann bezeichnet $\overline{\{P\}}^X$ den Abschluss von P in X und $\overline{\{P\}}^{X_\eta}$ den Abschluss von P in X_η.*
Eine abgeschlossene Teilmenge V eines Schemas X betrachten wir (falls nicht explizit anders angegeben) immer als abgeschlossenes Unterschema mit reduzierter Struktur.

Konvention 1.2 *Der Begriff Schema bezeichnet im folgenden immer ein lokal noethersches Schema.*

Konvention 1.3 *In den folgenden Kapiteln benutzen wir für ein Schema X nur die étale Kohomologie, das heißt $H^r(X, \mathcal{F})$ bezeichnet die étale Kohomologie von X mit Werten in einer étalen Garbe $\mathcal{F}$.*
Für eine Gruppe G und einen G-Modul M bezeichnen wir, da keine Verwechselungsgefahr mit der étalen Kohomologie besteht, die Gruppenkohomologie von G mit Werten in M mit $H^r(G, M)$.

Bezeichnung 1.4 *Für jedes Schema X bezeichne X^1 die Menge aller Kodimension 1 Punkte von X.*

Bezeichnung 1.5 *Für eine Menge S von Primzahlen, bezeichnet $\mathbb{N}(S)$ die Menge aller natürlichen Zahlen in deren Primfaktorzerlegung nur Primzahlen aus S vorkommen.*

Konvention 1.6 *Unter einem p-adischen Zahlring verstehen wir in dieser Arbeit den Ring der ganzen Zahlen $\mathcal{O}_k$ einer nicht notwendigerweise endlichen Erweiterung k von $\mathbb{Q}_p$ mit endlichem Verzweigungsindex $e_{k/\mathbb{Q}_p}$. Insbesondere ist in dieser Arbeit jeder p-adische Zahlring ein Diskreter Bewertungsring.*

Definition 1.7 *Eine* Kurve *X über einem Körper k ist ein eindimensionales k-Schema von endlichem Typ.*

Definition 1.8 *Eine* Überlagerung *$Y \to X$ eines Schemas X ist ein endlicher, flacher und surjektiver Morphismus.*

Bezeichnung/Notation 1.9 *Es sei X ein integres Schema, $\overline{K(X)}$ ein algebraischer Abschluss von $K(X)$, $a \in \overline{K(X)}$ und L eine endliche Erweiterung von $K(X)$. Wir benutzen die folgenden Notationskonventionen:*

- $X_{reg} := \{x \in X \mid \mathcal{O}_{X,x}$ *ist regulärer Ring*$\}$*: regulärer Ort von* X,
- $X_{sing} := X - X_{reg}$*: singulärer Ort von* X,
- X^L*: Normalisierung von* X *in* L,
- $X[a]$*: Normalisierung von* X *in* $K(X)(a)$ *und,*
- *falls* $\dim X \leq 2$, *so ist* $X^{L,ds}$ *die minimale Desingularisierung von* X^L.

Bemerkung 1.10 *Es ist also $X^{ds,L}$ die Normalisierung der minimalen Desingularisierung von X in L, $X^{L,ds}$ die minimale Desingularisierung von X^L und genauso $X^{ds}[a]$ die Normalisierung der minimalen Desingularisierung von X in $K(X)(a)$ und $X[a]^{ds}$ die minimale Desingularisierung von $X[a]$.*

Wir haben die folgenden kanonischen Abbildungen:

$$\begin{array}{ccccc} X^{L,ds} & \longrightarrow & X^{ds,L} & \longrightarrow & X^L \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & X^{ds} & \longrightarrow & X \end{array}$$

Definition 1.11 *[Liu, Defintion 9.1.6] Sei X ein reguläres noethersches Schema und D ein effektiver Divisor auf X. Wir sagen dass D* normale Überkreuzungen *an einem Punkt $x \in X$ hat, wenn es ein Parametersystem $f_1, \ldots, f_n$ bei x gibt, also eine reguläre Folge $f_1, \ldots, f_n \in \mathfrak{m}_x$ mit $(f_1, \ldots, f_n) = \mathfrak{m}_x$, so dass $\mathcal{O}_X(-D)_x$ von $f_1^{r_1} \cdot \ldots \cdot f_m^{r_m}$ für ein $m \leq n$ und ganze Zahlen $r_1, \ldots, r_m$ erzeugt wird.*

Bemerkung 1.12 *Wir folgen hier der Notation aus [Liu], da wir auch im folgenden Sätze aus [Liu] zitieren. Es sei aber angemerkt, dass obige Definition in der Literatur auch strikte normale Überkreuzungen genannt wird, und normale Überkreuzungen für den allgemeineren Fall, dass D étale lokal strikte normale Überkreuzungen hat.*

1.2 Sätze aus der arithmetischen Geometrie

1.2.1 Reinheit des Verzweigungsortes

Da der Satz über die Reinheit des Verzweigungsortes im folgenden mehrmals benutzt wird, wird er der Vollständigkeit halber hier erwähnt.

Satz 1.13 (Reinheit des Verzweigungsortes) *[SGA1, Exposé X, Théorème de pureté 3.1] Sei X ein reguläres, Y ein normales Schema und $f : Y \to X$ ein quasi-endlicher Morphismus mit dichtem Bild. Sei U die maximale offene Teilmenge von Y, so dass $F|_U$ étale ist. Dann ist $Y - U$ von reiner Kodimension 1 in Y.*

1.2.2 Gefaserte Flächen

In diesem Kapitel wird die Theorie der gefaserten Flächen, wie sie in [Liu] behandelt wird und soweit sie für diese Arbeit nötig ist, vorgestellt.

Definition 1.14 *Ein* Dedekindschema S *ist ein noethersches, integres, normales Schema der Dimension* ≤ 1.

Definition 1.15 *Eine* gefaserte Fläche $X \to S$ *ist ein integres zweidimensionales Schema* X *zusammen mit einem flachen projektiven Morphismus* $X \to S$ *in ein Dedekindschema* S*. Wir sagen, dass* X *eine normale (reguläre) gefaserte Fläche ist, wenn* X *normal (regulär) ist.*

Satz 1.16 *[Liu, Proposition 8.3.4] Sei* $X \to S$ *eine gefaserte Fläche*

(i) Ist $x \in X_\eta$ *ein abgeschlossener Punkt der generischen Faser, so ist* $\overline{\{x\}}^X \to S$ *ein endlicher surjektiver Morphismus irreduzibler Schemata.*

(ii) Ist D *eine irreduzible abgeschlossene Teilmenge von* X *der Dimension* 1*, so ist* D *entweder eine irreduzible Komponente einer speziellen Faser, oder* $D = \overline{\{x\}}^X$ *für einen abgeschlossenen Punkt* $x \in X_\eta$ *der generischen Faser.*

(iii) Ist $x \in X$ *ein abgeschlossener Punkt, so ist* $\dim \mathcal{O}_{X,x} = 2$.

Theorem 1.17 *[Liu, Theorem 8.3.44] Es sei* X *ein exzellentes, reduziertes, noethersches Schema der Dimension* 2 *und* U *ein offenes Unterschema. Dann gibt es ein exzellentes noethersches zweidimensionales Schema* X' *und einen projektiven Morphismus* $\pi : X' \to X$*, so dass* $\pi^{-1}(U \cup X_{reg}) \to U \cup X_{reg}$ *ein Isomorphismus ist und die singulären Punkte von* X' *in* $\pi^{-1}(U)$ *enthalten sind.*

Definition 1.18 *Einen Morphismus* $\pi : X' \to X$ *wie in 1.17 nennen wir eine starke Desingularisierung der Singularitäten außerhalb von* U*.*

Theorem 1.19 *[Liu, Theorem 9.2.26] Sei* $X \to S$ *eine reguläre gefaserte Fläche über einem exzellenten Dedekindschema* S *und* D *ein effektiver reduzierter Cartierdivisor. Dann gibt es einen projektiven birationalen Morphismus* $f : X' \to X$ *bestehend aus einer endlichen Folge von Aufblasungen in singulären Punkten von* D*, so dass* X' *regulär und* f^*D *ein Divisor mit normalen Überkreuzungen ist.*

1.2.3 Gefaserte Flächen mit semi-stabiler Reduktion

Im Folgenden wird der Begriff einer gefaserte Fläche mit semi-stabiler Reduktion eingeführt, sowie beschrieben, welche Singularitäten in einer Überlagerung einer gefaserten Fläche mit semi-stabiler Reduktion auftreten können.

Definition 1.20 *Es sei C eine reduzierte Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k und $\pi : C' \to C$ die Normalisierung von C. Einen Punkt $x \in C$ nennen wir* gewöhnlichen Mehrfachpunkt *von C, wenn $\delta_x = \sharp\pi^{-1}(x) - 1$, wobei δ_x die Länge des Moduls $S_x = \mathcal{O}'_{C,x}/\mathcal{O}_{C,x}$ über $\mathcal{O}_{C,x}$ ist. Wir sagen, dass x ein* gewöhnlicher Doppelpunkt *von C ist, falls x ein gewöhnlicher Mehrfachpunkt von C ist und $\sharp\pi^{-1}(x) = 2$.*

Satz 1.21 *([Liu, Proposition 7.5.15]) Es sei C eine reduzierte Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k, $x \in C$ ein abgeschlossener Punkt, $\pi : C' \to C$ die Normalisierung von C und $\pi^{-1}(x) = \{y_{,1}, \dots, y_n\}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) Der Punkt x ist ein gewöhnlicher Mehrfachpunkt.

(ii) Ist $U \subset C$ eine affine offene Umgebung von x mit $U \cap C_{sing} = \{x\}$, so ist

$$\mathcal{O}_C(U) = \{f \in \mathcal{O}_{C'}(\pi^{-1}(V)) \mid f(y_1) = \ldots = f(y_n)\}$$

(iii) Es gibt einen Isomorphismus

$$\hat{\mathcal{O}}_{C,x} \cong k[[T_1, \dots, T_n]]/(T_iT_j)_{i\neq j}$$

(iv) Es gibt ein $m > 0$ und einen Isomorphismus

$$\hat{\mathcal{O}}_{C,x} \cong k[[T_1, \dots, T_m]]/(T_iT_j)_{i\neq j}$$

Definition 1.22 *(i) Eine Kurve C über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k nennen wir* semi-stabil, *falls C reduziert ist, und alle singulären Punkte von C gewöhnliche Doppelpunkte sind.*

(ii) Eine Kurve C über einem beliebigen Körper k nennen wir semi-stabil, *falls $C_{\bar{k}}$ semi-stabil ist.*

(iii) Wir nennen ein Schema $X \xrightarrow{f} S$ eine semi-stabile Kurve *über S, falls f von endlichem Typ und flach ist und falls für jedes $s \in S$ die Faser X_s eine semi-stabile Kurve über $k(s)$ ist.*

Definition 1.23 *Wir sagen, dass eine Kurve Δ über einem Körper k eine* Kette von $\mathbb{P}^1_k$ *ist, wenn für die irreduziblen Komponenten $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ von Δ gilt:*

- $\Delta_i \cong \mathbb{P}^1_k$,
- $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset$ *falls* $|i - j| \geq 2$,
- $\Delta_i \cap \Delta_{i+1}$ *besteht aus genau einem rationalen Punkt.*

Ist $\Delta \subset C$ eine abgeschlossene Teilmenge einer Kurve C, so nennen wir Δ eine Kette von $\mathbb{P}^1_k$ *in C, falls Δ eine Kette von $\mathbb{P}^1_k$ ist und für $T := \bigcup T_i$, wobei T_i die irreduziblen Komponenten $\neq \Delta_j$ für alle j von C durchläuft, gilt, dass $\Delta \cap T = \{x_1, x_2\}$ mit $x_1 \in \Delta_1$ und $x_2 \in \Delta_n$.*

Lemma 1.24 *[Liu, Lemma 10.3.21] Es sei X eine integere flache Kurve über einem diskreten Bewertungsring $\mathcal{O}_K$ mit Restklassenkörper k. Es sei $x \in X$ ein abgeschlossener Punkt derart, dass $\hat{\mathcal{O}}_{X,x} \cong \mathcal{O}_K[[u,v]]/(uv-c)$ für ein $c \in \mathcal{O}_K$ mit $e = v(c) > 0$ gilt und $X - \{x\}$ regulär ist. Dann gibt es eine Folge eigentlicher birationaler Morphismen*

$$X_n \to \ldots \to X_1 \to X_0 = X,$$

wobei jedes X_i normal ist, genau einen abgeschlossenen singulären Punkt $x_i \in X_i$ besitzt und $X_{i+1} \to X_i$ die Aufblasung von X_i entlang x_i. Die Folge stoppt bei $n = [\frac{e}{2}]$ und die Faser von $X_n \to X$ über x ist eine Kette von $e-1$ projektiven Geraden über k der Multiplizität 1 in $(X_n)_s$, die sich transversal in rationalen Punkten schneiden.

Lemma 1.25 *[Liu, Corrolary 10.3.22] Es sei X ein semi-stabiles Schema über einem Dedekindschema S der Dimension 1. Weiterhin sei $s \in S$ und $x \in X_s$ ein singulärer Punkt. Dann gilt*

(i) Es gibt ein Dedekindschema S', das étale über S ist, so dass jeder Punkt $x' \in X' := X \times_S S'$, der über x liegt, ein gewöhnlicher Doppelpunkt in der Faser $X'_{s'}$ ist, in der er liegt.

(ii) Mit der Notation aus (i), gibt es einen Isomorphismus

$$\hat{\mathcal{O}}_{X',x'} \simeq \hat{\mathcal{O}}_{S',s'}[[u,v]]/(uv-c)$$

für ein $c \in \mathfrak{m}_{s'}$. Ist X_η glatt, so ist $c \neq 0$.

Theorem 1.26 *[Liu-Lorenzini, Theorem 2.3] Es sei R ein diskreter Bewertungsring mit Quotientenkörper K und Restklassenkörper k. Weiterhin sei $f_K : X_K \to Y_K$ eine zahme Galoisüberlagerung einer Kurve Y_K mit semi-stabler Reduktion und wir nehmen an, dass der Verzweigungsort B_K von f_K in $Y_K(K)$ enthalten ist. Es sei Y ein semi-stabiles Modell von Y_K, so dass der Zariskiabschluss B von B_K in dem glatten Ort von Y enthalten ist. Dann gibt es eine zahm verzweigte Erweiterung R' von R, so dass die Normalisierung X von Y in $K(X_K)$ semi stabil ist und $X \to Y$ außerhalb von $B \cup (Y_k)_{sing}$ étale ist.*

Folgerung 1.27 *Es sei X eine semi-stabile Kurve über einem diskreten Bewertungsring $\mathcal{O}$ mit Quotientenkörper K und algebraisch abgeschlossenen Restklassenkörper k und $Y \to X$ eine zahme Galoisüberlagerung. Für jede starke Desingularisierung $\pi : \tilde{Y} \to Y$ und jeden abgeschlossenen Punkt $y \in Y$ gilt dann, dass $\pi^{-1}(y)$ entweder endlich oder eine Kette von mehreren $\mathbb{P}^1_k$ ist.*

Beweis: Nach dem vorherigen Theorem 1.26 gibt es eine Körpererweiterung L von K, so dass $Y_{\mathcal{O}_L} := Y \times_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_L$ eine semi-stabile gefaserte Fläche ist. Es sei $\tilde{Y}$ eine beliebige starke Desingularisierung von Y. Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \tilde{Y}_{\mathcal{O}_L} \arrow[r] \arrow[d] & \tilde{Y} \arrow[d] \\ Y_{\mathcal{O}_L} \arrow[r] & Y. \end{tikzcd}$$

Da $Y_{\mathcal{O}_L} \to Y$ flach ist, ist $\tilde{Y}_{\mathcal{O}_L} \to Y_{\mathcal{O}_L}$ eine Folge von Aufblasungen in abgeschlossenen Punkten. Für die semi-stabile gefaserte Fläche $Y_{\mathcal{O}_L}$ und für jeden abgeschlossenen Punkt $y \in Y_{\mathcal{O}_L}$ ist das Urbild von y unter $\tilde{Y}_{\mathcal{O}_L} \to Y_{\mathcal{O}_L}$ eine Kette von $\mathbb{P}^1_k$ oder endlich. Da nach Basiswechsel mit k die Abbildungen $Y_{\mathcal{O}_L} \to Y$ und $\tilde{Y}_{\mathcal{O}_L} \to \tilde{Y}$ Isomorphismen induzieren, gilt also auch für jedes $y \in Y$, dass das Urbild von y unter $\tilde{Y} \to Y$ endlich ist oder aus einer Kette von $\mathbb{P}^1_k$ besteht. □

1.3 Sätze der Étale Kohomologie

Hier werden die verwendeten Ergebnisse der étalen Kohomologie, wie sie in [Mi] zu finden sind, dargestellt.

Lemma 1.28 *[Mi, III.1.16] Es sei $(X_i)_{i\in I}$ ein projektives System quasi-kompakter Schemata mit affinen Übergangsabbildungen (d.h. die Morphismen $X_i \to X_j$ sind affin). Wir setzen $X_\infty := \varprojlim_{i\in I} X_i$. Für eine Garbe $\mathcal{F}$ auf X bezeichnen wir die inversen Bilder von $\mathcal{F}$ auf X_i und X_∞ mit $\mathcal{F}_i$ und $\mathcal{F}_\infty$. Dann ist*

$$\varinjlim_{i\in I} H^i(X_i, \mathcal{F}_i) \xrightarrow{\sim} H^i(X_\infty, \mathcal{F}_\infty).$$

Satz 1.29 *Sei X ein zusammenhängendes Schema, und $\bar{x}$ ein geometrischer Punkt von X. Dann gilt für jeden $\pi_1(X,x)$-Modul A und die zu A assoziierte lokal konstante Garbe $\underline{A}$, dass $H^1(X, \underline{A}) = \mathrm{Hom}_{stetig}(\pi_1(X,x), A)$.*

Satz 1.30 *[Mi, Proposition III.1.25] Sei X ein Schema, $U \subset X$ ein offenes Unterschema mit abgeschlossenen Komplement $V := X - U$ und $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X. Dann gibt es eine exakte Folge*

$$\ldots \to H^i_V(X, \mathcal{F}) \to H^i(X, \mathcal{F}) \to H^i(U, \mathcal{F}|_U) \to H^{i+1}_V(X, \mathcal{F}) \ldots$$

Diese nennen wir die Ausschneidungsfolge *von $\mathcal{F}$ zu $U \subset X$.*

Satz 1.31 *[Mi, Remark III.1.26] Sei X ein Schema, $W \subset V$ zwei abgeschlossene Unterschemata und $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X. Dann gibt es eine exakte Folge*

$$\ldots \to H^i_W(X, \mathcal{F}) \to H^i_V(X, \mathcal{F}) \to H^i_{V-W}(X - W, \mathcal{F}|_{X-W}) \to \ldots$$

Satz 1.32 *[Mi, Proposition III.1.27] Seien $Z \subsetneq X$ und $Z' \subsetneq X'$ zwei abgeschlossene Unterschemata und $f : X' \to X$ ein étaler Morphismus, so dass die Einschränkung von f auf Z' ein Isomorphismus $f|_{Z'} : Z' \to Z$ und $f(X - Z') \subseteq X - Z$ ist. Dann ist $H^i_Z(X, \mathcal{F}) \to H^i_{Z'}(X', f^*\mathcal{F})$ ein Isomorphismus für jedes i und jede Garbe $\mathcal{F}$.*

Theorem 1.33 *[Mi, Theorem VI.1.1 und VI.7.2] Sei X ein Schema von endlichem Typ über einem separabel abgeschlossenen Körper k. Dann ist $H^n(X, \mathcal{F}) = 0$ für jede l-Torsionsgarbe $\mathcal{F}$ und jedes $n > 2 \cdot \dim X$. Ist X darüber hinaus affin, so ist $H^n(X, \mathcal{F}) = 0$ für jedes $n > \dim X$.*

Satz 1.34 *[Mi, Corollar VI.2.7] Sei $S = \operatorname{Spec} A$ für einen henselschen lokalen Ring A und $s \in S$ der abgeschlossene Punkt. Ist X ein eigentliches Schema über S und $\mathcal{F}$ eine Torsionsgarbe auf X, so gibt es einen kanonischen Isomorphismus*

$$H^i(X, \mathcal{F}) \simeq H^i(X_s, \mathcal{F}|_{X_s}).$$

Definition 1.35 *[Mi, Chapter VI.3] Es sei k ein Körper und $X \xrightarrow{j} \bar{X}$ eine offene Immersion eines k-Schemas von endlichem Typ in ein eigentliches k-Schema von endlichem Typ. Wir definieren die* Kohomologie mit kompakten Träger *von X mit Werten in einer Garbe $\mathcal{F}$ als $H^i_c(X, \mathcal{F}) := H^i(\bar{X}, j_! \mathcal{F})$.*

Bemerkung 1.36 *[Mi, Proposition VI.3.1] Für ein k-Schema von endlichem Typ und eine Torsionsgarbe $\mathcal{F}$ ist $H^i_c(X, \mathcal{F})$ unabhängig von der Wahl eines eigentlichen k-Schemas $\bar{X}$ und der offenen Immersion $j : X \to \bar{X}$.*

Satz 1.37 *[Mi, Remark III.1.30] Sei X ein Schema von endlichem Typ über einem Körper k, $V \subseteq X$ ein abgeschlossenes Unterschema und U das offene Komplement von V in X. Dann gibt es eine exakte Folge*

$$\ldots \to H^i_c(U, \mathcal{F}|_U) \to H^i_c(X, \mathcal{F}) \to H^i_c(V, \mathcal{F}|_V) \to \ldots$$

für jede Torsionsgarbe $\mathcal{F}$ auf X.

Theorem 1.38 *(Poincaré Dualität)[Mi, Theorem VI.11.1] Es sei k ein separabel abgeschlossener Körper und X eine glattes, separiertes, d-dimensionales k-Schema von endlichem Typ. Dann ist für jedes $n \in \mathbb{N}$, das teilerfremd zu $\operatorname{char} k$ ist, und jede konstruierbare Garbe $\mathcal{F}$ von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-Moduln auf X die Paarung*

$$H^i_c(X, \mathcal{F}) \times Ext^{2d-r}_X(\mathcal{F}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d)) \to H^{2d}_c(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d)) \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

perfekt.

1.4 Die Chernklasse und Absolute Kohomologische Reinheit

Im Folgenden wollen wir für ein integres Schema X, einen irreduziblen Cartierdivisor D mit $Y := \operatorname{supp}(D) \subset X$ und ein auf X invertierbares $n \in \mathbb{N}$ die in [SGA4$\frac{1}{2}$, La classe de cohomologie associée à un cycle] gegebene Konstruktion der Chernklasse $cl(Y) \in H^2_Y(X, \mu_n)$ rekapitulieren, sowie einige damit verbundene Sätze, Folgerungen und Eigenschaften angeben. Der Schwerpunkt liegt dabei auf der absoluten kohomologischen Reinheit ([Fu, Theorem 2.1.1]) und der auf der relativen Kohomologie induzierten Abbildung.

Es sei $\mathcal{K}^\times_X$ die zur Prägarbe $U \mapsto Quot(\mathcal{O}_X(U))^\times$ assoziierte Garbe. Dann ist $H^0(X, \mathcal{K}^\times_X / \mathcal{O}^\times_X)$ die Cartierklassengruppe von X und wir haben die kurze exakte Folge

$$0 \to \mathcal{O}^\times_X \to \mathcal{K}^\times_X \to \mathcal{K}^\times_X / \mathcal{O}^\times_X \to 0$$

und erhalten die exakte Folge

$$H^0_Y(X,\mathcal{K}^\times_X)\to H^0_Y(X,\mathcal{K}^\times_X/\mathcal{O}^\times_x)\to H^1_Y(X,\mathcal{O}^\times_X)\to H^1_Y(X,\mathcal{K}^\times_X).$$

Da X integer ist, ist $H^0_Y(X,\mathcal{K}^\times_X) = ker(\mathcal{K}^\times_X(X) \to \mathcal{K}^\times_X(X-Y) = 0$ und $H^1(X,\mathcal{K}^\times_X) = H^1(K(X),K(X)^\times) = 0$ (siehe [Mi, Example III.2.22]) und wir erhalten einen Isomorphismus

$$H^0_Y(X,\mathcal{K}^\times_X/\mathcal{O}^\times_x) = ker(H^0(X,\mathcal{K}^\times_X/\mathcal{O}^\times_x)\to H^0(X-Y,\mathcal{K}^\times_X/\mathcal{O}^\times_x)) \xrightarrow{\sim} H^1_Y(X,\mathcal{O}^\times_X).$$

Für jeden Cartierdivisor D mit $D|_{X-Y} = 0$, also $D \in H^0_Y(X,\mathcal{K}^\times_X/\mathcal{O}^\times_x)$, bezeichnen wir das Bild von D in $H^1_Y(X,\mathcal{O}^\times_X)$ mit $cl(D)$. Aus der Kummerfolge $1\to\mu_n\to\mathbb{G}_m\to\mathbb{G}_n\to 1$ erhalten wir den Verbindungshomomorphismus

$$H^1_Y(X,\mathcal{O}^\times_X)\xrightarrow{\delta} H^2_Y(X,\mu_n).$$

Definition 1.39 *Wir setzen $cl_n(D) := \delta(cl(D))$ für jeden Cartierdivisor D mit $D|_{X-Y} = 0$.*

Ist $X'\to X$ ein Morphismus, so dass $D' := f^*(D)$ wieder ein effektiver Cartierdivisor ist, so ist $f^*(cl_n(D)) = cl_n(f^*(D))$ ([SGA4$\frac{1}{2}$, La classe de cohomologie associée à un cycle]) Die Zykelklasse erlaubt es die Kohomologie von X mit Träger in Y zu berechnen, falls sowohl X als auch Y regulär sind.

Theorem 1.40 *[Fu, Theorem 2.1.1] Ist $i : Y \to X$ die abgeschlossene Immersion eines irreduziblen regulären abgeschlossenen Unterschemas Y der Kodimension 1 in ein reguläres Schema X, so induziert die Zykelklasse $cl_n(Y)$ einen Isomorphismus*

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\to i^!\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(1)[2]$$

in $D^+(Y_{et},\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ für jedes auf X invertierbare $n\in\mathbb{N}$.

Als Spezialfall des vorherigen Theorems erhalten wir das

Theorem 1.41 *[Fu, Theorem 2.1.1 (Absolute kohomologische Reinheit)] Sei X ein reguläres Schema und D ein reguläres abgeschlossenes Unterschema von reiner Kodimension d. Dann gibt es einen Isomorphismus*

$$H^i_D(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})\to H^{i-2d}(D,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(-d))$$

für jedes auf X invertierbare $n\in\mathbb{N}$ und alle $i\in\mathbb{N}$.

Wir wollen nun einige Folgerungen der absoluten kohomologischen Reinheit auflisten. Die erste befasst sich mit der induzierten Abbildung auf der Kohomologie mit Träger. Dafür seien X, X' zwei reguläre Schemata und $Y\subset X$ ein reguläres irreduzibles abgeschlossenes Unterschema der Kodimension 1 von X. Weiterhin sei $f : X'\to X$ ein Morphismus, so dass $f^{-1}(Y)$ wieder ein reguläres irreduzibles abgeschlossenes Unterschema von X' ist. Dann induziert f eine Abbildung auf der Kohomologie mit Träger

$$H^{i-2}(Y,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(-1)) = H^i_Y(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})\to H^i_{Y'}(X',\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = H^{i-2}(X',\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(-1),$$

die aber nicht mit der von $f|_{Y'} : Y' \to Y$ induzierten Abbildung

$$H^i(Y, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(-1)) \to H^i(X', \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(-1)$$

übereinstimmen muss, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 1.42 Wir wollen für jedes zu p teilerfremde $n \in \mathbb{N}$ den von $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}_p[\sqrt[n]{p}] \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}_p$ auf der Kohomologie mit Träger (p) induzierten Morphismus

$$H^i_{(\sqrt[n]{p})}(\operatorname{Spec} \mathbb{Z}_p[\sqrt[n]{p}], \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \longrightarrow H^i_p(\operatorname{Spec} \mathbb{Z}_p.\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

und die auf der Kohomologie der abgeschlossenen Unterschemata $\mathbb{F}_p \to \mathbb{F}_p$ induzierte Abbildung

$$H^i(\mathbb{F}_p, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(-1)) \longrightarrow H^i(\mathbb{F}_p, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(-1))$$

bestimmen. Die auf den Unterschemata induzierte Abbildung ist, da die Erweiterung rein Verzweigt ist die Identität und so ist auch

$$H^i(\mathbb{F}_p, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(-1)) \longrightarrow H^i(\mathbb{F}_p, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(-1))$$

die Identität.

Die Kohomologiegruppen mit Träger sind trivial in den Gerade 0, 1 und ≥ 4, liegen im Grad 2 in den exakten Folgen

$$0 \longrightarrow H^1(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(\mathbb{Q}_p, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \longrightarrow H^2_{(p)}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

und

$$0 \to H^1(\mathbb{Z}_p[\sqrt[n]{p}], \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to H^1(\mathbb{Q}_p[\sqrt[n]{p}], \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to H^2_{(\sqrt[n]{p})}(\mathbb{Z}_p[\sqrt[n]{p}], \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to 0,$$

und sind im Grad 3

$$\begin{aligned} H^3_{(p)}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) &= H^2(\mathbb{Q}_p, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \\ H^3_{(\sqrt[n]{p})}(\mathbb{Z}_p[\sqrt[n]{p}], \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) &= H^2(\mathbb{Q}_p[\sqrt[n]{p}], \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Von der Gruppenkohomologie lokaler Körper ist bekannt, dass für jedes $i \in \mathbb{N}$

$$H^i(\mathbb{Q}_p, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \longrightarrow H^i(\mathbb{Q}_p[\sqrt[n]{p}], \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

die Nullabbildung ist. Wir sehen somit, dass

$$H^i_{(p)}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \longrightarrow H^i_{(\sqrt[n]{p})}(\mathbb{Z}_p[\sqrt[n]{p}], \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

für jedes $i \in \mathbb{N}$ die Nullabbildung ist, und somit die durch absolute kohomologische Reinheit 1.41 induziere Abbildung

$$\begin{tikzcd} H^i_{(p)}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & H^i_{(\sqrt[n]{p})}(\mathbb{Z}_p[\sqrt[n]{p}], \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \arrow[d, "\wr"] \\ H^{i-2}(\mathbb{F}_p, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(-1)) & H^{i-2}(\mathbb{F}_p, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(-1)) \end{tikzcd}$$

nicht mit der von $\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p[\sqrt[n]{p}]$ zwischen den abgeschlossenen Punkten induzierten Abbildung übereinstimmt.

Wir wollen die auf der Kohomologie mit Träger induzierte Abbildung im Folgenden genauer beschreiben.

Folgerung 1.43 *Es sei $f : X' \to X$ ein Morphismus regulärer Schemata, $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl, die teilerfremd zu den Restklassenkörpercharakteristiken von X ist und $Y \subset X$ ein reguläres irreduzibles abgeschlossenes Unterschema der Kodimension 1, so dass $Y' := f^{-1}(Y)$ wieder ein irreduzibles abgeschlossenes Unterschema der Kodimension 1 ist. Dann ist die von f induzierte Abbildung*

$$H_Y^2(X, \mathbb{Z}/nZ) \to H_{Y'}^2(X', \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

gegeben durch

$$cl_n(Y) \mapsto e_{Y'/Y} cl_n(Y').$$

Insbesondere sind die Abbildungen

$$H_Y^i(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to H_{Y'}^i(X'\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

identisch Null, falls $n | e_{Y'/Y}$.

Beweis: Es seien $i : Y \to X$ und $i' : Y' \to X'$ die abgeschlossenen Immersionen. Wir betrachten die durch $cl_n(Y) \mapsto cl_n(f^*Y) = e_{Y'/Y} cl_n(Y')$ gegebene Abbildung $f^*(i^!\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}_X(1)[2]) \to i'^!\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}_{X'}[2]$ und erhalten das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
1\ , \arrow[d, mapsto] & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d] & f^*(i^!\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}_X(1)[2]), \arrow[d] & cl_n(Y), \arrow[d, mapsto] \\
e_{Y'/Y}\ , & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \arrow[r] & i'^!\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}_{X'}[2], & e_{Y'/Y} cl_n(Y')
\end{tikzcd}$$

und daher die Behauptung. □

Folgerung 1.44 *Unter den Voraussetzungen von 1.43 erhalten wir ein kommutatives Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
H_Y^i(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \arrow[dd] & H^{i-2}(Y, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(-1)) \arrow[l, "\sim"'] \arrow[d, "\alpha"] \\
 & H^{i-2}(Y', \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(-1)) \arrow[d, "\beta"] \\
H_{Y'}^i(X', \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) & H^{i-2}(Y', \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(-1)), \arrow[l, "\sim"']
\end{tikzcd}$$

wobei $H_Y^i(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to H_{Y'}^i(X', \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ die durch f induzierte Abbildung ist, die waagerechten Isomorphismen durch die absolute kohomologische Reinheit 1.41 gegeben sind, α die durch $f|_{Y'} : Y' \to Y$ induzierte Abbildung und β die Multiplikation mit $e_{Y'/Y}$ ist.

Beweis: Wir bezeichnen die maximale bei Y unverzweigte Teilerweiterung von $X' \to X$ mit X^{nr} und betrachten $X' \to X^{nr} \to X$. Da $X^{nr} \to X$ étale ist, sind X^{nr} und $Y^{nr} := Y \times_X X^{nr}$ regulär und Y^{nr} hat Kodimension 1 in X^{nr}. Da $X' \to X^{nr}$ bei Y rein verzweigt ist, ist $Y' \to Y^{nr}$ ein Isomorphismus und daher ist Y^{nr} irreduzibel. Aus absoluter kohomologischer Reinheit 1.41 erhalten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
H^i_Y(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \arrow[d] & H^{i-2}(Y,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(-1)) \arrow[l, "\sim"'] \arrow[d, "\alpha"] \\
H^i_{Y^{nr}}(X^{nr},\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \arrow[d] & H^{i-2}(Y',\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(-1)) \arrow[l, "\sim"'] \arrow[d, "\beta"] \\
H^i_{Y'}(X',\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) & H^{i-2}(Y',\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(-1)), \arrow[l, "\sim"']
\end{tikzcd}$$

wobei α nach 1.43 die von $Y' = Y^{nr} \to Y$ induzierte Abbildung und β die Multiplikation mit $e_{Y'/Y^{nr}} = e_{Y'/Y}$ ist. □

Folgerung 1.45 *Es sei X ein reguläres Schema, $V \xrightarrow{i} X$ ein reguläres abgeschlossenes Unterschema von reiner Kodimension d in X und $W \xrightarrow{j} V$ ein reguläres abgeschlossenes Unterschema von reiner Kodimension d' in V. Dann gibt es für jedes $i \in \mathbb{N}$ einen Isomorphismus*

$$H^i_W(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to H^{i-2d}_W(V,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(-d))$$

für jedes auf X invertierbare $n \in \mathbb{N}$. Dieser induziert einen Isomorphismus zwischen der exakten Folge aus 1.31 mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ und der um $-2d$ verschobenen Ausschneidungsfolge für $W \subset V$ mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(-d)$. Wir erhalten also ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
H^i_V(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d] & H^i_{V-W}(X-W,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d] & H^{i+1}_W(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \arrow[d] \\
H^{i-2d}(V,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(-d)) \arrow[r] & H^{i-2d}(V-W,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(-d)) \arrow[r] & H^{i-2d+1}_W(V,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(-d))
\end{tikzcd}$$

Beweis: Wir haben Isomorphismen

$$H^i_W(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H^{i-2d-2d'}(W,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(-d-d')) \xleftarrow{\sim} H^{i-2d}_W(V,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(-d)).$$

die von den Spektralfolgen

$$H^p(W,R^q(i\circ j)^!\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \Rightarrow H^{p+q}_W(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

und

$$H^p(W,R^q(j)^!\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(-d)) \Rightarrow H^{p+q}_W(V,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(-d))$$

kommen. Für $R^q(i\circ j)^!\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ haben wir die Spektralfolge

$$R^pj^!R^qi^!\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \Rightarrow R^{p+q}(i\circ j)^!\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

und wegen absoluter kohomologischer Reinheit 1.41 ist $R^q i^! \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(-d)$ falls $q = 2d$ und $= 0$ falls $q \neq 2d$. Wir erhalten so das obige kommutative Diagramm exakter Folgen. □

Wir wollen nun die Kohomologie einer Kette von $\mathbb{P}^1_k$ (Definition 1.23)untersuchen. Dies ist für diese Arbeit interessant, da die Singularitäten die bei zahmen Überlagerungen von semi-stabilen gefaserten Flächen entstehen, in jeder Desingularisierung zu einer Kette von $\mathbb{P}^1_k$ aufgeblasen werden.

Lemma 1.46 *Es sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper, l eine Primzahl ungleich $char(k)$ und X eine Kette von $\mathbb{P}^1_k$ (Definition 1.23). Es sei $\{p_1, \dots, p_r\}$ eine nicht-leere Menge von abgeschlossenen Punkte von X, die die singulären Punkte umfasst. Es seien $E_1, \dots, E_m$ die Zusammenhangskomponenten von $X - \{p_1, \dots, p_r\}$. Dann gilt für die freien $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-Moduln $\bigoplus_{i=1}^m H^1(E_i, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(-1))$ und $\bigoplus_{i=1}^r H^0(p_i, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(-2))$, dass*

$$rk_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(\bigoplus_{i=1}^m H^1(E_i, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(-1)) = rk_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \bigoplus_{i=1}^r H^0(p_i, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(-2) - 1 = r - 1.$$

Beweis: Da in den Punkten $p_1, \dots, p_r$ die singulären Punkte von X enthalten sind, ist jedes $E_i \neq \mathbb{P}^1_k$ und somit ist

$$rk_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} H^1(E_i, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(-1)) = \sharp(\mathbb{P}^1_k - E_i) - 1.$$

Ist $r = m - 1$, sind $p_1, \dots, p_r$ genau die singulären Punkte von X, so gilt für die beiden äußeren irreduziblen Komponenten E_{i_0} und E_{i_1} von $X - \{p_1, \dots, p_r\}$ jeweils

$$H^1(E_{i_0}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(-1)) = 0 = H^1(E_{i_1}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(-1))$$

und für alle anderen Komponenten E gilt

$$rk_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} H^1(E, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(-1) = 1,$$

also

$$rk_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(\bigoplus_{i=1}^m H^1(E_i, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(-1)) = m - 2 = r - 1.$$

Wir nehmen nun an, wir hätten die Behauptung schon für ein $r \in \mathbb{N}$ gezeigt und wollen sie nun für $r + 1$ zeigen. Wir bezeichnen die irreduziblen Komponenten von $X - \{p_1, \dots, p_r\}$ mit T_i und die von $X - \{p_1, \dots, p_{r+1}\}$ mit E_i und nehmen an, dass $E_i \subseteq T_i$ für jedes i. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass

$p_{r+1} \in T_1$ ist, und haben

$$
\begin{aligned}
& rk_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \bigoplus_{i=1}^{m} H^1(E_i, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(-1)) = \sum_{i=1}^{m} rk_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} H^1(E_i, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(-1)) = \\
& = rk_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} H^1(E_1, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(-1)) + \sum_{i=2}^{m} rk_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} H^1(T_i, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(-1)) = \\
& = rk_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} H^1(T_1, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(-1)) + 1 + \sum_{i=2}^{m} rk_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} H^1(T_i, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(-1)) = \\
& = \sum_{i=1}^{m} rk_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} H^1(T_i, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(-1)) + 1 \\
& = r + 1 - 1.
\end{aligned}
$$

□

1.5 Étale Homotopietheorie und die $K(\pi, 1)$-Eigenschaft

In diesem Kapitel wird die Verbindung dieser Arbeit zur étalen Homotopietheorie dargestellt. Zentrale Aussage ist die Einführung der $K(\pi, 1)$-Eigenschaft und die Umformulierung derselben in die Sprache der étalen Kohomologie, wie in [AM] dargestellt, in [Fr] verfeinert und in [Sch1] verwendet. Des weiteren geben wir eine direkte Folgerung für eine glatte gefaserte Fläche über der maximal unverzweigten Erweiterung eines p-adischen Zahlringes der in [Fr] bewiesenen exakten Homotopiegruppenfolge einer geometrischen Faserung an.

Definition 1.47 *[AM, Definition 3.1] Eine volle Unterkategorie C der Kategorie der Gruppen nennen wir eine vollständige Klasse, falls*

(i) Es gilt $0 \in C$.

(ii) Ist $G \in C$, so ist auch jede Untergruppe U von G in C.

(iii) Ist $0 \to G' \to G \to G'' \to 0$, so ist genau dann $G \in C$, falls $G', G'' \in C$.

(iv) Sind $G, H \in C$, so ist auch $\prod_{h \in H} G \in C$.

Die beiden Beispiele für vollständige Klassen, die wir benutzen werden sind:

- Die Kategorie E aller endlichen Gruppen.
- Für eine Menge von Primzahlen S die Kategorie $E(S)$ aller endlichen Gruppen, deren Ordnung nur von Primzahlen $p \in S$ geteilt wird.
- Ist $S = \{l\}$ für eine Primzahl l, so schreiben wir auch $E(l)$ für die Kategorie aller endlichen l-Gruppen.

Für eine Gruppe G und eine vollständige Klasse C bezeichnet $G(C)$ die C-Vervollständigung von G. Statt $G(E(S))$ schreiben wir einfach $G(S)$ und statt $G(E(l))$ auch $G(l)$.

Bezeichnung 1.48 *Es sei C eine vollständige Klasse endlicher Gruppen. Für eine Gruppe G und einen G-Modul M sagen wir, dass M ein C-*torsions G-Modul *ist, falls M aufgefasst als Gruppe in C liegt.*

Konvention 1.49 *In diesem Kapitel bezeichnet C immer eine vollständige Klasse von endlichen Gruppen.*

Für ein zusammenhängendes Schema X werden in [AM] der étale Homotopietyp X_{et} von X, die C-Vervollständigung X_{et}^C des étalen Homotopietyps von X, sowie für eine Gruppe G und eine natürliche Zahl n (G abelsch falls $n > 1$) der Eilenberg-MacLane Raum $K(G, n)$ eingeführt. Wir benutzen im folgenden die Bezeichnungen

- $X_{et}^{(S)} := X_{et}^{E(S)}$ und
- $X_{et}^{(l)} := X_{et}^{E(l)}$.

Wir sagen, dass $X' \to X$ eine (pro-)C-Überlagerung ist, wenn $X' \to X$ galoissch ist, und $Aut_X(X')$ eine (pro-)C Gruppe ist. Wir bezeichnen die maximale pro-C-Überlagerung von X mit $\tilde{X}(C)$, beziehungsweise $\tilde{X}(S)$, falls $C = E(S)$ und $\tilde{X}(l)$, falls $C = E(l)$. Dabei gilt, dass die Projektion $\tilde{X}(C) \to X$ galoissch ist mit Gruppe $\pi_1(X, \bar{x})(C)$ für jeden geometrischen Punkt $\bar{x}$ von X ([AM, 3.7]).

Jeder diskrete C-torsions $\pi_1(X, \bar{x})(C)$-Modul M definiert eine lokal konstante Garbe $\underline{M}$ auf X. Aus der Hochschild-Serre-Spektralfolge erhalten wir Morphismen

$$\phi_{M,i} : H^i(\pi_1(X, \bar{x})(C), M) \to H^i(X, \underline{M}).$$

Für $i = 0, 1$ ist $\phi_{M,i}$ ein Isomorphismus und für $i = 2$ injektiv.

Satz 1.50 *[AM, Theorem 4.3] Die folgenden Bedingungen für ein zusammenhängendes Schema X sind äquivalent.*

(i) Die klassifizierende Abbildung $X_{et}^C \to K(\pi_1(X, \bar{x})(C), 1)$ ist eine schwache Äquivalenz.

(ii) $\pi_i(X_{et}^C, \bar{x}) = 0$ für jedes $i \geq 2$.

(iii) $H^i(\tilde{X}(C), \underline{M}) = 0$ für jedes $i \geq 1$ und jedes $M \in C$.

(iv) $\phi_{M,i} : H^i(\pi_1(X, \bar{x})(C), M) \to H^i(X, \underline{M})$ ist ein Isomorphismus für jedes $i \geq 0$ und jeden diskreten C-torsions $\pi_1(X, \bar{x})(C)$-Modul M.

(v) Für jede étale C-Überlagerung X' von X ist $\phi_{M,i,X'} : H^i(\pi_1(X'\bar{x})(C), \underline{M}) \to H^i(X', \underline{M})$ ein Isomorphismus für jedes $i \geq 0$ und jedes $M \in C$ aufgefasst als trivialer $\pi_1(X'\bar{x})(C)$-Modul.

Ist $C = E(l)$ für eine Primzahl l, so sind die obigen Eigenschaften nach [Sch1] auch äquivalent zu

(vi) $\phi_{\mathbb{Z}/l\mathbb{Z},i} : H^i(\pi_1(X, \bar{x})(C), \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) \to H^i(X, \underline{\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}})$ ist ein Isomorphismus für jedes $i \geq 0$, wobei $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ als trivialer $\pi_1(\underline{X, \bar{x})(}l)$-Modul aufgefasst wird.

Definition 1.51 *Wir sagen, dass ein zusammenhängendes Schema X ein $K(\pi,1)$ für C ist, wenn X die äquivalenten Bedingungen des Satzes 1.50 erfüllt. Ist $C = E(l)$ oder $C = E(S)$ für eine Primzahl l oder eine Menge von Primzahlen S, so sagen wir auch das X ein $K(\pi,1)$ für l beziehungsweise für S ist.*

Lemma 1.52 *Es sei X ein zusammenhängendes Schema mit $H^i(X,\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) = 0$ für $i \geq 2$. Dann ist X ein $K(\pi,1)$ für l.*

Beweis: Da $H^2(\pi_1(X,\bar{x})(l),\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$ injektiv in $H^2(X,\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) = 0$ liegt, ist

$$H^2(\pi_1(X,\bar{x})(l),\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) = 0$$

und die pro-l-Gruppe $\pi^1(X,\bar{x})(l)$ somit eine freie pro-l-Gruppe. Also ist

$$H^i(\pi^1(X,\bar{x})(l),\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) = 0 = H^i(X,\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$$

für jedes $i \in \mathbb{N}$. Dies zeigt, dass X ein $K(\pi,1)$ für l ist. □

Ist $X \to Y$ ein glatter eigentlicher Morphismus normaler Schemata mit zusammenhängender geometrischer Faser $X_{\bar{y}}$, so ist die Folge

$$\pi^1(X_{\bar{y}},\bar{y}) \to \pi^1(X,\bar{y}) \to \pi^1(Y,\bar{y}) \to 1$$

exakt ([SGA1, Corolaire X.1.4]. Vervollständigt man X_{et} und Y_{et} nach der Menge S aller Primzahlen ungleich den Restklassenkörpercharakteristiken von Y und gilt für $Y_{et}^{(S)}$, dass $\pi_1(Y_{et}^{(S)},\bar{y}) = 0$, so setzt sich obige Folge zu einer langen exakten Homotopiegruppenfolge

$$\pi^i((X_{\bar{y}})_{et}^{(S)},\bar{y}) \to \pi^i(X_{et}^{(S)},\bar{y}) \to \pi^i(Y_{et}^{(S)},\bar{y}) \to \pi^{i-1}((X_{\bar{y}})_{et}^{(S)},\bar{y})$$

fort ([Fr, Theorem 11.5]). Die Forderung, dass $X \to Y$ ein glatter eigentlicher Morphismus ist, lässt sich noch folgendermaßen abschwächen.

Definition 1.53 *[Fr, 11.4] Einen Schemamorphismus $f : X \to Y$ nennen wir eine* spezielle geometrische Faserung*, falls f die Einschränkung eines eigentlichen glatten Morphismus $\bar{f} : \bar{X} \to Y$ auf $X = \bar{X} - T$ ist, wobei T ein abgeschlossenes Unterschema von $\bar{X}$ ist, das die Vereinigung abgeschlossener Unterschemata T_i von reiner Kodimension c_i ist, so dass jeder nicht leere Schnitt $T_{i_1} \cap \ldots \cap T_{i_n}$ glatt über Y und von reiner Kodimension $c_{i_1} + \ldots + c_{i_n}$ ist.*

Wir nennen $f : X \to Y$ eine geometrische Faserung*, wenn Y eine offene Überdeckung $\{Y_i\}_{i\in I}$ hat, so dass $f|_{f^{-1}(V_j)} : f^{-1}(V_j) \to V_j$ eine spezielle geometrische Faserung ist.*

In [Fr] wird das folgende Theorem bewiesen für den Fall, dass S die Menge der zu den Restklassenkörpercharakteristiken von Y teilerfremden Primzahlen ist, formuliert, aber für jede Menge von Primzahlen, die keine der Restklassenkörpercharakteristiken von Y enthält, bewiesen.

Theorem 1.54 *[Fr, Theorem 11.5] Es sei $f : X \to Y$ eine geometrische Faserung noetherscher normaler Schemata mit zusammenhängender geometrischer Faser X_y und $\{Y(i)\}_{i\in I}$ das pro-Objekt, das aus einer Isomorphismus-Klasse für jede étale Galoisüberlagerung $Y(i) \to Y$ von Y besteht. Wir setzen $X(i) := X \times_Y Y(i)$. Dann haben wir eine exakte Folge von Homotopiegruppen*

$$\pi_n(X_y^{(S)}, \bar{x}_y) \to \pi_n(\{X(i)^{(S)}\}, \bar{x}(i)) \to \pi_n(\{Y(i)\}^{(S)}, \bar{y}(i)) \to \pi_{n-1}(X_y^{(S)}, \bar{x}_y)$$

wobei S eine Menge von zu den Restklassenkörpercharakteristiken von Y teilerfremden Primzahlen ist.

Auf eine glatte gefaserte Fläche $\mathcal{X} \to \mathcal{O}_k^{nr}$ angewendet erhalten wir die

Folgerung 1.55 *Es sei $\mathcal{U}$ ein offenes Unterschema einer glatten gefaserten Fläche $\mathcal{X} \to \mathcal{O}_k^{nr}$ über der maximalen unverzweigten Erweiterung $\mathcal{O}_k^{nr}$ des Rings der ganzen Zahlen $\mathcal{O}_k$ eines p-adischen Zahlkörpers k. Ist $\mathcal{U} = \mathcal{X}$ vom Geschlecht $g \geq 2$ oder $V := \mathcal{X} - \mathcal{U}$ eine nicht-leere disjunkte Vereinigung horizontaler Divisoren, die glatt über $\mathcal{O}_k^{nr}$ sind, so ist $\mathcal{U}$ ein $K(\pi, 1)$ für $S = \{l \text{ Primzahl} \mid l \neq p\}$.*

Beweis: In beiden Fällen ist $\mathcal{U} \to \mathcal{O}_k$ eine spezielle geometrische Faserung, und das pro-Schema $\{\mathcal{O}_{k\ i}^{nr}\}_{i\in I}$, bestehend aus den Isomorphieklassen der étalen Überlagerungen von $\mathcal{O}_k^{nr}$, besteht nur aus dem einen Element $\mathcal{O}_k^{nr}$. Wir erhalten die exakte Folge

$$\ldots \to \pi_n(\mathcal{U}_{\bar{s}}^{(S)}, \bar{x}_{\bar{s}}) \to \pi_n(\mathcal{U}^{(S)}, \bar{x}) \to \pi_n(\mathcal{O}_k^{nr(S)}, \bar{s}) \to \pi_{n-1}(\mathcal{U}_{\bar{s}}^{(S)}, \bar{x}_{\bar{s}}) \to \ldots$$

Ist $\mathcal{U} = \mathcal{X}$, oder V die nicht-leere disjunkte Vereinigung horizontaler regulärer Divisoren, so ist $\mathcal{U}_{\bar{s}}$ ein $K(\pi, 1)$ für S. Auch $\mathcal{O}_k^{nr}$ ist ein $K(\pi, 1)$ für S und somit sind $\pi_n(\mathcal{U}_{\bar{s}}^{(S)}, \bar{x}_{\bar{s}})$ und $\pi_n(\mathcal{O}_k^{nr(S)}, \bar{s})$ beide gleich Null für $n \geq 2$. Also ist auch $\pi_n(\mathcal{U} \times_{\mathcal{O}_k} \mathcal{O}_k^{nr(S)}, \bar{x}) = 0$ für $n \geq 2$ und somit $\mathcal{U}$ ein $K(\pi, 1)$ für S. □

2 Étale Kohomologie und Überlagerungen gefaserter Flächen

In diesem Kapitel befindet sich der Beweis der Hauptsatz (Theorem 2.34) dieser Arbeit. Es ist in drei Teile gegliedert. Im ersten Teil wird die Kohomologie einer offenen Teilmenge einer gefaserten Fläche in Termen des abgeschlossenen Komplements berechnet, im zweiten Teil werden Wurzelüberlagerungen von gefaserten Flächen konstruiert und das Verzweigungsverhalten der Divisoren beschrieben und im dritten Teil der Hauptsatz bewiesen.

2.1 Étale Kohomologie gefaserter Flächen

Es wird die Kohomologie einer offenen Teilmenge einer gefaserten Fläche in Termen der im abgeschlossenen Komplement enthaltenen Divisoren beschrieben und eine erste Folgerung angegeben, nämlich, dass jeder Punkt einer gefaserten Fläche über einem p-adischen Zahlring, der für eine Primzahl $l \neq p$ die l-ten Einheitswurzeln enthält, eine offene Umgebung besitzt, die ein $K(\pi, 1)$ für l ist.

In diesem Kapitel sei S eine Menge von Primzahlen, p eine Primzahl mit $p \notin S$, $\mathcal{X}$ eine gefaserte Fläche über dem Bewertungsring $\mathcal{O}$ der maximal unverzweigten S-Erweiterung k eines p-adischen Zahlkörpers (daher ist der Restklassenkörper $\mathbb{F}$ von $\mathcal{O}$ die maximale S Erweiterung eines endlichen Körpers), $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ ein offenes Unterschema von $\mathcal{X}$, $\mathcal{V} := \mathcal{X} - \mathcal{U}$ das abgeschlossene Komplement von $\mathcal{U}$ und $P \in \mathcal{X}$ ein abgeschlossener Punkt, so dass

- $P \in \mathcal{U}$,
- $\mathcal{X} - \{P\}$ regulär ist und
- $\mathcal{V}_s$ normale Überkreuzungen in $\mathcal{X}$ hat.

Wir wollen im folgenden die étale Kohomologie von $\mathcal{U}$ mit Werten in der konstanten Garbe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ für ein $n \in \mathbb{N}(S)$ bestimmen und benutzen dazu sukzessive die Ausschneidungsfolge (1.30) und absolute Kohomologische Reinheit (1.41).

Wir betrachten die abgeschlossene Teilmenge $\mathcal{V}_s$ als Vereinigung abgeschlossener Punkte mit abgeschlossenen Punkten der generischen Faser und regulären horizontalen Divisoren, also $\mathcal{V}_s = \{q_1, \dots q_k\} \dot\cup \{Q_1, \dots Q_m\} \dot\cup D_1 \dot\cup \dots \dot\cup D_r$, wobei

- die Q_i abgeschlossene Punkte der generischen Faser $\mathcal{X}_\eta$ sind,
- die q_i abgeschlossene Punkte von $\mathcal{X}$ sind und alle singulären Punkte von $\mathcal{V}_s$, sowie alle Spezialisierungen der Q_i umfassen und
- D_i irreduzible horizontale Divisoren von $\mathcal{X} - \{q_1, \dots, q_k\}$ sind, also irreduzible Komponenten von $(\mathcal{X} - \{q_1, \dots, q_k\})_s$.

Wir fixieren ein $n \in \mathbb{N}(S)$ und benutzen, da wir immer Kohomologie mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, oder $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(-i)$ betrachten, im folgenden für jedes Schema X, jedes abgeschlossene Unterschema $D \subset X$ und jedes $j \in \mathbb{Z}$ die folgende

Notation 2.1

$$H^i(X) := H^i(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$
$$H^i(X)(j) := H^i(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(j))$$
$$H^i_D(X) := H^i_D(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

Wir wollen zuerst $H^i(\mathfrak{X})$ bestimmen. Wegen der Spezialisierungsabbildung (1.34) haben wir einen Isomorphismus

$$H^r(\mathfrak{X}) \simeq H^r(\mathfrak{X}_s),$$

und bestimmen daher zuerst die étale Kohomologie der eventuell singulären Kurve $\mathfrak{X}_s$ über der maximalen S-Erweiterung eines endlichen Körpers.

Lemma 2.2 *Es sei C eine zusammenhängende projektive Kurve über der maximalen S-Erweiterung $\mathbb{F}$ eines endlichen Körpers der Charakteristik p, C_{reg} das offene Unterschema der regulären Punkte und $C_{sing} := C - C_{reg}$. Dann haben wir die exakte Folge*

$$\begin{array}{lll} 0 \;\to & H^2(C_{reg}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(1))^{\vee} & \to H^0(C) \;\; \to \bigoplus_{x \in C_{sing}} H^0(x) \;\; \to \\ \;\;\;\to & H^1(C_{reg}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(1))^{\vee} & \to H^1(C) \;\; \to 0 \end{array}$$

und den Isomorphismus

$$H^0(C_{reg}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(1))^{\vee} = H^2(C).$$

Beweis: Da C eine projektive Kurve ist, ist $H^r(C) = H^r_c(C)$. Da C_{sing} endlich ist, ist C_{sing} insbesondere projektiv über $\mathbb{F}$ und somit ist $H^r_c(C_{sing}) = \bigoplus_{x \in C_{sing}} H^r(x)$. Aus 1.37 haben wir die exakte Folge

$$H^r_c(C_{reg}) \to H^r(C) \to H^r_c(C_{sing}) \to H^{r+1}_c(C_{reg}).$$

Da C eine Kurve über $\mathbb{F}$ ist, ist $H^i(x) = 0$ für jedes $i \neq 0$ und jeden abgeschlossenen Punkt x aus C, da jede endliche Erweiterung von $\mathbb{F}$ keine nicht-triviale S-Erweiterung besitzt. Obige Folge ist somit

$$\begin{array}{lll} 0 \;\to & H^0_c(C_{reg}) & \to H^0(C) \;\; \to \bigoplus_{x \in C_{sing}} H^0(x) \;\; \to \\ \;\;\;\to & H^1_c(C_{reg}) & \to H^1(C) \;\; \to 0 \end{array}$$

und

$$H^2_c(C_{reg}) = H^2(C).$$

Durch Poincaré Dualität 1.38 erhalten wir

$$H^0_c(C_{reg}) = Ext^2_{C_{reg}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(1))^{\vee} = H^2(C_{reg}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(1))^{\vee},$$

$$H^1_c(C_{reg}) = H^1(C_{reg}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(1))^{\vee} \text{ und}$$

$$H^2_c(C_{reg}) = H^0(C_{reg}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(1))^{\vee}.$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Bemerkung 2.3 *Das Unterschema C_{reg} besteht aus einer Zusammenhangskomponente für jede irreduzible Komponente von C und wir erhalten einen Isomorphismus zwischen $H^2(C)$ und $\bigoplus_T H^0(T, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(1))^\vee$, wobei T die irreduziblen Komponenten von C durchläuft.*

Um nun die Kohomologie von $\mathcal{U}$ zu berechnen, bestimmen wir die Kohomologiegruppen mit Träger in q_i, Q_i und D_i.

Lemma 2.4 *Wir haben*

(i) $$H^r_{q_i}(\mathcal{X}) = \begin{cases} 0, & \textit{falls } r \neq 4 \\ H^r(q_i)(-2), & \textit{falls } r = 4. \end{cases}$$

(ii) $$H^r_{Q_i}(\mathcal{X} - \{q_1, \ldots, q_k\}) = \begin{cases} 0, & \textit{falls } r \neq 2, 3 \\ H^0(Q_i)(-1), & \textit{falls } r = 2 \\ H^1(Q_i)(-1), & \textit{falls } r = 3 \end{cases}$$

(iii) $$H^r_{D_i}(\mathcal{X} - \{q_1, \ldots, q_k\}) = \begin{cases} 0, & \textit{falls } r \neq 2, 3, 4 \\ H^0(D_i)(-1), & \textit{falls } r = 2 \\ H^1(D_i)(-1), & \textit{falls } r = 3 \\ H^2(D_i)(-1), & \textit{falls } r = 4, \end{cases}$$

wobei $H^2(D_i)(-1) = 0$ falls $\overline{D_i}^{\mathcal{X}} \cap \{q_1, \ldots, q_k\} \neq \emptyset$.

Beweis: Da $P \notin \mathcal{V}$, sind die Kohomologiegruppen $H^r_{V'}(\mathcal{X})$ mit Träger $V' \subseteq \mathcal{V}$ nach 1.32 isomorph zu $H^r_{V'}(\mathcal{X} - \{P\})$. Ist V' ein reguläres abgeschlossenes Unterschema von reiner Kodimension des regulären Schemas $\mathcal{X} - \{P\}$, so können wir absolute kohomologische Reinheit (1.41) verwenden und erhalten:

(i) Für $\{q_i\} \subset \mathcal{X}$ (eigentlich $\{q_i\} \subset \mathcal{X} - \{P\}$):

$$H^r_{q_i}(\mathcal{X}) = \begin{cases} 0, & \text{falls } r \neq 4 \\ H^0(q_i)(-2), & \text{falls } r = 4, \end{cases}$$

da $k(q_i)$ eine endliche Erweiterung von $\mathbb{F}$ ist und somit $H^r(q_i)(-2) = 0$ für $i > 0$.

(ii) Für $\{Q_i\} \subset \mathcal{X} - \{q_1, \ldots, q_k, P\}$:

$$H^r_{Q_i}(\mathcal{X} - \{q_1, \ldots, q_k\}) = \begin{cases} 0, & \text{falls } r \neq 2, 3 \\ H^0(Q_i)(-1), & \text{falls } r = 2 \\ H^1(Q_i)(-1), & \text{falls } r = 3, \end{cases}$$

da $k(Q_i)$ eine endliche Erweiterung von k ist und somit keine nicht trivialen unverzweigten Erweiterungen besitzt, also $H^r(Q_i)(-1) = 0$ für $r \geq 2$.

(iii) Für $D_i \subset \mathcal{X} - \{q_1, \ldots, q_n, P\}$:

Da $\{q_1, \ldots, q_k\}$ alle singulären Punkte von $\mathcal{V}_s$ enthält, ist D_i ein reguläres Schema und wegen absoluter kohomologischer Reinheit für $D_i \subset \mathcal{X} - \{q_1, \ldots, q_k, P\}$

erhalten wir

$$H^r_{D_i}(\mathcal{X} - \{q_1, \ldots, q_k\}) = \begin{cases} 0, & \text{falls } r \neq 2,3,4 \\ H^0(D_i)(-1), & \text{falls } r = 2 \\ H^1(D_i)(-1), & \text{falls } r = 3 \\ H^2(D_i)(-1), & \text{falls } r = 4, \end{cases}$$

da D_i eine Kurve über der maximalen S-Erweiterung eines Körpers ist und somit $H^r(D_i)(-1) = 0$ für $r \geq 3$ gilt. Ist $\overline{D_i}^{\mathcal{X}} \cap \{q_1, \ldots, q_k\} \neq \emptyset$ so ist D_i eine reguläre nicht projektive Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper und somit affin, was $H^2(D_i)(-1) = 0$ impliziert. □

Folgerung 2.5 *Für einen abgeschlossenen Punkt $Q \in \mathcal{X}_\eta$ und die zugehörige Spezialisierung q mit $q_i \neq P$ ist*

$$H^r_{\{Q,q\}}(\mathcal{X}) = \begin{cases} H^0(Q)(-1), & \textit{falls } r = 2, \\ 0, & \textit{sonst.} \end{cases}$$

.

Beweis: Wir betrachten die exakte Folge

$$H^r_q(\mathcal{X}) \to H^r_{\{Q,q\}}(\mathcal{X}) \to H^r_Q(\mathcal{X} - \{q\}) \to H^{r+1}_q(\mathcal{X})$$

aus 1.31 für $\{q\} \subset \{Q,q\} \subset \mathcal{X}$ und erhalten, da $H^r_q(\mathcal{X}) = 0$ für $r \neq 4$ und $H^r_Q(\mathcal{X} - \{q\}) = 0$ für $r \neq 2,3$, den Isomorphismus

$$H^2_{\{Q,q\}}(\mathcal{X}) \xrightarrow{\sim} H^2_Q(\mathcal{X} - \{q\})$$

und die exakte Folge

$$0 \to H^3_{\{Q,q\}}(\mathcal{X}) \to H^3_Q(\mathcal{X} - \{q\}) \to H^4_q(\mathcal{X}) \to H^4_{\{Q,q\}}(\mathcal{X}) \to 0.$$

Dabei ist die Abbildung $H^3_Q(\mathcal{X} - \{q\}) \to H^4_q(\mathcal{X})$ durch den 2-Twist der Bewertungsabbildung

$$k(Q)^\times / k(Q)^{\times n} \xrightarrow{x \mapsto v(x)} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = H^0(q)$$

gegeben und ist damit surjektiv. Da $H^3_Q(\mathcal{X} - \{q\})$ und $H^4_q(\mathcal{X})$ dieselbe Anzahl von Elementen haben, ist $H^3_Q(\mathcal{X} - \{q\}) \to H^4_q(\mathcal{X})$ also ein Isomorphismus und $H^r_{\{Q,q\}}(\mathcal{X}) = 0$ für $r \neq 2$. □

Lemma 2.6 *Wir haben die exakte Folge*

$$\begin{aligned} 0 \to H^1(\mathcal{X}) \to H^1(\mathcal{U}) \to \left(\bigoplus_{i=1}^{m} H^0(Q_i)(-1) \oplus \bigoplus_{i=1}^{r} H^0(D_i)(-1) \right) \to \\ \to H^2(\mathcal{X}) \to H^2(\mathcal{U}) \to \left(\bigoplus_{i=1}^{m} H^1(Q_i)(-1) \oplus \bigoplus_{i=1}^{r} H^1(D_i)(-1) \right) \to \\ \to \left(\bigoplus_{i=1}^{n} H^0(q_i)(-2) \right) \to H^3(\mathcal{U}) \to \left(\bigoplus_{i=1}^{r} H^2(D_i)(-1) \right) \to 0 \end{aligned}$$

und $H^r(\mathcal{U}) = 0$ *für* $r \geq 4$.

Beweis: Wir betrachten die Ausschneidungsfolge für $\{q_1, \ldots, q_k\} \subset \mathcal{X}$ und erhalten, da $H^3(\mathcal{X}) = 0$ und $H^j_{q_i}(\mathcal{X}) = H^{j-4}(q_i)(-2)$, die Isomorphismen

$$H^j(\mathcal{X} - \{q_1, \ldots, q_k\}) = \begin{cases} H^j(\mathcal{X}), & \text{falls } j = 0, 1, 2 \\ \bigoplus_{i=1}^k H^0(q_i)(-2), & \text{falls } j = 3 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nun betrachten wir die Ausschneidungsfolge für die disjunkten, regulären Unterschemata Q_i und D_i von reiner Kodimension 1 in $\mathcal{X} - \{q_1, \ldots, q_k\}$ und erhalten die Behauptung. □

Wir sehen, dass $H^3(\mathcal{U})$ genau dann trivial ist, wenn $\overline{D_i} \cap \{q_1, \ldots, q_k\} \neq \emptyset$ für alle $i = 1, \ldots, r$, also $H^2(D_i)(-1) = 0$ gilt, und

$$\bigoplus_{i=1}^m H^1(Q_i)(-1) \oplus \bigoplus_{i=1}^r H^1(D_i)(-1) \to \bigoplus_{i=1}^n H^0(q_i)(-2)$$

surjektiv ist. Das nächste Lemma gibt ein hinreichendes Kriterium hierfür.

Lemma 2.7 *Ist in jeder Zusammenhangskomponente von* $\mathcal{V}_s$ *mindestens ein* q_i *enthalten, dass Spezialisierung eines* Q_j *ist, so ist* $H^3(\mathcal{U}) = 0$.

Beweis: Ist q_i eine Spezialisierung von Q_j, so ist

$$H^1(Q_j)(-1) \to H^0(q_i)(-2)$$

der 2-Twist des Morphismus

$$k(Q_j)^\times/(k(Q_j)^\times)^n \xrightarrow{v_{Q_j}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

und somit surjektiv. Wir setzen $I := \{i \in \mathbb{N} \mid q_i \text{ ist Spezialisierung eines } Q_j\}$ und betrachten wir die Ausschneidungsfolgen für $\{q_i \mid i \in I\} \subset \mathcal{X}$ und $\{Q_1, \ldots, Q_m\} \subset \mathcal{X} - \{q_i \mid i \in I\}$. Wir erhalten

$$\bigoplus_{i=1}^m H^1(Q_i)(-1) \xrightarrow{(v_{Q_i})} \bigoplus_{i \in I} H^0(q_i)(-2) \to H^3(\mathcal{X} - \overline{\{Q_1, \ldots, Q_n\}}) \to 0,$$

und sehen $H^3(\mathcal{X} - \overline{\{Q_1, \ldots, Q_n\}}) = 0$, da (v_{Q_i}) surjektiv ist .

In $\mathcal{V}_s - \{q_i \mid i \in I\}$ haben alle Zusammenhangskomponenten Dimension 1. Es sei $E = \bigcup_{i=1}^{r_1} E_i$ eine Zusammenhangskomponente der Dimension 1 von $\mathcal{V}_s$ mit den irreduziblen Komponenten $E_1, \ldots E_{r_1}$. Nach Voraussetzung finden wir ein $i \in I$, so dass $q_i \in E_j$ für ein $1 \leq j \leq r_1$. Wir nehmen ohne Einschränkung an, dass $j = 1$, und setzen $E_1' := E_1 - \{q_i \mid i \in I\}$. Da E_1' eine affine Kurve ist, zeigt absolute kohomologische Reinheit (1.41), dass für $j \geq 4$:

$$H^j_{E_1'}(\mathcal{X} - \{q_i \mid i \in I\}) = H^{j-2}(E_1')(-1) = 0.$$

Betrachtet man die Ausschneidungsfolge für $E_1' \subset \mathcal{X} - \{q_i \mid i \in I\}$, so sieht man $H^3(\mathcal{X} - (\{q_i \mid i \in I\} \cup E_1)) = 0$. Für jede irreduzible Komponente E_j, die E_1 schneidet, gilt ebenfalls, dass $E_j' := E_j - (\{q_i \mid i \in I\} \cup E_1)$ eine affine Kurve ist und somit $H^3(\mathcal{X} - (\{q_i \mid i \in I\} \cup E_1 \cup E_j)) = 0$. Als nächstes werden dann die E_k entfernt, die mit den schon entfernten E_i einen Schnittpunkt haben. Dies setzt man fort, bis man ganz E herausgenommen hat. Auf diese Art und Weise sieht man, dass $H^3(\mathcal{X} - (\{q_i \mid i \in I\} \cup E)) = 0$ ist. Wendet man dieses Argument auf die anderen Zusammenhangskomponenten an, so erhält man die Behauptung. □

Lemma 2.8 *Für jeden Punkt P einer geometrisch zusammenhängenden normalen gefaserten Fläche $\mathcal{X}$ über $\mathcal{O}_k$ für einen p-adischen Zahlkörper k mit $\mathcal{X} - P$ regulär gibt es eine Umgebung $\mathcal{U}$ von P, so dass $\mathcal{U}$ ein $K(\pi, 1)$ für jede Primzahl $l \neq p$ ist.*

Beweis: Wir fixieren eine Primzahl $l \neq p$. Es sei k der maximale p-adische Zahlkörper, so dass $\mathcal{X}$ über $\mathcal{O}_k$ definiert ist und k^l die maximale unverzweigte l-Erweiterung von k. Da $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{k^l} \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_k$ eine unverzweigte l-Erweiterung ist, genügt es zu zeigen, dass $\mathcal{X}_{\mathcal{O}_{k^l}}$ ein $K(\pi, 1)$ für l ist. Im folgenden ist $\mathcal{X} = \mathcal{X}_{\mathcal{O}_{K^l}}$.

Es seien $T_1, \ldots, T_r$ die irreduziblen Komponenten von $\mathcal{X}_s$ und $Q_1, \ldots, Q_r$ abgeschlossene Punkte von $\mathcal{X}_\eta$, so dass $\overline{\{Q_i\}}^{\mathcal{X}} \cap \mathcal{X}_{sreg} = \{q_i\}$ für einen abgeschlossenen Punkt q_i in T_i. Insbesondere ist

$$\overline{\{Q_i\}}^{\mathcal{X}} \cap T_i = \{q_i\}$$

und

$$\overline{\{Q_i\}}^{\mathcal{X}} \cap T_j = \emptyset$$

für $j \neq i$. Wir setzen $\mathcal{U} := \mathcal{X} - \{Q_1, q_1, \ldots, Q_k, q_k\}$ und wollen zeigen, dass $H^r(\mathcal{U}, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) = 0$ für $r \geq 2$ ist und berechnen hierzu zuerst $H^r_{\{Q_i, q_i\}}(\mathcal{X}, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$. Dazu betrachten wir die Folge aus 1.31 für $\{q_i\} \subset \{Q_i, q_i\}$:

$$0 \longrightarrow H^2_{\{Q_i,q_i\}}(\mathcal{X}, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) \longrightarrow H^2_{Q_i}(\mathcal{X} - \{q_i\}, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow H^3_{\{Q_i,q_i\}}(\mathcal{X}, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) \longrightarrow H^3_{Q_i}(\mathcal{X} - \{q_i\}, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) \longrightarrow H^4_{q_i}(\mathcal{X}, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

und sehen, dass $H^r = \begin{cases} H^r_{Q_i}(\mathcal{X} - \{q_i\}, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}), & \text{falls } r = 2, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

Da jede irreduzible Komponente von $\mathcal{U}_s$ nicht projektiv ist, ist $\mathcal{U}_s$ eine affine Kurve und $H^2(\mathcal{U}_s, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) = 0$. Vergleichen wir die Ausschneidungsfolge von $\{Q_1, q_1, \ldots, Q_k, q_k\} \subset \mathcal{X}$ mit der von $\{q_1, \ldots, q_k\} \subset \mathcal{X}_s$, so erhalten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \bigoplus_{i=1}^n H^2_{\{Q_i,q_i\}}(\mathcal{X}, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^2(\mathcal{X}, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^2(\mathcal{U}, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \bigoplus_{i=1}^n H^2_{q_i}(\mathcal{X}_s, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^2(\mathcal{X}_s, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) & \longrightarrow & 0. & &
\end{array}$$

Da

$$H^2(\mathcal{X}, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H^2(\mathcal{X}_s, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$$

und

$$H^2(\mathcal{X}_s, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i=1}^n H^2_{\{q_i\}}(\mathcal{X}_s, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$$

Isomorphismen sind, und

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}} \left(\bigoplus_{i=1}^n H^2_{\{Q_i, q_i\}}(\mathcal{X}, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) \right) = \mathrm{rk}_{\mathbb{Z}}/l\mathbb{Z} \left(\bigoplus_{i=1}^n H^2_{\{q_i\}}(\mathcal{X}_s, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) \right),$$

ist auch

$$\bigoplus_{i=1}^n H^2_{\{Q_i, q_i\}}(\mathcal{X}, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H^2(\mathcal{X}, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$$

ein Isomorphismus und $H^2(\mathcal{U}, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) = 0$. Dies zeigt $H^r(\mathcal{U}, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) = 0$ für $r \geq 2$ und somit, dass $\mathcal{U}$ ein $K(\pi, 1)$ für l ist. □

2.2 Konstruktion von Überlagerungen

Auch für dieses Kapitel fixieren wir eine Primzahl p und eine Primzahlmenge S mit $p \notin S$, sowie eine normale gefaserte Fläche $\mathcal{X}$ einen Punkt $P \in \mathcal{X}$ und eine offene Umgebung W von P. Wir wollen uns mit den folgenden beiden Fragen beschäftigen:

(i) Finden wir eine offene Umgebung $\mathcal{U} \subset W$ von P, so dass wir für jedes $n \in \mathbb{N}(S)$ S-Überlagerungen $\mathcal{X}_n \to \mathcal{X}$ haben, für die gilt, dass für jeden Divisor D von $\mathcal{X}$ mit $D \cap \mathcal{U} = \emptyset$ und jeden Divisor D_n von X_n mit $D_n \mapsto D$ gilt, dass der Verzweigungsindex $e_{D_n/D}$ von n geteilt wird?

(ii) Finden wir eine offene Umgebung $\mathcal{U} \subset W$ von P, so dass wir für jedes $n \in \mathbb{N}(S)$ Überlagerungen $f_n : \mathcal{X}_n \to \mathcal{X}$ haben, für die gilt, dass für jeden Punkt $Q \in \mathcal{X} - \mathcal{U}$ und jeden Punkt $Q_n \in f_n^{-1}(Q)$ der Grad der Erweiterung $k(Q_i)/k(Q)$ von n geteilt wird?

Diese beiden Fragen hängen mit der Eigenschaft ein $K(\pi, 1)$ für eine Primzahlmenge S, mit $p \notin S$, zu sein, folgendermaßen zusammen: Für eine Erweiterung $X_n \to X$, und einen Divisor D, D_n wie oben gilt, dass die induzierte Abbildung $H^r_D(\mathcal{X}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to H^r_{D_n}(\mathcal{X}_n, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ die Nullabbildung ist.

Im folgenden bezeichnet $\mathcal{X}$ eine normale gefaserte Fläche über dem Ring der ganzen Zahlen $\mathcal{O}_k$ eines p-adischen Zahlringes. Den Quotientenkörper von $\mathcal{O}$ bezeichnen wir mit k und den Funktionenkörper von $\mathcal{X}$ mit K. Außerdem fixieren wir einen algebraischen Abschluss $\bar{K}$ von K, und fassen alle endlichen Erweiterungen von K immer als Teilerweiterungen von $\bar{K}$ auf.

Wir wiederholen kurz die Notationskonventionen aus 1.9:

- $\mathcal{X}^L$: Normalisierung von $\mathcal{X}$ in L,
- $\mathcal{X}^{ds}$: Minimale Desingularisierung von $\mathcal{X}$,

- $\mathcal{X}^{ds,L}$ Normalisierung von $\mathcal{X}^{ds}$ in L und
- $\mathcal{X}^{L,ds}$ minimale Desingularisierung von $\mathcal{X}^{L}$.

Wir haben die folgenden Morphismen:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{X}^{L,ds} \arrow[r] & \mathcal{X}^{ds,L} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{X}^{L} \arrow[d] \\
& \mathcal{X}^{ds} \arrow[r] & \mathcal{X}
\end{tikzcd}$$

Wir wollen uns zunächst mit der ersten Frage beschäftigen. Dazu erinnern wir an den

Satz 2.9 *[Liu, Proposition 3.3.36] Für ein quasi-projektives Schema X über einem Ring A und eine endliche Menge F von Punkten von X, gibt es immer ein affines offenes Unterschema W von X mit $F \subset W$.*

Diesen Satz wollen wir ausnutzen um das gesuchte offene Unterschema $\mathcal{U}$ und die Überlagerungen $\mathcal{X}_n$ im folgenden Lemma zu konstruieren.

Lemma 2.10 *Es sei $\mathcal{X}$ eine normale gefaserte Fläche, $P \in \mathcal{X}$ ein Punkt und W eine offene Umgebung von P. Dann gibt es eine offene Umgebung $\mathcal{U} \subset W$ von P und für jedes $n \in \mathbb{N}(S)$ eine Überlagerung $f_n : \mathcal{X}_n \to \mathcal{X}$, so dass*

- *$f_n|_{\mathcal{U}_n} : \mathcal{U}_n \to \mathcal{U}$ étale ist ($\mathcal{U}_n := f_n^{-1}(\mathcal{U})$),*
- *für jeden Divisor D von $\mathcal{X}$ mit $\mathcal{U} \cap D = \emptyset$ und jeden Divisor D_n in $\mathcal{X}$ über D der Verzweigungsindex $e_{D_n/D}$ durch n teilbar ist.*

Diese Überlagerungen können so konstruiert werden, dass es für $n|m$ kommutative Diagramme

$$\begin{tikzcd}
f_{nm} : \mathcal{X}_m \arrow[r] \arrow[dr, "f_m"'] & \mathcal{X}_n \arrow[d, "f_n"] \\
& \mathcal{X}
\end{tikzcd}$$

gibt.

Beweis: Wir fixieren eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}(S)$. Wir setzen $Z := \mathcal{X} - W$ und sehen, dass in Z nur endlich viele Divisoren von $\mathcal{X}$ enthalten sind. Die Punkte $\xi_1, \ldots, \xi_r$ seien die generischen Punkte der Divisoren von $\mathcal{X}$, die in Z enthalten sind.

Nach dem vorigen Lemma (2.9) finden wir eine affine offene Umgebung $\operatorname{Spec} A$ von P, die die Punkte $\xi_1, \ldots, \xi_r, P$ enthält. Im folgenden benutzen wir für die $\xi_1, \ldots, \xi_r$ und P entsprechenden Primideale von A wieder dieselben Buchstaben. Da W eine offene Umgebung von P ist, mit $\xi_i \notin W$, ist das Primideal P von A nicht in einem der Primideale ξ_i enthalten und wir finden ein Element $x \in A \subset K(X)$ mit $x \in \xi_i$ für jedes $i = 1, \ldots, r$ und $x \notin P$. Wir setzen $\mathcal{U} := (\mathcal{X} - \operatorname{supp}(x)) \cap W$. Ist D ein Divisor von X, der in $V := \mathcal{X} - \mathcal{U}$ enthalten ist, so ist $D \subseteq \operatorname{supp}(x)$, da jeder Divisor von W nach der Konstruktion von x in $\operatorname{supp}(x)$ enthalten ist.

Es sei $m \in \mathbb{N}(S)$ beliebig. Wir setzen $L := K[\sqrt[m]{x}]$ und wollen nun die Verzweigungsindizes von $v_i := v_{\xi_i}$ $(i = 1, \ldots, r)$ in L bestimmen.

Gilt $m \nmid v_i(x)$, so verzweigt v_i in L, da für eine Fortsetzung w_i von v_i auf L gilt, dass $w_i(x) = \frac{m}{e_{v/v_i}} v_i(\sqrt[m]{x})$ eine ganze Zahl ist, und somit $e_{w_i/v_i} \neq 1$. Man sieht auch, dass n ein Teiler von e_{w_i/v_i} ist, wenn m ein Vielfaches von $n \cdot ggT(m, v_i(x))$ ist. Wir setzen $m_n := n \cdot S(kgV(v_1(x), \ldots, v_r(x)))$, wobei $S(k) = \prod_{l \in S} l^{v_l(k)}$ für eine natürliche Zahl k. Offensichtlich ist $m_n \in \mathbb{N}(S)$ und wir haben $n \cdot ggT(m, v_i(x)) \mid m$ und somit $n|e_{w/v}$ für jedes $v \in \{v_1, \ldots, v_n\}$ und jede Fortsetzung w von v.

Ist $Q \in \mathcal{X}^1$ mit $Q \neq \xi_i$ für $i = 1, \ldots, r$, so ist $v_Q(x) = 0$, also $x \in \mathcal{O}_{\mathcal{X},Q}^\times$ und für jedes $m \in \mathbb{N}(S)$ ist die Erweiterung $K[\sqrt[m]{x}]/K$ über Q unverzweigt, insbesondere auch für m_n.

Somit definieren die Überlagerungen $\mathcal{X}_n^L \to \mathcal{X}$ für $L_n := K[\sqrt[m_n]{x}]$ das gesuchte System, wenn man die Wahl der $\sqrt[m]{x}$ konsistent hält, das heißt, wenn man für $n \mid m$ die Elemente $\sqrt[n]{x}$ und $\sqrt[m]{x}$ in $\bar{K}$ so wählt, dass $\sqrt[n]{x} = \sqrt[m]{x}^{\frac{m}{n}}$ in $\bar{K}$ gilt. $\square$

Lemma 2.11 *Es sei $D \subset \mathcal{X}$ ein vertikaler Divisor und $P \in \mathcal{X}$ ein abgeschlossener Punkt mit $P \notin D$. Dann gibt es ein $f \in K$, so dass für jedes $n \in \mathbb{N}(S)$ der Divisor D in $\mathcal{X}[\sqrt[n]{f}]/X$ verzweigt vom Grad n ist und P in $\mathcal{X}[\sqrt[n]{f}]$ unverzweigt ist.*

Beweis: Nach 2.9 wählen wir eine affine Umgebung $\operatorname{Spec} A$ von P und dem generischen Punkt ξ von D und ein $f \in A$, so dass f in dem zu ξ korrespondierenden Primideal $\mathfrak{p}_\xi$ enthalten ist, aber nicht in dem zu P korrespondierenden $\mathfrak{p}_P$ und nicht in $\mathfrak{p}_\xi^2$. Da $f \in \mathfrak{p}_\xi - \mathfrak{p}_\xi^2$, ist ξ in $\mathcal{X}[\sqrt[n]{f}]/X$ rein verzweigt vom Grad n. Außerdem ist $f \notin \mathfrak{p}_P$ und P daher in $\mathcal{X}[\sqrt[n]{f}]/X$ unverzweigt. $\square$

Lemma 2.12 *Es sei P ein abgeschlossener Punkt von $\mathcal{X}$ und $D_1, \dots, D_n$ irreduzible Divisoren von $\mathcal{X}$ mit $P \notin \operatorname{supp}(D_i)$ für $i = 1, \dots, n$. Ist $\mathcal{X}$ regulär, so gibt es ein offenes Unterschema $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ mit*

- *$P \in \mathcal{U}$,*
- *$D_i \subset \mathcal{X} - \mathcal{U}$*
- *$\mathcal{X} - \mathcal{U}$ ist Vereinigung endlich vieler Divisoren $D_1, \dots D_m$ und*
- *für jedes D_i und jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine Überlagerung $\mathcal{X}_{i,n} \to \mathcal{X}$ étale über $\mathcal{U}$, so dass D_i in $\mathcal{X}_{i,n}$ rein verzweigt vom Grad n ist.*

Beweis: Wie im vorherigen Lemma wählen wir für die Divisoren $D_1, \dots, D_n$ Elemente $f_1, \dots, f_n \in K(\mathcal{X})$, so dass $f_i \in \mathcal{O}^\times_{\mathcal{X},P}$ und $v_{D_i}(f_i) = 1$. Wir setzen $E_i := div(f) = \sum_{x \in \mathcal{X}^1} v_x(f)$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ setzen wir $L_{i,n} := K(\mathcal{X})[\sqrt[n]{f_i}]$ und $\mathcal{X}_{i,n} := \mathcal{X}^{L_{i,n}}$.

Für $i = 1, \dots, n$ ist D_i in $\mathcal{X}_{i,n}$ rein verzweigt vom Grad n und $\mathcal{X}_{i,n} \to \mathcal{X}$ ist étale über $\mathcal{X} - E_i$. Ist D ein irreduzibler Divisor mit $v_D(f_i) = um \neq 0$ mit $(u, n) = 1$ und $m > 0$, so ist D in $\mathcal{X}_{i,nm}$ rein verzweigt vom Grad n. Somit ist die Behauptung für $\mathcal{U} := \mathcal{X} - (\bigcup_{i=1}^n \operatorname{supp}(E_i))$ gezeigt. □

Wir wenden uns nun der zweiten Fragestellung zu:

Finden wir eine offene Umgebung $\mathcal{U} \subset W$ von P, so dass wir für jedes $n \in \mathbb{N}(S)$ Überlagerungen $f_n : \mathcal{X}_n \to \mathcal{X}$ haben, für die gilt, dass für jeden Punkt $Q \in \mathcal{X} - \mathcal{U}$ und jeden Punkt $Q_n \in f_n^{-1}(Q)$ der Grad der Erweiterung $k(Q_i)/k(Q)$ von n geteilt wird?

Definition 2.13 *Für ein offenes Unterschema $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ setzen wir*

$$M^n_{\mathcal{Y}} := \{f \in L \mid n | v_Q(f) \ \forall\, Q \in \mathcal{Y}\} \text{ und } V^n_{\mathcal{Y}} = M^n_{\mathcal{Y}}/{L^\times}^n.$$

Lemma 2.14 *Für ein offenes Unterschema $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ und abgeschlossene Kodimension 1 Punkte $x_1, \dots, x_m \in \mathcal{Y}$ mit $\mathcal{Y}' := \mathcal{Y} - \{x_1, \dots, x_m\}$ ist die Folge*

$$0 \longrightarrow V^n_{\mathcal{Y}} \longrightarrow V^n_{\mathcal{Y}'} \xrightarrow{\alpha} \bigoplus_{i=1}^m \mathbb{Z}/n \xrightarrow{\beta} Cl(\mathcal{Y})/n \longrightarrow Cl(\mathcal{Y}')/n \longrightarrow 0 \quad (*)$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$ exakt. Hierbei bezeichnet $Cl(X)$ die Weil-Klassengruppe eines Schemas X und α bzw. β sind durch $f \mapsto (v_{x_1}(f), \dots, v_{x_m}(f))$ bzw. $(a_1, \dots, a_m) \mapsto \sum_{i=1}^m a_i[x_i]$ gegeben.

Beweis: Es sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Mit

$$\alpha : M^n_{\mathcal{Y}'} \longrightarrow \bigoplus\nolimits_1^m \mathbb{Z}, \qquad \alpha(f) = (v_{x_1}(f), \dots, v_{x_m}(f)) \qquad \text{und}$$

$$\beta : \bigoplus\nolimits_1^n \mathbb{Z} \longrightarrow Cl(\mathcal{Y}), \qquad \beta((a_1, \dots, a_m)) = \sum\nolimits_{i=1}^m a_i[x_i]$$

haben wir exakte Folgen

$$0 \longrightarrow M^n_{\mathcal{Y}} \longrightarrow M^n_{\mathcal{Y}'} \xrightarrow{\alpha} \bigoplus_{i=1}^m \mathbb{Z} \qquad \text{und}$$

$$\bigoplus_{i=1}^m \mathbb{Z} \xrightarrow{\beta} Cl(\mathcal{Y}) \longrightarrow Cl(\mathcal{Y}') \longrightarrow 0.$$

Da $L^{\times n} \subset M^n_{\mathcal{Y}}$, ist somit auch

$$0 \longrightarrow V^n_{\mathcal{Y}} \longrightarrow V^n_{\mathcal{Y}'} \xrightarrow{\alpha} \bigoplus_{i=1}^m \mathbb{Z}/n \qquad \text{und}$$

$$\bigoplus_{i=1}^m \mathbb{Z}/n \xrightarrow{\beta} Cl(\mathcal{Y})/n \longrightarrow Cl(\mathcal{Y}')/n \longrightarrow 0.$$

exakt.

Es bleibt zu zeigen, dass

$$V^n_{\mathcal{Y}'} \xrightarrow{\alpha} \bigoplus_{1}^m \mathbb{Z}/n \xrightarrow{\beta} Cl(\mathcal{Y})$$

exakt ist. Ist $f \in V^n_{\mathcal{Y}'}$, so ist $\beta(\alpha(f)) = \sum_{i=1}^m v_{x_i}(f)[x_i] = \sum_{x \in \mathcal{Y}^1} v_x(f)[x]$, da für jedes $x \in \mathcal{Y}'^1$ gilt $n | v_x(f)$. Ist umgekehrt $(a_1, \ldots, a_m) \in ker(\beta)$, so gibt es ein $f \in L^\times$, mit $(f) = \sum_{x \in \mathcal{Y}^1} v_x(f)[x] \equiv \sum_{i=1}^m v_{x_1}(f)[x_i] \bmod n$ Für dieses f gilt somit $n | v_x(f)$ für jedes $x \in \mathcal{Y}'^1$. Daher ist $f \in V^n_{\mathcal{Y}'}$. Dies zeigt die Exaktheit der Folge. □

Gilt $k|n$, so haben wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & V^k_{\mathcal{Y}} \arrow[r] & V^k_{\mathcal{Y}'} \arrow[r] & \bigoplus_{i=1}^m \mathbb{Z}/k \arrow[r] & Cl(\mathcal{Y})/k \arrow[r] & Cl(\mathcal{Y}')/k \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & V^n_{\mathcal{Y}} \arrow[r] \arrow[u] & V^n_{\mathcal{Y}'} \arrow[r] \arrow[u] & \bigoplus_{i=1}^m \mathbb{Z}/n \arrow[r] \arrow[u] & Cl(\mathcal{Y})/n \arrow[r] \arrow[u] & Cl(\mathcal{Y}')/n \arrow[r] \arrow[u] & 0
\end{tikzcd}$$

und erhalten für jede Primzahlmenge S ein projektives System exakter Folgen und im Limes eine nicht notwendigerweise exakte Folge

$$0 \longrightarrow V^S_{\mathcal{Y}} \longrightarrow V^S_{\mathcal{Y}'} \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^m \mathbb{Z}_S \longrightarrow Cl(\mathcal{Y})^S \longrightarrow Cl(\mathcal{Y}')^S \longrightarrow 0$$

wobei

$$\mathcal{V}^S_{\_} = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}(S)} V^n_{\_}, \quad Cl(\_)^S = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}(S)} Cl(\_)/n \quad \text{und} \quad \mathbb{Z}_S := \prod_{l\in S}\mathbb{Z}_l.$$

Wir wollen nun zeigen, dass diese Folge exakt ist für jede Primzahlmenge S mit $p \notin S$ und jedes $\mathcal{Y}$ mit $\mathcal{Y}_\eta \neq \mathcal{X}_\eta$. Ein hinreichendes Kriterium hierfür ist, dass alle Gruppen in der Folge $(*)$ endlich sind. Da $V^n_{\mathcal{Y}'}$ eine Untergruppe der endlichen Gruppe $L^\times/L^{\times n}$ ist, sind $V^n_{\mathcal{Y}}$ und $V^n_{\mathcal{Y}'}$ endlich. Um die Endlichkeit der Gruppen $Cl(\mathcal{Y})/n$ und $Cl(\mathcal{Y}')/n$ zu zeigen betrachten wir für ein offenes Unterschema $\mathcal{U}$ von $\mathcal{X}$ mit $\mathcal{U}_\eta \neq \mathcal{X}_\eta$ die exakte Folge

$$\bigoplus_{\pi_0(\mathcal{U}_s)} \mathbb{Z} \to Cl(\mathcal{U}) \to Cl(\mathcal{U}_\eta) \to 0$$

und sehen, dass es genügt zu zeigen, dass $Cl(\mathcal{U}_\eta)/n$ endlich ist für jedes $n \in \mathbb{N}(S)$. Wir werden sogar zeigen, dass $\sharp(Cl(\mathcal{U}_\eta)/n)$ beschränkt wird durch eine Konstante die unabhängig von n ist. Dies wird es uns ermöglichen eine obere Schranke für den $\mathbb{Z}_S = \prod_{l\in S}\mathbb{Z}_l$-Rang von $Cl(\mathcal{U}_\eta)$ anzugeben.

Lemma 2.15 *Für ein offenes Unterschema $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ mit $\mathcal{Y}_\eta \neq \mathcal{X}_\eta$ sind die Gruppen $Cl(\mathcal{Y}_\eta)/n$ für jedes $n \in \mathbb{N}(S)$ endlich, und ihre Größe wird beschränkt durch eine Konstante, die unabhängig von n ist.*

Beweis: Da $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$ regulär sind, sind $\mathcal{X}_\eta$ und $\mathcal{Y}_\eta$ reguläre Kurven und es gilt $Cl(\mathcal{X}_\eta) = Pic(\mathcal{X}_\eta)$ und $Cl(\mathcal{Y}_\eta) = Pic(\mathcal{Y}_\eta)$. Die Zusammenhangskomponente $Pic^0(\mathcal{X}_\eta)$ der 1 von $Pic(\mathcal{X}_\eta)$ enthält $\mathcal{O}^g$ als offene Untergruppe (also mit endlichem Index) [Mi2, Lemma 3.3]. Für jedes $n \in \mathbb{N}(S)$ ist daher $Pic^0(\mathcal{X}_\eta)/n$ endlich (da $p \notin S$, ist $\mathcal{O}/n = 0$) und für $n \gg 0$ ist $Pic(\mathcal{X}_\eta)^0/n$ eine endliche Gruppe, deren Ordnung unabhängig von n ist. Wir haben eine exakte Folge

$$0 \to Pic^0(\mathcal{X}_\eta) \to Pic(\mathcal{X}_\eta) \to NS(\mathcal{X}_\eta) \to 0,$$

wobei $NS(\mathcal{X}_\eta)$ die Neron-Severi-Gruppe von $\mathcal{X}_\eta$ ist. Diese ist über die Gradabbildung isomorph zu $\mathbb{Z}$.

Da $\mathcal{Y}_\eta$ eine dichte offene Teilmenge von $\mathcal{X}_\eta$ ist, ist $Pic(\mathcal{X}_\eta) \to Pic(\mathcal{Y}_\eta)$ surjektiv. Da $\mathcal{Y}_\eta \neq \mathcal{X}_\eta$ gibt es einen abgeschlossenen Punkt $s \in \mathcal{X}_\eta - \mathcal{Y}_\eta$ und für diesen gilt, dass das Bild von s in $Pic(\mathcal{Y}_\eta)$ Null ist. Wir haben damit eine Surjektion $Pic(\mathcal{X}_\eta)/[s] \to Pic(\mathcal{Y}_\eta)$ und eine exakte Folge

$$Pic^0(\mathcal{X}_\eta) \to Pic(\mathcal{X}_\eta)/[s] \to NS(\mathcal{X}_\eta)/deg[s] \to 0.$$

Da $deg[s] \neq 0$, hat das Bild von $Pic^0(\mathcal{X}_\eta)$ endlichen Index in $Pic(\mathcal{X}_\eta)/[s]$ und damit auch endlichen Index in $Pic(\mathcal{Y}_\eta)$. Also ist $Pic(\mathcal{Y}_\eta)/n$ eine endliche Gruppe, und für $n \gg 0$ hängt die Ordnung von $Pic(\mathcal{Y}_\eta)/n$ nicht von n ab. □

Folgerung 2.16 *Es sei $\mathcal{Y} \subsetneq \mathcal{X}$ ein offenes Unterschema mit $\mathcal{Y}_\eta \neq \mathcal{X}_\eta$. Dann haben wir für $n \gg 0$ eine exakte Folge*

$$\bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z}/n \to Cl(\mathcal{Y})/n \to F \to 0, \tag{*}$$

wobei F eine endliche Gruppe ist, deren Ordnung nicht von n abhängt.

Beweis: Dies folgt sofort aus der exakten Folge

$$\bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z} \to Cl(\mathcal{Y}) \to Cl(\mathcal{Y}_\eta) \to 0,$$

wobei die Abbildung $\bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z} \to Cl(\mathcal{Y})$ gegeben ist durch die Inklusion der vertikalen Divisoren, d.h. der irreduziblen Komponenten der speziellen Faser. $\square$

Wir wissen somit, dass die Folge von $\mathbb{Z}_S$-Moduln

$$0 \longrightarrow V_{\mathcal{Y}}^S \longrightarrow V_{\mathcal{Y}'}^S \xrightarrow{\alpha} \bigoplus_{i=1}^{m} \mathbb{Z}_S \xrightarrow{\beta} Cl(\mathcal{Y})^S \longrightarrow Cl(\mathcal{Y}')^S \longrightarrow 0$$

exakt ist und können sogar aufgrund obiger Folgerung und der Tatsache, dass $\bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z} \to Cl(\mathcal{Y})$ nicht injektiv ist, da die spezielle Faser ein Hauptdivisor ist, eine obere Schranke für den $\mathbb{Z}_S$-Rang von $Cl(\mathcal{Y})^S$ angeben:

$$rk_{\mathbb{Z}_S} Cl(\mathcal{Y})^S < r.$$

Falls $m > r$, ist daher die Abbildung $V_{\mathcal{Y}}^S \to V_{\mathcal{Y}'}^S$ nicht mehr surjektiv, und wir erhalten ein Element $(f_n) \in V_{\mathcal{Y}'}^S - V_{\mathcal{Y}}^S$.

Nun wollen wir das Verzweigungsverhalten der Überlagerung $\mathcal{X}[\sqrt[n]{f_n}] \to \mathcal{X}$ untersuchen, wobei $\mathcal{X}[\sqrt[n]{f_n}]$ die Normalisierung von $\mathcal{X}$ in $K(\mathcal{X})(\sqrt[n]{f_n})$ bezeichnet.

Lemma 2.17 *Es sei $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ ein offenes Unterschemata einer normalen gefaserten Fläche $\mathcal{X}$ über $\mathcal{O}$, $\mathcal{Y}' \subsetneq \mathcal{Y}$ ein offenes Unterschema von $\mathcal{Y}$, so dass ein $(f_n)_{n\in\mathbb{N}(S)} \in V_{\mathcal{Y}'}^S - V_{\mathcal{Y}}^S$ existiert. Wir nehmen an, dass $\mu_n \subset \mathcal{O}$ für jedes $n \in \mathbb{N}(S)$. Dann definiert dass projektive System $\mathcal{X}[\sqrt[n]{f_n}]$ eine $\mathbb{Z}_S$-Überlagerung von $\mathcal{X}$ die über $\mathcal{Y}$ unverzweigt ist.*

Beweis: Für jedes $n \in \mathbb{N}(S)$ sind die n-ten Einheitswurzeln in $K(X)$ enthalten, und somit ist $K(\mathcal{X})(\sqrt[n]{f_n})$ unabhängig von der Wahl von $\sqrt[n]{f_n}$ in $\overline{K(\mathcal{X})}$ und $\mathcal{X}[\sqrt[n]{f_n}]$ ist galoissch über $\mathcal{X}$. Da $(f_n)_{n\in\mathbb{N}(S)} \in V_{\mathcal{Y}'}^S - V_{\mathcal{Y}}^S$ gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $f_m \in V_{\mathcal{Y}'}^m - V_{\mathcal{Y}}^m$ und es ist $K(\mathcal{X})(\sqrt[n]{f_n}) \neq K(\mathcal{X})(\sqrt[m]{f_m})$ für jedes $n > m$. Also ist $\mathcal{X}(\sqrt[n]{f_n})$ eine $\mathbb{Z}_S$-Überlagerung von $\mathcal{X}$.

Da $n | v_Q(f_n)$ für jeden Kodimension 1 Punkt Q von $\mathcal{Y}'$, ist

$$f_n = g_n^n u$$

für ein $u \in \mathcal{O}_{\mathcal{Y}',Q}^\times$.

Der lokale Ring an jedem Punkt $Q' \in \mathcal{Y}'[\sqrt[n]{f_n}]$ über Q ist eine Lokalisierung des ganzen Abschlusses von $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}',Q}$ in $K(\mathcal{O}_{\mathcal{Y}',Q})(\sqrt[n]{f_n}) = K(\mathcal{O}_{\mathcal{Y}',Q})(\sqrt[n]{u})$. Dies ist eine unverzweigte Erweiterung. Also ist $\mathcal{Y}'(\sqrt[n]{f_n}) \to \mathcal{Y}'$ unverzweigt über jedem Punkt der Kodimension 1 von $\mathcal{Y}$, und somit nach 1.13 überall unverzweigt, da die Punkte von Kodimension 1 von $\mathcal{Y}'[\sqrt[n]{f_n}]$ über Punkten von Kodimension 1 von $\mathcal{Y}'$ liegen. $\square$

Lemma 2.18 *Es sei $\mathcal{X}$ eine normale gefaserte Fläche und $\mathcal{Y} \subsetneq \mathcal{X}$ ein echtes offenes Unterschema, so dass $Cl(\mathcal{Y})^S = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}(S)} Cl(\mathcal{Y})/n$ endlich ist. Weiterhin seien $x, x_1, \dots, x_r \in \mathcal{Y}_\eta$ paarweise verschiedene abgeschlossene Punkte mit $\overline{\{x\}} \cap \overline{\{x_1, \dots, x_r\}} = \{z\}$ für einen abgeschlossenen Punkt $z \in \mathcal{Y}$ mit regulärem lokalen Ring $\mathcal{O}_{\mathcal{X},z}$. Wir setzen $\mathcal{Y}' := \mathcal{Y} - \{x_1, \dots, x_r, z\}$. Dann gibt es ein $(f_n)_{n\in\mathbb{N}(S)} \in V^S_{\mathcal{Y}'} - V^S_{\mathcal{Y}}$, so dass der Punkt x in der $\mathbb{Z}_S$-Erweiterung $\mathcal{X}[\sqrt[n]{f_n}]$ nicht voll zerlegt. Insbesondere ist $k = \varinjlim_{n\in\mathbb{N}(S)} k(y_n)$ eine $\mathbb{Z}_S$-Erweiterung von $k(x)$ für jedes projektive System $(y_n)_{n\in\mathbb{N}(S)} \in \{\mathcal{X}[\sqrt[n]{f_n}]\}_{n\in\mathbb{N}(S)}$ mit $y_0 = x$.*

Beweis: Wir bezeichnen die $x_1, \dots, x_n$ entsprechenden Primideale von $\mathcal{O}_{\mathcal{X},z}$ mit $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$, das x entsprechende Primideal mit $\mathfrak{q}$ und das z entsprechende Maximalideal von $\mathcal{O}_{\mathcal{X},z}$ mit $\mathfrak{m}$. Da $\mathcal{O}_{\mathcal{X},z}$ ein regulärer lokaler Ring ist, ist $\mathcal{O}_{\mathcal{X},z}$ faktoriell und die Ideale $\mathfrak{q}, \mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$ somit Hauptideale. Wir wählen Elemente $T, T_1, \dots, T_r \in \mathcal{O}_{\mathcal{X},z}$ mit $\mathfrak{q} = (T)$ und $\mathfrak{p}_i = (T_i)$.

Für jedes Element $[f_n] \in V^n_{\mathcal{X}-W\cup\{x_1,\dots,x_r,z\}}$ betrachten wir die Primfaktorzerlegung eines Vertreters $f_n = T^{a^{(n)}} T_1^{a_1^{(n)}} \cdot \ldots \cdot T_r^{a_r^{(n)}} u_n h_n$, wobei u_n eine Einheit und h_n eine n-te Potenz in $\mathcal{O}_{\mathcal{X},x}$ und $\mathcal{O}_{\mathcal{X},x_i}$ $(i = 1, \dots r)$ ist. Dass nur die T_i als Primelemente auftauchen, liegt daran, dass für alle anderen Primideale $\mathfrak{p}' \neq \mathfrak{m}$ und zugehörige Punkte $x' \in \mathcal{X}$ gilt, dass $x' \in \mathcal{X} - W \cup \{x_1, \dots, x_n\}$. Da $[f_n] \in V^n_{\mathcal{X}-W\cup\{x_1,\dots,x_r,z\}}$ und $x \in \mathcal{X} - W \cup \{x_1, \dots, x_r, z\}$ ist, gilt $n \mid a^{(n)}$ und wir finden in jeder Klasse $[f_n]$ einen Vertreter der Form $f_n = T_1^{a_1^{(n)}} \cdot \ldots \cdot T_r^{a_r^{(n)}} u_n$, also einen Vertreter, der nicht im Maximalideal $\mathfrak{q}\mathcal{O}_{\mathcal{X},x}$ von $\mathcal{O}_{\mathcal{X},x}$ liegt. Da die Vertreter f_n nur bis auf n-te Potenzen bestimmt sind, sind auch $a, a_1, \dots, a_n$ nur modulo n bestimmt. Denn für $f_n g^n$, mit $g = T^b T_1^{b_1} \cdot \ldots \cdot T_r^{b_r} u$ für ein $u \in L$ welches eine Einheit in $\mathcal{O}_{\mathcal{X},x}$ und $\mathcal{O}_{\mathcal{X},x_i}$ ist, gilt

$$\begin{aligned} f_n g^n &= T^{a^{(n)}} T_1^{a_1^{(n)}} \cdot \ldots \cdot T_r^{a_r^{(n)}} u_n (T^b T_1^{b_1} \cdot \ldots \cdot T_r^{b_r} u)^n = \\ &= T^{a^{(n)}+nb} T_1^{a_1^{(n)}+nb_1} \cdot \ldots \cdot T_r^{a_r^{(n)}+nb_r} u_n u^n. \end{aligned}$$

Wir wollen nun die Bewertung von f_n in dem Restklassenkörper $k(x)$ an der Stelle x berechnen. Da $k(x)$ eine algebraische Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$ mit nur endlicher Verzweigung ist, bezeichnen wir die normierte Bewertung von $k(x)$ mit v_p. Wir definieren eine Abbildung $\varphi_n : V^n_{C-W\cup\{x_1,\dots,x_r,z\}} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ durch

$$\varphi_n([f_n]) = a_1^{(n)} v_p(T_1) + \ldots + a_r^{(n)} v_p(T_r).$$

Dann ist φ_n ein wohldefinierter $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-Modulmorphismus, da aus

$$\begin{aligned} f_n g_n &= T^{a^{(n)}} T_1^{a_1^{(n)}} \cdot \ldots \cdot T_r^{a_r^{(n)}} u_n T^{b^{(n)}} T_1^{b_1^{(n)}} \cdot \ldots \cdot T_r^{b_r^{(n)}} u_n' = \\ &= T^{a^{(n)}+b^{(n)}} T_1^{a_1^{(n)}+b_1^{(n)}} \cdot \ldots \cdot T_r^{a_r^{(n)}+b_r^{(n)}} u_n \end{aligned}$$

folgt, dass $\varphi_n(f_n g_n) = \varphi_n(f_n) + \varphi_(g_n)$.

Ist f_n ein Vertreter von $[f_n] \in V^n_{\mathcal{X}-W\cup\{x_1,\ldots,x_r,z\}}$, der nicht im Maximalideal $\mathfrak{q}\mathcal{O}_{\mathcal{X},x}$ von $\mathcal{O}_{\mathcal{X},x}$ liegt, so ist $\varphi_n([f_n]) \equiv v_p(\bar{f}_n)$, wobei $\bar{f}_n$ das Bild von f_n in $k(x)$ ist.

Es seien $f_{n+1} \in V^{n+1}_{\mathcal{X}-W\cup\{x_1,\ldots,x_r,z\}}$ und $f_n \in V^n_{\mathcal{X}-W\cup\{x_1,\ldots,x_r,z\}}$ zwei Elemente mit $f_{n+1} = f_n g_n^n$ (also wird f_{n+1} unter $V^{n+1}_{\mathcal{X}-W\cup\{x_1,\ldots,x_r,z\}} \to V^n_{\mathcal{X}-W\cup\{x_1,\ldots,x_r,z\}}$ auf f_n abgebildet). Wir schreiben $g_n = T_1^{b_1^{(n)}} \cdot \ldots \cdot T_1^{b_r^{(n)}} v_n$, wobei v_n eine Einheit in $\mathcal{O}_{\mathcal{X},x}$ und $\mathcal{O}_{\mathcal{X},x_i}$ für alle $i = 1, \ldots, r$ ist. Wir erhalten dann

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= T_1^{a_1^{(n+1)}} \cdot \ldots \cdot T_r^{a_r^{(n+1)}} u_{n+1} \\ &= T_1^{a_1^{(n)}} \cdot \ldots \cdot T_r^{a_r^{(n)}} u_n g_n^n \\ &= T_1^{a_1^{(n)}} \cdot \ldots \cdot T_r^{a_r^{(n)}} u_n T_1^{nb_1^{(n)}} \cdot \ldots \cdot T_1^{nb_r^{(n)}} v_n^n \\ &= T_1^{a_1^{(n)}+nb_1^{(n)}} \cdot \ldots \cdot T_r^{a_r^{(n)}+nb_r^{(n)}} u_n v_n^n, \end{aligned}$$

was $a_i^{(n+1)} \equiv a_i^{(n)}$ *mod* n und damit $\varphi_n([f_n+1]) \equiv \varphi_n([f_n])$ *mod* n impliziert. Dies zeigt, dass $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}(S)}$ einen $\mathbb{Z}_S$-Modulmorphismus

$$\varphi = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}(S)} \varphi_n : V^S_{\mathcal{X}-W\cup\{x_1,\ldots,x_r,z\}} \to \mathbb{Z}_S$$

induziert.

Ist $([f_n])_{n\in\mathbb{N}} \in V^S_{\mathcal{Y}}$, so gilt $n \mid a_r^{(n)}$ und daher $\varphi_n([f_n]) = 0$. Also faktorisiert φ durch $coker(V^S_{\mathcal{Y}} \to V^S_{\mathcal{X}-W\cup\{x_1,\ldots,x_r,z\}})$. Der $\mathbb{Z}_S$-Rang von $coker(V^S_{\mathcal{Y}} \to V^S_{\mathcal{X}-W\cup\{x_1,\ldots,x_r,z\}})$ ist r, da in der exakten Folge

$$0 \to coker(V^S_{\mathcal{Y}} \to V^S_{\mathcal{X}-W\cup\{x_1,\ldots,x_r,z\}}) \to \mathbb{Z}_S^r \to Cl(\mathcal{X}-\mathcal{W})^S$$

die Gruppe $Cl(\mathcal{X}-\mathcal{W})^S$ endlich ist. Darüber hinaus ist eine $\mathbb{Z}_S$-Modulbasis von $coker(V^S_{\mathcal{Y}} \to V^S_{\mathcal{X}-W\cup\{x_1,\ldots,x_r,z\}})$ durch Vielfache der T_i gegeben, da auch in der exakten Folge

$$0 \to coker(V^S_{\mathcal{Y}} \to V^S_{\mathcal{X}-W\cup\{x_i\}}) \to \mathbb{Z}_S \to Cl(\mathcal{X}-\mathcal{W})^S$$

die Gruppe $Cl(\mathcal{X}-\mathcal{W})^S$ endlich ist, und damit $coker(V^S_{\mathcal{Y}} \to V^S_{\mathcal{X}-W\cup\{x_i\}})$ einen $\mathbb{Z}_S$-Rang von 1 hat. Also liegt ein Vielfaches von T_i im $coker(V^S_{\mathcal{Y}} \to V^S_{\mathcal{X}-W\cup\{x_i\}})$.

Der $\mathbb{Z}_S$-Modulmorphismus $\varphi : V^S_{\mathcal{X}-W\cup\{x_1,\ldots,x_r,z\}} \to \mathbb{Z}_S$ ist gegeben durch $T_i \mapsto v_p(T_i)$ und somit nicht trivial. Also gibt es ein $([f_n])_{n\in\mathbb{N}(S)} \notin ker(\varphi)$. Wählen wir nun einen Vertreter $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $[f_n]$, der nicht im Maximalideal

$\mathfrak{q}\mathcal{O}_{\mathcal{X},x}$ von $\mathcal{O}_{\mathcal{X},x}$ liegt, so haben wir $n \nmid v_p(f_n)$ für $n \gg 0$. Also ist die Erweiterung $k(x)[\sqrt[n]{f_n}]/k(x)$ eine echte Erweiterung für $n \gg 0$, und da $\{\mathcal{X}[\sqrt[n]{f_n}]\}_{n\in\mathbb{N}(S)}$ eine $\mathbb{Z}_S$-Überlagerung von $\mathcal{X}$ ist, ist die Zerlegungsgruppe von x in $\{\mathcal{X}[\sqrt[n]{f_n}]\}_{n\in\mathbb{N}(S)}$ endlich und $\{k(x)[\sqrt[n]{f_n}]\}_{n\in\mathbb{N}(S)}/k(x)$ eine $\mathbb{Z}_S$-Erweiterung. $\square$

Bemerkung 2.19 *Ein offenes Unterschema $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ mit $P \in \mathcal{Y}$ zu finden, so dass $Cl(\mathcal{Y})^S$ endlich ist, ist immer möglich, wenn P ein glatter Punkt der gefaserten Fläche $\mathcal{X}$ über $\mathcal{O}$ ist. Man wähle einfach einen beliebigen abgeschlossenen Punkt $Q \in \mathcal{X}_\eta$ aus, der nicht auf P spezialisiert und setze*

$$\mathcal{Y} := \mathcal{X} - \overline{\{P\}}^{\mathcal{X}} \cup \bigcup \textit{irreduzible Komponenten von } \mathcal{X}_s\textit{, in denen } P \textit{ nicht liegt.}$$

Tatsächlich ist $Cl(\mathcal{Y})^S$ endlich, da eine Obergrenze für den $\mathbb{Z}_S$-Rang von $Cl(\mathcal{Y})^S$ gegeben war durch

$$\textit{Anzahl der irreduziblen Komponenten von } \mathcal{Y}_s - 1$$

und da P ein glatter Punkt ist, $\mathcal{Y}_s$ nur eine irreduzible Komponente besitzt.

Wir haben somit für den Fall, dass P ein glatter Punkt von $\mathcal{X}$ ist eine positive Antwort auf die zweite Frage gegeben. Insbesondere haben wir die Überlagerungen intrinsisch in Termen der gefaserten Fläche $\mathcal{X}$ gegeben. Wir wollen nun eine allgemeine Antwort geben, allerdings werden die Überlagerungen nicht direkt über $\mathcal{X}$ definiert, sondern über $\mathbb{P}^1_{\mathcal{O}}$ und dann über den Basiswechsel mithilfe einer rationalen Abbildung $\mathcal{X} \dashrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathcal{O}}$ auf ein nur außerhalb von P verändertes Modell von $\mathcal{X}$ übertragen.

Hierzu wenden wir den Obigen Satz 2.18 auf den $\mathbb{P}^1_{\mathcal{O}}$ an.

Folgerung 2.20 **($\mathcal{X} = \mathbb{P}^1_{\mathcal{O}}$)** *Es seien x_1, x_2, x_3 drei paarweise verschiedene abgeschlossene Punkte von $(\mathbb{P}^1_{\mathcal{O}})_\eta = \mathbb{P}^1_k$ mit $\overline{\{x_1\}} \cap \overline{\{x_2\}} \cap \overline{\{x_3\}} = \{z\}$ (in $\mathbb{P}^1_{\mathcal{O}}$) und $y_1, \ldots y_n$ von x_1, x_2 und x_3 verschiedene abgeschlossene Punkte von $\mathbb{P}^1_k$, mit $\overline{\{y_i\}} = \{y_i, z\}$. Dann gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}(S)$ eine S-Überlagerung*

$$W_n \xrightarrow{g} \mathbb{P}^1_{\mathcal{O}},$$

die über $\mathbb{P}^1_{\mathcal{O}} - \{x_1, x_2, x_3, z\}$ unverzweigt ist, d.h.

$$g^{-1}(\mathbb{P}^1_{\mathcal{O}} - \{x_1, x_2, x_3, z\}) \to \mathbb{P}^1_{\mathcal{O}} - \{x_1, x_2, x_3, z\}$$

ist étale, so dass $k(w)/k(x)$ eine Erweiterung vom Grad m_w ist mit $n \mid m_w$ für jedes $x \in \{x_1, x_2, x_3, y_1, \ldots, y_n\}$ und jedes $w \in g^{-1}(x)$.

Beweis: Wir fixieren zuerst ein $n \in \mathbb{N}(S)$. Wie wir gerade gesehen haben, finden wir für jedes $i \neq j$ und jedes $x \in \{x_1, x_2, x_3, y_1, \ldots, y_n\} - \{x_i, x_j\}$ eine S-Überlagerung

$$g_{x_i,x_j,x} : W_{x_i,x_j,x} \to \mathbb{P}^1_{\mathcal{O}},$$

die über $\mathbb{P}^1_{\mathcal{O}} - \{x_i, x_j, z\}$ unverzweigt ist, so dass für jedes $w \in g^{-1}_{x_i,x_j,x}(x)$ die Erweiterung $k(w)/k(x)$ eine S-Erweiterung vom Grad m_w mit $n \mid m_w$ ist.

Bezeichnen wir das Faserprodukt aller $W_{x_i,x_j,x}$ über $\mathbb{P}^1_{\mathcal{O}}$ mit $\mathcal{Y}$, so ist

$$\mathcal{Y} \xrightarrow{g} \mathbb{P}^1_{\mathcal{O}}$$

höchstens über $\{x_1, x_2, x_3, z\}$ verzweigt und für jedes $y \in g^{-1}(y_i)$ ist $k(y)/k(y_i)$ eine S-Erweiterung vom Grad m_y mit $n \mid m_y$. Die Normalisierung von $\mathbb{P}^1_{\mathcal{O}}$ in dem Funktionenkörper einer beliebigen Zusammenhangskomponente von $\mathcal{Y}$ ist dann die gesuchte Überlagerung. □

Bemerkung 2.21 *Dieselbe Argumentation funktioniert für den Fall, dass $\mathcal{Y}_s$ nur eine irreduzibel Komponente besitzt.*

Lemma 2.22 *Sei $\mathcal{X}$ eine normale gefaserte Fläche über $\mathcal{O}$, $V \subset \mathcal{X}$ eine abgeschlossene Teilmenge, die nur aus horizontalen Divisoren besteht, und $P \in \mathcal{X}$ ein abgeschlossener Punkt mit $P \notin V$. Dann gibt es eine rationale Abbildung $h : \mathcal{X} \dashrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathcal{O}}$, eine normale gefaserte Fläche $\mathcal{Y}$ über $\mathcal{O}$, einen birationalen projektiven Morphismus $\alpha : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ und einen Morphismus $\beta : \mathcal{Y} \to \mathbb{P}^1_{\mathcal{O}}$, so dass*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{Y} \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\
\mathcal{X} \arrow[r, dashed, "h"'] & \mathbb{P}^1_{\mathcal{O}}
\end{tikzcd}$$

kommutiert und $\beta(\overline{\alpha^{-1}(V_\eta)}) \cap \beta(\alpha^{-1}(P)) = \emptyset$ ist. Darüber hinaus gilt, dass für jeden Punkt der Kodimension 1 $x \in \mathcal{X}$ der Morphismus $\alpha|_{\alpha^{-1}(\operatorname{Spec}\mathcal{O}_{\mathcal{X},x})} : \alpha^{-1}(\operatorname{Spec}\mathcal{O}_{\mathcal{X},x}) \to \operatorname{Spec}\mathcal{O}_{\mathcal{X},x}$ ein Isomorphismus ist.

Beweis: Wir konstruieren zuerst eine rationale Abbildung $h : \mathcal{X} \dashrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathcal{O}}$ und betrachten dann die Normalisierung des Graphen von h. Wir wählen eine affine Umgebung $\operatorname{Spec} A$ von P und $V_\eta = \{x_1, \ldots, x_n\}$ ([Liu, Proposition 3.3.36(b)]) und bezeichnen die zu $P, x_1, \ldots, x_n$ gehörenden Primideale von A wieder mit $P, x_1, \ldots, x_n$.

Es sei $Q \subset A$ ein Primideal, dass in der generischen Faser $\mathcal{X}_\eta$ von $\mathcal{X}$ liegt und sich auf P spezialisiert. Wir wählen Elemente $h_0, h_1, \ldots, h_n \in A$ mit $h_0 \in Q$ und $h_0 \notin x_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$ und $h_i \in x_i$ und $h_i \notin P$ für jedes $i = 1, \ldots, n$. Für das Element

$$h := h_0 h_1^{-1} \cdot \ldots \cdot h_n^{-1} \in Q(A) = K(\mathcal{X})$$

gilt dann, dass

- $h \in \mathcal{O}_{\mathcal{X},P}$ und
- $v_{x_i}(h) < 0$.

Durch h definieren wir einen Morphismus (den wir wieder h nennen)

$$h : \mathcal{X}_\eta \to \mathbb{P}^1_\eta$$

wie in [Liu, Chapter 7.3. Morphisms to $\mathbb{P}^1_k$] beschrieben. Es gilt dann $h(x_i) = \infty$ und $h(Q) = 0$.

Wir wollen nun zeigen, dass die rationale Abbildung $h : \mathcal{X} \dashrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathcal{O}}$ an dem Punkt P definiert ist. Dazu müssen wir nach [Liu, Exercise 3.3.13 (b)] zeigen, dass es ein $y \in \mathbb{P}^1_{\mathcal{O}}$ gibt, so dass das Bild von $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_{\mathcal{O}},y}$ unter $K(\mathbb{P}^1_{\mathcal{O}}) \to K(\mathcal{X})$ ein lokaler Ring ist, der von $\mathcal{O}_{\mathcal{X},P}$ dominiert wird. Die Abbildung

$$K(\mathbb{P}^1_{\mathcal{O}}) = k(\frac{T_0}{T_1}) \to K(\mathcal{X})$$

ist per Definition gerade gegeben durch $\frac{T_0}{T_1} \mapsto h$. Daher ist das Bild von $\mathcal{O}[\frac{T_0}{T_1}]_{(\frac{T_0}{T_1},t)} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_{\mathcal{O}},(0,t)}$ (wobei t eine Uniformisierende von $\mathcal{O}$ ist, und $(0,t)$ den Punkt 0 von $\mathbb{P}^1_{\bar{\mathbb{F}}_p}$ in $\mathbb{P}^1_{\mathcal{O}}$ bezeichnet) unter dieser Abbildung $\mathcal{O}[h]_{(h,t)}$, also enthalten in $\mathcal{O}_{\mathcal{X},P}$, da $f, t \in P$.

Wir sehen, dass die rationale Abbildung $h : \mathcal{X} \dashrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathcal{O}}$ auf der ganzen generischen Faser $\mathcal{X}_\eta$ und an dem Punkt P definiert ist, und dass $h(P) = (0,t)$ (der Punkt 0 in der speziellen Faser) ist.

Es sei W die größte offene Teilmenge von $\mathcal{X}$ auf der h definiert ist und Γ der Graph von h, d.h.

$$\Gamma = \overline{im(U \to \mathcal{X} \times_{\mathcal{O}} \mathbb{P}^1_{\mathcal{O}})} \subseteq \mathcal{X} \times_{\mathcal{O}} \mathbb{P}^1_{\mathcal{O}},$$

versehen mit der reduzierten Struktur. Nach [Liu, Exercise 3.3.13 (c)+(d)] gibt es einen birationalen projektiven Morphismus $f : \Gamma \to \mathcal{X}$ und einen Morphismus $g : \Gamma \to \mathbb{P}^1_{\mathcal{O}}$, so dass

$$\begin{tikzcd} \Gamma \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ \mathcal{X} \arrow[r, dashed, "h"'] & \mathbb{P}^1_{\mathcal{O}} \end{tikzcd}$$

kommutiert. Wir bezeichnen die Normalisierung von Γ mit $\mathcal{Y}$ und erhalten das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{Y} \arrow[dr] \arrow[ddr, bend right, "\alpha"'] \arrow[ddrr, bend left, "\beta"] & & \\ & \Gamma \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ & \mathcal{X} \arrow[r, dashed, "h"'] & \mathbb{P}^1_{\mathcal{O}}, \end{tikzcd}$$

wobei α und β als die jeweiligen Kompositionen definiert sind. Da $\mathcal{O}$ ein exzellenter Ring ist, ist der Morphismus $\mathcal{Y} \to \Gamma$ endlich und somit ist α birational und projektiv.

Da h auf der gesamten generischen Faser $\mathcal{X}_\eta$ definiert ist, ist $\Gamma_\eta \to \mathcal{X}_\eta$ ein Isomorphismus (siehe [Liu, Exercise 3.3.14]) und somit auch $\mathcal{Y}_\eta \to \mathcal{X}_\eta$, da $\mathcal{X}_\eta$ eine normale Kurve über k ist. Da $\beta(x_i) = h(x_i) = \infty$, ist $\beta(z) = (\infty, t)$ für jede Spezialisierung z von einem der x_i in $\mathcal{Y}$ (wobei (∞, t) den Punkt Unendlich von $\mathbb{P}^1_{\bar{\mathbb{F}}_p}$ in $\mathbb{P}^1_{\mathcal{O}}$ bezeichnet). Insbesondere ist $\beta(z) \neq \beta(P') = h(P) = (0,t)$ für jedes $P' \in \alpha^{-1}(P)$. Also ist $\beta(\overline{\alpha^{-1}(V_\eta)}) \cap \beta(\alpha^{-1}(P)) = \emptyset$.

Nach [Liu, Theorem 8.1.24] ist der birationale projektive Morphismus $\alpha : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ die Aufblasung von $\mathcal{X}$ entlang $V(\mathcal{I})$ für eine Idealgarbe $\mathcal{I}$ auf $\mathcal{X}$. Wir wollen nun zeigen, das α über jedem Punkt der Kodimension 1 ein Isomorphismus ist. Dazu betrachten wir für jeden Punkt $x \in \mathcal{X}$ der Kodimension 1 die Abbildung

$$\alpha_x = \alpha|_{\alpha^{-1}(\operatorname{Spec}\mathcal{O}_{\mathcal{X},x})} : \alpha^{-1}(\operatorname{Spec}\mathcal{O}_{\mathcal{X},x}) = \mathcal{Y} \times_{\mathcal{X}} \operatorname{Spec}\mathcal{O}_{\mathcal{X},x} \to \operatorname{Spec}\mathcal{O}_{\mathcal{X},x}.$$

Nach [Liu, Corollary 8.1.14] ist α_x die Aufblasung von $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_{\mathcal{X},x}$ entlang $V(\mathcal{I}_x)$. Da $\mathcal{O}_{\mathcal{X},x}$ ein ganzabgeschlossener eindimensionaler lokaler Ring ist, ist jede Idealgarbe $\neq 0$ auf $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_{\mathcal{X},x}$ invertierbar und α_x ist nach [Liu, Proposition 8.1.12] ein Isomorphismus. □

Lemma 2.23 *Es sei $\mathcal{X}$ eine normale gefaserte Fläche, $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{X}_\eta$ abgeschlossene Punkte und $P \in \mathcal{X}$ ein abgeschlossener Punkt, mit $P \notin \overline{\{x_i\}}$ für jedes $i = 1, \ldots, n$. Dann gibt es eine offene Umgebung $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ von P mit $\{x_1, \ldots, x_n\} \cap \mathcal{U} = \emptyset$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Überlagerung $f : \mathcal{X}_n \to \mathcal{X}$, so dass $f|_{f^{-1}(\mathcal{U})} : f^{-1}(\mathcal{U}) \to \mathcal{U}$ étale ist und $k(x')/k(x)$ eine echte S-Erweiterung vom Grad $m_{x'}$ mit $n \mid m_{x'}$ ist für jedes $x \in \mathcal{X}_\eta - \mathcal{U}_\eta$ und jedes $x' \in f^{-1}(x)$.*

Beweis: Wie wir gerade gesehen haben gibt es eine rationale Abbildung $h \dashrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathcal{O}}$, eine normale gefaserte Fläche $\mathcal{Y}$ über $\mathcal{O}$, einen birationalen projektiven Morphismus $\alpha : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ und einen Morphismus $\beta : \mathcal{Y} \to \mathbb{P}^1_{\mathcal{O}}$, so dass

$$\begin{tikzcd} \mathcal{Y} \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\ \mathcal{X} \arrow[r, dashed, "h"'] & \mathbb{P}^1_{\mathcal{O}} \end{tikzcd}$$

kommutiert, $\beta(\overline{\alpha^{-1}(V_\eta)}) \cap \beta(\alpha^{-1}(P)) = \emptyset$ ist und so dass $\alpha|_{\alpha^{-1}(\operatorname{Spec}\mathcal{O}_{\mathcal{X},x})} : \alpha^{-1}(\operatorname{Spec}\mathcal{O}_{\mathcal{X},x}) \to \operatorname{Spec}\mathcal{O}_{\mathcal{X},x}$ ein Isomorphismus ist für jeden Kodimension-1-Punkt x von $\mathcal{X}$. Der Morphismus β wurde sogar so konstruiert, dass $\beta(\alpha^{-1}(x_i)) = \infty$ für $i = 1, \ldots, n$ und $\beta(\alpha^{-1}(P)) = (0,t)$, wobei ∞ den Punkt ∞ in $\mathbb{P}^1_k$ bezeichnet und $(0,t)$ den Punkt 0 in $\mathbb{P}^1_{\bar{\mathbb{F}}_p}$.

Wir hatten gesehen 2.20, dass es eine Überlagerung $W \xrightarrow{g} \mathbb{P}^1_{\mathcal{O}}$ gibt, die nur über den Punkten q_1 und q_2 verzweigt, wobei $q_1 \neq q_2$ zwei beliebige von ∞ verschiedene Punkte in der generischen Faser $\mathbb{P}^1_k$ sind, die auf (∞, s) (den Punkt ∞ in $\mathbb{P}^1_{\bar{\mathbb{F}}_p}$) spezialisieren, so dass für jedes $w \in g^{-1}(\infty)$ die Erweiterung $k(w)/k(\infty)$ eine echte Erweiterung ist. Die Überlagerung $w : W \times_{\mathbb{P}^1_{\mathcal{O}}} \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}$ verzweigt somit höchstens über den Punkten in $\overline{\beta^{-1}(\{q_1, q_2\})}$. Es sei W' die Normalisierung einer der Zusammenhangskomponenten von $W \times_{\mathbb{P}^1_{\mathcal{O}}} \mathcal{Y}$. Auch $W' \to \mathcal{Y}$ ist eine Überlagerung die höchstens über den Punkten aus $\overline{\beta^{-1}(\{q_1, q_2\})}$ verzweigt.

Wir bezeichnen mit $\mathcal{X}'$ die Normalisierung von $\mathcal{X}$ in W'. Wir wollen nun die Punkte bestimmen, an denen die Überlagerung $\mathcal{X}' \to \mathcal{X}$ verzweigt. Wie wir gesehen haben, ist $\mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ ein Isomorphismus über jedem Kodimensions-1-Punkt von X, d.h. $\mathcal{O}_{\mathcal{X},x} \to \mathcal{O}_{\mathcal{Y},y}$ ist ein Isomorphismus für jedes $y \in \alpha^{-1}(x)$. Sei nun x ein Kodimensions-1-Punkt von $\mathcal{X}$ und x' ein Urbild von x unter $\mathcal{X}' \to \mathcal{X}$, $w \in W'$ ein Urbild von x' unter $W' \to \mathcal{X}'$ und y das Bild von w unter $W' \to \mathcal{Y}$. Wir haben dann das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{W',w} & \leftarrow & \mathcal{O}_{\mathcal{Y},y} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{O}_{\mathcal{X}',x'} & \leftarrow & \mathcal{O}_{\mathcal{X},x}, \end{array}$$

wobei die waagerechten Abbildungen die jeweiligen Normalisierungen in $K(W')$ sind und $\mathcal{O}_{\mathcal{X},x} \to \mathcal{O}_{\mathcal{Y},y}$ ein Isomorphismus ist. Also ist auch $\mathcal{O}_{\mathcal{X}',x'} \to \mathcal{O}_{W',w}$ ein Isomorphismus und $\mathcal{X}' \to \mathcal{X}$ verzweigt höchstens über den Punkten aus $\alpha(\overline{\beta^{-1}(\{q_1,q_2\})}) = \overline{h^{-1}(\{q_1,q_2\})}$.

Da $h(x_i) = \infty$, aber $q_1, q_2 \neq \infty$, ist

$$\overline{h^{-1}(\{q_1,q_2\})} \cap \{x_1,\dots,x_n,P\} = \emptyset.$$

Wir setzen $\mathcal{U} := \mathcal{X} - \overline{h^{-1}(\{q_1,q_2\})}$ und $\mathcal{U}' := \mathcal{U} \times_{\mathcal{X}} \mathcal{X}'$. Also ist $\mathcal{U}'$ das Urbild von $\mathcal{U}$ in $\mathcal{X}'$ und $\mathcal{U}' \to \mathcal{U}$ damit eine étale Überlagerung.

Da wir für jedes $n \in \mathbb{N}(S)$ die S-Überlagerung $W \xrightarrow{g} \mathbb{P}^1_{\mathcal{O}}$ so wählen können, dass für die Punkte $w \in W$ mit $g(w) = \infty$ und $[k(w) : k(\infty)] = m_w$ gilt, dass

$$[k(x_i) : k(\infty)] \cdot n \mid m_w,$$

können wir W so wählen, dass $n \mid [k(x') : k(x)]$ für jedes $x \in \{x_1,\dots,x_n\}$ und jedes $x' \in f^{-1}(x)$. □

2.3 Étale Kohomologie von Überlagerungen

In diesem Teil wird die Hauptaussage (Theorem 2.34) dieser Arbeit bewiesen. Wir wollen nun eine Übersicht über die Struktur des Beweises geben und besonders herausstellen, wo die vorhergegangenen Kapitel einfließen.

Zuerst gilt es für eine Überlagerung $f : \mathcal{X}^1 \to \mathcal{X}$ von gefaserten Flächen und eine offene Teilmenge $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ die induzierte Abbildung $H^i(\mathcal{U}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to H^i(f^{-1}(\mathcal{U}), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ zu beschreiben. Dazu wird die Beschreibung der étalen Kohomologie von $\mathcal{U}$ und $f^{-1}(\mathcal{U})$ in Termen der im jeweiligen Abgeschlossenen Komplement enthaltenen Divisoren aus 2.6 benutzt.

Hierbei tritt das Problem auf, dass $\mathcal{X}$ zwar regulär sein kann, aber X^1 nicht regulär sein muss, sondern Singularitäten enthalten kann. Um dieses Problem zu behandeln, wird benutzt, dass $\mathcal{X}^1$ nur einfache Singularitäten besitzt, insbesondere in jeder Desingularisierung von $\mathcal{X}_1$ die exzeptionellenen Divisoren eine Kette von $\mathbb{P}^1_k$ bilden (1.26 und 1.27).

Wir hatten in 2.8 gesehen, dass jeder Punkt P eine $K(\pi,1)$-Umgebung für jede Primzahl $l \neq p$ besitzt. Dazu hatten wir gezeigt, dass es eine Umgebung

$\mathcal{U}$ von P gibt, so dass $H^i(\mathcal{U}, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) = 0$ für jedes $i > 1$ ist. Insbesondere war die Abbildung $H^2(\mathcal{X}, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) \to H^2(\mathcal{U}, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$ die Nullabbildung. Das zweite Problem das auftritt ist, dass, selbst wenn $H^2(\mathcal{X}, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) \to H^2(\mathcal{U}, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$ die Nullabbildung ist, es sein kann, dass $H^2(\mathcal{X}^1, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to H^2(f^{-1}(\mathcal{U}), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ nicht die Nullabbildung ist. Dies tritt auf, wenn sich in der speziellen Faser von $\mathcal{X}^1$ eine neue Singularität befindet.

Diesem Problem wird begegnet, indem mithilfe der im letzte Kapitel konstruierten Überlagerungen eine Überlagerung $f^2 : \mathcal{X}^2 \to \mathcal{X}^1$ gefunden wird, so dass die Komposition

$$H^2(\mathcal{X}^1, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(f^{-1}(\mathcal{U}), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \longrightarrow H^2((f_2 \circ f)^-1(\mathcal{U}), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

die Nullabbildung ist.

Schließlich werden die im letzten Abschnitt konstruierten Überlagerungen dazu benutzt, den Hauptsatz zu zeigen.

Es sei S eine Menge von Primzahlen und $p \notin S$ eine weitere Primzahl. Es sei $\mathcal{X}$ eine reguläre gefaserte Fläche über dem Ganzheitsring $\mathcal{O}_k$ der maximal unverzweigten S-Erweiterung k eines p-adischen Zahlkörpers. Es sei $K := K(\mathcal{X})$ und L eine pro-S-Erweiterung von K.

Lemma 2.24 *Wir haben Isomorphismen*

$$H^i(\mathcal{X}_{\mathcal{O}_{k^{nr}}}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H^i(\mathcal{X}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \text{ und}$$
$$H^i((\mathcal{X}_{\mathcal{O}_{k^{nr}}})^L, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H^i(\mathcal{X}^L, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}),$$

die in das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} H^i((\mathcal{X}_{\mathcal{O}_{k^{nr}}})^L, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d] & H^i(\mathcal{X}^L, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \arrow[d] \\ H^i(\mathcal{X}_{\mathcal{O}_{k^{nr}}}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \arrow[r] & H^i(\mathcal{X}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \end{tikzcd}$$

passen.

Beweis: Die Isomorphismen sind eine direkte Folge der Hochschild-Serre-Spektralfolge

$$H^n(Gal(k^{nr}/k), H^m(X_{\mathcal{O}_{k^{nr}}}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})) \Rightarrow H^{n+m}(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

und der Tatsache, dass

$$Gal(k^{nr}/k) \subset \prod_{q \notin S} \mathbb{Z}_q$$

und somit

$$H^n(Gal(k^{nr}/k), M) = \begin{cases} M, i = 0 \\ 0, \text{ sonst} \end{cases}$$

für jede S-Torsionsgruppe M, welche als trivialer $Gal(k^{nr}/k)$-Modul aufgefasst wird. Die Kommutativität des Diagramms folgt aus dem obigen Isomorphismus und den Hochschild-Serre-Spektralfolgen

$$H^n(Gal(L/K), H^m(\mathcal{X}^L, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})) \Rightarrow H^{n+m}(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \text{ und}$$
$$H^n(Gal(Lk^n r/Kk^n r), H^m(\mathcal{X}^{Lk^{nr}}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})) \Rightarrow H^{n+m}(X^{Kk^{nr}}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

und dem Isomorphismus $Gal(L/K) \to Gal(Lk^{nr}/Kk^{nr})$. □

Da die Überlagerungen, die wir im letzten Kapitel definiert haben, alle über

der maximalen unverzweigten S-Erweiterung definiert sind, können wir im folgenden annehmen, dass $\mathcal{X}$ über dem Ganzheitsring der maximal unverzweigten Erweiterung eines p-adischen Zahlkörpers definiert ist.

Wir können somit die folgende Situation betrachten:

Es sei p eine Primzahl, S eine Primzahlmenge mit $p \notin S$ und $\mathcal{X}$ eine reguläre gefaserte Fläche mit geometrisch zusammenhängenden Fasern über der maximal unverzweigten Erweiterung $\mathcal{O}_k$ eines p-adischen Zahlringes $\mathcal{O}$, wobei wir annehmen, dass $\mu_l \subset \mathcal{O}_k$ für jedes $l \in S$. Wir bezeichnen den Quotientenkörper von $\mathcal{O}_k$ mit k und den Restklassenkörper mit $\bar{\mathbb{F}}_p$. Weiterhin sei $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ ein offenes Unterschema von $\mathcal{X}$, $\mathcal{V} := \mathcal{X} - \mathcal{U}$ das abgeschlossene Komplement von $\mathcal{U}$ und $P \in \mathcal{X}$ ein abgeschlossener Punkt, so dass

- $P \in \mathcal{U}$,
- $\mathcal{X} - \{P\}$ regulär ist und
- $\mathcal{V}_s$ normale Überkreuzungen in $\mathcal{X}$ hat.

Außerdem sei $f : \mathcal{U}^L \to \mathcal{U}$ eine endliche étale Überlagerung mit Funktionenkörper $L := K(\mathcal{U}^L)$ und $\mathcal{X}^L$ die Normalisierung von $\mathcal{X}$ in L und $\mathcal{V}^1 := \mathcal{X}^L - \mathcal{U}^L$, sowie $\mathcal{X}^{L,ds}$ eine starke Desingularisierung der Singularitäten in $\mathcal{X}^L - \mathcal{U}^L$, so dass die spezielle Faser von $\mathcal{V}^{1'} := \mathcal{X}^{L,ds} - \mathcal{U}^L$ normale Überkreuzungen hat. Wir haben das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X}^{L,ds} \arrow[r, "\Delta_L"] \arrow[dr, "f^{L,ds}"'] & \mathcal{X}^L \arrow[d, "f^L"] \\ & \mathcal{X} \end{tikzcd}$$

Wie oben betrachten wir die abgeschlossene Teilmenge $\mathcal{V}$ als Vereinigung abgeschlossener Punkte mit abgeschlossenen Punkten der generischen Faser und regulären horizontalen Divisoren, also

$$\mathcal{V}_s = \{q_1, \dots q_n\} \dot\cup \{Q_1, \dots Q_m\} \dot\cup D_1 \dot\cup \dots \dot\cup D_r,$$

wobei

- die Q_i abgeschlossene Punkte der generischen Faser $\mathcal{X}_\eta$ sind,

- die q_i abgeschlossene Punkte von $\mathcal{X}$ sind und alle singulären Punkte von $\mathcal{V}_s$, sowie alle Spezialisierungen der Q_i umfassen und

- D_i ist eine irreduzible Komponente der speziellen Faser von $\mathcal{X}-\{q_1,\ldots,q_n\}$.

Genauso betrachten wir ${\mathcal{V}^1}'_s$ als disjunkte Vereinigung abgeschlossener Punkte aus $\mathcal{X}^{L,ds}$ mit abgeschlossenen Punkten der generischen Faser von $\mathcal{X}^{L,ds}$ und vertikalen Divisoren der speziellen Faser. Dabei differenzieren wir bei den vertikalen Divisoren zwischen denjenigen, deren generischer Punkt auf den generischen Punkt von einem der D_i abgebildet wird, und solchen, für die dies nicht der Fall ist.

Wir benutzen dabei die folgenden Bezeichnungen:

$$\mathcal{V}''_s = \{q_1^{1'},\ldots,q_{n^{1'}}^{1}{}'\} \,\dot\cup\, \{Q_1^{1'},\ldots,Q_{m^{1'}}^{1}{}'\} \,\dot\cup\, D_1^{1'} \,\dot\cup \ldots \dot\cup\, D_{r^{1'}}^{1}{}' \,\dot\cup\, E_1^{1'} \,\dot\cup \ldots \dot\cup\, E_{k^{1'}}^{1}{}',$$

wobei

- die $Q_i^{1'}$ sind abgeschlossene Punkte der generischen Faser $\mathcal{X}_L^{L,ds}$,

- die $q_i^{1'}$ sind abgeschlossene Punkte von $\mathcal{X}^{L,ds}$, die alle singulären Punkte von ${\mathcal{V}^1}'_s$ enthalten,

- die $D_i^{1'}$ sind irreduzible Komponenten von ${\mathcal{V}^1}'_s - \{q_1^{1'},\ldots,q_{n^{1'}}^{1}{}'\}$, deren generische Punkte auf die generischen Punkte der D_j abgebildet werden und

- die $E_i^{1'}$ sind irreduzible Komponenten ${\mathcal{V}^1}'_s$ mit $f(E_i^{1'}) = x$ für einen abgeschlossenen Punkt x von $\mathcal{X}$.

Anders ausgedrückt, sind die $Q_i^{1'}$ die Urbilder der Q_i unter f, die $q_i^{1'}$ sind die Urbilder der q_i unter f sowie alle neuen singulären Punkten, die $D_i^{1'}$ sind vertikale Divisoren von $\mathcal{X}^{L,ds} - \{q_1^{1'},\ldots q_{n^{1'}}^{1}{}'\}$, die endlich über einem D_i liegen und die E_i sind vertikale Divisoren von $\mathcal{X}^{L,ds}$ die bei der Desingularisierung entstehen.

Des weiteren besteht $\mathcal{V}^1 := \mathcal{X}^L - \mathcal{U}^L$ ebenso aus abgeschlossenen Punkten und horizontalen, sowie vertikalen Divisoren. Genauer ist $\mathcal{V}^1 = \{q_1^1,\ldots,q_{n^1}^1\} \,\dot\cup\, \{Q_1^1,\ldots,Q_{m^1}^1\} \,\dot\cup\, D_1^1 \,\dot\cup \ldots \dot\cup\, D_{r^1}^1$, wobei

- die Q_i^1 sind abgeschlossene Punkte der generischen Faser $\mathcal{X}_L^L$,

- die q_i^1 sind alle abgeschlossenen Punkte von $\mathcal{X}^L$, die Bild von einem der $q_i^{1'}$ sind und

- die D_i^1 sind irreduzible Komponenten von $\mathcal{V}_s^1 - \{q_1^1,\ldots,q_{n^1}^1\}$, deren generische Punkte auf die generischen Punkte der D_j abgebildet werden.

Man beachte dabei, dass $Q_i^1 = Q_i^{1'}$, und $D_i^1 = D_i^{1'}$. Schematisch können wir uns das folgendermaßen vorstellen:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\mathcal{U}^{L,ds} \arrow[d, equal] & \subset & \mathcal{X}^{L,ds} \arrow[d] & \supset & V^{1'} & = & \{Q_1^{1'},\dots,Q^1_{m^{1'}}{}'\} \arrow[d, equal] & \cup & \bigcup D_i^{1'} \arrow[d, equal] & \cup & \{q_1^{1'},\dots,q^1_{n^{1'}}{}'\} \arrow[d] & \cup & \bigcup E_i^{1'} \arrow[dll] \\
\mathcal{U}^L \arrow[d] & \subset & \mathcal{X}^L \arrow[d] & \supset & V^1 & = & \{Q_1^1,\dots,Q^1_{m^1}\} \arrow[d] & \cup & \bigcup D_i^1 \arrow[d] & \cup & \{q_1^1,\dots,q^1_{n^1}\} \arrow[d] & & \\
\mathcal{U} & \subset & \mathcal{X} & \supset & V & = & \{Q_1,\dots,Q_m\} & \cup & \bigcup D_i & \cup & \{q_1,\dots,q_n\}. & &
\end{tikzcd}$$

Des weiteren setzen wir

$$Q := \{Q_1,\dots,Q_m\}, \quad Q^1 := \{Q_1^1,\dots,Q^1_{m^1}\}, \quad Q^{1'} := \{Q^{1'}{}_1,\dots,Q^{1'}{}_{m^{1'}}\},$$

$$q := \{q_1,\dots,q_n\}, \qquad q^1 := \{q_1^1,\dots,q^1_{n^1}\}, \qquad q^{1'} := \{q^{1'}{}_1,\dots,q^{1'}{}_{n^{1'}}\},$$

$$D := \bigcup_{i=1}^{r} D_i, \qquad D^1 := \bigcup_{i=1}^{r^1} D_i^1, \qquad D^{1'} := \bigcup_{i=1}^{r^{1'}} D_i^{1'} \qquad \text{und}$$

$$E^{1'} := \bigcup_{i=1}^{k^{1'}} E_i^{1'}.$$

Im Folgenden wollen wir die Folgen aus 2.6 für $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ und $\mathcal{U}^L \subset \mathcal{X}^{L,ds}$ vergleichen. Da wir nur an einer kleinen Umgebung von P interessiert sind, nehmen wir an, dass $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ die Bedingungen von 2.7 erfüllt, und somit $H^3(\mathcal{U}) = 0$ ist. Das folgende Lemma zeigt dann, dass auch $H^3(\mathcal{U}^L) = 0$.

Lemma 2.25 *Ist in jeder Zusammenhangskomponente von $\mathcal{V}_s$ mindestens ein q_i enthalten, dass Spezialisierung eines Q_j ist, so ist auch in jeder Zusammenhangskomponente von $\mathcal{V}^{1'}{}_s$ ein $q_i^{1'}$ enthalten, dass Spezialisierung eines $Q_j^{1'}$ ist.*

Beweis: Eine Zusammenhangskomponente $Z^{1'}$ von $\mathcal{V}^{1'}{}_s$ bildet sich immer surjektiv auf eine Zusammenhangskomponente Z von $\mathcal{V}_s$ ab. Ohne Einschränkung sei $q_1 \in Z$ eine Spezialisierung von Q_1. Damit ist Q_1 in Z enthalten und somit ist eines der $Q_i^{1'}$ in Z'' enthalten, da $Z^{1'} \to Z$ surjektiv ist. $\square$

Wir setzen

$$\begin{aligned}
H^i(Q,D)(j) &:= H^i(Q)(j) \oplus H^i(D)(j), \\
H^i(Q^1,D^1)(j) &:= H^i(Q^1)(j) \oplus H^i(D^1)(j) \text{ und} \\
H^i(Q^{1'},D^{1'},E^{1'})(j) &:= H^i(Q^{1'})(j) \oplus H^i(D^{1'})(j) \oplus H^i(E^{1'})(j)
\end{aligned}$$

und betrachten das Diagramm exakter Folgen

$$\begin{tikzcd}
H^2(\mathcal{X}) \arrow[r] \arrow[d] & H^2(\mathcal{U}) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(Q,D)(-1) \arrow[r] \arrow[d] & H^0(q)(-2) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
H^2(\mathcal{X}^{L,ds}) \arrow[r] & H^2(\mathcal{U}^L) \arrow[r] & H^1(Q^{1'},D^{1'},E^{1'})(-1) \arrow[r] & H^0(q^{1'})(-2) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

und die nicht notwendigerweise exakte Folge

$$H^2(\mathcal{X}^L) \longrightarrow H^2(\mathcal{U}^L) \longrightarrow H^1(Q^1,D^1)(-1) \longrightarrow H^0(q^1)(-2) \longrightarrow 0.$$

Wir erhalten so das folgende kommutative Diagramm in dem die erste und die letzte Zeile exakt sind:

$$\begin{tikzcd}
H^2(\mathcal{X}) \arrow[r] \arrow[d] & H^2(\mathcal{U}) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(Q,D)(-1) \arrow[r, "\beta"] \arrow[d] & H^0(q)(-2) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
H^2(\mathcal{X}^L) \arrow[r] \arrow[d] & H^2(\mathcal{U}^L) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^1(Q^1,D^1)(-1) \arrow[r, "\beta^1"] \arrow[d] & H^0(q^1)(-2) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
H^2(\mathcal{X}^{L,ds}) \arrow[r] & H^2(\mathcal{U}^L) \arrow[r] & H^1(Q^{1'},D^{1'},E^{1'})(-1) \arrow[r, "\beta^{1'}"] & H^0(q^{1'})(-2) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Das folgende Lemma zeigt, dass

$$H^2(\mathcal{X}^L) \longrightarrow H^2(\mathcal{U}^L) \longrightarrow H^1(Q^1,D^1)(-1) \xrightarrow{\beta^1} H^0(q^1)(-2) \longrightarrow 0$$

exakt ist.

Lemma 2.26 *Die von*

$$H^1(Q^1,D^1)(-1) \to H^1(Q^{1'},D^{1'},E^{1'})(-1)$$

auf $ker(\beta^1) \to ker(\beta^{1'})$ *induzierte Abbildung ist ein Isomorphismus. Insbesondere ist die Folge*

$$H^2(\mathcal{X}^{L,ds}) \to H^2(\mathcal{U}^L) \to H^1(Q^1)(-1) \oplus H^1(D^1)(-1) \to H^0(q^1)(-2) \to 0$$

exakt. Außerdem ist die von $H^2(\mathcal{X}^L) \to H^2(\mathcal{X}^{L,ds})$ *induzierte Abbildung*

$$coker(H^2_{\mathcal{X}^L-U}(\mathcal{X}^L) \to H^2(\mathcal{X}^L)) \to coker(H^2_{\mathcal{X}^{L,ds}-\mathcal{U}}(\mathcal{X}^{L,ds}) \to H^2(\mathcal{X}^{L,ds}))$$

ein Isomorphismus. Insbesondere ist

$$H^2(\mathcal{X}^L) \to H^2(\mathcal{U}^L) \to H^1(Q^1)(-1) \oplus H^1(D^1)(-1) \to H^0(q^1)(-2) \to 0$$

exakt.

Beweis: Die Abbildung

$$H^1(Q^1,D^1)(-1) \to H^1(Q^{1'},D^{1'},E^{1'})(-1)$$

ist injektiv, da $Q^1 = Q^{1'}$ und $D^1 = D^{1'}$. Außerdem ist jedes der q_i^1 Bild eines der q_j'' und somit ist auch $\bigoplus_i H^0(q_i^1)(-2) \to \bigoplus_i H^0(q_i^{1'})(-2)$ injektiv.

Um zu zeigen, dass die injektive Abbildung $ker(\beta^1) \to ker(\beta^{1'})$ ein Isomorphismus ist, genügt es zu zeigen, dass die $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-Moduln $ker(\beta^1)$ und $ker(\beta^{1'})$ dieselbe Kardinalität haben, also

$$\begin{aligned}
\sharp ker(\beta^1) &= \frac{\sharp(H^1(Q^1)(-1) \oplus H^1(D^1)(-1))}{\sharp H^0(q^1)(-2)} = \\
&= \frac{\sharp(H^1(Q^{1'})(-1) \oplus H^1(D^{1'})(-1) \oplus H^1(E^{1'})(-1))}{\sharp H^0(q^{1'})(-2)} \\
&= \sharp ker(\beta^{1'}).
\end{aligned}$$

Wegen $Q^1 = Q^{1'}$ und $D^1 = D^{1'}$ ist dies gleichbedeutend mit

$$\frac{1}{\sharp H^0(q^1)(-2)} = \frac{\sharp H^1(E^{1'})(-1)}{\sharp H^0(q^{1'})(-2)}.$$

Die Punkte aus q^1 teilen sich in zwei Arten auf, einmal diejenigen, deren Urbild unter $f^{ds} : \mathfrak{X}^{L,ds} \to \mathfrak{X}^L$ wieder ein abgeschlossener Punkt ist und diejenigen, deren Urbild eine Kette von $\mathbb{P}^1_{\bar{\mathbb{F}}_p}$ ist (1.27). Für Punkte q_i^1 der ersten Art ist $H^0(q_i^1)(-2) = H^0(f^{ds^{-1}}(q_i^1))(-2)$ und es bleibt zu zeigen, dass für Punkte q_i^1 der zweiten Art und $E_{q_i^1} := \bigcup_{E_i^{1'} \subset f^{ds^{-1}}(q_i^1)} E_i^{1'}$ die Gleichung

$$\frac{\sharp H^1(E_{q_i^1})(-1)}{\sharp \bigoplus_{q_i^{1'} \in f^{ds^{-1}}(q_i^1)} H^0(q_i^{1'})(-2)} = \frac{1}{n},$$

gilt. Dabei ist $f^{ds^{-1}}(q_i^1) = E_{q_i^1} \cup \{q_i^{1'} \in f^{ds^{-1}}(q_i^1)\}$ eine Kette von $\mathbb{P}^1_{\bar{\mathbb{F}}_p}$, und da

$$H^1(E_{q_i^1})(-1) \text{ und } \bigoplus_{q_i^{1'} \in f^{ds^{-1}}(q_i^1)} H^0(q_i^{1'})(-2)$$

freie $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-Moduln sind, ist dies Gleichbedeutend mit

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}\, H^1(E_{q_i^1})(-1) - \mathrm{rk}_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \bigoplus_{q_i^{1'} \in f^{ds^{-1}}(q_i^1)} H^0(q_i^{1'})(-2) = -1.$$

Dies ist der Fall einer Kette von $\mathbb{P}^1_{\bar{\mathbb{F}}_p}$ aus der eine Menge von Punkten gelöscht wurden. Diesen haben wir schon in 1.46 behandelt. Dies zeigt den ersten Teil der Behauptung.

Betrachten wir nun das kommutative Diagramm, in dem die untere Folge exakt ist, und die obere höchstens bei $H^2(\mathfrak{U}^L) \to ker(\beta^1)$ nicht exakt ist:

$$\begin{tikzcd}
H^2_{\mathfrak{X}^L - \mathfrak{U}^L}(\mathfrak{X}^L) \arrow[r, "\alpha^1"] \arrow[d] & H^2(\mathfrak{X}^L) \arrow[r] \arrow[d] & H^2(\mathfrak{U}^L) \arrow[r] \arrow[d, equal] & ker(\beta^1) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
H^2_{\mathfrak{X}^{L,ds} - \mathfrak{U}^L}(\mathfrak{X}^{L,ds}) \arrow[r, "\alpha^{1'}"] & H^2(\mathfrak{X}^{L,ds}) \arrow[r] & H^2(\mathfrak{U}^L) \arrow[r] & ker(\beta^{1'}) \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

so erhalten wir aus den hinteren Isomorphismen sofort, dass das Bild von $H^2(\mathfrak{X}^L)$ in $ker(H^2(\mathfrak{U}^L) \to ker(\beta^1))$ enthalten ist. Um zu zeigen, dass auch die obere Folge exakt ist, genügt es somit zu zeigen, dass das Kompositum

$$H^2(\mathfrak{X}^L) \to ker(H^2(\mathfrak{U}^L) \to ker(\beta^1)) := A$$

surjektiv ist. Dazu betrachten wir das kommutative Diagramm exakter Folgen:

$$\begin{tikzcd}
H^2_{\mathfrak{X}^L - \mathfrak{U}^L}(\mathfrak{X}^L) \arrow[r, "\alpha^1"] \arrow[d] & H^2(\mathfrak{X}^L) \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d, equal] & \\
H^2_{\mathfrak{X}^{L,ds} - \mathfrak{U}^L}(\mathfrak{X}^{L,ds}) \arrow[r, "\alpha^{1'}"] & H^2(\mathfrak{X}^{L,ds}) \arrow[r] & A \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Die Abbildung

$$H^2(\mathcal{X}^L) \cong \bigoplus_{irred.\,Komp\,von\,\mathcal{X}_s^L} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \bigoplus_{irred.\,Komp\,von\,\mathcal{X}_s^{L,ds}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong H^2(X^{L,ds})$$

ist dabei gegeben durch die Inklusion der irreduziblen Komponenten von $(\mathcal{X}_s^L)_{reg}$ in die irreduziblen Komponenten von $(\mathcal{X}_s^{L,ds})_{reg}$ und somit injektiv. Um zu zeigen, dass

$$H^2(\mathcal{X}^L) \longrightarrow A$$

surjektiv ist, genügt es zu zeigen, dass für jede irreduzible Komponente D von $\mathcal{X}_s^{L,ds}$ mit $D \subset \mathcal{V}^{1'}$ der zu D gehörige direkte Summand von $H^2(\mathcal{X}^{L,ds})$ unter $H^2(\mathcal{X}^{L,ds}) \to A$ auf 0 abgebildet wird, d.h. dass der zu D gehörige direkte Summand von $H^2(\mathcal{X}^{L,ds})$ im Bild von

$$H^0(Q^{1'})(-1) \oplus H^0(D^{1'})(-1) \longrightarrow H^2(\mathcal{X}^{L,ds})$$

liegt. Dies zeigt das folgende Lemma. $\square$

Lemma 2.27 *Sei $\mathcal{C}$ eine reguläre gefaserte Fläche über einem lokalen Dedekindring A mit geometrisch integrer generischer Faser und D ein irreduzibler vertikaler Divisor mit $D \neq \mathcal{C}_s$. Dann ist die Abbildung $H^2_D(\mathcal{C}, \mu_n) \to H^2(\mathcal{C}, \mu_n)$ nicht die Nullabbildung für jedes in A invertierbare $n \in \mathbb{N}$.*

Beweis: Wir betrachten das kommutative Diagramm, das wir aus der Ausschneidungsfolge für $D \subset \mathcal{C}$ und der langen exakten Kohomologiefolge für

$$1 \to \mu_n \to \mathbb{G}_m \overset{()^n}{\to} \mathbb{G}_m \to 1$$

erhalten:

$$\begin{tikzcd}
 & & & \mathcal{O}_\mathcal{C}(\mathcal{C})^\times \arrow[r] \arrow[d, "()^n"'] & \mathcal{O}_\mathcal{C}(\mathcal{C}-D)^\times \arrow[d, "()^n"'] \\
 & & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_\mathcal{C}(\mathcal{C})^\times \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_\mathcal{C}(\mathcal{C}-D)^\times \arrow[d] \\
\mathcal{O}_\mathcal{C}(\mathcal{C})^\times \arrow[r] \arrow[d, "()^n"'] & \mathcal{O}_\mathcal{C}(\mathcal{C}-D)^\times \arrow[r] \arrow[d, "()^n"'] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "\cdot n"'] & Pic(\mathcal{C}) \arrow[r] \arrow[d, "(\cdot n)_\mathcal{C}"'] & Pic(\mathcal{C}-D) \arrow[d, "(\cdot n)_{\mathcal{C}-D}"'] \\
\mathcal{O}_\mathcal{C}(\mathcal{C})^\times \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_\mathcal{C}(\mathcal{C}-D)^\times \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d] & Pic(\mathcal{C}) \arrow[r] \arrow[d] & Pic(\mathcal{C}-D) \arrow[d] \\
H^1(\mathcal{C}, \mu_n) \arrow[r] & H^1(\mathcal{C}-D, \mu_n) \arrow[r] & H^2_D(\mathcal{C}, \mu_n) \arrow[r] & H^2(\mathcal{C}, \mu_n) \arrow[r] & H^2(\mathcal{C}-D, \mu_n)
\end{tikzcd}$$

Dabei gilt es zu beachten, dass

$$Pic(\mathcal{C}) \to Pic(C - D)$$

surjektiv und

$$Pic(\mathcal{C}) \xrightarrow{\cdot n} Pic(\mathcal{C}) \text{ und}$$

$$Pic(\mathcal{C} - D) \xrightarrow{\cdot n} Pic(\mathcal{C} - D)$$

injektiv sind, da $H^1_D(\mathcal{C}, \mu_n) = 0$.

Nach [Liu, Excercise 9.3.9] ist $\mathcal{O}_\mathcal{C}(\mathcal{C})^\times \to \mathcal{O}_\mathcal{C}(\mathcal{C} - D)^\times$ ein Isomorphismus und wir erhalten das kommutative Diagramm exakter Folgen:

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{O}_\mathcal{C}(\mathcal{C})^\times \arrow[r] \arrow[d, "()^n"'] & \mathcal{O}_\mathcal{C}(\mathcal{C} - D)^\times \arrow[d, "()^n"'] & \\
 & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_\mathcal{C}(\mathcal{C})^\times \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_\mathcal{C}(\mathcal{C} - D)^\times \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "\cdot n"'] & Pic(\mathcal{C}) \arrow[r] \arrow[d, "(\cdot n)_\mathcal{C}"'] & Pic(\mathcal{C} - D) \arrow[r] \arrow[d, "(\cdot n)_{\mathcal{C}-D}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d] & Pic(\mathcal{C}) \arrow[r] \arrow[d] & Pic(\mathcal{C} - D) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & H^2_D(\mathcal{C}, \mu_n) \arrow[r] & H^2(\mathcal{C}, \mu_n) \arrow[r] & H^2(\mathcal{C} - D, \mu_n). &
\end{tikzcd}$$

Aus dem Schlangenlemma erhalten wir die exakte Folge

$$0 \longrightarrow ker((\cdot n)_\mathcal{C}) \longrightarrow ker((\cdot n)_{\mathcal{C}-D}) \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow coker((\cdot n)_\mathcal{C}).$$

Da $\mathcal{O}_\mathcal{C}(\mathcal{C})^\times = \mathcal{O}_\mathcal{C}(\mathcal{C} - D)^\times$, ist das Kompositum

$$coker(\mathcal{O}_\mathcal{C}(\mathcal{C})^\times \xrightarrow{()^n} \mathcal{O}_\mathcal{C}(\mathcal{C})^\times) \longrightarrow coker(\mathcal{O}_\mathcal{C}(\mathcal{C} - D)^\times \xrightarrow{()^n} \mathcal{O}_\mathcal{C}(\mathcal{C} - D)^\times)$$

ein Isomorphismus und somit auch

$$ker((\cdot n)_\mathcal{C}) \to ker((\cdot n)_{\mathcal{C}-D}),$$

da

$$ker((\cdot n)_\mathcal{C}) = coker(\mathcal{O}_\mathcal{C}(\mathcal{C})^\times \xrightarrow{()^n} \mathcal{O}_\mathcal{C}(\mathcal{C})^\times) \text{ und}$$

$$ker((\cdot n)_{\mathcal{C}-D}) = coker(\mathcal{O}_\mathcal{C}(\mathcal{C} - D)^\times \xrightarrow{()^n} \mathcal{O}_\mathcal{C}(\mathcal{C} - D)^\times)$$

und wir erhalten eine Injektion $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \hookrightarrow coker(\cdot n)_\mathcal{C}$ und daher auch eine Injektion $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \hookrightarrow coker(\cdot n)_\mathcal{C} \hookrightarrow H^2(\mathcal{C}, \mu_n)$, weswegen $H^2_D(\mathcal{C}, \mu_n) \to H^2(\mathcal{C}, \mu_n)$ nicht die Nullabbildung ist. $\square$

Folgerung 2.28 *Wir erhalten das kommutative Diagramm exakter Folgen*

$$\begin{tikzcd}
H^2(\mathcal{X}) \arrow[r] \arrow[d] & H^2(\mathcal{U}) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(Q)(-1) \oplus H^1(D)(-1) \arrow[r] \arrow[d] & H^0(q)(-2) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
H^2(\mathcal{X}^{L,ds}) \arrow[r] & H^2(\mathcal{U}^L) \arrow[r] & H^1(Q^1)(-1) \oplus H^1(D^1)(-1) \arrow[r] & H^0(q^1)(-2) \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

das die von der Überlagerung $\mathcal{X}^L \to \mathcal{X}$ auf $H^2(\mathcal{U}) \to H^2(\mathcal{U}^L)$ induzierte Abbildung beschreibt.

Betrachten wir nun nicht nur die Normalisierung von $\mathcal{X}$ in einer endlichen Erweiterung L_1 von K sondern auch in einer endlichen Erweiterung L_2 von L_1 mit den Notationen

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\mathcal{U}^{L_2} & \subset & \mathcal{X}^{L_2} & \supset & V^2 = & \{Q_1^2, \ldots, Q_{m^2}^2\} & \cup & \bigcup D_i^2 & \cup & \{q_1^1, \ldots, q_{n^2}^2\} \\
\downarrow & & \downarrow & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{U}^{L_1} & \subset & \mathcal{X}^{L_1} & \supset & V^1 = & \{Q_1^1, \ldots, Q_{m^1}^1\} & \cup & \bigcup D_i^1 & \cup & \{q_1^1, \ldots, q_{n^1}^1\} \\
\downarrow & & \downarrow & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{U} & \subset & \mathcal{X} & \supset & V = & \{Q_1, \ldots, Q_m\} & \cup & \bigcup D_i & \cup & \{q_1, \ldots, q_n\}
\end{array}$$

und

$$\begin{aligned}
&Q := \{Q_1, \ldots, Q_m\}, \quad Q^1 := \{Q_1^1, \ldots, Q_{m^1}^1\}, \quad Q^2 := \{Q_1^2, \ldots, Q_{m^2}^2\}, \\
&q := \{q_1, \ldots, q_n\}, \quad q^1 := \{q_1^1, \ldots, q_{n^1}^1\}, \quad q^2 := \{q_1^2, \ldots, q_{n^2}^2\}, \\
&D := \bigcup_{i=1}^{k} D_i, \quad D^1 := \bigcup_{i=1}^{k^1} D_i^1 \quad \text{und} \quad D^2 := \bigcup_{i=1}^{k^2} D_i^2,
\end{aligned}$$

so erhalten wir das kommutative Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{tikzcd}
H^2(\mathcal{X}) \arrow[r] \arrow[d] & H^2(\mathcal{U}) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(Q, D)(-1) \arrow[r] \arrow[d] & H^0(q)(-2) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
H^2(\mathcal{X}^{L_1,ds}) \arrow[r] \arrow[d] & H^2(\mathcal{U}^{L_1}) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(Q^1, D^1)(-1) \arrow[r] \arrow[d] & H^0(q^1)(-2) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
H^2(\mathcal{X}^{L_2,ds}) \arrow[r] & H^2(\mathcal{U}^{L_2}) \arrow[r] & H^1(Q^2, D^2)(-1) \arrow[r] & H^0(q^2)(-2) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Wir wollen nun zeigen, dass es zu jeder endlichen Körpererweiterung L_1 und jedem D aus $\{D_i^1, Q_j^1\}$ eine Körpererweiterung L_2 gibt, so dass $H^1(D)(-1)$ unter

$$H^1(Q^1)(-1) \oplus H^1(D^1)(-1) \to H^1(Q^2)(-1) \oplus H^1(D^2)(-1)$$

auf Null abgebildet wird. Die dafür ausreichenden Körpererweiterungen haben wir im letzten Kapitel definiert.

Lemma 2.29 *Es sei L_1 eine endliche Körpererweiterung von K mit $\mathcal{U}^{L_1} \to \mathcal{U}$ étale und $D \in \{Q^1_1, \dots, Q^1_{m^1}, D^1_1, \dots, D^1_{r^1}\}$, dann gibt es eine endliche galoissche S-Erweiterung L_2 von L_1, so dass D verzweigt ist vom Grad n in L_2. Insbesondere gilt $H^1(D)(-1)$ wird unter*

$$H^1(Q^1)(-1) \oplus H^1(D^1)(-1) \to H^1(Q^2)(-1) \oplus H^1(D^2)(-1)$$

auf Null abgebildet.

Beweis: Wir hatten die gesuchte Überlagerung in 2.10 konstruiert und in 1.43 gesehen, dass unter der auf der Kohomologie mit Träger induzierten Abbildung

$$H^1(Q^1)(-1) \oplus H^1(D^1)(-1) \to H^1(Q^2)(-1) \oplus H^1(D^2)(-1)$$

$H^1(D)(-1)$ auf Null abgebildet wird. □

Folgerung 2.30 *Zu jeder endlichen Erweiterung L_1 von K, mit $\mathcal{U}^{L_1} \to \mathcal{U}$ étale gibt es eine endliche galoissche S-Erweiterung L_2 von L_1, so dass die induzierte Abbildung*

$$H^1(Q^1)(-1) \oplus H^1(D^1)(-1) \to H^1(Q^2)(-1) \oplus H^1(D^2)(-1)$$

die Nullabbildung ist.

Beweis: Wir setzen L_2 als das Kompositum der im vorigen Lemma beschriebenen Körpererweiterungen. Es ist dann L_2/L_1 eine endliche galoissche S-Erweiterung und

$$H^1(Q^1)(-1) \oplus H^1(D^1)(-1) \to H^1(Q^2)(-1) \oplus H^1(D^2)(-1)$$

die Nullabbildung, da jedes $D \in \{Q^1_1, \dots, Q^1_{m^1}, D^1_1, \dots, D^1_{r^1}\}$ verzweigt vom Grad m mit $m \mid n$ in $\mathcal{X}^{L_2}$ ist. □

Wir haben damit gesehen, dass die Anteile von $H^2(\mathcal{U}^1)$, die von $H^3_{V^1}(\mathcal{X}^1)$ kommen, in einem $H^2(\mathcal{U}^2)$ verschwinden. Aber $H^2(\mathcal{U}^1)$ beinhaltet auch Kohomologieklassen, die von Kohomologieklassen aus $H^2(\mathcal{X}^1)$ kommen. Diese tauchen auch dann auf, wenn $H^2(\mathcal{X}) \to H^2(\mathcal{U})$ die Nullabbildung ist. Anders ausgedrückt, bedeutet dies, dass die Eigenschaft „$H^2(\mathcal{X}) \to H^2(\mathcal{U})$ ist die Nullabbildung" nicht stabil unter Überlagerungen ist.

Beispiel 2.31 Es sei $\mathcal{X}$ eine glatte projektive Kurve über $\mathcal{O}$ und Q_1, Q_2, Q_3 abgeschlossene Punkte von $\mathcal{X}_\eta$ mit $\overline{\{\mathbb{Q}_i\}} \cap \overline{\{Q_j\}} = \{q\}$ für einen abgeschlossenen Punkt $z \in \mathcal{X}$ und $i \neq j$. Wir setzen $\mathcal{U} := \mathcal{X} - \{Q_1, Q_2, Q_3, z\}$. Wir hatten in 2.20 gesehen, dass

- $H^2(\mathcal{X}) \to H^2(\mathcal{U})$ die Nullabbildung ist und
- wir Überlagerungen haben, die genau über zwei der drei Punkte Q_1, Q_2, Q_3 verzweigen.

Entsteht bei einer Überlagerungen $f : \mathcal{X}^1 \to \mathcal{X}$, welche étale über $\mathcal{U}$ ist, ein singulärer Punkt in der speziellen Faser bei q, so ist die Abbildung $H^2(\mathcal{X}^1) \to H^2(\mathcal{U}^1)$ im Allgemeinen nicht mehr die Nullabbildung. Um dies zu sehen, setzen wir $Q^1 := f^{-1}(Q_1, Q_2, Q_3)$ und betrachten die Ausschneidungsfolge für $V^1 := f^{-1}(Q_1, Q_2, Q_3, q)$ aus $\mathcal{X}^1$

$$H^0(Q^1)(-1) \longrightarrow H^2(\mathcal{X}^1) \longrightarrow H^2(\mathcal{U}) \longrightarrow H^1(Q^1)(-1)$$

Hierbei ist,

$$H^0(Q^1) \cong \bigoplus_{Q \in \mathbb{Q}^1} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \bigoplus_{T \text{ irred. Komp. v. } \mathcal{X}^1_s} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = H^2(\mathcal{X}^1)$$

gegeben durch $(a_Q)_Q \mapsto (\epsilon \sum_Q a_Q)_T$ mit $\epsilon \in \{1, 2\}$ (je nachdem, ob $\mathcal{X}_s$ eine $(\epsilon = 2)$ oder zwei $(\epsilon = 1)$ irreduzible Komponenten hat). Ist $n = 2n'$ oder hat $\mathcal{X}^1_s$ zwei irreduzible Komponenten, so ist diese Abbildung nicht mehr surjektiv und somit $H^2(\mathcal{X}^1) \to H^2(\mathcal{U}^1)$ nicht die Nullabbildung.

Dieses Problem löst das nächste

Lemma 2.32 *Es sei $\mathcal{X}$ eine normale gefaserte Fläche $q \in \mathcal{X}$ ein abgeschlossener Punkt, so dass q in $\mathcal{X}_s$ ein gewöhnlicher Doppelpunkt ist und $Q \in \mathcal{X}_\eta$ ein abgeschlossener Punkt der auf q spezialisiert. Wir nehmen an, dass $\mathcal{X}$ regulär ist bei q und dass es eine Überlagerung $f : \mathcal{X}^1 \to \mathcal{X}$ gibt, so dass $e_{Q^1/Q} | n$ für einen Punkt Q^1 über Q. Dann werden unter der Abbildung*

$$H^2(\mathcal{X}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to H^2(X^1, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

die zu den durch q gehenden irreduziblen Komponenten von $\mathcal{X}_s$ gehörenden Klassen auf Null abgebildet.

Beweis: Wir betrachten Kohomologie mit $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-Koeffizienten und erhalten aus den Morphismen $\mathcal{X}'_s \xrightarrow{\pi} \mathcal{X}_s \longrightarrow \mathcal{X}$, wobei $\pi : \mathcal{X}'_s \to \mathcal{X}_s$ die Normalisierung von $\mathcal{X}_s$ ist, und mit $\{q_1, q_2\} = \pi^{-1}(q)$ das folgende kommutative Diagramm exakter Folgen

$$\begin{tikzcd}
H^2_{\{Q,q\}}(\mathcal{X}) \arrow[r] \arrow[d] & H^2(\mathcal{X}) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & H^2(\mathcal{U}) \arrow[d] \\
H^2_q(\mathcal{X}_s) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & H^2(\mathcal{X}_s) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & H^2(\mathcal{U}_s) \arrow[d] \\
H^2_{q_1}(\mathcal{X}'_s) \oplus H^2_{q_2}(\mathcal{X}'_s) \arrow[r] & H^2(\mathcal{X}'_s) \arrow[r] & H^2(\mathcal{U}'_s).
\end{tikzcd}$$

Hierbei ist die Abbildung

$$H^2_{\{Q,q\}}(\mathcal{X}) \to H^2_{q_1}(\mathcal{X}'_s) \oplus H^2_{q_2}(\mathcal{X}'_s)$$

die Diagonaleinbettung. Und

$$H^2_{q_i}(\mathcal{X}'_s) \to H^2(\mathcal{X}'_s)$$

bildet in den zu der irreduziblen Komponente von $\mathcal{X}'_s$, in der q_i, liegt gehörenden Summanden ab.

Wir benutzen die folgenden Bezeichnungen:

- $X_s^{1'}$ ist die Normalisierung von $\mathcal{X}_s^1$,
- $V^1 := f^{-1}(\{Q, q\})$,
- $\mathcal{U}^1 = \mathcal{X}^1 - V^1$ und,
- q_i^1 ist das Urbild von q_i in $\mathcal{X}_s^{1'}$.

Aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{X}_s^{1'} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{X}^1 \arrow[d] \\
\mathcal{X}'_s \arrow[r] & \mathcal{X}
\end{tikzcd}$$

erhalten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
H^2_{\{Q,q\}}(\mathcal{X}) \arrow[rr] \arrow[dd, "\beta"] \arrow[dr, "\alpha"] & & H^2(\mathcal{X}) \arrow[rr] \arrow[dd] \arrow[dr, "\sim"] & & H^2(\mathcal{U}) \arrow[dd] \arrow[dr] & \\
& H^2_{q_1}(\mathcal{X}'_s) \oplus H^2_{q_2}(\mathcal{X}'_s) \arrow[rr] \arrow[dd, "\beta'"] & & H^2(\mathcal{X}'_s) \arrow[rr] \arrow[dd] & & H^2(\mathcal{U}'_s) \arrow[dd] \\
H^2_{V^1}(\mathcal{X}^1) \arrow[rr] \arrow[dr, "\alpha^1"] & & H^2(\mathcal{X}^1) \arrow[rr] \arrow[dr, "\sim"] & & H^2(\mathcal{U}^1) \arrow[dr] & \\
& H^2_{q_1^1}(\mathcal{X}_s^{1'}) \oplus H^2_{q_2^1}(\mathcal{X}_s^{1'}) \arrow[rr] & & H^2(\mathcal{X}_s^{1'}) \arrow[rr] & & H^2(\mathcal{U}'_s).
\end{tikzcd}$$

Wir sehen, dass $H^2_{q_i}(\mathcal{X}'_s) \to H^2_{q_1^1}(\mathcal{X}_s^{1'})$ die Nullabbildung ist. Somit werden auch die Kohomologieklassen von $H^2(\mathcal{X})$ von den irreduziblen Komponenten von $\mathcal{X}_s$, die durch q gehen, unter $H^2(\mathcal{X}) \to H^2(\mathcal{X}^1)$ auf Null abgebildet. □

Satz 2.33 *Es sei S eine Menge von Primzahlen mit $p \notin S$ und $\mathcal{X}$ eine semistabile gefaserte Fläche über einer Erweiterung $\mathcal{O}$ von $\mathbb{Z}_p$ mit endlichem Verzweigungsindex, die die l-ten Einheitswurzeln enthält für jedes $l \in S$. Es sei P ein Punkt von $\mathcal{X}$ und $\mathcal{U}'$ eine offene Umgebung von P. Dann gibt es eine offene Umgebung $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}'$ von P, die ein $K(\pi, 1)$ für S ist.*

Beweis: Es sei $\pi : \mathcal{X}' \to \mathcal{X}$ eine Desingularisierung der außerhalb von P liegenden Singularitäten. Dann ist $\mathcal{X}' \to \mathcal{X}$ ein Isomorphismus über einer offenen Teilmenge $W \subset \mathcal{X}$ mit $P \in W$. Wir setzen $\mathcal{U}'' := \mathcal{U}' \cap W$ und fassen $\mathcal{U}''$ als offene Teilmenge von $\mathcal{X}'$ auf. Durch Übergang von $\mathcal{X}$ zu $\mathcal{X}'$ und $\mathcal{U}'$ zu $\mathcal{U}''$ können wir annehmen, dass $\mathcal{X}$ außerhalb von P regulär ist.

Es sei $V' := \mathcal{X} - \mathcal{U}'$. Wir verkleinern $\mathcal{U}'$ noch um weitere horizontale Punkte, so dass in jeder Zusammenhangskomponente von V' und in jeder irreduziblen Komponente von $\mathcal{X}_s$ ein Punkt aus $\mathcal{X}_\eta$ enthalten ist. Nach 2.7 haben wir

$$H^3(\mathcal{U}'', \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0$$

für jedes $n \in \mathbb{N}(S)$ und jede étale Überlagerung $\mathcal{U}''$ von $\mathcal{U}'$.

Zu jedem Divisor D von $\mathcal{X}$, der in V' enthalten ist, wählen wir ein Element $x_D \in K = K(\mathcal{X})$, so dass für jedes $n \in \mathbb{N}(S)$ und $L_{n,D} := K[\sqrt[n]{x_D}, \mu_n]$ der Morphismus $\mathcal{X}^{L_n} \to \mathcal{X}$ étale über P ist. Dass dies möglich ist, hatten wir in 2.10 gesehen. Wir setzen $\mathcal{U} := \mathcal{U}' - \bigcup_{x_D} \mathrm{supp}(x_D)$. Wir hatten gesehen, dass $\mathcal{U}^{L_{n,D}}$ étale über $\mathcal{U}$ ist und es zu jedem $m \in \mathbb{N}(S)$ ein $k \in \mathbb{N}(S)$ existiert, so dass D in $\mathcal{X}^{L_{k,D}}$ verzweigt vom Grad m ist.

Es sei nun $\mathcal{F}$ eine lokal konstante S-Torsionsgarbe auf $\mathcal{U}$ und $\mathcal{U}^1$ étale über $\mathcal{U}$, so dass $\mathcal{F}|_{\mathcal{U}^1}$ konstant ist, also $\mathcal{F}|_{\mathcal{U}} \cong \bigoplus_{i=1}^m \mathbb{Z}/k_i\mathbb{Z}$ mit $n_i \in \mathbb{N}(S)$ und $\mu_{k_i} \subset \mathcal{O}_{\mathcal{U}}$ für jedes $i = 1, \dots, m$. Es sei $\mathcal{U}^2$ eine endliche étale Überlagerung von $\mathcal{U}^1$ und $\alpha \in H^2(\mathcal{U}^2, \mathcal{F}) = H^2(\mathcal{U}^2, \bigoplus_{i=1}^m \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z})$. Wir wollen nun eine endliche étale Überlagerung $\mathcal{U}^3$ von $\mathcal{U}^2$ angeben, so dass α unter $H^2(\mathcal{U}^2, \mathcal{F}) \to H^2(\mathcal{U}^3, \mathcal{F})$ auf Null abgebildet wird.

Dazu setzen wir $L_i := K(\mathcal{U}^i), \mathcal{X}^i = \mathcal{X}^{L_i}, V^i = \mathcal{X}^i - \mathcal{U}^i$ und schreiben V^2 als Vereinigung der singulären Punkte $\{q_1^2, \dots, q_{n_2}^2\} = q^2$ von V^2 mit den (regulären) horizontalen Divisoren $\{Q_1^2, \dots, Q_{m_2}^2\} = Q^2$ von $\mathcal{X}^2 - q^2$, die in V^2 enthalten sind, und den (regulären) vertikalen Divisoren $\{E_1^2, \dots, E_{r_2}^2\} = E$ von $\mathcal{X}^2 - q^2$, die in V^2 enthalten sind. Wir betrachten die exakte Folge aus 2.28:

$$H^0(Q^2, E^2)(-1) \longrightarrow H^2(\mathcal{X}^2) \longrightarrow H^2(\mathcal{U}^2) \longrightarrow H^1(Q^2, E^2)(-1) \longrightarrow H^0(q^2)(-2),$$

wobei $H(\_)(-k) = H(\_, \mathcal{F}(-k))$ ist.

Es sei $\alpha \in H^2(\mathcal{U}^2)$. Ist

$$\alpha \in \ker(H^2(\mathcal{U}^2) \longrightarrow H^1(Q^2, E^2)(-1)) = \mathrm{im}(H^2(\mathcal{X}^2) \longrightarrow H^2(\mathcal{U}^2)),$$

so finden wir nach 2.32 eine Überlagerung $\mathcal{X}^3$ von $\mathcal{X}^2$, die étale über $\mathcal{X}^2$ ist, so dass jedes Urbild $\alpha' \in H^2(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ von α unter der Abbildung

$$H^2(\mathcal{X}^2, \mathcal{F}) \longrightarrow H^2(\mathcal{X}^3, \mathcal{F})$$

auf Null abgebildet wird. Insbesondere wird α unter

$$H^2(\mathcal{U}^2, \mathcal{F}) \longrightarrow H^2(\mathcal{U}^3, \mathcal{F})$$

auf Null abgebildet.

Ist α nicht in $ker(\ H^2(\mathcal{U}^2) \longrightarrow H^1(Q^2, E^2)(-1)\ )$, so finden wir nach 2.30 eine Überlagerung $\mathcal{X}^4$ von $\mathcal{X}^2$, welche étale über $\mathcal{U}^2$ ist, so dass das Bild $\alpha'' \in H^1(Q^2, E^2, \mathcal{F}(-1))$ von α unter

$$H^1(Q^2, E^2, \mathcal{F}(-1)) \longrightarrow H^1(Q^4, E^4, \mathcal{F}(-1))$$

auf Null abgebildet wird. Dies bedeutet, dass das Bild α''' von α unter

$$H^2(\mathcal{U}^2, \mathcal{F}) \longrightarrow H^2(\mathcal{U}^4, \mathcal{F})$$

in $ker(\ H^2(\mathcal{U}^4) \longrightarrow H^1(Q^4, E^4)(-1)\ )$ enthalten ist. Daher gibt es eine Überlagerung $\mathcal{X}^5$ von $\mathcal{X}^4$, welche étale über $\mathcal{U}^4$ ist, so dass α''' unter $H^2(\mathcal{U}^4, \mathcal{F}) \longrightarrow H^2(\mathcal{U}^5, \mathcal{F})$ auf Null abgebildet wird. Da $\mathcal{X}^5$ eine Überlagerung von $\mathcal{X}^2$ ist, die étale über $\mathcal{U}^2$ ist, wird sicherlich α unter

$$H^2(\mathcal{U}^2, \mathcal{F}) \longrightarrow H^2(\mathcal{U}^5, \mathcal{F})$$

auf Null abgebildet.

Dies zeigt, dass

$$H^i(\pi_1(\mathcal{U}, P)(S), M) \xrightarrow{\phi_{M,i}} H^i(\mathcal{U}, \underline{M})$$

ein Isomorphismus für jeden diskreten $\pi_1(\mathcal{U}, P)(S)$-S-Torsionsmodul M und jedes $i \in \mathbb{N}$ ist. □

Folgerung 2.34 *(Theorem 0.2)*
Es sei S eine Menge von Primzahlen mit $p \notin S$ und $\mathcal{X}$ eine semi-stabile gefaserte Fläche über einer Erweiterung $\mathcal{O}$ von $\mathbb{Z}_p$ mit endlichem Verzweigungsindex, die die l-ten Einheitswurzeln enthält für jedes $l \in S$. Dann gibt es um jeden Punkt $P \in \mathcal{X}$ eine Umgebungsbasis von $K(\pi, 1)$en für S.

Beweis: Es sei P ein beliebiger Punkt in $\mathcal{X}$ und $\mathcal{U}'$ eine offene Umgebung von P. Dann finden wir nach dem vorhergehenden Satz 2.33 eine offene Umgebung $\mathcal{U}$ von P, die in $\mathcal{U}'$ enthalten ist und die ein $K(\pi, 1)$ für S ist. □

Die letzten beiden Sätze dieser Arbeit beantworten die Frage nach den realisierten lokalen Erweiterungen beim Übergang zur universellen S-Überlagerung.

Satz 2.35 *Es sei S eine Menge von Primzahlen mit $p \notin S$ und $\mathcal{X}$ eine semi-stabile gefaserte Fläche über einer Erweiterung $\mathcal{O}$ von $\mathbb{Z}_p$ mit endlichem Verzweigungsindex, die die l-ten Einheitswurzeln enthält für jedes $l \in S$. Es sei P ein Punkt von $\mathcal{X}$ und $\mathcal{U}'$ eine offene Umgebung von P. Dann gibt es eine offene Umgebung $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}'$ von P, die ein $K(\pi, 1)$ für S ist, und so dass für jeden abgeschlossenen Punkt $Q \in (\mathcal{X} - \mathcal{U})_\eta$ und jedes $Q' \in \mathcal{X}^{K(\mathcal{U}^S)} - \mathcal{U}^S$ über Q die $k(Q')$ die maximale S-Erweiterung von $k(Q)$ ist.*

Beweis: Wie in 2.33 können wir durch die Wahl einer starken Desingularisierung der außerhalb von P liegenden Singularitäten von $\mathcal{X}$ ohne Einschränkung davon ausgehen, dass $\mathcal{X}$ außerhalb von P regulär ist. Nehmen dann eventuell weitere horizontale Divisoren $\{Q_i, q_i\}$ $(i = 1, \dots, r)$ heraus um zu erreichen, dass $H^3(\mathcal{U}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}(S)$, verkleinern $\mathcal{U}$ noch um alle irreduziblen Komponenten von $\mathcal{U}_s$ in denen P nicht enthalten ist um schließlich $\mathcal{U}$ noch wie in 2.10 und 2.23 zu verkleinern. Danach geht der Beweis genauso wie in 2.33, nur mit den Überlagerungen aus 2.10 und 2.23.

Da $k(Q)$ ein Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$ die maximal unverzweigte Erweiterung einer endlichen Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$ ist, ist die maximale S Erweiterung von $k(Q)$ eine $\mathbb{Z}_S = \prod_{l \in S} \mathbb{Z}_l$-Erweiterung. In 2.23 wurde gezeigt, dass für jeden Punkt Q' in $\mathcal{X}^{K(\mathcal{U}^S)}$ über Q die Erweiterung $k(Q')/k(Q)$ eine $\mathbb{Z}_S$-Erweiterung ist, weswegen $k(Q')$ die maximale S-Erweiterung von $k(Q)$ sein muss. □

Folgerung 2.36 *(Theorem 0.3)*
Es sei S eine Menge von Primzahlen mit $p \notin S$ und $\mathcal{X}$ eine semi-stabile gefaserte Fläche über einer Erweiterung $\mathcal{O}$ von $\mathbb{Z}_p$ mit endlichem Verzweigungsindex, die die l-ten Einheitswurzeln enthält für jedes $l \in S$. Dann gibt es um jeden Punkt $P \in \mathcal{X}$ eine Umgebungsbasis von $K(\pi,1)$en für S, so dass für jeden abgeschlossenen Punkt Q der generischen Faser von $\mathcal{X} - \mathcal{U}$ und jedes $Q' \in \mathcal{X}^{K(\mathcal{U}^S)} - \mathcal{U}^S$ über Q der Körper $k(Q')$ die maximale S-Erweiterung von $k(Q)$ ist.

Beweis: Es sei P ein beliebiger Punkt in $\mathcal{X}$ und $\mathcal{U}'$ eine offene Umgebung von P. Dann finden wir nach dem vorhergehenden Satz 2.35 eine offene Umgebung $\mathcal{U}$ von P, die in $\mathcal{U}'$ enthalten ist und die ein $K(\pi,1)$ für S ist, so dass für jedes $Q \in \mathcal{X} - \mathcal{U}$ und jedes $Q' \in \mathcal{X}^{K(\mathcal{U}^S)} - \mathcal{U}^S$ über Q der Körper $k(Q')$ die maximale S-Erweiterung von $k(Q)$ ist. □

Literatur

[AM] M. Artin and B. Mazur, *Étale homotopy*, Lecture Notes in Math. No. 100, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1969.

[Fr] E. M. Friedlander *Étale homotopy of simplicial schemes*, Princeton University Press, 1982.

[Fu] K. Fujiwara, *A proof of the absolute purity conjecture (after Gabber)*, Algebraic Geometry 2000, Azumino (Hotaka), 153-183, 2000.

[SGA1] A. Grothendieck, *Revêtements Étale et Groupe Fundamental (SGA1)*, Lecture Notes in Math. 224, Springer, 1971.

[SGA4$\frac{1}{2}$] P. Deligne, *Cohomologie Étale (SGA4$\frac{1}{2}$)*, Lecture Notes in Math. 569, Springer, 1977.

[Ha] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer Verlag, 1977.

[Liu] Q. Liu, *Algebraic Geometry and Arithmetic Curves*, Oxford University Press, 2002.

[Liu-Lorenzini] Q. Liu, D. Lorenzini, *Models of curves and finite covers*, Compos. Math. 118, 61-102, 1999.

[Mat] H. Matsumura, *Commutative Algebra*, 2nd edition, Benjamin/Cummings Publishing Company, 1980.

[Maz] B. Mazur, *Notes on étale cohomology of number fields*, Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, Nr. 6, 521-552, 1973.

[Mi] J. S. Milne, *Étale Cohomology*, Princeton University Press, 1980.

[Mi2] J. S. Milne *Arithmetic Duality Theorems*, Academic Press, 1986.

[Ne] J. Neukirch, *Algebraische Zahlentheorie*, Springer Verlag, 1992.

[NSW] J. Neukirch, A. Schmidt, K. Wingberg, *Cohomology of Number fields*, 2nd edition, Springer Verlag, 2000.

[Sch1] A. Schmidt, *Rings of integers of type $K(\pi, 1)$*, Documenta Math. 12, 441-471, 2007.

[Sch2] A. Schmidt, *On the $K(\pi, 1)$-property for rings of integers in the mixed case ,RIMS Kokyuroku Bessatsu B12, 91-100, 2009.*

[Se] J.-P. Serre, Galois Cohomology*, Springer Verlag, 1997.*