Heidelberger Akademie der Wissenschaften

Mathematische Abhandlungen

Autor: **Koenigsberger, Leo** (1837 – 1921)

Titel: **Ausdehnung der Abelschen Fundamentalsätze der Integralrechnung auf kinetische Potentiale beliebiger Ordnung**

Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse : Abt. A ; 1919, 17

Nach Aufstellung der für ein kinetisches Potential beliebiger Ordnung geltenden Hamiltonschen Differentialgleichungen werden die bekannten Abelschen Fundamentalsätze der Integralrechnung über die Ausdrückbarkeit eines Abelschen Integrales durch algebraische und logarithmische Funktionen sowie durch elliptische Integrale als Eigenschaften von Integralfunktionen der einfachsten Differentialgleichung erster Ordnung aufgefaßt, und die Untersuchung der Form der allgemeinsten Integralfunktionen der Hamiltonschen Differentialgleichungen wird für den Fall durchgeführt, daß das kinetische Potential die Zeit nicht explicite enthält und die Integralfunktion algebraisch von den Variabeln und beliebigen Abelschen Integralen abhängt.

(Zsfassung aus: Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften / Jahresheft 1919, S. XXXVIII)

Sitzungsberichte
der Heidelberger Akademie der Wissenschaften
Stiftung Heinrich Lanz
Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse
Abteilung A. Mathematisch-physikalische Wissenschaften
Jahrgang 1919. 17. Abhandlung

Ausdehnung der Abelschen Fundamentalsätze der Integralrechnung auf kinetische Potentiale beliebiger Ordnung

Von

†
LEO KOENIGSBERGER
in Heidelberg

Eingegangen am 19. September 1919

Heidelberg 1919
Carl Winters Universitätsbuchhandlung

Verlags-Nr. 1542

Beschreiben die erweiterten LAGRANGEschen Gleichungen

$$(1)\qquad \frac{\partial H}{\partial p_s}-\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_s'}+\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial H}{\partial p_s''}-\cdots+(-1)^\nu\frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}=0 \qquad (s=1,2,\ldots\mu),$$

in denen $p_1, p_2, \ldots p_\mu$ die freien Parameter, t die Zeit, $p_s^{(\varkappa)}=\frac{d^\varkappa p_s}{dt^\varkappa}$, und das kinetische Potential H ν^{ter} Ordnung eine von t unabhängige Funktion von $p_s, p_s', \ldots p_s^{(\nu)}$ ist, den Verlauf einer Bewegung, oder auch, indem der Symmetrie der nachfolgenden Entwicklung wegen $p_s^{(\varkappa)}=p_{s\varkappa}$ gesetzt wird, die Gleichungen

$$(2)\qquad \frac{\partial H}{\partial p_{s0}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_{s1}}+\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial H}{\partial p_{s2}}-\cdots+(-1)^\nu\frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial H}{\partial p_{s\nu}}=0 \qquad (s=1,2,\ldots\mu),$$

so wird man zunächst, wie es in der klassischen Mechanik durch HAMILTON geschehen, dieses Gleichungssystem mit Hilfe der Energie E, welche durch

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} E = H &-\sum_1^\mu {}_\varrho\, p_{\varrho 1}\left(\frac{\partial H}{\partial p_{\varrho 1}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_{\varrho 2}}+\cdots+(-1)^{\nu-1}\frac{d^{\nu-1}}{dt^{\nu-1}}\frac{\partial H}{\partial p_{\varrho\nu}}\right)\\ &-\sum_1^\mu {}_\varrho\, p_{\varrho 2}\left(\frac{\partial H}{\partial p_{\varrho 2}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_{\varrho 3}}+\cdots+(-1)^{\nu-2}\frac{d^{\nu-2}}{dt^{\nu-2}}\frac{\partial H}{\partial p_{\varrho\nu}}\right)\\ &-\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &-\sum_1^\mu {}_\varrho\, p_{\varrho\nu}\frac{\partial H}{\partial p_{\varrho\nu}}\end{aligned}\right.$$

als eine von t freie Funktion von $p_{\varrho 0}, p_{\varrho 1}, \ldots p_{\varrho 2\nu-1}$ $(\varrho=1,2,\ldots\mu)$ definiert ist, in das erweiterte HAMILTONsche Differentialgleichungssystem transformieren können. Setzt man nämlich

$$
(4)\left\{\begin{array}{l}
-\frac{\partial H}{\partial p_{\varrho 1}} + \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_{\varrho 2}} - \cdots + (-1)^{\nu}\frac{d^{\nu-1}}{dt^{\nu-1}}\frac{\partial H}{\partial p_{\varrho\nu}} = q_{\varrho 0} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
-\frac{\partial H}{\partial p_{\varrho\lambda}} + \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_{\varrho\lambda+1}} - \cdots + (-1)^{\nu-\lambda+1}\frac{d^{\nu-\lambda}}{dt^{\nu-\lambda}}\frac{\partial H}{\partial p_{\varrho\nu}} = q_{\varrho\lambda-1} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
-\frac{\partial H}{\partial p_{\varrho\nu}} = q_{\varrho\nu-1}\,, \qquad\qquad (\varrho = 1, 2, \ldots \mu)
\end{array}\right.
$$

so daß die Energie die Form annimmt:

$$
(5)\left\{\begin{array}{l}
E = H + \sum_{1}^{\mu}{}_{\varrho}\, p_{\varrho 1}\, q_{\varrho 0} + \sum_{1}^{\mu}{}_{\varrho}\, p_{\varrho 2}\, q_{\varrho 1} + \cdots \\
\qquad\qquad + \sum_{1}^{\mu}{}_{\varrho}\, p_{\varrho\nu-1}\, q_{\varrho\nu-2} + \sum_{1}^{\mu}{}_{\varrho}\, p_{\varrho\nu}\, q_{\varrho\nu-1}\,,
\end{array}\right.
$$

so wird sich, wenn aus den μ, der letzten der Gleichungen (4) entsprechenden, Gleichungen die Werte von $p_{1\nu}, p_{2\nu}, \ldots p_{\mu\nu}$, welche sich als Funktionen von $p_{\varrho 1}, p_{\varrho 2}, \ldots p_{\varrho\nu-1}$ $(\varrho = 1, 2, \ldots \mu)$, $q_{1\nu-1}$, $q_{2\nu-1}, \ldots q_{\mu\nu-1}$ ergeben, in (5) eingesetzt, und die resultierenden Werte von $E, H, p_{\varrho\nu}$ mit $(E), (H), (p_{\varrho\nu})$ bezeichnet werden, die transformierte Energie in der Form ergeben:

$$
(6)\left\{\begin{array}{l}
(E) = (H) + \sum_{1}^{\mu}{}_{\varrho}\, p_{\varrho 1}\, q_{\varrho 0} + \sum_{1}^{\mu}{}_{\varrho}\, p_{\varrho 2}\, q_{\varrho 1} + \cdots \\
\qquad\qquad + \sum_{1}^{\mu}{}_{\varrho}\, p_{\varrho\nu-1}\, q_{\varrho\nu-2} + \sum_{1}^{\mu}{}_{\varrho}\, (p_{\varrho\nu})\, q_{\varrho\nu-1}\,.
\end{array}\right.
$$

Differentiert man nun diese Gleichung nach $p_{s\lambda}$, so folgt

$$
(7)\quad \frac{\partial (E)}{\partial p_{s\lambda}} = \frac{\partial (H)}{\partial p_{s\lambda}} + q_{s\lambda-1} + \sum_{1}^{\mu}{}_{\varrho}\, \frac{\partial (p_{\varrho\nu})}{\partial p_{s\lambda}}\, q_{\varrho\nu-1} \quad \begin{pmatrix} s = 1, 2, \ldots \mu \\ \lambda = 0, 1, 2, \ldots \nu-1 \end{pmatrix},
$$

worin $q_{s,-1} = 0$ zu setzen ist, und da nach (4)

$$(8)\quad \frac{\partial (H)}{\partial p_{s\lambda}} = \left(\frac{\partial H}{\partial p_{s\lambda}}\right) + \sum_{1}^{\mu}{}_{\varrho} \left(\frac{\partial H}{\partial p_{\varrho\nu}}\right) \frac{\partial (p_{\varrho\nu})}{\partial p_{s\lambda}} = \left(\frac{\partial H}{\partial p_{s\lambda}}\right) - \sum_{1}^{\mu}{}_{\varrho} \frac{\partial (p_{\varrho\nu})}{\partial p_{s\lambda}} q_{\varrho\nu-1}$$

ist, die Beziehung

$$(9)\quad \frac{\partial (E)}{\partial p_{s\lambda}} = \left(\frac{\partial H}{\partial p_{s\lambda}}\right) + q_{s\lambda-1} \qquad \begin{pmatrix} s = 1, 2, \ldots \mu \\ \lambda = 0, 1, 2, \ldots \nu-1 \end{pmatrix}.$$

Da aber wiederum nach (2) und (4) für $\lambda = 0, 1, 2, \ldots \nu - 1$:

$$-\frac{\partial H}{\partial p_{s\lambda}} = q_{s\lambda-1} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p_{s\lambda+1}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_{s\lambda+2}} + \cdots \right.$$
$$\left. + (-1)^{\nu-\lambda} \frac{d^{\nu-\lambda-1}}{dt^{\nu-\lambda-1}} \frac{\partial H}{\partial p_{s\nu}}\right) = q_{s\lambda-1} + \frac{d q_{s\lambda}}{dt} = -\left(\frac{\partial H}{\partial p_{s\lambda}}\right)$$

ist, so folgen aus (9) die $\mu\nu$ Differentialgleichungen

$$(10)\quad \frac{d q_{s\lambda}}{dt} = -\frac{\partial (E)}{\partial p_{s\lambda}} \qquad (s = 1, 2, \ldots \mu;\ \lambda = 0, 1, 2, \ldots \nu-1).$$

Ferner ergibt sich aus (6) für $\lambda = 0, 1, 2, \ldots \nu - 1$:

$$\frac{\partial (E)}{\partial q_{s\lambda}} = \frac{\partial (H)}{\partial q_{s\lambda}} + p_{s\lambda+1} + \sum_{1}^{\mu}{}_{\varrho} \frac{\partial (p_{\varrho\nu})}{\partial q_{s\lambda}} q_{\varrho\nu-1},$$

oder, da nach (4)

$$\frac{\partial (H)}{\partial q_{s\lambda}} = \sum_{1}^{\mu}{}_{\varrho} \left(\frac{\partial H}{\partial p_{\varrho\nu}}\right) \frac{\partial (p_{\varrho\nu})}{\partial q_{s\lambda}} = -\sum_{1}^{\mu}{}_{\varrho} q_{\varrho\nu-1} \frac{\partial (p_{\varrho\nu})}{\partial q_{s\lambda}}$$

ist, die Beziehung

$$(11)\quad \frac{\partial (E)}{\partial q_{s\lambda}} = p_{s\lambda+1} = \frac{d p_{s\lambda}}{dt},$$

und somit die $\mu\nu$ Differentialgleichungen

$$(12) \qquad \frac{d p_{s\lambda}}{d t} = \frac{\partial (E)}{\partial q_{s\lambda}} \qquad (s = 1, 2, \ldots \mu;\ \lambda = 0, 1, 2, \ldots \nu - 1).$$

Wir erhalten daher nach (10) und (12) für die unabhängige Variable t und die $2\mu\nu$ abhängigen Variabeln

$$p_{s0}, p_{s1}, \ldots p_{s\nu-1};\ q_{s0}, q_{s1}, \ldots q_{s\nu-1} \qquad (s = 1, 2, \ldots \mu),$$

worin $p_{s0} = p_s$, $p_{s\varkappa} = \dfrac{d^\varkappa p_s}{d t^\varkappa}$, *und die Größen* $q_{s\lambda}$ *durch die Gleichungen (4), in denen* ϱ *durch* s *zu ersetzen, definiert sind, das erweiterte* HAMILTON*sche totale Differentialgleichungssystem*

$$(13) \quad \frac{d p_{s\lambda}}{d t} = \frac{\partial (E)}{\partial q_{s\lambda}}, \quad \frac{d q_{s\lambda}}{d t} = -\frac{\partial (E)}{\partial p_{s\lambda}} \quad (s = 1, 2, \ldots \mu;\ \lambda = 0, 1, 2, \ldots \nu - 1),$$

worin (E) die durch die Gleichung (3) definierte und mittels der Gleichungen (4) in eine Funktion von $p_{s\lambda}$, $q_{s\lambda}$ *transformierte Energie darstellt.*

Als Integralfunktion des Differentialgleichungssystems (13) soll eine solche Funktion ω von $t, p_{s0}, \ldots p_{s\nu-1}, q_{s0}, \ldots q_{s\nu-1}$ $(s = 1, 2, \ldots \mu)$ bezeichnet werden, für welche $\dfrac{d\omega}{dt}$ durch Substitution der Differentialquotienten der p und q aus den Gleichungen (13) in $t, p_{s0}, \ldots q_{s0}, \ldots$ identisch verschwindet, oder

$$(14) \left\{ \begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial \omega}{\partial t} &+ \sum_1^\mu {}_s \frac{\partial \omega}{\partial p_{s0}} \frac{\partial (E)}{\partial q_{s0}} + \cdots + \sum_1^\mu {}_s \frac{\partial \omega}{\partial p_{s\nu-1}} \frac{\partial (E)}{\partial q_{s\nu-1}} \\ &- \sum_1^\mu {}_s \frac{\partial \omega}{\partial q_{s0}} \frac{\partial (E)}{\partial p_{s0}} - \cdots - \sum_1^\mu {}_s \frac{\partial \omega}{\partial q_{s\nu-1}} \frac{\partial (E)}{\partial p_{s\nu-1}} = 0 \end{aligned} \right.$$

ist, und daher $\omega = c$, wenn c eine willkürliche Konstante bedeutet, ein Integral der Differentialgleichungen (13) darstellt.

Es sollen nun im folgenden die von ABEL für Quadraturen algebraischer Funktionen entwickelten Fundamentaltheoreme der Integralrechnung auf die Integralfunktionen der vorher erweiterten HAMILTONschen Differentialgleichungen ausgedehnt und zunächst das Analogon zu dem bekannten ABELschen Satze gesucht werden, welcher folgendermaßen lautet[1]:

Ist ein Integral der Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx} = y,$$

worin y eine algebraische Funktion von x ist, in der Form darstellbar:

$$z = u + A_1 \log v_1 + \cdots + A_m \log v_m + a_1 \psi_1(t_1) + \cdots + a_n \psi_n(t_n),$$

worin $A_1, \ldots A_m, a_1, \ldots a_n$ Konstanten, $u, v_1, \ldots v_m, t_1, \ldots t_n$ algebraische Funktionen von x, und $\psi_1, \ldots \psi_n$ elliptische Integrale der drei Gattungen mit willkürlichen Moduln und Parametern bedeuten – also wenn

$$(1 - t^2)(1 - \varkappa_m^2 t^2) = \Delta_m(t)$$

gesetzt wird, durch die Integrale definiert sind:

$$\psi_m(t) = \int \frac{V dt}{\Delta_m(t)},$$

in denen V von einer der drei Formen

$$1, \; t^2, \; \frac{1}{1 - \frac{t^2}{a^2}}$$

ist –, so kann man dieses Integral auch stets auf die Gestalt bringen:

$$z = r + A^{(1)} \log \varrho^{(1)} + \cdots + A^{(\varkappa)} \log \varrho^{(\varkappa)} + \frac{a_1}{\delta} \psi_1(\theta_1) + \cdots + \frac{a_n}{\delta} \psi_n(\theta_n),$$

[1] Bezüglich der Ausdehnung dieser Sätze auf lineare nichthomogene Differentialgleichungen beliebiger Ordnung verweise ich auf meine „Allgemeine Untersuchungen aus der Theorie der Differentialgleichungen".

worin δ eine positive ganze Zahl, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ dieselben Konstanten wie oben, $A^{(1)}, \ldots A^{(\varkappa)}$ wieder Konstanten bedeuten, und

$$\Theta_1, \Delta_1(\Theta_1), \ldots \Theta_n, \Delta_n(\Theta_n), r, \varrho^{(1)}, \ldots \varrho^{(\varkappa)}$$

rationale Funktionen von x und y sind.

Um den Übergang zu der nachfolgenden Untersuchung zu machen, wollen wir diesen ABELschen Satz für den einfachsten Fall, in dem er aussagt, daß, wenn y eine algebraische Funktion von x, und $\int y\,dx$ ebenfalls algebraisch ist, diese Quadratur rational durch x und y darstellbar ist, noch in anderer Form aussprechen: Für die Differentialgleichung $\frac{dz}{dx} = y'$ ist $\omega = z - \int y\,dx$ eine Integralfunktion, da $\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial z}\frac{dz}{dx} = \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial z} y = -y + 1 \cdot y = 0$ ist; macht man somit die Annahme, daß die Integralfunktion ω eine algebraische Funktion von x und z ist, so ist dies identisch mit der Annahme, daß $\int y\,dx$ sich algebraisch durch x ausdrücken läßt, und es würde sich daher der erste Satz von ABEL auch so aussprechen lassen:

Ist eine Integralfunktion der Differentialgleichung $\frac{dz}{dx} = y$, *worin* y *algebraisch von* x *abhängt, eine algebraische Funktion von* x *und* z, *so existiert auch eine solche, welche rational durch* x, y *und* z *darstellbar ist,*

und genau so würde der oben ausgesprochene allgemeine ABELsche Satz lauten für die Darstellung der Integralfunktion durch algebraische Funktionen, Logarithmen und elliptische Integrale.

Nehmen wir nun an, daß dem HAMILTONschen Differentialgleichungssystem ein von der Zeit t unabhängiges kinetisches Potential H von der ν^{ten} Ordnung zugrunde liegt, welches algebraisch von $p_{s0}, \ldots p_{s\nu}$ $(s = 1, 2, \ldots \mu)$ abhängt und der mit Adjungierung dieser Größen irreduktibeln algebraischen Gleichung

$$(15) \qquad H^{\varepsilon} + r_1(p_{s0}, \ldots p_{s\nu}) H^{\varepsilon-1} + \cdots + r_{\varepsilon}(p_{s0}, \ldots p_{s\nu}) = 0$$

genügt, worin $r_1, r_2, \ldots r_{\varepsilon}$ rationale Funktionen der eingeschlossenen Größen bedeuten, und eliminieren wir aus den $\mu+2$ Gleichungen, den Gleichungen (5), (15) und den μ Gleichungen

$$-\frac{\partial H}{\partial p_{s\nu}} = q_{s\,\nu-1} \qquad (s = 1, 2, \ldots \mu)$$

von (4), deren linke Seiten vermöge (15) rationale Funktionen von $H, p_{s0}, \ldots p_{s\nu}$ sind, die $\mu+1$ Größen $p_{1\nu}, p_{2\nu}, \ldots p_{\mu\nu}$ und H, so ergibt sich für (E) die algebraische Gleichung

$$(16)\left\{\begin{aligned} &(E)^{\eta} + \mathfrak{r}_1(p_{s0}, \ldots p_{s\,\nu-1}, q_{s0}, \ldots q_{s\,\nu-1})(E)^{\eta-1} + \cdots \\ &\qquad + \mathfrak{r}_{\eta}(p_{s0}, \ldots p_{s\,\nu-1}, q_{s0}, \ldots q_{s\,\nu-1}) = 0\,, \end{aligned}\right.$$

in welcher die Koeffizienten rationale Funktionen der eingeschlossenen Größen sind, und welche als irreduktibel mit Adjungierung eben dieser Größen angenommen werden darf.

Werde nun analog der Annahme von ABEL, daß die Quadratur $\int y\,dx$ sich linear durch Logarithmen und elliptische Integrale mit konstanten Koeffizienten darstellen lasse — eine Voraussetzung, deren formale Berechtigung auf einem noch später anzuführenden Satze von ABEL über die algebraischen Beziehungen von Quadraturen algebraischer Funktionen zueinander beruht —, angenommen, daß das Differentialgleichungssystem (13) eine Integralfunktion $\omega(t, p_{s0}, \ldots p_{s\,\nu-1}, q_{s0}, \ldots q_{s\,\nu-1})$ von der Form besitze:

$$(17)\quad \omega = u + A_1 \log v_1 + \cdots + A_m \log v_m + a_1 \psi_1(w_1) + \cdots + a_n \psi_n(w_n)\,,$$

worin $A_1, \ldots A_m, a_1, \ldots a_n$ Konstanten, $u, v_1, \ldots v_m, w_1, \ldots w_n$ algebraische Funktionen von $t, p_{s0}, \ldots p_{s\,\nu-1}, q_{s0}, \ldots q_{s\,\nu-1}$ sind, so können wir zunächst nach einem bekannten Satze eine mit konstanten Koeffizienten versehene ganze lineare Funktion ξ der Größen $u, v_1, \ldots v_m, w_1, \ldots w_n, \Delta_1(w_1), \ldots \Delta_n(w_n)$

$$(18)\quad \xi = a_0 u + a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m + b_1 w_1 + c_1 \Delta_1(w_1) + \cdots + b_n w_n + c_n \Delta_n(w_n)$$

bestimmen von der Art, daß die einzelnen in (18) enthaltenen algebraischen Funktionen sich als rationale Funktionen von

$t, p_{s0}, \ldots p_{s\nu-1}, q_{s0}, \ldots q_{s\nu-1}$ und der algebraischen Funktion ξ eben dieser Größen ergeben, worin ξ die Lösung einer algebraischen Gleichung der Form sein wird:

$$\xi^M + R_1(t, p_{s0}, \ldots p_{s\nu-1}, q_{s0}, \ldots q_{s\nu-1})\,\xi^{M-1} + \cdots$$
$$+ R_M(t, p_{s0}, \ldots p_{s\nu-1}, q_{s0}, \ldots q_{s\nu-1}) = 0\,,$$

deren Koeffizienten rationale Funktionen der eingeschlossenen Größen sind, oder mit Hinzuziehung der oben definierten Energie (E) die Lösung der mit Adjungierung von $(E), t, p_{s0}, \ldots p_{s\nu-1}, q_{s0}, \ldots q_{s\nu-1}$ irreduktibeln Gleichung

$$(19)\left\{\begin{aligned} &\xi^N + S_1((E), t, p_{s0}, \ldots p_{s\nu-1}, q_{s0}, \ldots q_{s\nu-1})\,\xi^{N-1} + \cdots \\ &\quad + S_N((E), t, p_{s0}, \ldots p_{s\nu-1}, q_{s0}, \ldots q_{s\nu-1}) = 0\,, \end{aligned}\right.$$

worin die S wieder rationale Funktionen der angegebenen Größen darstellen. Da aber ω eine Integralfunktion der Differentialgleichungen (13), also

$$\frac{\overline{d\omega}}{dt} = \frac{\partial \omega}{\partial t} + \sum_1^\mu {}_s \frac{\partial \omega}{\partial p_{s0}} \frac{\partial (E)}{\partial q_{s0}} + \cdots + \sum_1^\mu {}_s \frac{\partial \omega}{\partial p_{s\nu-1}} \frac{\partial (E)}{\partial q_{s\nu-1}}$$
$$- \sum_1^\mu {}_s \frac{\partial \omega}{\partial q_{s0}} \frac{\partial (E)}{\partial p_{s0}} - \cdots - \sum_1^\mu {}_s \frac{\partial \omega}{\partial q_{s\nu-1}} \frac{\partial (E)}{\partial p_{s\nu-1}} = 0$$

ist, und diese Gleichung, da sich die partiellen Differentialquotienten von ω nach (17) durch die von u, v, w, also rational durch die von ξ, und somit nach (16) und (19) rational durch $t, p_{s0}, \ldots p_{s\nu-1}, q_{s0}, \ldots q_{s\nu-1}, (E)$ und ξ ausdrücken lassen, die Form annehmen wird:

$$(20)\qquad G(t, p_{s0}, \ldots p_{s\nu-1}, q_{s0}, \ldots q_{s\nu-1}, (E), \xi) = 0\,,$$

worin G eine ganze Funktion der eingeschlossenen Größen bedeutet, so werden alle Lösungen der irreduktibeln Gleichung (19) auch (20) genügen, und daher, wenn die von $\xi_\gamma\ (\gamma = 1, 2, \ldots N)$ rational abhängigen Funktionen $u, v, w, \Delta(w)$ mit

$$u_\gamma, v_{1\gamma}, \ldots v_{n\gamma}, w_{1\gamma}, \ldots w_{n\gamma}, \varDelta_1(w_{1\gamma}), \ldots \varDelta_n(w_{n\gamma})$$

bezeichnet werden, auch

$$(21)\begin{cases} \omega_1 = u_1 + A_1 \log v_{11} + \cdots + A_m \log v_{m1} + \alpha_1 \psi_1(w_{11}) + \cdots + \alpha_n \psi_n(w_{n1}) \\ \omega_2 = u_2 + A_1 \log v_{12} + \cdots + A_m \log v_{m2} + \alpha_1 \psi_1(w_{12}) + \cdots + \alpha_n \psi_n(w_{n2}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \omega_N = u_N + A_1 \log v_{1N} + \cdots + A_m \log v_{mN} + \alpha_1 \psi_1(w_{1N}) + \cdots + \alpha_n \psi_n(w_{nN}) \end{cases}$$

Integralfunktionen des Differentialgleichungssystems (13) sein. Da nun aus den identischen Beziehungen

$$\overline{\frac{d\omega_1}{dt}} = 0, \quad \overline{\frac{d\omega_2}{dt}} = 0, \quad \ldots \quad \overline{\frac{d\omega_N}{dt}} = 0$$

sich

$$\overline{\frac{d(\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_N)}{dt}} = \overline{\frac{d\Omega}{dt}} = 0$$

ergibt, so wird Ω wieder eine Integralfunktion sein, deren Wert vermöge (21) durch den Ausdruck

$$\begin{aligned} \Omega = (u_1 + u_2 + \cdots + u_N) &+ A_1 \log(v_{11} v_{12} \ldots v_{1N}) + \cdots \\ &+ A_m \log(v_{m1} v_{m2} \ldots v_{mN}) \\ &+ \alpha_1 [\psi_1(w_{11}) + \psi_1(w_{12}) + \cdots + \psi_1(w_{1N})] + \cdots \\ &+ \alpha_n [\psi_n(w_{n1}) + \psi_n(w_{n2}) + \cdots + \psi_n(w_{nN})] \end{aligned}$$

gegeben ist, und da die algebraische Funktion auf der rechten Seite der Gleichung ebenso wie die Logarithmanden rationale symmetrische Funktionen der Lösungen ξ der Gleichung (20) sind, sich außerdem die Summe der in einer Klammer vereinigten elliptischen Integrale $\psi_\gamma(w_{\gamma 1}) + \psi_\gamma(w_{\gamma 2}) + \cdots + \psi_\gamma(w_{\gamma N})$ — von einer algebraischen Funktion und Logarithmen abgesehen — als ein elliptisches Integral $\psi_\gamma(W_\gamma)$ ergibt, in welchem wiederum W_γ und $\varDelta_\gamma(W_\gamma)$ rational und symmetrisch aus den Lösungen der Gleichung (20) zusammengesetzt sind, so erhalten wir den Satz, *daß die Annahme einer Integralfunktion der Differentialgleichungen (13) von der Form*

$$(22)\quad \omega = u + A_1 \log v_1 + \cdots + A_m \log v_m + \alpha_1 \psi_1(w_1) + \cdots + \alpha_n \psi_n(w_n)\,,$$

worin die A und α Konstanten, u, v, w algebraische Funktionen von $t, p_{s0}, \ldots p_{s\nu-1}, q_{s0}, \ldots q_{s\nu-1}$ *sind, die Existenz einer Integralfunktion von der Form nach sich zieht:*

$$(23)\quad \Omega = U + B_1 \log V_1 + \cdots + B_\mu \log V_\mu + \alpha_1 \psi_1(W_1) + \cdots + \alpha_n \psi_n(W_n)\,,$$

in welcher $U, V_1, \ldots V_\mu, W_1, \Delta_1(W_1), \ldots W_n, \Delta_n(W_n)$ *rationale Funktionen von* $t, p_{s0}, \ldots p_{s\nu-1}, q_{s0}, \ldots q_{s\nu-1}$ *und* (E) *sind.*

Ersetzt man in diesen Werten die Größen $q_{s0}, \ldots q_{s\nu-1}$ durch die nach den p und deren nach t genommenen Ableitungen von H der Ausdrücke (4), so geht (E) in E über, welches nach (3) und mit Hilfe der Herleitung der nach t genommenen Differentialquotienten des kinetischen Potentials aus der für dasselbe angenommenen algebraischen Beziehung (15) eine rationale Funktion von $H, t, p_{s0}, \ldots p_{s2\nu-1}$ wird, und wir finden somit,

daß, wenn für das erweiterte HAMILTON*sche Differentialgleichungssystem (13) das kinetische Potential H von der* ν^{ten} *Ordnung eine von t unabhängige algebraische Funktion von* $p_{s0}, \ldots p_{s\nu}$ *ist, und es existiert eine Integralfunktion von der Form (22), es auch eine Integralfunktion von der Form (23) gibt, in welcher* $U, V_1, \ldots V_\mu, W_1, \Delta_1(W_1), \ldots W_n, \Delta_n(W_n)$ *rationale Funktionen des kinetischen Potential H, der Zeit t und der Parameter p sowie deren bis zur* $2\nu-1^{\text{ten}}$ *Ordnung genommenen Ableitungen sind.*

Es braucht kaum hervorgehoben zu werden, *daß, wenn in der Form (22) der Integralfunktion ω additiv mit Konstanten multipliziert zu den elliptischen Integralen noch beliebige* ABEL*sche Integrale, deren Grenzen wieder algebraische Funktionen von* $t, p_{s0}, \ldots p_{s\nu-1}, q_{s0}, \ldots q_{s\nu-1}$ *sind, hinzutreten,* durch genau dieselben Überlegungen *auf die der Form (23) analoge Form einer Integralfunktion geschlossen werden kann mit dem Unterschiede, daß für die resultierenden* ABEL*schen Integrale,* nicht wie für die elliptischen Integrale die oberen Grenzen derselben und die zugehörigen Irrationalitäten rationale Funktionen von $t, (E), p_{s0}, \ldots p_{s\nu-1}, q_{s0}, \ldots$

$q_{s\nu-1}$ sein werden, *sondern daß für jedes in ω vorkommende* ABEL*sche Integral so viel gleichartige Integrale eintreten werden, als ihr Geschlecht anzeigt, und die oberen Grenzen derselben und die zu diesen gehörigen Werte der algebraischen Irrationalitäten Lösungen einer Gleichung vom Grade des Geschlechts sein werden, deren Koeffizienten rational aus t, (E), $p_{s0}, \ldots p_{s\nu-1}, q_{s0}, \ldots q_{s\nu-1}$ zusammengesetzt sind.*

Es muß zunächst noch eine Bemerkung hinzugefügt werden bezüglich der Annahme, die in dem eben bewiesenen Satze für die Integralfunktion eines beliebigen erweiterten HAMILTONschen Differentialgleichungssystems notwendig war, und der von ABEL für die Quadratur einer algebraischen Funktion y von x aufgestellten, die dann unmittelbar wegen

$$\int \frac{du}{dx}\,dx = u$$

zu dem Satze führte, daß nicht nur die Ableitung einer algebraischen Funktion u von x rational von u und x abhängt, sondern daß auch umgekehrt die Funktion u sich rational durch x und die Ableitung $\frac{du}{dx}$ ausdrücken läßt.

Die von ABEL zur Aufstellung der betreffenden Sätze gemachte Annahme war, daß y eine algebraische Funktion von x ist, und das Integral $\int y\,dx$ sich in der Form einer Summe von algebraischen, logarithmischen Funktionen und elliptischen Integralen mit algebraischen Argumenten und konstanten Koeffizienten darstellen läßt, und konnte durch die Voraussetzung ersetzt werden, daß in der Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx} = y \tag{24}$$

y eine algebraische Funktion von x ist, und so beschaffen, daß sich die Integralfunktion ω in der Form darstellen läßt:

$$\omega = z - \left(u + A_1 \log v_1 + \cdots + A_m \log v_m + a_1 \psi_1(t_1) + \cdots + a_n \psi_n(t_n)\right), \tag{25}$$

wobei zugleich ersichtlich, daß für *jeden* Wert der Konstanten und der algebraischen Funktionen von x in dem Ausdrucke

$$u + A_1 \log v_1 + \cdots + A_m \log v_m + \alpha_1 \psi_1(t_1) + \cdots + \alpha_n \psi_n(t_n)$$

sich y als algebraische Funktion von x so bestimmen läßt, daß

$$(26) \quad \int y\,dx = u + A_1 \log v_1 + \cdots + A_m \log v_m + \alpha_1 \psi_1(t_1) + \cdots + \alpha_n \psi_n(t_n)$$

ist, da man nur für y den stets algebraischen Differentialquotienten der rechten Seite dieser Gleichung zu wählen hat. Zur Herleitung der analogen Sätze für die HAMILTONschen Differentialgleichungen (13) mußten wir annehmen, daß die Energie (E) eine von t freie *algebraische* Funktion der Größen $p_{s0}, \ldots p_{s\nu-1}, q_{s0}, \ldots q_{s\nu-1}$ $(s = 1, 2, \ldots \mu)$ ist, und diese so beschaffen ist, daß eine Integralfunktion der Differentialgleichungen (13) die Form (22) hat, oder die partielle Differentialgleichung in ω

$$(27) \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial \omega}{\partial t} + \sum_1^\mu {}_s \frac{\partial \omega}{\partial p_{s0}} \frac{\partial (E)}{\partial q_{s0}} + \cdots + \sum_1^\mu {}_s \frac{\partial \omega}{\partial p_{s\nu-1}} \frac{\partial (E)}{\partial q_{s\nu-1}} \\ & \qquad - \sum_1^\mu {}_s \frac{\partial \omega}{\partial q_{s0}} \frac{\partial (E)}{\partial p_{s0}} - \cdots - \sum_1^\mu {}_s \frac{\partial \omega}{\partial q_{s\nu-1}} \frac{\partial (E)}{\partial p_{s\nu-1}} = 0 \end{aligned} \right.$$

für die algebraische Funktion (E) der Variabeln ein Integral von der Form (22) besitzt; wählt man aber umgekehrt für ω einen Funktionalausdruck der Form (22) mit beliebig gewählten Konstanten und algebraischen Funktionen der Argumente $t, p_{s0}, \ldots q_{s0}, \ldots$, so muß die Funktion (E) der Variabeln, damit die beliebig gewählte Funktion in der Form (22) eine Integralfunktion der Differentialgleichungen (13) ist, ein algebraisches, von t unabhängiges Integral der obigen partiellen Differentialgleichung in den Variabeln p und q sein, wenn für $\frac{\partial \omega}{\partial t}, \frac{\partial \omega}{\partial p_{s0}}, \ldots \frac{\partial \omega}{\partial q_{s0}}, \ldots$ die in den Variabeln algebraischen Werte aus dem Ausdrucke (22) in den t, p, q eingesetzt worden.

So wird sich in dem Differentialgleichungssystem

$$\frac{dp_1}{dt} = \frac{\partial (E)}{\partial q_1}, \quad \frac{dp_2}{dt} = \frac{\partial (E)}{\partial q_2}, \quad \frac{dq_1}{dt} = -\frac{\partial (E)}{\partial p_1}, \quad \frac{dq_2}{dt} = -\frac{\partial (E)}{\partial p_2}$$

für $\omega = p_2 + q_2 + \log(p_1 + q_1)$ die partielle Differentialgleichung für die Energie ergeben:

$$\frac{1}{p_1+q_1} \frac{\partial (E)}{\partial q_1} + \frac{\partial (E)}{\partial q_2} - \frac{1}{p_1+q_1} \frac{\partial (E)}{\partial p_1} - \frac{\partial (E)}{\partial p_2} = 0 \,,$$

von der z. B. ein partikuläres Integral in der Form gegeben ist:

$$(E) = (q_1 + p_1) q_1 - q_2 \,,$$

während das allgemeine

$$(E) = \varphi(p_1 + q_1, p_2 + q_2, (p_1 + q_1) q_1 - q_2)$$

lautet, worin φ eine willkürliche Funktion bedeutet.

Es möge für das Folgende noch bemerkt werden, daß für die Annahme, daß die transformierte Energie (E) eine von t unabhängige algebraische Funktion von $p_{s0}, \ldots q_{s0}, \ldots$ ist, das Differentialgleichungssystem (13) stets eine algebraische Integralfunktion besitzt, da (E) selbst und also auch jede algebraische Funktion von (E) eine solche ist, indem die Gleichung (27) durch $\omega = (E)$ identisch befriedigt wird.

Indem wir zum Zwecke der weiteren Untersuchung die logarithmischen Funktionen nicht mehr von den elliptischen und ABELschen Integralen absondern, sondern

$$\log v_\varkappa = \int^{v_\varkappa} \frac{dx}{x} \,,$$

ferner zur Abkürzung

$$\int^{w_\varkappa} y_\varkappa \, dx = J_\varkappa \,.$$

setzen, würde die früher für die Integralfunktion angenommene Form lauten:

$$\omega = u + a_1 J_1 + a_2 J_2 + \cdots + a_n J_n \,, \tag{28}$$

worin $a_1, \dots a_n$ Konstanten, $y_1, y_2, \dots y_n$ algebraische Funktionen von x, und $u, w_1, w_2, \dots w_n$ algebraische Funktionen von $t, p_{s0}, \dots p_{s\nu-1}, q_{s0}, \dots q_{s\nu-1}$ sind. Wir werfen nun zunächst die Frage auf, ob die in einer Integralfunktion des HAMILTONschen Systems additiv miteinander verbundenen ABELschen Integrale, statt durch $J_{\varkappa+2}, \dots J_n$ *algebraische* konstante Multiplikatoren, auch mit algebraischen Funktionen der unabhängigen und abhängigen Variabeln multiplikatorisch verbunden sein können, die Integralfunktion also die Form haben kann:

$$\omega = u + u_1 J_1 + u_2 J_2 + \dots + u_n J_n , \tag{29}$$

worin $u, u_1, \dots u_n$ algebraische Funktionen der Variabeln sind.

Wird zunächst vorausgesetzt, daß zwischen den n Transzendenten $J_1, J_2, \dots J_n$ und den Größen $t, p_{s0}, \dots q_{s0}, \dots$ keine lineare Beziehung besteht, so wird sich aus der von der Integralfunktion (29) identisch zu befriedigenden Gleichung

$$\left\{\begin{aligned} &\overline{\frac{d\omega}{dt}} = \overline{\frac{du}{dt}} + u_1 (y_1)_{w_1} \overline{\frac{dw_1}{dt}} + \dots + u_n (y_n)_{w_n} \overline{\frac{dw_n}{dt}} \\ &+ J_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + \sum_1^\mu{}_s \frac{\partial u_1}{\partial p_{s0}} \frac{\partial (E)}{\partial q_{s0}} + \dots - \sum_1^\mu{}_s \frac{\partial u_1}{\partial q_{s0}} \frac{\partial (E)}{\partial p_{s0}} - \dots \right) \\ &+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &+ J_n \left(\frac{\partial u_n}{\partial t} + \sum_1^\mu{}_s \frac{\partial u_n}{\partial p_{s0}} \frac{\partial (E)}{\partial q_{s0}} + \dots - \sum_1^\mu{}_s \frac{\partial u_n}{\partial q_{s0}} \frac{\partial (E)}{\partial p_{s0}} - \dots \right) = 0 \end{aligned}\right. \tag{30}$$

ergeben, daß die Faktoren von $J_1, \dots J_n$ identisch Null, also $u_1, u_2, \dots u_n$ Integralfunktionen sein müssen, und wir finden daher, *daß, wenn eine Integralfunktion die Form* (29) *hat, und es besteht zwischen den Transzendenten $J_1, \dots J_n$ keine lineare Beziehung, dann $u_1, u_2, \dots u_n$ algebraische Integralfunktionen des Differentialgleichungssystems sind.*

Zu bemerken ist, daß für den analogen Satz über die Quadratur einer algebraischen Funktion einer Variabeln sich für die algebraischen Funktionen $u_1, u_2, \dots u_n$ dieser Variabeln, $\frac{du_1}{dx} = \dots = \frac{du_n}{dx} = 0$, also $u_1, \dots u_n$ als Konstanten ergeben, und also *für* $\int y\,dx$ *nur dann ein Ausdruck von der Form* (29) *existieren kann, wenn* $u_1, u_2, \ldots u_n$ *Konstanten sind, oder die Quadratur die Form* (28) *besitzt.*

Um aber die Beziehungen zwischen den $u_1, u_2, \ldots u_n$ zu bestimmen, wenn *algebraische* Verbindungen zwischen den Transzendenten $J_1, J_2, \ldots J_n$ zugelassen werden, müssen wir auf einen allgemeinen, zuerst von ABEL in einer seiner Nachlaßschriften[1] ausgesprochenen Satz zurückgehen, welcher verallgemeinert und in den oben eingeführten Bezeichnungen folgendermaßen lautet:

Besteht zwischen den n *Integralen* $J_1, J_2, \ldots J_n$, *in denen* $y_1, y_2, \ldots y_n$ *algebraische Funktionen von* x, *und* $w_1, w_2, \ldots w_n$ *ebensolche Funktionen der Variabeln* $t, p_{s0}, \ldots p_{s\nu-1}, q_{s0}, \ldots q_{s\nu-1}$ *sind, und diesen Variabeln eine algebraische Beziehung, ohne, daß schon zwischen weniger als* n *dieser Transzendenten ein ebensolcher algebraischer Zusammenhang existiert, so hat diese Beziehung die Form*

$$a_1 J_1 + a_2 J_2 + \cdots + a_n J_n = W, \tag{31}$$

worin $a_1, a_2, \ldots a_n$ *Konstanten, und* W *eine algebraische Funktion von* $t, p_{s0}, \ldots q_{s0}, \ldots$ *ist.*

Sei nun W die Lösung einer algebraischen Gleichung

$$\left.\begin{aligned} & W^{\varrho} + R_1\left(t, p_{s0}, \ldots q_{s0}, \ldots, w_1, (y_1)_{w_1}, \ldots\right) W^{\varrho-1} + \ldots \\ & \qquad + R_{\varrho}\left(t, p_{s0}, \ldots q_{s0}, \ldots, w_1, (y_1)_{w_1}, \ldots\right) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

in welcher $R_1, R_2, \ldots R_{\varrho}$ rationale Funktionen der eingeschlossenen Größen sind, und welche mit Adjungierung ebendieser irreduktibel sei, so ergibt sich durch Differentiation der Gleichung (32) nach einer der Variabeln, z. B. t:

$$\left.\begin{aligned} & \left(\varrho \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial R_1}{\partial t}\right) W^{\varrho-1} + \left((\varrho-1) R_1 \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial R_2}{\partial t}\right) W^{\varrho-2} + \ldots \\ & \qquad\qquad + \frac{\partial R_{\varrho}}{\partial t} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

[1] Mémoire sur les fonctions transcendantes de la forme $\int y\,dx$, où y est une fonction algébrique de x (Œuvres complètes de H. ABEL, tome second, XVII).

Da nun aus (31)

$$\frac{\partial W}{\partial t} = a_1 \frac{\partial J_1}{\partial t} + a_2 \frac{\partial J_2}{\partial t} + \cdots + a_n \frac{\partial J_n}{\partial t}$$

folgt, und

$$\frac{\partial J_\varkappa}{\partial t} = (y_\varkappa)_{w_\varkappa} \frac{\partial w_\varkappa}{\partial t}$$

ist, so ist ersichtlich, daß die Koeffizienten der Gleichung (33) die Größe W nicht mehr enthalten, und somit wegen der Irreduktibilität der Gleichung (32) den Wert Null haben müssen. Da aber aus

$$\varrho \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial R_1}{\partial t} = 0$$

und den analogen Gleichungen sich für W der Wert $-\frac{1}{\varrho} R_1 + c$ ergibt, so erhalten wir den nachfolgenden Satz:

Besteht zwischen den n Integralen

$$J_1 = \int^{w_1} y_1 dx, \quad J_2 = \int^{w_2} y_2 dx, \ldots J_n = \int^{w_n} y_n dx,$$

in denen $y_1, y_2, \ldots y_n$ algebraische Funktionen von x, und $w_1, w_2, \ldots w_n$ ebensolche Funktionen der Variabeln $t, p_{s0}, \ldots q_{s0}, \ldots$ sind, eine algebraische Beziehung, ohne daß schon zwischen weniger als n dieser Transzendenten ein ebensolcher algebraischer Zusammenhang existiert, so hat diese Beziehung die lineare Form

$$a_1 J_1 + a_2 J_2 + \cdots + a_n J_n = R\left(t, p_{s0}, \ldots q_{s0}, \ldots, w_1, (y_1)_{w_1}, \ldots w_n, (y_n)_{w_n}\right),$$

worin R eine rationale Funktion der eingeschlossenen Größen darstellt und $a_1, a_2, \ldots a_n$ Konstanten sind.

Nachdem wir oben für die Form (29) der Integralfunktion ω unter der Voraussetzung, daß unter den n Transzendenten $J_1, J_2, \ldots J_n$ keine lineare, also auch keine algebraische Beziehung stattfindet, für die Beschaffenheit der Koeffizienten $u_1, u_2, \ldots u_n$ derselben gefunden, daß sie selbst algebraische Integralfunktionen der Differentialgleichungen (13) sein müssen, wollen wir nunmehr annehmen, *daß die höchste Anzahl der n Transzendenten, zwischen denen keine lineare Beziehung stattfindet,* $\varkappa$ *sei, so daß* $J_{\varkappa+1}$, *Funktionen von* $J_1, J_2, \ldots J_\varkappa$, *und die letzteren algebraisch voneinander unabhängig sind;* dann werden nach dem eben erwähnten Satze die Beziehungen bestehen:

$$\begin{aligned} J_{\varkappa+1} &= a_{11} J_1 + a_{12} J_2 + \cdots + a_{1\varkappa} J_\varkappa + R_1 \\ J_{\varkappa+2} &= a_{21} J_1 + a_{22} J_2 + \cdots + a_{2\varkappa} J_\varkappa + R_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ J_n &= a_{n-\varkappa 1} J_1 + a_{n-\varkappa 2} J_2 + \cdots + a_{n-\varkappa\varkappa} J_\varkappa + R_{n-\varkappa}, \end{aligned}$$

worin $a_{11}, \ldots a_{n-\varkappa\varkappa}$ Konstanten, und $R_1, R_2, \ldots R_{n-\varkappa}$ rationale Funktionen von $t, p_{s0}, \ldots q_{s0}, \ldots$ sind. Die für die Integralfunktion ω angenommene Form (29) wird somit übergehen in:

$$(34)\left\{\begin{aligned} \omega = &\left(u_1 + a_{11} u_{\varkappa+1} + a_{21} u_{\varkappa+2} + \cdots + a_{n-\varkappa 1} u_n\right) J_1 \\ &+ \left(u_2 + a_{12} u_{\varkappa+1} + \cdots + a_{n-\varkappa 2} u_n\right) J_2 + \cdots \\ &+ \left(u_\varkappa + a_{1\varkappa} u_{\varkappa+1} + \cdots + a_{n-\varkappa\varkappa} u_n\right) J_\varkappa \\ &+ \left(u + u_{\varkappa+1} R_1 + \cdots + u_n R_{n-\varkappa}\right), \end{aligned}\right.$$

und *es werden somit nach dem vorigen Satze die linearen Funktionen der* u:

$$\begin{aligned} U_1 &= u_1 + a_{11} u_{\varkappa+1} + a_{21} u_{\varkappa+2} + \cdots + a_{n-\varkappa 1} u_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ U_\varkappa &= u_\varkappa + a_{1\varkappa} u_{\varkappa+1} + a_{2\varkappa} u_{\varkappa+2} + \cdots + a_{n-\varkappa\varkappa} u_n \end{aligned}$$

wieder algebraische Integralfunktionen der Differentialgleichungen (13), *und die Integralfunktion* ω *in der Form dargestellt sein:*

$$(35) \qquad \omega = U + U_1 J_1 + U_2 J_2 + \cdots + U_\varkappa J_\varkappa,$$

welche wegen der algebraischen Unabhängigkeit der Integrale $J_1, J_2, \ldots J_\varkappa$ *voneinander die identische Gleichung liefert:*

$$
(36)\left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial U}{\partial t}+\sum_1^\mu{}_s\frac{\partial U}{\partial p_{s0}}\frac{\partial(E)}{\partial q_{s0}}+\cdots-\sum_1^\mu{}_s\frac{\partial U}{\partial q_{s0}}\frac{\partial(E)}{\partial p_{s0}}-\cdots\\
&+U_1(y_1)_{w_1}\left[\frac{\partial w_1}{\partial t}+\sum_1^\mu{}_s\frac{\partial w_1}{\partial p_{s0}}\frac{\partial(E)}{\partial q_{s0}}+\cdots-\sum_1^\mu{}_s\frac{\partial w_1}{\partial q_{s0}}\frac{\partial(E)}{\partial p_{s0}}-\cdots\right]\\
&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+U_\varkappa(y_1)_{w_\varkappa}\left[\frac{\partial w_\varkappa}{\partial t}+\sum_1^\mu{}_s\frac{\partial w_\varkappa}{\partial p_{s0}}\frac{\partial(E)}{\partial q_{s0}}+\cdots-\sum_1^\mu{}_s\frac{\partial w_\varkappa}{\partial q_{s0}}\frac{\partial(E)}{\partial p_{s0}}-\cdots\right]=0\,.
\end{aligned}\right.
$$

Sind $J_1, J_2, \ldots J_\varkappa$ selbst Integralfunktionen von (13), so werden nicht nur $U_1, U_2, \ldots U_\varkappa$, sondern auch U algebraische Integralfunktionen dieser Differentialgleichungen sein, indem aus der Annahme, daß eine der Quadraturen, z. B.

$$
J_\varrho=\int^{w_\varrho} y_\varrho\, dx\,,
$$

eine Integralfunktion ist, unmittelbar hervorgeht, daß, weil

$$
\overline{\frac{dJ_\varrho}{dt}}=(y_\varrho)_{w_\varrho}\left(\frac{\partial w_\varrho}{\partial t}+\sum_1^\mu{}_s\frac{\partial w_\varrho}{\partial p_s}\frac{\partial(E)}{\partial q_s}+\cdots-\sum_1^\mu{}_s\frac{\partial w_\varrho}{\partial q_s}\frac{\partial(E)}{\partial p_s}-\cdots\right)=0
$$

sein soll, die obere Grenze der Quadratur selbst eine algebraische Integralfunktion der Differentialgleichungen (13) sein muß, und somit nach der Gleichung (36) auch U.

Der oben ausgeführten Reduktion einer Integralfunktion von der Form (22) auf die entsprechende (23) mit Logarithmanden u und oberen Integralgrenzen, welche in $t, p_{s0}, \ldots q_{s0}, \ldots (E)$ rational zusammengesetzt sind, wird, wie unmittelbar ersichtlich, eine analoge Transformation der Integralfunktion (29) entsprechen, wenn in diesem Ausdrucke die in den Variabeln $t, p_{s0}, \ldots q_{s0}, \ldots (E)$ algebraischen Integralfunktionen $u_1, u_2, \ldots u_n$ rational aus diesen zusammengesetzt sind. Dies darf aber stets vorausgesetzt werden; denn, wenn v_1 eine in $t, p_{s0}, \cdots q_{s0}, \cdots$ algebraische Integralfunktion ist, welche die Lösung einer algebraischen Gleichung

$$
v^r+R_1\left(t, p_{s0}, \ldots q_{s0}, \ldots (E)\right)v^{r-1}+\cdots+R_r\left(t, p_{s0}, \cdots q_{s0}, \cdots (E)\right)=0
$$

sein möge, in welcher $R_1, \dots R_r$ rationale Funktionen der eingeschlossenen Größen sind, mit deren Adjungierung die Gleichung irreduktibel sei, so werden nach früher ausgeführter Schlußweise, wenn $v_1, v_2, \dots v_r$ die Lösungen derselben darstellen,

$$\frac{\overline{d v_1}}{dt} = \frac{\overline{d v_2}}{dt} = \cdots = \frac{\overline{d v_r}}{dt} = 0,$$

also die Koeffizienten $R_1, R_2, \dots R_r$ in den Argumenten $t, p_{s0}, \dots q_{s0}, \dots$ und (E) rationale Integralfunktionen sein, und somit statt der Integralfunktion (29) zum Zwecke der weiteren Reduktion die analoge zugrunde gelegt werden können, in welcher die algebraischen Integralfunktionen $u_1, u_2, \dots u_n$ durch solche ersetzt werden, welche von den Variabeln und (E) rational abhängen.

Es soll nunmehr die Frage aufgeworfen werden, was wir aus der Existenz einer Integralfunktion ω schließen können, die aus den Größen $t, p_{s0}, \dots q_{s0}, \dots (E)$ und den n Integralen $J_1, J_2, \dots J_n$ *algebraisch* zusammengesetzt ist. Sei

$$\omega = f\left(t, p_{s0}, \dots q_{s0}, \dots (E), J_1, J_2, \dots J_n\right), \tag{37}$$

worin f eine algebraische Funktion bedeutet, die durch die Gleichung definiert ist:

$$\left\{\begin{aligned} &\omega^\nu + R_1\left(t, p_{s0}, \dots q_{s0}, \dots (E), J_1, \dots J_n\right)\omega^{\nu-1} + \cdots \\ &\qquad + R_\nu\left(t, p_{s0}, \dots q_{s0}, \dots (E), J_1, \dots J_n\right) = 0, \end{aligned}\right. \tag{38}$$

so kann man zunächst annehmen, daß $J_1, J_2, \dots J_n$ algebraisch voneinander unabhängig sind, da man sonst aus den gegebenen algebraischen Bedingungsgleichungen und der Gleichung (38) die abhängigen Integrale eliminieren und ω als Lösung der algebraischen Gleichung

$$\left\{\begin{aligned} &\omega^r + \varrho_1\left(t, p_{s0}, \dots q_{s0}, \dots (E), J_1, \dots J_m, w_1, (y_1)_{w_1}, \dots w_m, (y_m)_{w_m}\right)\omega^{r-1} + \cdots \\ &\quad + \varrho_r\left(t, p_{s0}, \dots q_{s0}, \dots (E), J_1, \dots J_m, w_1, (y_1)_{w_1}, \dots w_m, (y_m)_{w_m}\right) = 0 \end{aligned}\right. \tag{39}$$

darstellen könnte, in welcher $J_1, J_2, \dots J_m$ nicht mehr algebraisch voneinander abhängig sind, und die mit Adjungierung der eingeschlossenen Größen als irreduktibel vorausgesetzt werden darf. Nach der Definition einer Integralfunktion würde dann vermöge (13) die identische Gleichung bestehen:

$$(40)\left\{\begin{aligned}&\frac{d\omega}{dt}=\frac{\partial\omega}{\partial t}+\sum_1^{\mu}{}_s\frac{\partial\omega}{\partial p_{s0}}\frac{\partial(E)}{\partial q_{s0}}+\cdots-\sum_1^{\mu}{}_s\frac{\partial\omega}{\partial q_{s0}}\frac{\partial(E)}{\partial p_{s0}}-\cdots\\&+\frac{\partial\omega}{\partial(E)}\frac{\overline{d(E)}}{dt}+\frac{\partial\omega}{\partial J_1}\left(\frac{\partial J_1}{\partial t}+\sum_1^{\mu}{}_s\frac{\partial J_1}{\partial p_{s0}}\frac{\partial(E)}{\partial q_{s0}}+\cdots-\sum_1^{\mu}{}_s\frac{\partial J_1}{\partial q_{s0}}\frac{\partial(E)}{\partial p_{s0}}-\cdots\right)\\&\qquad+\cdots=0\,,\end{aligned}\right.$$

deren linke Seite nach (16) und (39) eine ganze Funktion von ω darstellt, deren Koeffizienten wie in (39) rational aus $t, p_{s0}, \ldots q_{s0}, \ldots (E), J_1, \ldots J_m, w_1, (y_1)_{w_1}, \ldots w_m, (y_m)_{w_m}$ zusammengesetzt sind, da

$$\frac{\partial J_\varkappa}{\partial t}=(y_\varkappa)_{w_\varkappa}\frac{\partial w_\varkappa}{\partial t},\quad\frac{\partial J_\varkappa}{\partial p_{s\sigma}}=(y_\varkappa)_{w_\varkappa}\frac{\partial w_\varkappa}{\partial p_{s\sigma}},\quad\frac{\partial J_\varkappa}{\partial q_{s\sigma}}=(y_\varkappa)_{w_\varkappa}\frac{\partial w_\varkappa}{\partial q_{s\sigma}}$$

ist. Wegen der Irreduktibilität der Gleichung (39) werden nun alle Lösungen $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_r$ derselben auch der Gleichung (40) genügen und somit sämtlich Integralfunktionen sein, also auch

$$\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_r=-\varrho_1,\quad\omega_1\omega_2+\cdots+\omega_{r-1}\omega_r=\varrho_2,\ \ldots,$$

und wir finden somit,

daß die Existenz einer in den bezeichneten Größen algebraischen Integralfunktion (37) des Differentialgleichungssystems (13) auch das Vorhandensein von Integralfunktionen voraussetzt, welche rational aus $t, p_{s0}, \ldots q_{s0}, \ldots (E), J_1, J_2, \ldots J_m, w_1, (y_1)_{w_1}, \ldots w_m, (y_m)_{w_m}$ zusammengesetzt sind.

Sei eine solche rationale Integralfunktion

$$(41)\quad\Omega=\frac{g_1(t, p_{s0}, \ldots q_{s0}, \ldots (E), J_1, \ldots J_m, w_1, (y_1)_{w_1}, \ldots w_m, (y_m)_{w_m})}{g\,(t, p_{s0}, \ldots q_{s0}, \ldots (E), J_1, \ldots J_m, w_1, (y_1)_{w_1}, \ldots w_m, (y_m)_{w_m})},$$

worin g und g_1 ganze Funktionen der eingeschlossenen Größen bedeuten, so wird, wenn die ganze Funktion von $J_1, J_2, \ldots J_m$

$$g\,\overline{\frac{dg_1}{dt}} - g_1\,\overline{\frac{dg}{dt}} = G$$

gesetzt wird, weil

$$\overline{\frac{dJ_\varkappa}{dt}} = (y_\varkappa)_{w_\varkappa}\left(\frac{\partial w_\varkappa}{\partial t} + \sum_1^\mu{}_s \frac{\partial w_\varkappa}{\partial p_{s0}}\,\frac{\partial(E)}{\partial q_{s0}} + \cdots - \sum_1^\mu{}_s \frac{\partial w_\varkappa}{\partial q_{s0}}\,\frac{\partial(E)}{\partial p_{s0}} - \cdots\right)$$

ist, die Gleichung bestehen:

$$\overline{\frac{d\Omega}{dt}} = \frac{G(J_1, J_2, \ldots J_m)}{g^2} = 0\,,$$

welche, da zwischen $J_1, J_2, \ldots J_m$ keine algebraische Beziehung stattfinden sollte, in den Integralen identisch sein muß, und also auch befriedigt sein wird, wenn $J_1+u_1, J_2+u_2, \ldots J_m+u_m$ statt $J_1, J_2, \ldots J_m$ gesetzt werden, worin $u_1, u_2, \ldots u_m$ algebraische Integralfunktionen von (13) oder Konstanten sind, da

$$\frac{\partial(J_\varkappa+u_\varkappa)}{\partial t} + \sum_1^\mu{}_s \frac{\partial(J_\varkappa+u_\varkappa)}{\partial p_{s0}}\,\frac{\partial(E)}{\partial q_{s0}} + \cdots - \sum_1^\mu{}_s \frac{\partial(J_\varkappa+u_\varkappa)}{\partial q_{s0}}\,\frac{\partial(E)}{\partial p_{s0}} - \cdots$$
$$= \frac{\partial J_\varkappa}{\partial t} + \sum_1^\mu{}_s \frac{\partial J_\varkappa}{\partial p_{s0}}\,\frac{\partial(E)}{\partial q_{s0}} + \cdots - \sum_1^\mu{}_s \frac{\partial J_\varkappa}{\partial q_{s0}}\,\frac{\partial(E)}{\partial p_{s0}} - \cdots$$

wegen

$$\frac{\partial u_\varkappa}{\partial t} + \sum_1^\mu{}_s \frac{\partial u_\varkappa}{\partial p_{s0}}\,\frac{\partial(E)}{\partial q_{s0}} + \cdots - \sum_1^\mu{}_s \frac{\partial u_\varkappa}{\partial q_{s0}}\,\frac{\partial(E)}{\partial p_{s0}} - \cdots = 0$$

ist. Es folgt somit, weil auch

$$\frac{G(J_1+u_1, J_2+u_2, \ldots J_m+u_m)}{g(J_1+u_1, J_2+u_2, \ldots J_m+u_m)^2} = 0$$

ist, *aus der Existenz der rationalen Integralfunktion*

$$\Omega = \frac{g_1(J_1, J_2, \ldots J_m)}{g(J_1, J_2, \ldots J_m)}$$

auch die gleichartige Integralfunktion

$$\Omega_1 = \frac{g_1(J_1+u_1, J_2+u_2, \ldots J_m+u_m)}{g(J_1+u_1, J_2+u_2, \ldots J_m+u_m)},$$

und hieraus wieder eine ebensolche

$$\Omega_2 = \frac{g_1(J_1+u_1, \ldots J_m+u_m)}{g(J_1+u_1, \ldots J_m+u_m)} - \frac{g_1(J_1, \ldots J_m)}{g(J_1, \ldots J_m)}.$$

Sei zunächst die rationale Integralfunktion eine in $J_1, J_2, \ldots J_m$ ganze Funktion, schließen wir aber den oben behandelten Fall aus, daß dieselbe von der Form

$$(43) \qquad \omega = u_1 J_1 + u_2 J_2 + \cdots + u_m J_m + U$$

ist, worin $u_1, \ldots u_m$ Konstanten (Null eingeschlossen) oder algebraische Integralfunktionen sind, und U eine algebraische Funktion der Variabeln ist, so möge dieselbe, nach fallenden Potenzen von J_1 geordnet, lauten:

$$\omega(J_1, J_2, \ldots) = J_1^\sigma \sum U_0 J_2^{\mu_0} J_3^{\nu_0} \ldots + J_1^{\sigma-1} \sum U_1 J_2^{\mu_1} J_3^{\nu_1} \ldots + \cdots + \sum U_\sigma J_2^{\mu_\sigma} J_3^{\nu_\sigma} \ldots,$$

und es wird dann, da, wie oben gezeigt worden, auch

$$\omega(J_1+u, J_2 \ldots) = (J_1+u)^\sigma \sum U_0 J_2^{\mu_0} J_3^{\nu_0} \ldots + (J_1+u)^{\sigma-1} \sum U_1 J_2^{\mu_1} J_3^{\nu_1} \ldots + \cdots + \sum U_\sigma J_2^{\mu_\sigma} J_3^{\nu_\sigma} \ldots$$

eine Integralfunktion ist, worin u eine algebraische Integralfunktion oder eine Konstante darstellt, auch

$$\begin{aligned}\omega_1(J_1, J_2, \ldots) &= \omega(J_1+u, J_2, \ldots) - \omega(J_1, J_2, \ldots) \\ &= J_1^{\sigma-1} \sum U_0' J_2^{\mu'_0} J_3^{\nu'_0} \ldots + J_1^{\sigma-2} \sum U_1' J_2^{\mu'_1} J_3^{\nu'_1} \ldots \\ &\quad + \sum U_{\sigma-1}' J_2^{\mu'_{\sigma-1}} J_3^{\nu'_{\sigma-1}} \ldots\end{aligned}$$

eine solche sein. Daraus folgt aber wieder, daß

$$\omega_2(J_1, J_2, \ldots) = \omega_1(J_1 + u, J_2, \ldots) - \omega_1(J_1, J_2, \ldots)$$

eine Integralfunktion darstellt, oder auch, da

$$\omega_1(J_1 + u, J_2, \ldots) = \omega(J_1 + 2u, J_2, \ldots) - \omega(J_1 + u, J_2, \ldots)$$

ist:

$$\begin{aligned} \omega_2(J_1, J_2, \ldots) &= \omega(J_1 + 2u, J_2, \ldots) - 2\omega(J_1 + u, J_2, \ldots) + \omega(J_1, J_2, \ldots) \\ &= J_1^{\sigma-2} \sum U_0'' J_2^{\mu_0''} J_3^{\nu_0''} \cdots + J_1^{\sigma-3} \sum U_1'' J_2^{\mu_1''} J_3^{\nu_1''} \cdots + \cdots. \end{aligned}$$

Schließt man so weiter bis man zur Integralfunktion gelangt:

$$\begin{aligned} \omega_{\sigma-1}(J_1, J_2, \ldots) = J_1 &\sum U_0^{(\sigma-1)} J_2^{\mu_0^{(\sigma-1)}} J_3^{\nu_0^{(\sigma-1)}} \cdots \\ &+ \sum U_1^{(\sigma-1)} J_2^{\mu_1^{(\sigma-1)}} J_3^{\nu_1^{(\sigma-1)}} \cdots, \end{aligned}$$

so ist diese in J_1 lineare Integralfunktion entweder auch in $J_2, J_3, \ldots$ linear, und es folgt dann somit aus der Existenz der in $J_1, J_2, \ldots$ ganzen Integralfunktion eine solche von der Form (43), oder es führt die erneute Substitution von $J_1 + u$ für J_1 in $\omega_{\sigma-1}$ auf die Integralfunktion

$$\begin{aligned} \omega_\sigma(J_1, J_2, \ldots) &= \omega_{\sigma-1}(J_1 + u, J_2, \ldots) - \omega_{\sigma-1}(J_1, J_2, \ldots) \\ &= \sum U_0^{(\sigma)} J_2^{(\sigma)} J_3^{(\sigma)} \cdots, \end{aligned}$$

und man kann dann durch Substitution von $J_2 + u$ für J_2 usw. wie oben eine Integralfunktion herleiten, die wieder nur $J_2, J_3, \ldots$ linear enthält oder J_2 garnicht und wieder nur ganz von $J_3, \ldots$ abhängt, bis man endlich zu einer in J_m ganzen Integralfunktion vom zweiten Grade gelangt:

$$\Omega = V_0 J_m^2 + V_1 J_m + V_2,$$

in welcher V_0, V_1, V_2 algebraische Funktionen von $t, p_{s0}, \ldots q_{s0}, \ldots$ sind. Setzt man endlich für J_m die Größe $J_m + u$, worin u eine algebraische Integralfunktion oder eine Konstante ist, so daß sich die Integralfunktion

$$\Omega_1 = V_0 (J_m + u)^2 + V_1 (J_m + u) + V_2$$

und hieraus wieder wie oben die Integralfunktion

$$\Omega_1 - \Omega = \Omega_2 = 2u V_0 J_m + u^2 V_0 + u V_1 \tag{44}$$

ergibt, so wird, da

$$\frac{\overline{d\Omega_2}}{dt} = 2u V_0 \frac{\overline{dJ_m}}{dt} + J_m \frac{\overline{d(2uV_0)}}{dt} + \frac{\overline{d(u^2 V_0 + u V_1)}}{dt} = 0$$

sein muß, und J_m, wie von vornherein vorausgesetzt war, nicht eine algebraische Funktion der Variabeln sein durfte, folgen, daß

$$\frac{\overline{d(uV_0)}}{dt} = 0$$

und somit V_0 eine algebraische Integralfunktion ist. Setzt man nun

$$2uV_0 = U, \; u^2 V_0 + u V_1 = W,$$

so wird sich nach (44) die Integralfunktion in der Form

$$\Omega_2 = U J_m + W \tag{45}$$

ergeben, worin W eine algebraische Funktion der Variabeln und U eine algebraische Integralfunktion darstellt. Ist auch V_1, also auch W und somit nach (45) J_m eine Integralfunktion, so würde

$$\frac{\overline{dJ_m}}{dt} = \overline{\frac{d}{dt}\int^{w_m} y_m \, dx} = (y_m)_{w_m} \frac{\overline{dw_m}}{dt} = 0$$

sein, also die obere Grenze des Integrals selbst eine algebraische Integralfunktion darstellen. Hieraus ergibt sich, *daß, wenn das Differentialgleichungssystem* (13) *eine Integralfunktion besitzt, welche algebraisch aus den Variabeln* $t, p_{s0}, \ldots p_{s\nu-1}, q_{s0}, \ldots q_{s\nu-1}$ *und als ganze Funktion aus den* m *Quadraturen* $J_1, J_2, \ldots J_m$ *zusammengesetzt ist, welche untereinander mit den Variabeln nicht in einem algebraischen Zusammenhange stehen, dann auch stets eine Integralfunktion des Systems* (13) *von der Form*

$$(46) \qquad \Omega = U_1 J_1 + U_2 J_2 + \cdots + U_m J_m + W$$

existiert, in welcher $U_1, U_2, \ldots U_m$ *algebraisch aus den Variabeln zusammengesetzte Integralfunktionen darstellen, die auch zum Teil oder alle konstant oder Null sein können, und* W *eine algebraische Funktion der Variabeln ist. Jede beliebige algebraisch ganze Zusammensetzung aus so beschaffenen Integralfunktionen liefert eine Integralfunktion, welche von den Variabeln algebraisch und den* m *Quadraturen algebraisch und ganz abhängt.*

Daß für den Fall, in welchem in den Integralen $J_1, J_2, \ldots J_m$ ganze lineare Integralfunktionen existieren, deren Koeffizienten Konstanten oder algebraische Funktionen sind, auch in jenen Quadraturen gebrochene rationale Integralfunktionen hergeleitet werden können, ist unmittelbar ersichtlich, da, wenn zwei ganze lineare Integralfunktionen mit Ω_1 und Ω_2 bezeichnet werden, auch eine solche durch den Ausdruck

$$\Omega = \frac{\Omega_1}{\Omega_2} = \frac{u_{11} J_1 + u_{12} J_2 + \cdots + u_{1m} J_m + W_1}{u_{21} J_1 + u_{22} J_2 + \cdots + u_{2m} J_m + W_2}$$

gegeben ist, weil jede Funktion einer Integralfunktion wieder eine solche ist. Aber man sieht auch leicht, daß die Existenz einer rational gebrochenen Integralfunktion das Bestehen von solchen ganzen linearen Funktionen erfordert; sei z. B.

$$\omega = \frac{v_1 J_1 + W_1}{v_2 J_1 + W_2},$$

eine Integralfunktion, worin v_1, v_2, W_1, W_2 algebraische Funktionen der Variabeln bedeuten, so geht aus dieser nach den obigen Auseinandersetzungen auch die Existenz einer durch den Ausdruck

$$\omega_1 = \frac{v_1(J_1+u_1)+W_1}{v_2(J_1+u_1)+W_2} - \frac{v_1 J_1 + W_1}{v_2 J_1 + W_2} = \frac{u_1(v_1 W_2 - v_2 W_1)}{(v_2(J_1+u_1)+W_2)(v_2 J_1 + W_2)}$$

dargestellten Integralfunktion hervor, in welcher u_1 eine Konstante oder eine algebraische Integralfunktion ist, oder die reziproke, in J_1 vom zweiten Grade ganze Integralfunktion

$$\omega_2 = \frac{(v_2(J_1+u_1)+W_2)(v_2 J_1 + W_2)}{u_1(v_1 W_2 - v_2 W_1)},$$

aus welcher sich, wie vorher gezeigt worden, wieder eine in J_1 ganze lineare Integralfunktion herleiten läßt. Sei die Integralfunktion allgemein von rational gebrochener Form

$$\omega(J_1, J_2, \dots J_m) = \frac{J_1^{\varkappa} + \varrho_1(J_2, \dots J_m) J_1^{\varkappa-1} + \dots + \varrho_{\varkappa}(J_2, \dots J_m)}{r_0(J_2, \dots J_m) J_1^{\lambda} + r_1(J_2, \dots J_m) J_1^{\lambda-1} + \dots + r_{\lambda}(J_2, \dots J_m)}$$
$$= \frac{g_1(J_1, \dots J_m)}{g(J_1, \dots J_m)},$$

worin $r_0, \dots r_\lambda, \varrho_1, \dots \varrho_\varkappa$ rationale Funktionen der eingeschlossenen Größen darstellen, so folgt aus

$$g(J_1, \dots J_m)\,\omega(J_1, \dots J_m) = g_1(J_1, \dots J_m)$$

durch Differentiation nach t, da nach der Definition einer Integralfunktion

$$\overline{\frac{d\omega(J_1, \dots J_m)}{dt}} = 0$$

ist,

$$\omega(J_1, \dots J_m) = \frac{\overline{\dfrac{dg_1(J_1, \dots J_m)}{dt}}}{\overline{\dfrac{dg(J_1, \dots J_m)}{dt}}},$$

worin die höchste Potenz von J_1 im Zähler die $\varkappa-1^{\text{te}}$, im Nenner die λ^{te} ist. Setzt man somit wieder

$$\omega(J_1,\ldots J_m) = \frac{J_1^{\varkappa-1} + P_1(J_2,\ldots J_m)\,J_1^{\varkappa-2} + \cdots + P_{\varkappa-1}(J_2,\ldots J_m)}{R_0(J_2,\ldots J_m)\,J_1^{\lambda} + R_1(J_2,\ldots J_m)\,J_1^{\lambda-1} + \cdots + R_\lambda(J_2,\ldots J_m)}$$

$$= \frac{G_1(J_1, J_2,\ldots J_m)}{G(J_1, J_2,\ldots J_m)},$$

so daß auch

$$\omega(J_1,\ldots J_m) = \frac{\dfrac{d\,\overline{G_1(J_1,\ldots J_m)}}{dt}}{\dfrac{d\,\overline{G(J_1,\ldots J_m)}}{dt}}$$

eine der obigen analoge Form annimmt, in welcher der Zähler $J_1^{\varkappa-2}$ als höchste Potenz von J_1 enthält, während im Nenner wieder als höchste Potenz J_1^{λ} vorkommt, und schließt so weiter, bis J_1 ganz aus dem Zähler herausfällt, so wird man für die Integralfunktion $\Omega = \frac{1}{\omega}$ zu der Form gelangen:

$$\Omega(J_1, J_2,\ldots J_m) = S_0(J_2,\ldots J_m)\,J_1^{\lambda} + S_1(J_2,\ldots J_m)\,J_1^{\lambda-1} + \cdots + S_\lambda(J_2,\ldots J_m),$$

worin $S_0, S_1, \ldots S_\lambda$ rationale Funktionen der eingeschlossenen Größen bedeuten. Da nun aber, wie früher gezeigt worden, auch

$$\Omega(J_1 + u_1, J_2,\ldots J_m)$$

eine Integralfunktion ist, wenn u_1 selbst eine algebraische Integralfunktion oder eine Konstante darstellt, und also auch

$$\Omega(J_1 + u_1, J_2,\ldots J_m) - \Omega(J_1, J_2,\ldots J_m)$$
$$= T_0(J_2,\ldots J_m)\,J_1^{\lambda-1} + T_1(J_2,\ldots J_m)\,J_1^{\lambda-2} + \cdots + T_{\lambda-1}(J_2,\ldots J_m),$$

worin $T_0, T_1, \ldots T_{\lambda-1}$ die eingeschlossenen Größen rational enthalten, eine solche, und die Substitution von $J_1 + u_2$ statt J_1 den Grad von J_1 weiter erniedrigt, so wird man entweder auf eine in den J lineare Integralfunktion oder auf eine solche geführt werden, welche J_1 garnicht mehr enthält und als eine in $J_2, J_3, \ldots J_m$ rational gebrochene Integralfunktion dieselben Schlüsse gestattet, wie die gegebene in $J_1, J_2, \ldots J_m$ rational gebrochene. Es besitzt somit das Differentialgleichungssystem stets auch eine als ganze lineare Funktion der Größen $J_1, J_2, \ldots J_m$ ausdrückbare Integralfunktion, wenn ihm eine in diesen Größen rational gebrochene zugehört.

Die Zusammenfassung der gewonnenen Resultate liefert somit den folgenden Satz:

Ist das kinetische Potential H ν^{ter} Ordnung eine in den Variabeln

$$p_{s0} = p_s, \; p_{s1} = \frac{d p_s}{dt}, \ldots p_{s\lambda} = \frac{d^\nu p_\lambda}{dt^\nu} \qquad (s = 1, 2, \ldots \mu)$$

von t unabhängige algebraische Funktion derselben, so daß durch Einführung der Größen

$$q_{\varrho\lambda-1} = -\frac{\partial H}{\partial p_{\varrho\lambda}} + \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_{\varrho\lambda+1}} - \cdots + (-1)^{\nu-\lambda+1}\frac{d^{\nu-\lambda}}{dt^{\nu-\lambda}}\frac{\partial H}{\partial p_{\varrho\nu}} \qquad \begin{pmatrix}\varrho = 1, 2, \ldots \mu \\ \lambda = 1, 2, \ldots \nu\end{pmatrix}$$

die Energie E die Form annimmt:

$$E = H + \sum_1^\mu{}_\varrho\, p_{\varrho 1} q_{\varrho 0} + \sum_1^\mu{}_\varrho\, p_{\varrho 2} q_{\varrho 1} + \cdots + \sum_1^\mu{}_\varrho\, p_{\varrho\nu} q_{\varrho\nu-1},$$

oder wenn man aus den μ Gleichungen

$$q_{\varrho\nu-1} = -\frac{\partial H}{\partial p_{\varrho\nu}} \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots \mu)$$

$p_{1\nu}, p_{2\nu}, \ldots p_{\mu\nu}$ als Funktionen von t, $p_{\varrho 1}, p_{\varrho 2}, \ldots p_{\varrho\nu-1}$ $(\varrho = 1, 2, \ldots \mu)$, $q_{1\nu-1}, q_{2\nu-1}, \ldots q_{\mu\nu-1}$ ausgedrückt in E einsetzt, dieses die Lösung (E) einer algebraischen Gleichung ist, deren Koeffizienten rationale Funktionen von t, $p_{s0}, \ldots p_{s\nu-1}, q_{s0}, \ldots q_{s\nu-1}$ $(s = 1, 2, \ldots \mu)$ sind, und hat das erweiterte HAMILTON*sche Differentialgleichungssystem*

$$\frac{dp_{s\lambda}}{dt} = \frac{\partial(E)}{\partial q_{s\lambda}}, \quad \frac{dq_{s\lambda}}{dt} = -\frac{\partial(E)}{\partial p_{s\lambda}} \qquad \begin{pmatrix}s = 1, 2, \ldots \mu \\ \lambda = 0, 1, \ldots \nu - 1\end{pmatrix}$$

eine Integralfunktion

$$\omega = f(t, p_{s0}, \dots p_{s\nu-1}, q_{s0}, \dots q_{s\nu-1}, J_1, J_2, \dots J_n),$$

worin f eine algebraische Funktion der eingeschlossenen Größen, und

$$J_1 = \int^{w_1} y_1\,dx, \quad J_2 = \int^{w_2} y_2\,dx, \dots \quad J_n = \int^{w_n} y_n\,dx$$

sind, in denen $y_1, y_2, \dots y_n$ algebraische Funktionen von x, und w_1, $w_2, \dots w_n$ ebensolche von $t, p_{s0}, \dots p_{s\nu-1}, q_{s0}, \dots q_{s\nu-1}$ $(s = 1, 2, \dots \mu)$ sind, so hat jenes Differentialgleichungssystem auch Integralfunktionen von der Form

$$\Omega = u_1 J_1 + u_2 J_2 + \cdots + u_n J_n + U,$$

worin $u_1, u_2, \dots u_n$ Konstanten oder algebraische Integralfunktionen des Systems sind, und U eine algebraische Funktion der Variabeln ist; die Funktion ω ist dann eine algebraische Zusammensetzung solcher Funktionen Ω. Die Existenz einer solchen ganzen, in den Quadraturen $J_1, J_2, \dots J_n$ linearen Integralfunktion zieht das Bestehen einer ebensolchen von der Form

$$\Omega_1 = u_1\left(J_1 + J_1^{(1)} + \cdots + J_1^{(p_1-1)}\right) + u_2\left(J_2 + J_2^{(1)} + \cdots + J_2^{(p_2-1)}\right) + \cdots + u_n\left(J_n + J_n^{(1)} + \cdots + J_n^{(p_n-1)}\right) + V$$

nach sich, wenn $u_1, u_2, \dots u_n$ Konstanten oder rational aus $t, p_{s0}, \dots p_{s\nu-1}, q_{s0}, \dots q_{s\nu-1}$ und (E) zusammengesetzte Integralfunktionen waren, V eine rationale Funktion eben dieser Größen darstellt, ferner p_a das Geschlecht der ABEL*schen Integrale J_a bedeutet, und die Grenzen der Integrale*

$$J_a, J_a^{(1)}, \dots J_a^{(p_a-1)},$$

sowie die Werte der zu diesen Grenzen gehörigen algebraischen Irrationalitäten die Lösungen von algebraischen Gleichungen sind, deren Koeffizienten rational aus $t, p_{s0}, \dots p_{s\nu-1}, q_{s0}, \dots q_{s\nu-1}$ und (E) zusammengesetzt sind.

Bezüglich der in der vorhergehenden Untersuchung benutzten algebraischen Integralfunktionen des Differentialgleichungssystems (13) mögen noch die nachfolgenden Bemerkungen hinzugefügt werden.

Für den Fall, daß der Verlauf einer Bewegung mittels des kinetischen Potentials ν^{ter} Ordnung H durch die μ Differentialgleichungen $2\nu^{\text{ter}}$ Ordnung (2) beschrieben wurde, war die Energie durch den Ausdruck $2\nu-1^{\text{ter}}$ Ordnung (3) oder mit Einführung der durch die Gleichungen (4) definierten Größen q durch die Ausdrücke (5) und (6) dargestellt worden. Um den Wert der Energie für alle Integrale der Differentialgleichungen (1) festzustellen, bemerke man, daß, wenn in die Gleichung

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{s=1}^{\mu} \frac{\partial H}{\partial p_s} p_s' + \sum_{s=1}^{\mu} \frac{\partial H}{\partial p_s'} p_s'' + \cdots + \sum_{s=1}^{\mu} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}} p_s^{(\nu+1)}$$

der aus (1) durch Multiplikation mit p_s' und Summation nach s sich ergebende Ausdruck

$$\sum_{s=1}^{\mu} \frac{\partial H}{\partial p_s} p_s' = \sum_{s=1}^{\mu} p_s' \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial p_s'} - \sum_{s=1}^{\mu} p_s' \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial p_s''} + \cdots + (-1)^{\nu-1} \sum_{s=1}^{\mu} p_s' \frac{d^\nu}{dt^\nu} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}$$

substituiert wird, sich

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} - \frac{\partial H}{\partial t} - \sum_{s=1}^{\mu} \left(p_s' \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial p_s'} + p_s'' \frac{\partial H}{\partial p_s'} \right) & \\ + \sum_{s=1}^{\mu} \left(p_s' \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial p_s''} - p_s''' \frac{\partial H}{\partial p_s''} \right) + \cdots & \\ + (-1)^\nu \sum_{s=1}^{\mu} \left(p_s' \frac{d^\nu}{dt^\nu} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}} - (-1)^\nu p^{(\nu+1)} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}} \right) &= 0 \end{aligned}$$

oder

$$\frac{dH}{dt} - \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{d}{dt} \sum_{s=1}^{\mu} p_s' \frac{\partial H}{\partial p_s'} + \frac{d}{dt} \sum_{s=1}^{\mu} \left(p_s' \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial p_s''} - p_s'' \frac{\partial H}{\partial p_s''} \right) - \cdots$$

$$+ (-1)^\nu \frac{d}{dt} \sum_{s=1}^{\mu} \left(p_s' \frac{d^{\nu-1}}{dt^{\nu-1}} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}} - p_s'' \frac{d^{\nu-2}}{dt^{\nu-2}} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}} + \cdots - (-1)^\nu p_s^{(\nu)} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}} \right) = 0$$

ergibt. Nimmt man nun an, daß H die Zeit t nicht explizite enthält, also $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ ist, so folgt durch Integration der letzterhaltenen Gleichung

$$H - \sum_1^\mu {}_s p_s' \frac{\partial H}{\partial p_s'} + \sum_1^\mu {}_s \left(p_s' \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial p_s''} - p_s'' \frac{\partial H}{\partial p_s''} \right) - \cdots$$
$$+ (-1)^\nu \sum_1^\mu {}_s \left(p_s' \frac{d^{\nu-1}}{\partial t^{\nu-1}} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}} - p_s'' \frac{d^{\nu-2}}{dt^{\nu-2}} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}} + \cdots - (-1)^\nu p_s^{(\nu)} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}} \right) = h,$$

worin h eine willkürliche Konstante bedeutet, oder, indem man auf der linken Seite die Posten mit den Faktoren $p_s', p_s'', \ldots p_s^{(\nu)}$ zusammenfaßt:

$$H - \sum_1^\mu {}_s p_s' \left(\frac{\partial H}{\partial p_s'} - \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial p_s''} + \cdots + (-1)^{\nu-1} \frac{d^{\nu-1}}{dt^{\nu-1}} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}} \right)$$
$$- \sum_1^\mu {}_s p_s'' \left(\frac{\partial H}{\partial p_s''} - \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial p_s'''} + \cdots + (-1)^{\nu-2} \frac{d^{\nu-2}}{dt^{\nu-2}} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}} \right) - \cdots$$
$$- \sum_1^\mu {}_s p_s^{(\nu)} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}} = h,$$

oder endlich nach (3):

$$E = h,$$

worin E nach der für H gemachten Voraussetzung ebenfalls von dem expliziten t unabhängig ist.

Hieraus ergibt sich, daß während des Verlaufes der Bewegung die Energie E konstant bleibt, und da E, welches vermöge (4) in (5), und wenn $p_{1\nu}, p_{2\nu}, \ldots p_{\mu\nu}$ aus den Gleichungen

$$-\frac{\partial H}{\partial p_{\varrho\nu}} = q_{\varrho\nu-1} \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots \mu)$$

als Funktionen von $p_{\varrho 1}, p_{\varrho 2}, \ldots p_{\varrho\nu-1}$ $(\varrho = 1, 2, \ldots \mu)$ $q_{1\nu-1}, q_{2\nu-1}, \ldots q_{\mu\nu-1}$ ausgedrückt substituiert werden, in (E) übergeht, die Gleichung

$$(E) = h$$

ein Integral der HAMILTONschen Differentialgleichungen (13) und somit (E) eine algebraische Integralfunktion derselben ist.

Statt aber von den erweiterten LAGRANGEschen Differentialgleichungen zweiter Art (1) auszugehen und so die Konstanz der Energie zu beweisen, können wir auch unmittelbar aus den HAMILTONschen Differentialgleichungen ersehen, daß (E) eine Integralfunktion derselben, also $(E)=h$ ein Integral ist, da die Definition einer Integralfunktion ω die identische Befriedigung der Gleichung erfordert:

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}+\sum_1^\mu{}_s\frac{\partial\omega}{\partial p_{s0}}\frac{\partial(E)}{\partial q_{s0}}+\cdots+\sum_1^\mu{}_s\frac{\partial\omega}{\partial p_{s\nu-1}}\frac{\partial(E)}{\partial q_{s\nu-1}}$$
$$-\sum_1^\mu{}_s\frac{\partial\omega}{\partial q_{s0}}\frac{\partial(E)}{\partial p_{s0}}-\cdots-\sum_1^\mu{}_s\frac{\partial\omega}{\partial q_{s\nu-1}}\frac{\partial(E)}{\partial p_{s\nu-1}}=0,$$

und dies in der Tat, wenn $\omega=(E)$ eingesetzt wird, der Fall ist, da (E), also auch ω, von dem expliziten t unabhängig, also $\frac{\partial\omega}{\partial t}=0$ ist.

Es ist aber für die HAMILTONschen Differentialgleichungen (13) die von dem expliziten t freie, algebraisch von den Größen $p_{s0},\ldots p_{s\nu-1}, q_{s0},\ldots q_{s\nu-1}$ abhängige Energie — von beliebigen algebraischen Funktionen dieser abgesehen — die einzige algebraische Integralfunktion, während die Existenz noch anderer bestimmte algebraische Zusammensetzungen der Energie aus den Variabeln voraussetzt.

So wird das HAMILTONsche Gleichungssystem der Mechanik

$$\frac{dp_1}{dt}=\frac{\partial(E)}{\partial q_1},\ \frac{dp_2}{dt}=\frac{\partial(E)}{\partial q_2},\ \ldots\ \frac{dp_\mu}{dt}=\frac{\partial(E)}{\partial q_\mu}$$
$$\frac{dq_1}{dt}=-\frac{\partial(E)}{\partial p_1},\ \frac{dq_2}{dt}=-\frac{\partial(E)}{\partial p_2},\ \ldots\ \frac{dq_\mu}{dt}=-\frac{\partial(E)}{\partial p_\mu},$$

wie ich früher gezeigt habe[1], die algebraische Integralfunktion besitzen:

[1] „Über die HAMILTONschen Differentialgleichungen der Dynamik" II. Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Jahrgang 1917, 10. Abhandlung.

$$\omega = \sum_{1} (p_s q_{s+1} - p_{s+1} q_s),$$

worin sich die Summation über alle unter μ liegenden ganzen Zahlen s erstreckt, wenn die Energie die Form hat:

$$(E) = F\left(p_s^2 + p_{s+1}^2, q_s^2 + q_{s+1}^2, p_s q_{s_1} + p_{s+1} q_{s_1+1}\right),$$

worin F eine willkürliche Funktion der eingeschlossenen Argumente bedeutet, und z. B. für den Fall, daß in dem System

$$\frac{dp_1}{dt} = \frac{\partial(E)}{\partial q_1}, \quad \frac{dp_2}{dt} = \frac{\partial(E)}{\partial q_2}, \quad \frac{dq_1}{dt} = -\frac{\partial(E)}{\partial p_1}, \quad \frac{dq_2}{dt} = -\frac{\partial(E)}{\partial p_2}$$

die rechten Seiten der Differentialgleichungen von t freie homogene lineare Funktionen von p_1, p_2, q_1, q_2 mit konstanten Koeffizienten sein sollen, wie leicht zu sehen, das Integrel existieren:

$$p_1 q_2 - p_2 q_1 = c,$$

wenn (E) eine algebraische homogene Funktion zweiten Grades von der Form ist:

$$(E) = C_1(p_1^2 + p_2^2) + C_2(q_1^2 + q_2^2) + C_3(p_1 q_1 + p_2 q_2) + C_4(p_1 q_2 - p_2 q_1),$$

worin C_1, C_2, C_3, C_4 willkürliche Konstanten bedeuten.

Ähnlich würde für das HAMILTONsche System der Dynamik

$$\frac{dp_1}{dt} = \frac{\partial(E)}{\partial q_1}, \quad \frac{dp_2}{dt} = \frac{\partial(E)}{\partial q_2}, \quad \frac{dp_3}{dt} = \frac{\partial(E)}{\partial q_3}$$

$$\frac{dq_1}{dt} = -\frac{\partial(E)}{\partial p_1}, \quad \frac{dq_2}{dt} = -\frac{\partial(E)}{\partial p_2}, \quad \frac{dq_3}{dt} = -\frac{\partial(E)}{\partial p_3}$$

die wesentlich anders gestaltete algebraische Integralfunktion

$$(46) \qquad \omega = (p_1 q_2 - p_2 q_1) + (p_1 q_3 - p_3 q_1) + (p_2 q_3 - p_3 q_2)$$

für die Energie ein Integral der partiellen Differentialgleichung bedingen:

$$(47)\quad \left\{\begin{aligned} &(p_2+p_3)\frac{\partial(E)}{\partial p_1}+(p_3-p_1)\frac{\partial(E)}{\partial p_2}-(p_1+p_2)\frac{\partial(E)}{\partial p_3}+(q_2+q_3)\frac{\partial(E)}{\partial q_1}\\ &\qquad+(q_3-q_1)\frac{\partial(E)}{\partial q_2}-(q_1+q_2)\frac{\partial(E)}{\partial q_3}=0,\end{aligned}\right.$$

deren zugeordnetes totales Differentialgleichungssystem

$$(48)\quad \frac{dp_1}{p_2+p_3}=\frac{dp_2}{p_3-p_1}=-\frac{dp_3}{p_1+p_2}=\frac{dq_1}{q_2+q_3}=\frac{dq_2}{q_3-q_1}=-\frac{dq_3}{q_1+q_2}$$

ist. Aus den beiden Differentialgleichungen

$$\frac{dp_2}{dp_1}=\frac{p_3-p_1}{p_2+p_3}\quad\text{und}\quad\frac{dp_3}{dp_1}=-\frac{p_1+p_2}{p_2+p_3}$$

folgt

$$(49)\quad \frac{d(p_2-p_3)}{dp_1}=1\quad\text{oder}\quad p_2-p_3-p_1=c_1,$$

und hieraus vermöge eben dieser

$$(50)\quad p_1p_2-p_1p_3+p_2p_3=c_2,$$

und ebenso

$$(51)\quad q_2-q_3-q_1=\gamma_1\quad\text{und}\quad q_1q_2-q_1q_3+q_2q_3=\gamma_2,$$

worin $c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2$ Integrationskonstanten sind.

Um endlich das 5[te] Integral des Systems (48) aus der Gleichung

$$(52)\quad \frac{dp_1}{p_2+p_3}=\frac{dq_1}{q_2+q_3}$$

herzuleiten, entwickle man aus den Integralen (49) und (50) die Werte

$$p_2 = \tfrac{1}{2}(p_1+c_1) + \tfrac{1}{2}\sqrt{-3p_1^2-2p_1c_1+c_1^2+4c_2}$$
$$p_3 = -\tfrac{1}{2}(p_1+c_1) + \tfrac{1}{2}\sqrt{-3p_1^2-2p_1c_1+c_1^2+4c_2}\,,$$

so daß sich

$$p_2+p_3 = \sqrt{-3p_1^2-2p_1c_1+c_1^2+4c_2}$$

ergibt, und die Gleichung (52) in

$$\frac{dp_1}{\sqrt{-3p_1^2-2p_1c_1+c_1^2+4c_2}} - \frac{dq_1}{\sqrt{-3q_1^2-2q_1\gamma_1+\gamma_1^2+4\gamma_2}} = 0$$

und deren Integral in

$$(53) \qquad \arcsin\frac{c_1+3p_1}{2\sqrt{c_1^2+3c_2}} - \arcsin\frac{\gamma_1+3q_1}{2\sqrt{\gamma_1^2+3\gamma_2}} = \varkappa$$

übergeht, worin $\varkappa$ eine Integrationskonstante darstellt. Substituiert man die durch die Gleichungen (49), (50) und (51) in den Variabeln gegebenen Werte, wonach sich

$$c_1+3p_1 = p_2-p_3+2p_1,\quad c_1^2+3c_2 = p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_1p_2+p_2p_3-p_1p_3$$

und die analogen Ausdrücke für die q ergeben, so geht das Integral (53) für eine Integrationskonstante C in

$$\frac{(p_2-p_3+2p_1)(q_2+q_3)-(q_2-q_3+2q_1)(p_2+p_3)}{\sqrt{p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_1p_2+p_2p_3-p_1p_3}\,\sqrt{q_1^2+q_2^2+q_3^2+q_1q_2+q_2q_3-q_1q_3}} = 2C$$

oder

$$(54) \qquad \frac{(p_1q_2-q_1p_2)+(p_1q_3-q_1p_3)+(p_2q_3-q_2p_3)}{\sqrt{p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_1p_2+p_2p_3-p_1p_3}\,\sqrt{q_1^2+q_2^2+q_3^2+q_1q_2+q_2q_3-q_1q_3}} = C$$

über. Bemerkt man nun, daß die linken Seiten der Gleichungen (49), (50), (51), also auch

$$\sqrt{(p_2-p_3-p_1)^2+3(p_1p_2-p_1p_3+p_2p_3)} = \sqrt{p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_1p_2-p_1p_3+p_2p_3} = J_1$$

$$\sqrt{(q_2-q_3-q_1)^2+3(q_1q_2-q_1q_3+q_2q_3)} = \sqrt{q_1^2+q_2^2+q_3^2+q_1q_2-q_1q_3+q_2q_3} = J_2$$

Integrale der partiellen Differentialgleichung (47) sind, so wird das Integral (54) in der einfachen Form

$$\frac{\omega}{J_1 \cdot J_2} = C$$

sich darstellen lassen, also ω selbst ein Integral der partiellen Differentialgleichung sein — was unmittelbar ganz allgemein aus der zwischen ω und E bestehenden Differentialgleichung geschlossen werden konnte —, und somit, wenn φ eine algebraische Funktion ist, alle Werte der in den Variabeln algebraisch ausdrückbaren Energie, welche die Integralfunktion (46) besitzen, in der Form enthalten sein:

$$E = \varphi\left(p_2-p_3-p_1,\ p_1p_2-p_1p_3+p_2p_3,\ q_2-q_3-q_1,\ q_1q_2-q_1q_3+q_2q_3,\ \omega\right).$$

Und dem Prinzip der Flächen in der klassischen Mechanik analog wird sich

$$\omega = \sum_1^{\mu}{}_s \sum_{\substack{\varkappa,\lambda=0,1,2,\ldots\nu-1 \\ (\varkappa<\lambda)}} (p_{s\varkappa}\, q_{s\lambda} - p_{s\lambda}\, q_{s\varkappa})$$

als algebraische Integralfunktion der erweiterten HAMILTONschen Differentialgleichungen (13) ergeben, wenn

$$(E) = \varphi\left\{p_{s\varkappa}^2 + p_{s\lambda}^2,\ q_{s\varkappa}^2 + q_{s\lambda}^2,\ p_{s\varkappa}\,p_{s_1\lambda} - p_{s\lambda}\,p_{s_1\varkappa},\ p_{s\varkappa}\,q_{s_1\varkappa} + p_{s\lambda}\,q_{s_1\lambda}\right\}$$

$$(\varkappa, \lambda = 0, 1, 2, \ldots \nu-1),$$

$$(s, s_1 = 1, 2, \ldots \mu)$$

worin φ eine algebraische Funktion der eingeschlossenen Größen bedeutet, da die partielle Differentialgleichung in (E)

$$\frac{\overline{d\omega}}{dt}=\sum_1^{\mu}\sum_{\substack{\varkappa,\lambda=0,1,2,\ldots\nu-1\\(\varkappa<\lambda)}}\left(p_{s\varkappa}\frac{dq_{s\lambda}}{dt}-p_{s\lambda}\frac{dq_{s\varkappa}}{dt}\right)+\left(q_{s\lambda}\frac{dp_{s\varkappa}}{dt}-q_{s\varkappa}\frac{dp_{s\lambda}}{dt}\right)$$

$$=\sum_1^{\mu}\sum_{\substack{\varkappa,\lambda=0,1,2,\ldots\nu-1\\(\varkappa<\lambda)}}\left(-p_{s\varkappa}\frac{\partial(E)}{\partial p_{s\lambda}}+p_{s\lambda}\frac{\partial(E)}{\partial p_{s\varkappa}}+q_{s\lambda}\frac{\partial(E)}{\partial q_{s\varkappa}}-q_{s\varkappa}\frac{\partial(E)}{\partial q_{s\lambda}}\right)=0$$

den oben angegebenen Wert von (E) zum allgemeinen Integral hat. Sei z. B. für $s=1,2$; $\varkappa,\lambda=0,1$ das HAMILTONsche System gegeben:

$$\frac{dp_{10}}{dt}=\frac{\partial(E)}{\partial q_{10}},\ \frac{dp_{20}}{dt}=\frac{\partial(E)}{\partial q_{20}},\ \frac{dp_{11}}{dt}=\frac{\partial(E)}{\partial q_{11}},\ \frac{dp_{21}}{dt}=\frac{\partial(E)}{\partial q_{21}}$$

$$\frac{dq_{10}}{dt}=-\frac{\partial(E)}{\partial p_{10}},\ \frac{dq_{20}}{dt}=-\frac{\partial(E)}{\partial p_{20}},\ \frac{dq_{11}}{dt}=-\frac{\partial(E)}{\partial p_{11}},\ \frac{dq_{21}}{dt}=-\frac{\partial(E)}{\partial p_{21}},$$

so wird, wie soeben gefunden, die Integralfunktion existieren:

$$\omega=(p_{10}q_{11}-p_{11}q_{10})+(p_{20}q_{21}-p_{21}q_{20}),$$

wenn man für (E) irgendeinen der in dem obigen Ausdrucke für die Energie enthaltenen Werte, z. B.

$$(E)=(q_{10}^2+q_{11}^2)+(p_{21}p_{10}-p_{20}p_{11})$$

wählt. In der Tat hat dann das zugehörige Differentialgleichungssystem, welches in

$$\frac{dp_{10}}{dt}=2q_{10},\ \frac{dp_{20}}{dt}=0,\ \frac{dp_{11}}{dt}=2q_{11},\ \frac{dp_{21}}{dt}=0$$

$$\frac{dq_{10}}{dt}=-p_{21},\ \frac{dq_{20}}{dt}=p_{11},\ \frac{dq_{11}}{dt}=p_{20},\ \frac{dq_{21}}{dt}=-p_{10}$$

übergeht, die allgemeinen Integrale

$$p_{20} = \alpha_{20} \qquad q_{10} = -\alpha_{21} t + \beta_{10}$$

$$p_{21} = \alpha_{21} \qquad q_{11} = \alpha_{20} t + \beta_{20}$$

$$p_{10} = -\alpha_{21} t^2 + 2\beta_{10} t + \alpha_{10} \qquad q_{20} = \tfrac{1}{3} \alpha_{20} t^3 + \beta_{20} t^2 + \alpha_{11} t + \beta_{20}$$

$$p_{11} = \alpha_{20} t^2 + 2\beta_{20} t + \alpha_{11} \qquad q_{21} = \tfrac{1}{3} \alpha_{21} t^3 - \beta_{10} t^2 - \alpha_{10} t + \beta_{21};$$

worin die α und β willkürliche Konstanten bedeuten, und diese Integrale genügen, wie unmittelbar zu sehen, der Gleichung

$$\left(p_{10} q_{11} - p_{11} q_{10}\right) + \left(p_{20} q_{21} - p_{21} q_{20}\right) = C,$$

worin die Konstante C durch die Integrationskonstanten in der Form gegeben ist:

$$C = \alpha_{10} \beta_{20} - \alpha_{11} \beta_{10} + \alpha_{20} \beta_{21} - \alpha_{21} \beta_{20}.$$