Universitätsbibliothek
Heidelberg

Heidelberger Akademie
der Wissenschaften

Heidelberger Akademie der Wissenschaften

Mathematische Abhandlungen

Autor: **Koenigsberger, Leo** (1837 – 1921)

Titel: **Über die Integralfunktionen partieller Differentialgleichungen erster Ordnung**

Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse : Abt. A ; 1920, 8

Signatur UB Heidelberg: L 1433-50-20

Nachdem, die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die vollständigen Integrale einer partiellen Differentialgleichung aufgestellt und mit der Irreduktibilität der partiellen Differentialgleichungen in Beziehung gesetzt werden, wird der Übergang zur Theorie der Integralfunktionen gemacht, für welche die Sätze entwickelt werden, welche den Abelschen Fundamentalsätzen der Integralrechnung entsprechen. Es wird ferner nachgewiesen, daß, wenn eine Integralfunktion eine algebraische Funktion von Abelschen Integralen ist, auch stets Integralfunktionen existieren, welche linear aus diesen Integralen zusammengesetzt sind, und die Frage nach der Form der allgemeinsten algebraischen Beziehung zwischen Integralfunktionen untereinander erörtert.

(Zsfassung aus: Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften / Jahresheft 1920, S. XXVI)

Sitzungsberichte
der Heidelberger Akademie der Wissenschaften
Stiftung Heinrich Lanz
Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse
Abteilung A. Mathematisch-physikalische Wissenschaften
Jahrgang 1920. 8. Abhandlung

Über die Integralfunktionen partieller Differentialgleichungen erster Ordnung

Von

LEO KOENIGSBERGER
in Heidelberg

+ L. 1433 50/20

Eingegangen am 27. März 1920

Heidelberg 1920
Carl Winters Universitätsbuchhandlung

Verlags-Nr. 1576

Bevor ich auf die Definition von Integralfunktionen partieller Differentialgleichungen erster Ordnung und auf deren Untersuchung näher eingehe, mögen einige Bemerkungen vorausgeschickt werden, die bei den nachfolgenden Untersuchungen zur Anwendung kommen.

Ist die Funktion

$$(1) \qquad y = F(x_1, x_2, \dots x_n, a_1, a_2, \dots a_n),$$

in welcher $x_1; x_2, \dots x_n$ *voneinander unabhängige Variable,* $a_1, a_2, \dots a_n$ *willkürliche Konstanten bedeuten, der Bedingung unterworfen, daß die Determinante*

$$(2) \qquad D = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial a_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial a_1} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial a_1} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial a_2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial a_2} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial a_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial a_n} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial a_n} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial a_n} \end{vmatrix}$$

für beliebige Werte der Konstanten $a_1, a_2, \dots a_n$ *identisch gleich Null ist,* so werden, wenn

$$(3) \qquad \frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \cdots \frac{\partial F}{\partial x_n}$$

als Funktionen von $a_1, a_2, \dots a_n$ aufgefaßt werden, diese Größen in einem von $a_1, a_2, \dots a_n$ freien analytischen Zusammenhange untereinander stehen, da D als Funktionaldeterminante der Größen (3) in bezug auf die Konstanten a identisch verschwinden soll, und es wird eine Gleichung der Form bestehen:

$$(4) \qquad f\left(x_1, x_2, \ldots x_n, \frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \cdots \frac{\partial F}{\partial x_n}\right) = 0,$$

welche, wenn

$$(5) \qquad \frac{\partial y}{\partial x_1} = \frac{\partial F}{\partial x_1} = p_1, \frac{\partial y}{\partial x_2} = \frac{\partial F}{\partial x_2} = p_2, \cdots \frac{\partial y}{\partial x_n} = \frac{\partial F}{\partial x_n} = p_n$$

gesetzt wird, *eine von der abhängigen Variabeln y freie partielle Differentialgleichung*

$$(6) \qquad f(x_1, x_2, \ldots x_n, p_1, p_2, \ldots p_n) = 0$$

liefert, welcher für beliebige Werte der Konstanten $a_1, a_2, \ldots a_n$ die Funktion $u = F$ in dem Sinne genügt, daß, $p_1, p_2, \ldots p_n$ aus (5) *hergeleitet und in* (6) *eingesetzt, diese für beliebige Werte der a befriedigt wird.*

Genügt umgekehrt eine Funktion (1) *einer Differentialgleichung von der Form* (6), in welcher y nicht explizite vorkommt, *und zwar für beliebige Werte der Konstanten a, so muß für alle diese die Determinante D identisch verschwinden*, da, wenn die Funktionaldeterminante D in bezug auf die willkürlichen Konstanten nicht identisch Null wäre, keine von den Konstanten freie Beziehung zwischen den Funktionen $\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \cdots \frac{\partial F}{\partial x_n}$ oder $p_1, p_2, \ldots p_n$, also keine von y freie partielle Differentialgleichung erster Ordnung bestehen würde.

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß (1) *für beliebige Werte der Parameter $a_1, a_2, \ldots a_n$ einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung genügt, welche die abhängige Variable y nicht enthält, ist somit $D = 0$.*

Befriedigt eine Funktion (1) für alle Werte der Konstanten $a_1, a_2, \ldots a_n$ eine in y irreduktible algebraische partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$(7) \qquad f(x_1, x_2, \ldots x_n, y, p_1, p_2, \ldots p_n) = 0,$$

worin $p_a = \frac{\partial y}{\partial x_a}$ ist, so soll das Integral y dieser ein *vollständiges*

Integral derselben genannt werden, wenn y keiner andern gleichartigen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung in den Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ für beliebige Werte der Konstanten $a_1, a_2, \ldots a_n$ genügt, außer einer algebraisch aus dieser abgeleiteten und mit deren Differentialausdruck identisch verschwindenden zugehörigen Differentialgleichung, und es sollen zum Zwecke der nachfolgenden Untersuchungen die *notwendigen und hinreichenden Bedingungen* dafür zusammengestellt werden, daß (1) ein vollständiges Integral von (7) ist. Möge

I. die Differentialgleichung (7) die abhängige Variable y explizite enthalten, so ist eine notwendige Bedingung offenbar die, daß $D \neq 0$ ist, da, wenn $D = 0$ wäre, nach dem obigen Hilfssatz y einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung genügen würde, in welcher y nicht explizite vorkommt, und somit der Differentialgleichung (7), in welcher der Voraussetzung nach y enthalten sein sollte und dieser vom expliziten y freien Differentialgleichung genügen müßte, was der Definition des vollständigen Integrals widersprechen würde. Die Bedingung $D \neq 0$ wird aber auch die hinreichende sein; denn wenn (1) dann nicht das vollständige Integral von (7) wäre, so müßte es für willkürliche Werte der Konstanten a noch einer andern nicht zugehörigen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung

$$f_1(x_1, x_2, \ldots x_n, y, p_1, p_2, \ldots p_n) = 0 \tag{8}$$

genügen, die y explizite enthalten kann oder nicht; in jedem Falle würde sich für dasselbe Integral aus (7) und (8) eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung durch Elimination von y herstellen lassen, in welcher y nicht mehr explizite vorkommt, oder identisch ist, in welchem Falle nach dem obigen Hilfssatz gegen die Voraussetzung D identisch Null sein müßte. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß das Integral* (1) *der die Variable y explizite enthaltenden Differentialgleichung* (7) *ein vollständiges sein soll, ist somit dadurch gegeben, daß die Determinante D von Null verschieden ist.*

Nicht so einfach ergeben sich die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für das vollständige Integral im Falle

II., wenn die partielle Differentialgleichung

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n, p_1, p_2, \ldots p_n) = 0 \tag{9}$$

die abhängige Variable y nicht explizite enthält.

Zunächst ergibt sich aus der Annahme der Existenz des Integrals (1) der Differentialgleichung (9) das identische Verschwinden der Determinante D, weil, wenn die Funktionaldeterminante D der Funktionen (5) in Beziehung auf die Konstanten $a_1, a_2, \ldots a_n$ von Null verschieden wäre, keine von diesen Konstanten freie Beziehung zwischen den $p_1, p_2, \ldots p_n$, wie es die Differentialgleichung (9) ist, bestehen dürfte. Man sieht aber leicht, daß, wenn (1) das vollständige Integral von (9) sein soll, die Determinante D nicht dadurch verschwinden darf, daß die zu sämtlichen Gliedern irgendeiner Vertikalreihe gehörigen Unterdeterminanten erster Ordnung identisch verschwinden. Denn wären die zu der ϱ^{ten} Vertikalreihe von D gehörigen Unterdeterminanten, in denen die $1^{\text{te}}, 2^{\text{te}}, 3^{\text{te}}, \ldots n^{\text{te}}$ Horizontalreihe und die ϱ^{te} Vertikalreihe von D fehlen,

$$D_{x_\varrho a_1}, D_{x_\varrho a_2}, \ldots D_{x_\varrho a_n},$$

worin $D_{x_\varrho a_\sigma}$ die Unterdeterminante 1ter Ordnung von D darstellt, welche durch Fortlassen der ϱ^{ten} Vertikalreihe und σ^{ten} Horizontalreihe entsteht, für beliebige Werte der Konstanten $a_1, a_2, \ldots a_n$ identisch gleich Null, so würde das Verschwinden der Determinante $D_{x_\varrho a_\sigma}$, welche die Funktionaldeterminante der Funktionen

$$(10) \qquad \frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial F}{\partial x_{\varrho-1}}, \frac{\partial F}{\partial x_{\varrho+1}}, \ldots \frac{\partial F}{\partial x_n}$$

in bezug auf die Größen

$$(11) \qquad a_1, a_2, \ldots a_{\sigma-1}, a_{\sigma+1}, \ldots a_n$$

darstellt, $y = F(x_1, x_2, \ldots, a_1, a_2, \ldots)$ als Integral einer partiellen Differentialgleichung der Form definieren:

$$(12) \qquad f_{\varrho\sigma}(x_1, x_2, \ldots x_n, p_1, p_2, \ldots p_{\varrho-1}, p_{\varrho+1}, \ldots p_n, a_\sigma) = 0\,,$$

in der noch der Parameter a_σ enthalten ist, und die Annahme, daß die zu allen Gliedern der ϱ^{ten} Vertikalreihe gehörigen Unterdeterminanten verschwinden, würde somit $y = F(x_1, \ldots a_1, \ldots)$ als Integral der partiellen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}
&f_{\varrho 1}(x_1, \ldots x_n, p_2, p_3, \ldots p_n, a_1) = 0\,,\\
&f_{\varrho 2}(x_1, \ldots x_n, p_1, p_3, \ldots p_n, a_2)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&f_{\varrho n}(x_1, \ldots x_n, p_1, p_2, \ldots p_{n-1}, a_n) = 0
\end{aligned}$$

ergeben, aus denen somit, wenn $a_1, a_2, \dots a_n$ ausgerechnet und in (1) eingesetzt werden, eine Differentialgleichung von der Form hervorgehen würde:

$$y = \varphi(x_1, \dots x_n, p_1, p_2, \dots p_n),$$

welche y explizite enthält — was nicht möglich ist, da (1) der Annahme nach das *vollständige* Integral einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung sein sollte, in welcher y nicht explizite vorkommt.

Nachdem nun gezeigt worden, daß in *jeder* Vertikalreihe von D mindestens *ein* Glied vorhanden sein muß, für welches die zugehörige Unterdeterminante von Null verschieden ist, wird es für die Anwendung bei der Feststellung, ob die notwendige Bedingung erfüllt sei, erlaubt sein, die einfachste der Vertikalreihen von D auszuwählen, und wenn dies die ϱ^{te} ist, in dieser das zur σ^{ten} Horizontalreihe gehörige Glied $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_\varrho \partial a_\sigma}$ festzustellen, für welches die zugehörige Unterdeterminante $D_{\varrho\sigma}$ von Null verschieden ist, um zu sehen, ob für diese Wahl des σ die sogleich näher anzugebende Bedingung erfüllt ist, und aus deren Nichterfüllung schließen zu können, daß (1) nicht das vollständige Integral von (9) sein kann. Da nun die von Null verschiedene Determinante $D_{x_\varrho a_\sigma}$ die Funktionaldeterminante der Funktionen (10) in bezug auf die Konstanten (11) ist, so werden sich die Parameter (11) aus den Gleichungen

$$(13)\quad \left\{ \begin{aligned} & p_1 = \frac{\partial F}{\partial x_1}, \; p_2 = \frac{\partial F}{\partial x_2}, \dots p_{\varrho-1} = \frac{\partial F}{\partial x_{\varrho-1}}, \\ & \qquad\qquad p_{\varrho+1} = \frac{\partial F}{\partial x_{\varrho+1}}, \dots p_n = \frac{\partial F}{\partial x_n} \end{aligned} \right.$$

ausrechnen lassen und, in die Gleichung

$$(14)\qquad p_\varrho = \frac{\partial F}{\partial x_\varrho}$$

eingesetzt, eine Differentialgleichung

$$\psi\left(x_1, x_2, \dots x_n, p_1, p_2, \dots p_{\varrho-1}, p_\varrho, p_{\varrho+1}, \dots p_n, a_\sigma\right) = 0$$

ergeben, aus welcher, wie oben gezeigt, da $D=0$ sein sollte, und somit ein Zusammenhang zwischen den Größen (13) und (14) besteht, a_σ herausfallen muß, und sich somit, wie oben angenommen, in der Tat eine Differentialgleichung von der Form (9) ergibt, in welcher y nicht explizite enthalten ist. Wir erhalten somit zunächst *als notwendige Bedingung dafür, daß das Integral* (1) *einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, in welcher die abhängige Variable selbst nicht vorkommt, deren vollständiges Integral ist, die, daß die zu einem Gliede* $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_\varrho \partial a_\sigma}$ *gehörige Unterdeterminante der* ϱ^{ten} *Vertikalreihe, worin* $\varrho = 1, 2, \dots n$ *beliebig gewählt werden kann, von Null verschieden ist.*

Aber diese Bedingung ist nicht hinreichend. Eine weitere notwendige Bedingung ergibt sich aus der Erwägung, daß, wenn man die aus den Gleichungen (13) entwickelten Werte der Konstanten (11), statt wie vorher in (14), in die Gleichung $y=F$ einsetzt, der Parameter a_σ nicht herausfallen darf, da sich sonst eine Differentialgleichung von der Form

$$y = \omega\left(x_1, x_2, \dots x_n, p_1, p_2, \dots p_{\varrho-1}, p_{\varrho+1}, \dots p_n\right)$$

ergeben würde, der y für alle Werte der Parameter $a_1, a_2, \dots a_n$ genügen müßte, und dies ist unmöglich, da $y=F$ das vollständige Integral einer Differentialgleichung sein sollte, die y nicht explizite enthält. Diese letztere notwendige Bedingung können wir aber auch so ausdrücken, daß die Funktionaldeterminante

$$(15)\left\{ D_{x_\varrho} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial a_1} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial a_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_{\varrho-1} \partial a_1} & \dfrac{\partial F}{\partial a_1} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_{\varrho+1} \partial a_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial a_1} \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial a_2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial a_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_{\varrho-1} \partial a_2} & \dfrac{\partial F}{\partial a_2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_{\varrho+1} \partial a_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial a_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial a_n} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial a_n} & \cdots & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_{\varrho-1} \partial a_n} & \dfrac{\partial F}{\partial a_n} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_{\varrho+1} \partial a_n} & \cdots & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial a_n} \end{vmatrix} \right.$$

der Funktionen

$$(16) \qquad \frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \cdots \frac{\partial F}{\partial x_{\varrho-1}}, F, \frac{\partial F}{\partial x_{\varrho+1}}, \cdots \frac{\partial F}{\partial x_n}$$

in bezug auf die Parameter

$$a_1, a_2, \ldots a_{\sigma-1}\, a_\sigma\, a_{\sigma+1} \ldots a_n$$

nicht für alle Werte der Parameter a verschwinden darf.

Es ergeben sich somit als notwendige Bedingungen dafür, daß, wenn (1) *für willkürliche Werte der Parameter a einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung genügt, in welcher die abhängige Variable selbst nicht vorkommt, dieses Integral ein vollständiges Integral der Differentialgleichung ist, die, daß in jeder Vertikalreihe der verschwindenden Determinante D ein Glied sich findet, für welches die zugehörige Unterdeterminante von Null verschieden ist, und daß, wenn ein solches in der ϱ^{ten} Vertikalreihe $\frac{\partial^2 F}{\partial x_\varrho \partial a_\sigma}$ ist, worin σ die Werte $1, 2, \ldots n$ haben kann, die Determinante D_{x_ϱ}, die für alle σ dieselbe ist und nur dem Werte ϱ zugehört, nicht identisch verschwindet.*

Es ist aber leicht zu sehen, *daß dies auch die hinreichenden Bedingungen sind.* Denn ist die zu dem Gliede $\frac{\partial^2 F}{\partial x_\varrho \partial a_\sigma}$ gehörige Unterdeterminante von Null verschieden, so ergibt sich zunächst, wie oben gezeigt worden, eine y nicht enthaltende Differentialgleichung, von welcher (1) für willkürliche Werte der Parameter $a_1, a_2, \ldots a_n$ ein Integral ist; daß dieses aber keiner andern nicht zugehörigen Differentialgleichung genügt, folgt unmittelbar; denn gäbe es außer ihr noch eine andre partielle Differentialgleichung, so wird entweder letztere p_ϱ nicht enthalten oder es wird sich p_ϱ zwischen dieser und der ersteren Gleichung eliminieren lassen, so daß (1) für alle Werte der Parameter $a_1, a_2, \ldots a_n$ ein Integral einer Differentialgleichung der Form

$$(17) \qquad \Omega\left(x_1, x_2, \ldots x_n, y, p_1, p_2, \cdots p_{\varrho-1}, p_{\varrho+1}, \cdots p_n\right) = 0$$

wäre, was aber unmöglich ist, da dann nach Früherem die Funktionaldeterminante D_{x_ϱ} der Funktionen (16) in bezug auf sämtliche Parameter gegen die Voraussetzung verschwinden müßte.

Ist somit eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$f\left(x_1, x_2, \ldots x_n, y, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial y}{\partial x_n}\right) = 0$$

gegeben, in welcher y explizite enthalten ist, so ist ein für alle Werte der Parameter $a_1, a_2, \ldots a_n$ gültiges Integral derselben dann und nur dann ein vollständiges Integral dieser, wenn D nicht identisch Null ist. Enthält die Differentialgleichung die abhängige Variable y nicht, so ist die notwendige und hinreichende Bedingung für ein vollständiges Integral die, daß in jeder Vertikalreihe der verschwindenden Determinante D sich ein Element befindet, dessen zugehörige Unterdeterminante von Null verschieden ist, und daß, wenn dieses für ein beliebig gewähltes ϱ $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_\varrho \partial a_\sigma}$ ist, die Determinante D_{x_ϱ}, die für jeden Wert von σ dieselbe ist, nicht identisch verschwindet.

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß, wenn (1) für beliebige Werte der Parameter a einer, y explizite enthaltenden, partiellen Differentialgleichung erster Ordnung genügt, dieses Integral ein unvollständiges ist oder noch eine andre nicht zugehörige partielle Differentialgleichung erster Ordnung befriedigt, ist offenbar durch $D=0$ gegeben, da $D \neq 0$, wie oben gezeigt, die notwendige und hinreichende Bedingung dafür darstellt, daß $y=F$ das vollständige Integral derselben ist. Genügt jedoch $y=F$ für alle a einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, welche die abhängige Variable y nicht explizite enthält, so darf, damit das Integral ein unvollständiges ist, eine der beiden für die Vollständigkeit des Integrals aufgestellten notwendigen und hinreichenden Bedingungen nicht erfüllt sein, und wir erhalten somit *als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß das Integral $y=F(x_1, \ldots x_n, a_1, \ldots a_n)$ einer, y nicht enthaltenden, partiellen Differentialgleichung erster Ordnung ein unvollständiges Integral derselben ist, die, daß entweder Vertikalreihen existieren, deren sämtlichen Elementen Unterdeterminanten zugehören, welche verschwinden, oder, wenn die einem Elemente der ϱ^{ten} Vertikalreihe zugehörige Unterdeterminante von D von Null verschieden ist, die Determinante D_{x_ϱ} identisch Null ist.*

Fassen wir die beiden Fälle zusammen, so ergeben sich *als notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, daß, wenn eine*

Funktion $y = F(x_1, \ldots x_n, a_1, \ldots a_n)$ *für beliebige Werte der Parameter* $a_1, a_2, \ldots a_n$ *einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung genügt, diese ein unvollständiges Integral derselben ist, die, daß* $D = 0$, *daß entweder Vertikalreihen existieren, deren sämtlichen Elementen Unterdeterminanten zugehören, welche verschwinden, oder, wenn die einem Gliede der* ϱ^{ten} *Vertikalreihe zugehörige Unterdeterminante von Null verschieden ist, die Determinante* D_{x_ϱ} *identisch verschwindet.*

Sei, um das einfachste Beispiel zu wählen, die Differentialgleichung gegeben:

$$\alpha \frac{\partial y}{\partial x_1} + \beta \frac{\partial y}{\partial x_2} = 1,$$

von der ein Integral durch den Ausdruck dargestellt ist:

$$y = \frac{x_2}{\beta} + a_1(\beta x_1 - \alpha x_2) + a_2 = F,$$

so geht die Determinante (2) in

$$D = \begin{vmatrix} \beta & -\alpha \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

über, die in der Tat verschwindet, in welcher weiter in jeder Vertikalreihe ein Glied vorhanden ist, für welches die Unterdeterminante von Null verschieden ist, und die für $\varrho = 1$ oder $\varrho = 2$ gewählten Determinanten

$$D_{x_1} = \begin{vmatrix} \beta x_1 & -\alpha \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \alpha, \qquad D_{x_2} = \begin{vmatrix} \beta & \beta x_1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \beta$$

nicht identisch verschwinden, wie die oben entwickelten notwendigen und hinreichenden Bedingungen für das vollständige Integral es verlangten.

Wir können aber auch die Definition eines vollständigen Integrals einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung mit einem Begriff in Verbindung bringen, welcher in der allgemeinen Theorie der algebraischen partiellen Differentialgleichungen von Wichtigkeit ist.

Allgemein wird eine algebraische partielle Differentialgleichung m^{ter} Ordnung:

$$\frac{\partial^m y}{\partial x_1^m} = f\Bigg(x_1, x_2, \dots x_n, y, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}, \dots \frac{\partial^{m-1} y}{\partial x_1^{m-1}}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \dots$$
$$\frac{\partial^{m-1} y}{\partial x_2^{m-1}}, \dots \frac{\partial^m y}{\partial x_2^m}, \dots \frac{\partial y}{\partial x_n}, \dots \frac{\partial^{m-1} y}{\partial x_n^{m-1}}, \frac{\partial^m y}{\partial x_n^m}, \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots$$
$$\frac{\partial^m y}{\partial x_1^{m-1} \partial x_2}, \dots \frac{\partial^{m+1} y}{\partial x_2^{m+1}}, \dots \frac{\partial^{m+1} y}{\partial x_n^{m+1}}, \dots\Bigg),$$

in welcher f eine mit Adjungierung der eingeschlossenen Größen algebraisch irreduktible Funktion bedeutet, *irreduktibel* genannt, wenn diese Differentialgleichung mit keiner algebraischen partiellen Differentialgleichung beliebig hoher Ordnung, in welcher jedoch die nach x_1 genommenen partiellen Ableitungen die m^{te} nicht erreichen, während die nach $x_2, x_3, \dots x_n$ genommenen partiellen Ableitungen bis zu einer beliebigen Ordnung hin vorkommen können, ein Integral gemein hat. Es wird somit eine algebraische partielle Differentialgleichung erster Ordnung:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = f\left(x_1, x_2, \dots x_n, y, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \dots \frac{\partial y}{\partial x_n}\right)$$

irreduktibel sein, wenn f eine algebraisch irreduktible Funktion der eingeschlossenen Größen ist, und wenn diese Differentialgleichung mit keiner algebraischen partiellen Differentialgleichung ein Integral gemein hat, in welcher die nach x_1 genommene partielle Ableitung die erste nicht erreicht, während die nach $x_2, x_3, \dots x_n$ genommenen Ableitungen bis zu einer beliebigen Ordnung hin vorkommen können, also mit keiner partiellen Differentialgleichung der Form

$$\varphi\left(x_1, x_2, \dots x_n, y, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \frac{\partial y}{\partial x_3}, \dots \frac{\partial y}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_3}, \dots\right) = 0,$$

welche x_1 nur als Parameter enthält, und somit auch mit keiner algebraischen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung der Form

$$\varphi\left(x_1, x_2, \ldots x_n, y, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \frac{\partial y}{\partial x_3}, \ldots \frac{\partial y}{\partial x_n}\right) = 0 .$$

Für die oben gegebene Definition der Irreduktibilität partieller Differentialgleichungen beliebiger Ordnung, welche auch die Gemeinsamkeit eines Integrals einer irreduktibeln partiellen Differentialgleichung erster Ordnung von zwei unabhängigen Variabeln mit einer gewöhnlichen Differentialgleichung beliebiger Ordnung in einer der beiden Variabeln ausschließt, gilt allgemein der für alle irreduktibeln algebraischen und analytischen Gebilde sowie für Systeme solcher Gebilde charakteristische Fundamentalsatz,

daß, wenn eine irreduktible algebraische partielle Differentialgleichung m^{ter} Ordnung mit irgendeiner algebraischen partiellen Differentialgleichung derselben oder höheren Ordnung irgendein Integral gemein hat, sie alle Integrale mit ihr gemein haben muß,

worauf ich noch später zurückkommen werde.

Um die Verbindung anzudeuten, die zwischen der Irreduktibilität von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung und der Existenzbedingung eines vollständigen Integrals derselben besteht, würde es genügen, solche partielle Differentialgleichungen erster Ordnung irreduktibel zu nennen, die kein Integral besitzen, welches auch einer andern partiellen Differentialgleichung erster Ordnung mit denselben unabhängigen Variabeln genügt, oder, was dasselbe ist, wie durch Elimination eines partiellen Differentialquotienten ersichtlich, noch eine andre partielle Differentialgleichung erster Ordnung befriedigt, in welcher eine der beiden unabhängigen Variabeln nur als Parameter vorkommt. Danach würde sich als selbstverständlich die Bemerkung ergeben, *daß, wenn eine von n willkürlichen Konstanten abhängige Funktion einer algebraischen irreduktibeln partiellen Differentialgleichung erster Ordnung mit n unabhängigen Variabeln identisch genügt, diese ein vollständiges Integral der Differentialgleichung, und wenn sie ein Integral einer reduktibeln partiellen Differentialgleichung ist, ein unvollständiges Integral derselben sein wird.*

Für eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung, d. h. für eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit *einer* unabhängigen Variabeln

$$\frac{\partial y}{\partial x} = f(x, y) \tag{18}$$

ist das vollständige Integral das allgemeine

$$y = \varphi(x, a),$$

worin a eine willkürliche Konstante, oder

$$F(x, y) = a,$$

woraus sich

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} f(x, y) = 0 \tag{19}$$

ergibt, und diese Gleichung muß, da sich aus derselben das Integral y ohne willkürliche Konstante ergeben würde, eine in x und y identische, oder $F(x, y) = z$ ein von einer willkürlichen Konstanten freies Integral der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} f(x, y) \tag{20}$$

sein. Sei umgekehrt $z_1 = F_1(x, y)$ ein beliebiges Integral der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung (20) mit den beiden unabhängigen Variabeln x und y, so wird die Gleichung

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} + \frac{\partial z_1}{\partial y} f(x, y) = 0 \tag{21}$$

für beliebige Werte von x und y identisch befriedigt, also auch, wenn für y der sich aus der Gleichung

$$F_1(x, y) = a, \tag{22}$$

worin a eine willkürliche Konstante ist, ergebende Wert von y gesetzt wird; für diesen Wert von y ist aber nach (22)

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\partial F_1}{\partial x} : \frac{\partial F_1}{\partial y},$$

und es geht daher (21) in (18) über; es ist somit y ein von einer willkürlichen Konstanten abhängiges Integral derselben. *Um somit ein von einer willkürlichen Konstanten abhängiges Integral der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung mit einer unabhängigen Variabeln zu finden, hat man nur ein von einer willkürlichen Konstanten freies Integral der partiellen Differentialgleichung* (21) *mit zwei unabhängigen Variabeln einer willkürlichen Konstanten gleichzusetzen und y aus dieser Gleichung zu berechnen.*

Wir nennen die Funktion $F(x, y)$ im folgenden zur Abkürzung eine *Integralfunktion* der Differentialgleichung (18).

Dieses an sich selbstverständliche Resultat gestattet aber, in dieser Form ausgesprochen, eine Ausdehnung auf beliebige partielle Differentialgleichungen erster Ordnung und auf die Definition von Integralfunktionen partieller Differentialgleichungen.

Um für eine algebraische partielle Differentialgleichung erster Ordnung:

$$f\left(x_1, x_2, \ldots x_n, y, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial y}{\partial x_n}\right) = 0 \tag{23}$$

mit n unabhängigen Variabeln ein Integral

$$y = \varphi\left(x_1, x_2, \ldots x_n, a_1, a_2, \ldots a_\varkappa\right) \tag{24}$$

zu finden, welches $\varkappa$ willkürliche Konstanten enthält, also nebst seinen nach $x_1, x_2, \ldots x_n$ genommenen ersten Ableitungen die Gleichung (23) für alle Werte der unabhängigen Variabeln und für beliebige Werte der $\varkappa$ Konstanten identisch befriedigt, setze man (24) in die Form:

$$F\left(x_1, x_2, \ldots x_n, y, a_1, a_2, \ldots a_{\varkappa-1}\right) = a_\varkappa, \tag{25}$$

aus welcher sich

$$\frac{\partial y}{\partial x_a} = -\frac{\partial F}{\partial x_a} : \frac{\partial F}{\partial y} \qquad (a = 1, 2, \ldots n) \tag{26}$$

ergibt, und erhält aus (23) für die durch (24) definierte Funktion y die Gleichung

$$(27)\qquad f\left(x_1, x_2, \ldots x_n, y, -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{\frac{\partial F}{\partial y}}, -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_2}}{\frac{\partial F}{\partial y}}, \ldots -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_n}}{\frac{\partial F}{\partial y}}\right) = 0,$$

welche, da y nach (24) die willkürliche Konstante $a_\varkappa$ enthält, in den Größen $x_1, x_2, \ldots x_n, y, a_1, a_2, \ldots a_{\varkappa-1}$ identisch erfüllt sein muß. Es wird somit, wenn

$$F(x_1, x_2, \ldots x_n, y, a_1, a_2, \ldots a_{\varkappa-1}) = z$$

gesetzt wird, F als eine Lösung der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung

$$(28)\qquad f\left(x_1, x_2, \ldots x_n, y, -\frac{\frac{\partial z}{\partial x_1}}{\frac{\partial z}{\partial y}}, -\frac{\frac{\partial z}{\partial x_2}}{\frac{\partial z}{\partial y}}, \ldots -\frac{\frac{\partial z}{\partial x_n}}{\frac{\partial z}{\partial y}}\right) = 0$$

mit den $n+1$ unabhängigen Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n, y$ betrachtet werden können. Sei nun umgekehrt

$$z_1 = F(x_1, x_2, \ldots x_n, y, a_1, a_2, \ldots a_{\varkappa-1})$$

ein Integral der partiellen Differentialgleichung (28), welches nur $\varkappa-1$ willkürliche Konstanten enthält, so wird wieder die Gleichung

$$(29)\qquad f\left(x_1, x_2, \ldots x_n, y, -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{\frac{\partial F}{\partial y}}, -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_2}}{\frac{\partial F}{\partial y}}, \ldots -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_n}}{\frac{\partial F}{\partial y}}\right) = 0$$

für beliebige Werte von $x_1, x_2, \ldots x_n, y, a_1, a_2, \ldots a_{\varkappa-1}$ identisch befriedigt sein, also auch für alle $x_1, x_2, \ldots x_n, a_1, a_2, \ldots a_{\varkappa-1}$, wenn man für y den aus der Gleichung

$$F_1(x_1, x_2, \dots x_n, y, a_1, a_2, \dots a_{\varkappa-1}) = a_\varkappa ,$$

worin $a_\varkappa$ wieder eine willkürliche Konstante ist, sich ergebenden Wert von y als Funktion von $x_1, x_2, \dots x_n, a_1, a_2, \dots a_\varkappa$ einsetzt. Da aber für diese Funktion y

$$-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_\alpha}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} = \frac{\partial y}{\partial x_\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, \dots n)$$

sich ergibt, so geht die Gleichung (29) in (23) über, und es wird die so ermittelte Funktion y, welche von den $\varkappa$ willkürlichen Konstanten $a_1, a_2, \dots a_{\varkappa-1}, a_\varkappa$ abhängt, der gegebenen Differentialgleichung (23) genügen; wir finden somit als Verallgemeinerung des oben ausgesprochenen Satzes,

daß, wenn für die Differentialgleichung erster Ordnung (23) *mit n unabhängigen Variabeln $x_1, x_2, \dots x_n$ ein Integral mit $\varkappa$ willkürlichen Konstanten gefunden werden soll, man nur ein von $\varkappa-1$ voneinander unabhängigen Konstanten abhängiges Integral der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung* (28) *mit den $n+1$ unabhängigen Variabeln $x_1, x_2, \dots x_n, y$ zu suchen und dieses einer willkürlichen Konstanten gleich zu setzen braucht — der hieraus sich ergebende Wert von y wird ein Integral der gesuchten Form der gegebenen Differentialgleichung sein; die Erhöhung der Anzahl der unabhängigen Variabeln um eine Einheit gestattet die entsprechende Erniedrigung der Anzahl der willkürlichen Konstanten.*

Die Aufsuchung eines Integral von (23) mit *einer* willkürlichen Konstanten ist also auf die Ermittlung irgendeines Integrals von (28) ohne eine willkürliche Konstante reduziert, und in diesem Falle soll *die Funktion F_1 eine Integralfunktion der Differentialgleichung* (23) genannt werden.

Sei z. B. für die Differentialgleichung

$$\frac{x_1}{2}\frac{\partial y}{\partial x_1} + \frac{x_2}{2}\frac{\partial y}{\partial x_2} + \frac{1}{4x_1x_2}\frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{\partial y}{\partial x_2} = y$$

ein vollständiges Integral mit zwei willkürlichen Konstanten gesucht, so braucht man nur für die partielle Differentialgleichung

$$\frac{x_1}{2}\frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{x_2}{2}\frac{\partial z}{\partial x_2}\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{1}{4x_1x_2}\frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{\partial z}{\partial x_2}+y\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=0$$

ein Integral mit *einer* willkürlichen Konstanten zu suchen; ein solches ist z. B., wie leicht zu sehen,

$$z_1=\frac{a\,y-x_1^2}{1+a\,x_2^2},$$

und dieses, einer willkürlichen Konstanten β gleichgesetzt, liefert für die vorgelegte Differentialgleichung das Integral

$$y=a_1x_1^2+a_2x_2^2+a_1a_2,$$

welches nach den früheren Auseinandersetzungen ein vollständiges Integral derselben darstellt, weil diese y explizite enthält und die notwendige und hinreichende Bedingung durch die Determinante (2)

$$D=\begin{vmatrix}2x_1 & 0\\ 0 & 2x_2\end{vmatrix}\neq 0$$

erfüllt ist.

Die Reduktion der Aufsuchung eines Integrals mit $\varkappa$ willkürlichen Konstanten auf die eines Integrals mit $\varkappa-1$ Konstanten würde aber auf dem gegebenen Wege nicht ausführbar sein, wenn die Differentialgleichung (23) y nicht explizite enthielte und in den partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial y}{\partial x_1},\ \frac{\partial y}{\partial x_2},\ \cdots\ \frac{\partial y}{\partial x_n}$$

rational homogen wäre, da dann die Differentialgleichung (28) die Form annähme:

$$f\left(x_1,x_2,\ldots x_n,\ \frac{\partial z}{\partial x_1},\ \frac{\partial z}{\partial x_2},\ \cdots\ \frac{\partial z}{\partial x_n}\right)=0,$$

welche z als Integral dieser Gleichung nur von $x_1, x_2, \ldots x_n$, aber nicht von y abhängig ergäbe.

Dies ist aber auch der Grund, weshalb auf diesem Weg allgemein die Reduktion der Anzahl der willkürlichen Konstanten nur um *eine Einheit* bewerkstelligt werden kann; denn wollte man auf die aus der allgemeinen Differentialgleichung erster Ordnung (23) reduzierte Differentialgleichung (28), welche als unabhängige Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n, y$ enthält, aber nicht die abhängige Variable z, und welche, aus der algebraischen Differentialgleichung (23) abgeleitet, in

$$\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial z}{\partial x_n}, \frac{\partial z}{\partial y}$$

ganz und homogen wird, dieselbe Methode anwenden und

$$z = \varphi_1(x_1, \ldots x_n, y, a_1, a_2, \ldots a_{\varkappa-1})$$

oder

$$F_1(x_1, \ldots x_n, y, z, a_1, \ldots a_{\varkappa-2}) = a_{\varkappa-1}$$

setzen, so erhielte man wegen

$$\frac{\partial z}{\partial x_a} = -\frac{\dfrac{\partial F_1}{\partial x_a}}{\dfrac{\partial F_1}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F_1}{\partial y}}{\dfrac{\partial F_1}{\partial z}} \qquad (a = 1, 2, \ldots n)$$

eine von z freie, nur die Differentialquotienten $\frac{\partial F_1}{\partial x_a}$ und $\frac{\partial F_1}{\partial y}$ enthaltende und in diesen wieder homogene Differentialgleichung, deren nur von den Konstanten $a_1, a_2, \ldots a_{\varkappa-2}$ abhängiges Integral F_1 die Variable z gar nicht enthielte, so daß die Reduktion der $\varkappa$ Konstanten im Integral von (23) um zwei Einheiten auf diesem Wege nicht möglich ist, und daher auch die Aufsuchung eines vollständigen Integrals von (23) durch Ermittlung von Integralen partieller Differentialgleichungen erster Ordnung, welche *nur* die in diesen Gleichungen vorkommenden willkürlichen Konstanten enthalten, nicht bewerkstelligt werden kann.

Haben wir jedoch zur Ermittlung eines vollständigen Integrals von (23) zunächst unter Voraussetzung der Kenntnis eines von willkürlichen Konstanten freien Integrals der partiellen Differentialgleichung (28) ein Integral

$$y_1 = \varphi_1(x_1, \ldots x_n, a_1)$$

mit *einer* willkürlichen Konstanten gefunden, so setze man

$$y = y_1 + z$$

in (23) ein und erhält eine in den Differentialquotienten algebraische partielle Differentialgleichung erster Ordnung in z, den n unabhängigen Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ und der willkürlichen Konstanten a_1. Gelingt es, von dieser wieder mittels der oben angegebenen Methode durch Ermittlung eines von neuen willkürlichen Konstanten freien Integrals der reduzierten Differentialgleichung in z ein Integral mit einer neuen Konstanten a_2:

$$z_1 = \varphi_2(x_1, x_2, \ldots x_n, a_1, a_2)$$

zu finden, und setzt dann wieder

$$z = z_1 + t\,,$$

so daß

$$z = y_1 + z_1 + t$$

ist, so wird y ein Integral von (23) mit zwei willkürlichen Konstanten a_1 und a_2, usw., und man wird *durch sukzessive Ermittlung von Integralen in den Differentialquotienten algebraischer partieller Differentialgleichungen erster Ordnung, welche immer nur eine neue Konstante einführen, unter den gemachten Annahmen zur Aufstellung eines Integrals von* (23) *mit n willkürlichen Konstanten gelangen; ob dieses Integral ein vollständiges Integral dieser Differentialgleichung ist, muß in jedem einzelnen Falle durch die oben aufgestellten notwendigen und hinreichenden Bedingungen entschieden werden.*

Setzt man

$$y_1 = \vartheta_1(x_1, \dots x_n, a_1) \qquad t_1 = \vartheta_3(x_1, \dots x_n, a_1, a_2, a_3), \dots$$

$$z_1 = \vartheta_2(x_1, \dots x_n, a_1, a_2) \qquad v_1 = \vartheta_n(x_1, \dots x_n, a_1, a_2, \dots a_n),$$

so ergibt sich ein Integral mit n willkürlichen Konstanten in der Form

$$(30)\left\{ \begin{aligned} y = \vartheta_1(x_1, \dots x_n, a_1) + \vartheta_2(x_1, \dots x_n, a_1, a_2) + \cdots \\ + \vartheta_n(x_1, \dots x_n, a_1, a_2, \dots a_n). \end{aligned} \right.$$

Kommt nun in der Differentialgleichung (23) y explizite vor, so ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß (30) ein vollständiges Integral derselben ist,

$$D = \begin{vmatrix} \sum_1^n{}_\nu \frac{\partial^2 \vartheta_\nu}{\partial a_1 \partial x_1} & \sum_1^n{}_\nu \frac{\partial^2 \vartheta_\nu}{\partial a_1 \partial x_2} & \cdots & \sum_1^n{}_\nu \frac{\partial^2 \vartheta_\nu}{\partial a_1 \partial x_n} \\ \sum_2^n{}_\nu \frac{\partial^2 \vartheta_\nu}{\partial a_2 \partial x_1} & \sum_2^n{}_\nu \frac{\partial^2 \vartheta_\nu}{\partial a_2 \partial x_2} & \cdots & \sum_2^n{}_\nu \frac{\partial^2 \vartheta_\nu}{\partial a_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 \vartheta_n}{\partial a_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 \vartheta_n}{\partial a_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 \vartheta_n}{\partial a_n \partial x_n} \end{vmatrix} \neq 0,$$

während, wenn die Differentialgleichung (23) die abhängige Variable nicht explizite enthält, sich in jeder Vertikalreihe der nunmehr identisch verschwindenden Determinante D ein Element befinden muß, dessen zugehörige Unterdeterminante erster Ordnung von Null verschieden ist, und daß, wenn dieses für ein beliebig gewähltes ϱ

$$\sum_\varrho^n{}_\nu \frac{\partial^2 \vartheta_\nu}{\partial x_\varrho \partial a_\sigma}$$

ist, die Determinante

$$D_{x_\varrho} = \begin{vmatrix} \sum_1^n \frac{\partial^2 \vartheta_\nu}{\partial a_1 \partial x_1} & \sum_1^n \frac{\partial^2 \vartheta_\nu}{\partial a_1 \partial x_2} & \cdots & \sum_1^n \frac{\partial^2 \vartheta_\nu}{\partial a_1 \partial x_{\varrho-1}} & \sum_1^n \frac{\partial \vartheta_\nu}{\partial a_1} & \sum_1^n \frac{\partial^2 \vartheta_\nu}{\partial a_1 \partial x_{\varrho+1}} & \cdots & \sum_1^n \frac{\partial^2 \vartheta_\nu}{\partial a_1 \partial x_n} \\ \sum_2^n \frac{\partial^2 \vartheta_\nu}{\partial a_2 \partial x_1} & \sum_2^n \frac{\partial^2 \vartheta_\nu}{\partial a_2 \partial x_2} & \cdots & \sum_2^n \frac{\partial^2 \vartheta_\nu}{\partial a_2 \partial x_{\varrho-1}} & \sum_2^n \frac{\partial \vartheta_\nu}{\partial a_2} & \sum_2^n \frac{\partial^2 \vartheta_\nu}{\partial a_2 \partial x_{\varrho+1}} & \cdots & \sum_2^n \frac{\partial^2 \vartheta_\nu}{\partial a_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 \vartheta_n}{\partial a_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 \vartheta_n}{\partial a_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 \vartheta_n}{\partial a_n \partial x_{\varrho-1}} & \frac{\partial \vartheta_n}{\partial a_n} & \frac{\partial^2 \vartheta_n}{\partial a_n \partial x_{\varrho+1}} & \cdots & \frac{\partial^2 \vartheta_n}{\partial a_n \partial x_n} \end{vmatrix}$$

nicht identisch verschwindet.

Sei z. B. ein vollständiges Integral der Differentialgleichung

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial y}{\partial x_2} = y \tag{31}$$

zu bestimmen, so wird man ein von einer willkürlichen Konstanten freies Integral der Differentialgleichung (23), also im vorliegenden Falle von

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial F}{\partial x_2} - y \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 = 0$$

zu suchen haben; ein solches ist z. B., wie unmittelbar zu verifizieren ist,

$$F(x_1, x_2, y) = \frac{2y - x_1 x_2 + \sqrt{4y^2 - 4x_1 x_2 y}}{x_2^2},$$

und setzt man diesen Ausdruck einer willkürlichen Konstanten a_1 gleich, so erhält man als ein Integral von (31) mit einer willkürlichen Konstanten

$$y_1 = \frac{1}{4a_1}\left(x_1^2 + 2a_1 x_1 x_2 + a_1^2 x_2^2\right),$$

wie auch unmittelbar ersichtlich ist. Setzt man nunmehr

$$y = y_1 + z,$$

so geht die Differentialgleichung (31) in die algebraische Differentialgleichung

$$\tfrac{1}{2}(x_1 + a_1 x_2)\frac{\partial z}{\partial x_1} + \frac{1}{2a_1}(x_1 + a_1 x_2)\frac{\partial z}{\partial x_2} + \frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{\partial z}{\partial x_2} = z$$

über, und bestimmt man wieder nach der angegebenen Methode von dieser Differentialgleichung, welche a_1 als Parameter enthält, ein Integral mit einer neuen willkürlichen Konstanten, zu welchem Zwecke für die partielle Differentialgleichung

$$-\tfrac{1}{2}(x_1 + a_1 x_2)\frac{\partial t}{\partial x_1}\frac{\partial t}{\partial z} - \frac{1}{2a_1}(x_1 + a_1 x_2)\frac{\partial t}{\partial x_2}\frac{\partial t}{\partial z} + \frac{\partial t}{\partial x_1}\frac{\partial t}{\partial x_2} = z\left(\frac{\partial t}{\partial z}\right)^2$$

ein von einer neuen Konstanten freies Integral mit dem Parameter a_1:

$$F_1(x_1, x_2, z) = -\frac{1}{2\sqrt{a_1}}(x_1 + a_1 x_2) + \sqrt{\frac{1}{4a_1}(x_1 + a_1 x_2)^2 + z}$$

gleich einer neuen willkürlichen Konstanten a_2 zu setzen ist, so wird sich für z der Wert ergeben:

$$z = \left[\frac{1}{2\sqrt{a_1}}(x_1 + a_1 x_2) + a_2\right]^2 - \frac{1}{4a_1}(x_1 + a_1 x_2)^2$$

oder $$z = \left[\frac{1}{2\sqrt{a_1}}(x_1 + a_1 x_2) + a_2\right]^2 - y_1,$$

und somit

$$y = y_1 + z = \left[\frac{1}{2\sqrt{a_1}}\left(x_1 + a_1 x_2\right) + a_2\right]^2,$$

als ein Integral der gegebenen Differentialgleichung mit zwei willkürlichen Konstanten, hergeleitet durch sukzessive Aufsuchung beliebiger, von willkürlichen Konstanten freier Integrale partieller Differentialgleichungen erster Ordnung.

Da, wie unmittelbar zu sehen, die Determinante

$$D = -\frac{1}{2\,a_1^{\frac{3}{2}}}\left(x_1 + a_1 x_2\right) - a_2$$

von Null verschieden ist, wird das gefundene Integral ein vollständiges der gegebenen Differentialgleichung sein.

Um ferner den ABELschen Satz über die Quadratur einer algebraischen Funktion einer Variabeln, wenn die Quadratur selbst wieder algebraisch von dieser abhängt, auf die Integralfunktionen algebraischer partieller Differentialgleichungen erster Ordnung auszudehnen, wollen wir demselben zunächst eine andre Gestalt geben, indem wir von der Differentialgleichung ausgehen:

$$\frac{dy}{dx} = f(x), \tag{32}$$

in welcher die Funktion $f(x)$ und deren Quadratur $\int f(x)\,dx$ algebraische Funktionen von x sein sollen. Da, nach der oben für die Gleichung (18) gegebenen Definition einer Integralfunktion, für die Gleichung (32)

$$F(x, y) = y - \int f(x)\,dx$$

eine solche ist, indem die Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} f(x) = -f(x) + 1 \cdot f(x) = 0$$

identisch erfüllt ist, so werden alle Integralfunktionen, d. h. alle Lösungen der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} f(x) = 0 \tag{33}$$

in der Form enthalten sein:

$$\varphi\left(y - \int f(x)\,dx\right), \tag{α}$$

worin φ eine willkürliche Funktion bedeutet; es kann aber *die Annahme, daß $\int f(x)\,dx$ eine algebraische Funktion von x ist*, wie leicht zu sehen, *durch die äquivalente Annahme ersetzt werden, daß für eine bestimmte Funktion φ der Ausdruck (α) eine algebraische Funktion von x und y ist, da x und y voneinander unabhängig sind, und φ selbst sich daher als algebraische Funktion ihres Argumentes ergibt, woraus $\int f(x)\,dx$ als algebraische Funktion von x folgt. Die Annahme, daß die Quadratur $\int f(x)\,dx$ eine algebraische Funktion von x ist, geht also in die Annahme über, daß die partielle Differentialgleichung (33) ein in x und y algebraisches Integral besitzt oder daß eine Integralfunktion von (32) von x und y algebraisch abhängt.* Der ABELsche Satz nun, daß dann $\int f(x)\,dx$ eine rationale Funktion von x und $f(x)$ ist, kann mit Rücksicht auf die spätere Verallgemeinerung folgendermaßen bewiesen werden.

Sei die in x und y algebraische Integralfunktion $F(x, y)$ eine Lösung der mit Adjungierung von $x, y, f(x)$ irreduktibeln algebraischen Gleichung

$$F^\nu + r_1(x, y, f)\,F^{\nu-1} + \cdots + r_\nu(x, y, f) = 0\,, \tag{34}$$

worin $r_1, r_2, \ldots r_\nu$ rationale Funktionen der eingeschlossenen Größen sind, so ist, da $\frac{\partial f}{\partial x}$ rational von x und f abhängt,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = R(x, y, f, F), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = R_1(x, y, f, F)\,, \tag{35}$$

worin R und R_1 rationale Funktionen darstellen, so daß die Gleichung (33) die Form annimmt:

$$(36) \qquad R(x, y, f, F) + R_1(x, y, f, F) f = 0$$

und wegen der Irreduktibilität von (34) von allen Lösungen $F_1, F_2, \ldots F_\nu$ der letzteren befriedigt wird. Da aber

$$R(x, y, f, F_a) = \frac{\partial F_a}{\partial x}, \quad R_1(x, y, f, F_a) = \frac{\partial F_a}{\partial y} \qquad (a = 1, 2, \ldots \nu)$$

ist, so geht (36) in

$$\frac{\partial F_a}{\partial x} + \frac{\partial F_a}{\partial y} f = 0 \qquad (a = 1, 2, \ldots \nu)$$

über, woraus folgt, daß die Potenzsummen der Lösungen der Gleichung (34), also auch deren Koeffizienten, in x, y, f rationale Integralfunktionen der Gleichung (32) sind. *Besitzt somit* (32) *eine in x und y algebraische Integralfunktion F, so existiert auch stets eine in x, y, f rationale Integralfunktion F_1.*

Da aber jede Integralfunktion einer willkürlichen Konstanten gleichgesetzt für y das allgemeine Integral der Differentialgleichung (32) liefert und somit wegen der der Quadratur anhaftenden willkürlichen Konstanten durch $y - \int f(x) dx$ dargestellt werden kann, so folgt

$$y - \int f dx = F_1(x, y, f),$$

worin F_1 eine rationale Funktion bedeutet, und es wird somit, da x und y voneinander unabhängig sind,

$$\int f dx = R(x, f)$$

sein, also *$\int f dx$ sich rational durch x und f ausdrücken lassen.*

Der von ABEL bewiesene Satz, daß, wenn $f(x)$ und $\int f(x) dx$ algebraische Funktionen von x sind, die Quadratur auch als rationale Funktion von x und $f(x)$ dargestellt werden kann, würde also in den obigen Bezeichnungen lauten:

Wenn in der Differentialgleichung (32) *$f(x)$ eine algebraische Funktion von x ist, und eine Integralfunktion derselben von x und y algebraisch abhängt, so werden die Integrale der Differentialgleichung rational durch x und $f(x)$ ausdrückbar sein.*

Wir gehen nunmehr wieder von der algebraischen Differentialgleichung (23) aus, für welche *ein von willkürlichen Konstanten freies Integral* $F(x_1, x_2, \dots x_n, y)$ *der partiellen Differentialgleichung*

$$(37) \qquad f\left(x_1, x_2, \dots x_n, y, -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}, -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_2}}{\frac{\partial F}{\partial y}}, \dots -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_n}}{\frac{\partial F}{\partial y}}\right) = 0$$

oder der Gleichung

$$(38) \qquad \omega\left(x_1, x_2, \dots x_n, y, \frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \dots \frac{\partial F}{\partial x_n}, \frac{\partial F}{\partial y}\right) = 0,$$

in welcher ω *eine ganze homogene Funktion der partiellen Differentialquotienten ist, als Integralfunktion von* (23) *definiert war; dann ist ein von einer willkürlichen Konstanten abhängiges Integral von* (23) *durch den aus der Gleichung*

$$F(x_1, x_2, \dots x_n, y) = a$$

sich ergebenden Wert von y *gegeben.*

Nehmen wir nun an, daß die Differentialgleichung (23) eine *in den Differentialquotienten lineare mit in* $x_1, \dots x_n, y$ *algebraischen Koeffizienten von der Form sei:*

$$(39) \left\{ \begin{aligned} &\Omega_1(x_1, \dots x_n, y)\frac{\partial y}{\partial x_1} + \Omega_2(x_1, \dots x_n, y)\frac{\partial y}{\partial x_2} + \dots \\ &\qquad + \Omega_n(x_1, \dots x_n, y)\frac{\partial y}{\partial x_n} + \Omega(x_1, \dots x_n, y) = 0, \end{aligned} \right.$$

so daß deren Integralfunktionen F als die Integrale der linearen partiellen Differentialgleichung

$$(40) \left\{ \begin{aligned} &\Omega_1(x_1, \dots x_n, y)\frac{\partial F}{\partial x_1} + \Omega_2(x_1, \dots x_n, y)\frac{\partial F}{\partial x_2} + \dots \\ &\qquad + \Omega_n(x_1, \dots x_n, y)\frac{\partial F}{\partial x_n} - \Omega(x_1, \dots x_n, y)\frac{\partial F}{\partial y} = 0 \end{aligned} \right.$$

definiert sind, welche keine willkürlichen Konstanten enthalten, und sei eine Integralfunktion F eine algebraische Funktion der voneinander unabhängigen Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n, y$, welche durch die mit Adjungierung eben dieser Größen und $\Omega_1, \ldots \Omega_n, \Omega$ irreduktible Gleichung

$$(41)\left\{\begin{aligned} & F^\nu + r_1(x_1, \ldots x_n, y, \Omega_1, \ldots \Omega_n, \Omega) F^{\nu-1} + \cdots \\ & + r_\nu(x_1, \ldots x_n, y, \Omega_1, \ldots \Omega_n, \Omega) = 0 \end{aligned}\right.$$

gegeben sei, in welcher $r_1, r_2, \ldots r_\nu$ rationale Funktionen der eingeschlossenen Größen sind, so werden sich aus dieser die Differentialquotienten von F in der Form ergeben:

$$(42)\left\{\begin{aligned} & \frac{\partial F}{\partial x_a} = \varrho_a(x_1, \ldots x_n, y, \Omega_1, \ldots \Omega_n, \Omega, F) \qquad (a = 1, 2, \ldots n), \\ & \frac{\partial F}{\partial y} = \varrho(x_1, \ldots x_n, y, \Omega_1, \ldots \Omega_n, \Omega, F) \end{aligned}\right.$$

worin ϱ_a und ϱ rationale Funktionen sind, und (40) hiernach übergehen in die Gleichung:

$$\Omega_1 \varrho_1 + \Omega_2 \varrho_2 + \cdots + \Omega_n \varrho_n - \Omega \varrho = 0,$$

welche als ganze Funktion der Größen $x_1, x_2, \ldots x_n, y, \Omega_1, \ldots \Omega$ und F durch alle Lösungen $F_1, F_2, \ldots F_\nu$ der mit Adjungierung von $x_1, x_2, \ldots x_n, y, \Omega_1, \ldots \Omega_n, \Omega$ irreduktibeln Gleichung (41) befriedigt sein wird. Aus den hiernach sich ergebenden Gleichungen folgen mit Berücksichtigung von (42) die Gleichungen

$$(43)\left\{\begin{aligned} & \Omega_1(x_1, \ldots x_n, y) \frac{\partial F_a}{\partial x_1} + \Omega_2(x_1, \ldots x_n, y) \frac{\partial F_a}{\partial x_2} + \cdots \\ & + \Omega_n(x_1, \ldots x_n, y) \frac{\partial F_a}{\partial x_n} - \Omega(x_1, \ldots x_n, y) \cdot \frac{\partial F_a}{\partial y} = 0 \end{aligned}\right. \quad (a = 1, 2, \ldots \nu)$$

und durch Addition dieser ν Gleichungen vermöge (41):

$$\Omega_1(x_1, \dots x_n, y) \frac{\partial r_a}{\partial x_1} + \dots + \Omega_n(x_1, \dots x_n, y) \frac{\partial r_a}{\partial x_n}$$

$$- \Omega(x_1, \dots x_n, y) \frac{\partial r_a}{\partial y} = 0 \qquad (a = 1, 2, \dots \nu),$$

so daß die in $x_1, x_2, \dots x_n, y, \Omega_1, \dots \Omega_n, \Omega$ rationalen Funktionen r_a Integralfunktionen der Differentialgleichung (39), und daß also die aus den Gleichungen

$$r_a = a$$

sich ergebenden algebraischen Funktionen y von $x_1, x_2, \dots x_n$ und der willkürlichen Konstanten a Integrale der partiellen Differentialgleichung (39) sein werden.

Es ergibt sich somit als Erweiterung des Abelschen Satzes über algebraisch ausdrückbare Quadraturen algebraischer Funktionen oder des oben auf gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung übertragenen gleichwertigen Theorems der nachfolgende Satz:

Wenn eine in den partiellen Differentialquotienten lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung in den unabhängigen Variabeln $x_1, x_2, \dots x_n$ und der abhängigen Variabeln y mit in ebendiesen Variabeln algebraischen Koeffizienten $\Omega_1, \Omega_2, \dots \Omega_n, \Omega$ eine in den $n+1$ Variabeln algebraische Integralfunktion besitzt, so existieren auch stets in diesen Variabeln und $\Omega_1, \dots \Omega_n, \Omega$ rationale Integralfunktionen.

Und auf Grund der in einer früheren Arbeit* angestellten Betrachtungen folgt allgemein,

daß, wenn eine lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung (39) *mit den algebraischen Koeffizienten $\Omega_1, \dots \Omega_n, \Omega$ eine Integralfunktion von der Form*

$$(44) \left\{ \begin{aligned} F = u &+ A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2 + \dots + A_m \log v_m \\ &+ a_1 \psi_1(w_1) + a_2 \psi_2(w_2) + \dots + a_n \psi_n(w_n) \end{aligned} \right.$$

* „Ausdehnung der Abelschen Fundamentalsätze der Integralrechnung auf kinetische Potentiale beliebiger Ordnung" (Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie, Jahrgang 1919, 11. Abhandlung).

besitzt, in welcher die A und a Konstanten, die u, v, w algebraische Funktionen von $x_1, x_2, \dots x_n, y$, *und die* ψ *Funktionen durch den Ausdruck*

$$\psi_\mu(t) = \int \frac{P\,dt}{\Delta_\mu(t)}$$

definierte elliptische Integrale sind, in denen

$$\Delta_\mu(t) = (1-t^2)(1-\varkappa_\mu^2 t^2),$$

und P von einer der drei Formen

$$1,\ t^2,\ \frac{1}{1-\dfrac{t^2}{a^2}}$$

ist, auch stets eine Integralfunktion von der Form

$$(45)\left\{\begin{aligned} F_1 &= U + B_1 \log V_1 + B_2 \log V_2 + \cdots + B_\mu \log V_\mu \\ &\quad + a_1 \psi_1(W_1) + a_2 \psi_2(W_2) + \cdots + a_n \psi_n(W_n) \end{aligned}\right.$$

existiert, in welcher $U, V, W, \Delta(W)$ *rationale Funktionen von* $x_1, x_2, \dots x_n, y, \Omega_1, \Omega_2, \dots \Omega_n, \Omega$ *sind,*

und ebenso ist die Ausdehnung dieses Satzes auf den Fall ersichtlich, daß die Integralfunktion eine Summe von, mit Konstanten multiplizierten, allgemeinen ABELschen Integralen enthält, also die Form hat:

$$(46) \qquad F = u + a_1 J_1 + a_2 J_2 + \cdots + a_\lambda J_\lambda,$$

wenn

$$(47) \qquad J_\varkappa = \int^{w_\varkappa} y_\varkappa\, dx \qquad (\varkappa = 1, 2, \dots \lambda)$$

ist, worin $y_\varkappa$ eine algebraische Funktion von x, und $w_1, w_2, \dots w_\lambda, u$ algebraische Funktionen von $x_1, x_2, \dots x_n, y$ sind, indem sich die Zusammensetzung für die Werte $F_1, F_2, \dots F_\nu$ auf Grund des Additionstheorems der ABELschen Integrale vollzieht.

Unter der Voraussetzung, daß die Differentialgleichung (23) eine in den Differentialquotienten lineare von der Form ist:

$$\Omega_1(x_1, \dots x_n, y)\frac{\partial y}{\partial x_1} + \Omega_2(x_1, \dots x_n, y)\frac{\partial y}{\partial x_2} + \cdots$$
$$+ \Omega_n(x_1, \dots x_n, y)\frac{\partial y}{\partial x_n} + \Omega(x_1, \dots x_n, y) = 0\,,$$

worin $\Omega_1, \dots \Omega_n, \Omega$ algebraische Funktionen der Variabeln sind, also die Integralfunktionen als Integrale der Differentialgleichung

$$\Omega_1(x_1, \dots x_n, y)\frac{\partial F}{\partial x_1} + \Omega_2(x_1, \dots x_n, y)\frac{\partial F}{\partial x_2} + \cdots$$
$$+ \Omega_n(x_1, \dots x_n, y)\frac{\partial F}{\partial x_n} - \Omega(x_1, \dots x_n, y)\frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

definiert sind, welche keine willkürliche Konstante enthalten, ist aber leicht zu sehen, daß eine solche auch die Form haben kann:

$$F = u + u_1 J_1 + u_2 J_2 + \cdots + u_\lambda J_\lambda\,, \tag{48}$$

worin $u_1, u_2, \dots u_\lambda$ algebraische Funktionen von $x_1, x_2, \dots x_n, y$ sind, da der Wert von F nur die identisch zu erfüllende Gleichung erfordert:

$$\left\{\begin{aligned}
&\Omega_1(x_1, \dots x_n, y)\left[\frac{\partial u}{\partial x_1} + u_1\frac{\partial J_1}{\partial x_1} + u_2\frac{\partial J_2}{\partial x_1} + \cdots + u_\lambda\frac{\partial J_\lambda}{\partial x_1}\right]\\
&+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+ \Omega_n(x_1, \dots x_n, y)\left[\frac{\partial u}{\partial x_n} + u_1\frac{\partial J_1}{\partial x_n} + u_2\frac{\partial J_2}{\partial x_n} + \cdots + u_\lambda\frac{\partial J_\lambda}{\partial x_n}\right]\\
&- \Omega(x_1, \dots x_n, y)\left[\frac{\partial u}{\partial y} + u_1\frac{\partial J_1}{\partial y} + u_2\frac{\partial J_2}{\partial y} + \cdots + u_\lambda\frac{\partial J_\lambda}{\partial y}\right]\\
&+ J_1\left[\Omega_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \Omega_2\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \cdots - \Omega\frac{\partial u_1}{\partial y}\right] + \cdots\\
&+ J_\lambda\left[\Omega_1\frac{\partial u_\lambda}{\partial x_1} + \Omega_2\frac{\partial u_\lambda}{\partial x_2} + \cdots - \Omega\frac{\partial u_\lambda}{\partial y}\right] = 0\,.
\end{aligned}\right. \tag{49}$$

Wird nämlich vorausgesetzt, daß zwischen den λ Transzendenten $J_1, J_2, \ldots J_\lambda$ keine lineare Beziehung mit algebraischen Koeffizienten besteht – indem sonst mit Hilfe dieser die Anzahl der in F enthaltenen Transzendenten unter Beibehaltung derselben Form der Integralfunktion verkleinert werden könnte –, so schließen wir daraus als notwendige Bedingung für die Form (48) der Integralfunktion, daß die Koeffizienten von $J_1, J_2, \ldots J_\lambda$ identisch verschwinden, also nach (40) $u_1, u_2, \ldots u_\lambda$ *algebraische Integralfunktionen der linearen Differentialgleichung sein müssen*, und die Gleichung (49) in

$$(50)\left\{\begin{aligned} &\Omega_1\left[\frac{\partial u}{\partial x_1}+u_1\frac{\partial J_1}{\partial x_1}+\cdots+u_\lambda\frac{\partial J_\lambda}{\partial x_1}\right]+\cdots\\ &+\Omega_n\left[\frac{\partial u}{\partial x_n}+u_1\frac{\partial J_1}{\partial x_n}+\cdots+u_\lambda\frac{\partial J_\lambda}{\partial x_n}\right]\\ &-\Omega\left[\frac{\partial u}{\partial y}+u_1\frac{\partial J_1}{\partial y}+\cdots+u_\lambda\frac{\partial J_\lambda}{\partial y}\right]=0\end{aligned}\right.$$

übergeht. Zugleich folgt, daß in der Tat in den Differentialquotienten lineare Differentialgleichungen erster Ordnung existieren, für welche es Integralfunktionen von der Form (48) gibt, weil die Koeffizienten von $\Omega_1, \ldots \Omega_n, \Omega$ in der Gleichung (50) algebraische Funktionen der Variabeln sind, die so als Funktionen dieser Variabeln bestimmt werden können, daß die Gleichung (50), also auch (49) für beliebig gewählte algebraische Integralfunktionen $u_1, u_2, \ldots u_\lambda$ identisch erfüllt wird; besitzt die Differentialgleichung keine algebraischen Integralfunktionen, so gehen die Funktionen $u_1, u_2, \ldots u_\lambda$ in Konstanten $a_1, a_2, \ldots a_\lambda$ über.

Aus einem Satze von ABEL, *daß, wenn zwischen λ Integralen*

$$J_1=\int^{w_1} y_1\,dx,\ J_2=\int^{w_2} y_2\,dx, \ldots J_\lambda=\int^{w_\lambda} y_\lambda\,dx\,,$$

in denen $y_1, y_2, \ldots y_\lambda$ algebraische Funktionen von x, und $w_1, w_2, \ldots w_\lambda$ ebensolche Funktionen von $x_1, x_2, \ldots x_n, y$ sind, eine algebraische Beziehung besteht, ohne daß schon zwischen weniger als λ dieser Transzendenten ein ebensolcher algebraischer Zusammenhang existiert, diese Beziehung die lineare Form hat:

$$a_1 J_1 + a_2 J_2 + \cdots + a_\lambda J_\lambda = R\left(x_1, \ldots x_n, y, w_1, y_1(w_1), \ldots w_\lambda, y_\lambda(w_\lambda)\right),$$

worin R eine rationale Funktion der eingeschlossenen Größen, und $a_1, a_2, \ldots a_\lambda$ Konstanten sind, folgt nun, daß, wenn wir für die Form (48) der Integralfunktion die Annahme fallen lassen, daß zwischen den λ Transzendenten keine algebraische Beziehung bestehe, sondern annehmen, daß die höchste Anzahl der λ Transzendenten, zwischen denen keine algebraische Beziehung stattfindet, $\varkappa$ sei, die Beziehung

$$J_{\varkappa+a} = a_{a1} J_1 + a_{a2} J_2 + \cdots + a_{a\varkappa} J_\varkappa + R_a \qquad (a = 1, 2, \ldots \lambda - \varkappa),$$

worin $a_{a1}, \ldots a_{a\varkappa}$ Konstanten, und $R_1, R_2, \ldots R_{\lambda-\varkappa}$ rationale Funktionen von $x_1, x_2, \ldots x_n, y, w_1, (y_1)_{w_1}, \ldots w_\lambda, (y_\lambda)_{w_\lambda}$ sind. Die oben für die Integralfunktion F angenommene Form (48) wird somit in

$$\begin{aligned} F = &\left(u_1 + a_{11} u_{\varkappa+1} + a_{21} u_{\varkappa+2} + \cdots + a_{\lambda-\varkappa 1} u_\lambda\right) J_1 \\ &+ \left(u_2 + a_{12} u_{\varkappa+1} + \cdots + a_{\lambda-\varkappa 2} u_\lambda\right) J_2 + \cdots \\ &+ \left(u_\varkappa + a_{1\varkappa} u_{\varkappa+1} + \cdots + a_{\lambda-\varkappa\varkappa} u_\lambda\right) J_\varkappa \\ &+ \left(u + u_{\varkappa+1} R_1 + \cdots + u_\lambda R_{\lambda-\varkappa}\right) \end{aligned}$$

übergehen, und es werden somit wieder, indem nunmehr zwischen $J_1, J_2, \ldots J_\varkappa$ keine algebraische Beziehung mehr stattfindet, die linearen Funktionen der u:

$$U_1 = u_1 + a_{11} u_{\varkappa+1} + \cdots + a_{\lambda-\varkappa 1} u_\lambda, \ldots U_\varkappa = u_\varkappa + a_{1\varkappa} u_{\varkappa+1} + \cdots + a_{\lambda-\varkappa\varkappa} u_\lambda$$

algebraische Integralfunktionen der gegebenen Differentialgleichung, und F in der Form dargestellt sein:

$$F = U + U_1 J_1 + \cdots + U_\varkappa J_\varkappa .$$

Die algebraische Unabhängigkeit der Transzendenten $J_1, J_2, \ldots J_\varkappa$ voneinander liefert demnach die identisch zu erfüllende Gleichung

$$\Omega_1(x_1, \dots y)\frac{\partial U}{\partial x_1} + \dots + \Omega_n(x_1, \dots y)\frac{\partial U}{\partial x_n} - \Omega(x_1, \dots y)\frac{\partial U}{\partial y}$$
$$+ U_1(y_1)_{w_1}\left[\Omega_1\frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \Omega_2\frac{\partial w_1}{\partial x_2} + \dots - \Omega\frac{\partial w_1}{\partial y}\right] + \dots$$
$$+ U_\varkappa(y_\varkappa)_{w_\varkappa}\left[\Omega_1\frac{\partial w_\varkappa}{\partial x_1} + \dots - \Omega\frac{\partial w_\varkappa}{\partial y}\right] = 0\,,$$

und aus dieser folgt, daß, wenn $J_1, \dots J_\varkappa$ selbst, also wegen

$$\frac{\partial}{\partial x_\varrho}\int^{w_a} y_a\,dx = y_a(w_a)\frac{\partial w_a}{\partial x_\varrho}\,,\quad \frac{\partial}{\partial y}\int^{w_a} y_a\,dx = y_a(w_a)\frac{\partial w_a}{\partial y}$$
$$(\varrho = 1, 2, \dots \varkappa)$$

auch $w_1, w_2, \dots w_n$ Integralfunktionen sind, nicht nur $U_1, \dots U_\varkappa$, sondern daß auch wegen

$$\Omega_1(x_1, \dots y)\frac{\partial U}{\partial x_1} + \dots + \Omega_n(x_1, \dots y)\frac{\partial U}{\partial x_n} - \Omega(x_1, \dots y)\frac{\partial U}{\partial y} = 0$$

U algebraische Integralfunktionen sein werden, wie schon aus der Form von F selbst hervorgeht.

Statt der durch die Form (48) der Integralfunktion für den Fall der algebraischen Unabhängigkeit der λ Transzendenten $J_1, \dots J_\lambda$ voneinander bedingten Annahme, daß $u_1, u_2, \dots u_\lambda$ algebraische Funktionen von $x_1, \dots x_n, y$ sind, können wir aber auch die gleichwertige machen, daß die Multiplikatoren der Transzendenten $J_1, \dots J_\lambda$ *rationale* Funktionen der Variabeln und $\Omega_1, \dots \Omega_n, \Omega$ sind. Denn genügt die Integralfunktion u_a der mit Adjungierung dieser Größen irreduktibeln Gleichung

$$u_a^\nu + R_1(x_1, \dots y, \Omega_1, \dots \Omega_n, \Omega)\,u_a^{\nu-1} + \dots$$
$$+ R_\nu(x_1, \dots y, \Omega_1, \dots \Omega_n, \Omega) = 0\,,$$

so werden nach früherer Schlußweise sämtliche Lösungen u_{a1}, $u_{a2}, \dots u_{a\nu}$ dieser Gleichung algebraische, also $R_1, \dots R_\nu$ rationale Integralfunktionen der gegebenen linearen Differentialgleichung

sein, und somit die Annahme gemacht werden dürfen, daß F die Form hat:

$$F = u + r_1 J_1 + r_2 J_2 + \cdots + r_\lambda J_\lambda ,$$

worin $r_1, r_2, \ldots r_\lambda$ in $x_1, \ldots x_n, y, \Omega_1, \ldots \Omega_n, \Omega$ rationale Integralfunktionen darstellen.

Daß, wenn eine lineare partielle Differentialgleichung (39) Integralfunktionen besitzt, welche linear aus algebraischen Funktionen der Variabeln $x_1, \ldots x_n, y$ und Transzendenten der Form (47) zusammengesetzt sind, ihr auch Integralfunktionen angehören, welche ganze, gebrochene, oder allgemein algebraische Funktionen von diesen Transzendenten sind, geht daraus hervor, daß beliebige Funktionen von Integralfunktionen einer linearen partiellen Differentialgleichung auch wieder Integralfunktionen sind; aber es bleibt die Frage zu beantworten, ob auch umgekehrt die Existenz einer aus den Transzendenten von einem höheren Grade algebraisch zusammengesetzten Integralfunktion ebensolche, welche linear aus jenen gebildet sind, zur Voraussetzung hat.

Sei die Integralfunktion F eine algebraische Funktion der Variabeln $x_1, \ldots x_n, y$ und der λ Transzendenten $J_1, J_2, \ldots J_\lambda$, oder die Lösung einer mit Adjungierung von

$$(51) \quad x_1, x_2, \ldots x_n, y, \Omega_1, \ldots \Omega_n, \Omega, w_1, (y_1)_{w_1}, \ldots w_\lambda, (y_\lambda)_{w_\lambda}, J_1, J_2, \ldots J_\lambda$$

irreduktibeln Gleichung

$$(52) \qquad F^p + \mathfrak{r}_1 F^{p-1} + \mathfrak{r}_2 F^{p-2} + \cdots + \mathfrak{r}_p = 0 ,$$

in welcher $\mathfrak{r}_1, \ldots \mathfrak{r}_p$ rationale Funktionen der Größen (51) sind, so werden, da $\frac{\partial F}{\partial x_a}$ und $\frac{\partial F}{\partial y}$ wiederum rationale Funktionen der Größen (51) und der Integralfunktion F sind, die Lösungen F_1, $F_2, \ldots F_p$ der Gleichung (52) die Gleichung

$$\Omega_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + \cdots + \Omega_n \frac{\partial F}{\partial x_n} - \Omega \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

identisch befriedigen, und somit selbst wieder, also auch $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots \mathfrak{r}_p$, welche die Transzendenten $J_1, J_2, \ldots J_\lambda$ nur rational enthalten,

Integralfunktionen sein. *Es zieht somit eine in den Transzendenten $J_1, J_2, \ldots J_\lambda$ algebraische Integralfunktion die Existenz einer in den Größen* (51) *rationalen Integralfunktion nach sich.*

Wird diese in der Form dargestellt:

$$F_1 = \frac{G_1(J_1, J_2, \ldots J_\lambda)}{G(J_1, J_2, \ldots J_\lambda)}, \tag{53}$$

worin G_1 und G ganze Funktionen der λ Transzendenten bedeuten, deren Grad in bezug auf J_1 der μ_1^{te} resp. μ^{te} sein soll, und deren Koeffizienten rational aus

$$x_1, x_2, \ldots x_n, y, \Omega_1, \Omega_2, \ldots \Omega_n, \Omega, w_1, (y_1)_{w_1}, \ldots w_\lambda, (y_\lambda)_{w_\lambda}$$

zusammengesetzt sind, so geht die Gleichung (53), wenn dieselbe durch den in den Größen $J_2, J_3, \ldots J_\lambda$ rational ganzen Koeffizienten von $J_1^{\mu_1}$ dividiert wird, in

$$r(J_1, J_2, \ldots J_\lambda) F_1 = r_1(J_1, J_2, \ldots J_\lambda) \tag{54}$$

über, worin der Koeffizient von $J_1^{\mu_1}$ in r_1 die Einheit, der Koeffizient von J_1^{μ} in r eine rationale Funktion von $J_2, J_3, \ldots J_\lambda$ ist, und wendet man auf die Gleichung (54) das durch die Gleichung

$$\Omega_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + \cdots + \Omega_n \frac{\partial F}{\partial x_n} - \Omega \frac{\partial F}{\partial y} = \Delta F$$

definierte Symbol an, so ergibt sich wegen $\Delta F_1 = 0$ eine Gleichung von der Form

$$\varrho(J_1, J_2, \ldots J_\lambda) F_1 = \varrho_1(J_1, J_2, \ldots J_\lambda), \tag{55}$$

in welcher ϱ_1 und ϱ ganze Funktionen von J_1 vom $\mu_1 - 1^{\text{ten}}$ resp. μ^{ten} Grade und rational gebrochen aus $J_2, J_3, \ldots J_\lambda$ zusammengesetzt sind. Die wiederholte Anwendung dieses Symbols und die jedesmalige Division der Gleichung durch den in $J_2, J_3, \ldots J_\lambda$ rationalen Koeffizienten der höchsten Potenz von J_1 auf der rechten Seite der Gleichung führt daher zu einer Gleichung der Form

$$(56)\quad \sigma(J_1, J_2, \ldots J_\lambda) F_1 = \sigma_1(J_2, J_3, \ldots J_\lambda), \text{ oder } F_1 = \frac{\sigma_1(J_2, J_3, \ldots J_\lambda)}{\sigma(J_1, J_2, \ldots J_\lambda)},$$

worin der Zähler J_1 nicht mehr enthält, und der Nenner in bezug auf J_1 vom μ^{ten} Grade ist. Da aber der reziproke Wert einer Integralfunktion wieder eine Integralfunktion ist, so ergibt sich die Existenz einer Integralfunktion von der Form

$$(57)\quad F = R_0(J_2, \ldots J_\lambda) J_1^\mu + R_1(J_2, \ldots J_\lambda) J_1^{\mu-1} + \cdots + R_\mu(J_2, \ldots J_\lambda),$$

welche in J_1 rational ganz, in $J_2, \ldots J_\lambda$ im allgemeinen rational gebrochen ist, oder die identische Gleichung

$$\begin{aligned}
&\Omega_1\left[\mu R_0 J_1^{\mu-1}\frac{\partial J_1}{\partial x_1} + J_1^\mu \frac{\partial R_0}{\partial x_1} + (\mu-1) R_1 J_1^{\mu-2}\frac{\partial J_1}{\partial x_1} + J_1^{\mu-1}\frac{\partial R_1}{\partial x_1} + \cdots\right]\\
&+\Omega_2\left[\mu R_0 J_1^{\mu-1}\frac{\partial J_1}{\partial x_2} + J_1^\mu \frac{\partial R_0}{\partial x_2} + (\mu-1) R_1 J_1^{\mu-2}\frac{\partial J_1}{\partial x_2} + J_1^{\mu-1}\frac{\partial R_1}{\partial x_2} + \cdots\right]\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&-\Omega\left[\mu R_0 J_1^{\mu-1}\frac{\partial J_1}{\partial y} + J_1^\mu \frac{\partial R_0}{\partial y} + (\mu-1) R_1 J_1^{\mu-2}\frac{\partial J_1}{\partial y} + J_1^{\mu-1}\frac{\partial R_1}{\partial y} + \cdots\right] = 0,
\end{aligned}$$

aus welcher, da eine algebraische Beziehung zwischen $J_1, J_2, \ldots J_\lambda$ ausgeschlossen war, folgt, daß die Koeffizienten der ganzen Verbindungen von $J_1, J_2, \ldots J_\lambda$ identisch verschwinden müssen, also auch der Koeffizient von J_1^μ:

$$\Omega_1 \frac{\partial R_0}{\partial x_1} + \Omega_2 \frac{\partial R_0}{\partial x_2} + \cdots + \Omega_n \frac{\partial R_0}{\partial x_n} - \Omega \frac{\partial R_0}{\partial y} = 0$$

ist, und somit R_0 eine in den Transzendenten $J_2, \ldots J_\lambda$ rationale Integralfunktion sein wird.

Auf Grund der nachfolgenden Überlegungen wird sich aber der Grad der in J_1 ganzen Integralfunktion F_2 in bezug auf J_1 erniedrigen lassen. Sei nämlich zunächst

$$F = G(J_1, J_2, \ldots J_\lambda)$$

eine in $J_1, J_2, \dots J_\lambda$ rational ganze Integralfunktion mit in den Größen

$$x_1, \dots x_n, y, \Omega_1, \dots \Omega_n, \Omega, w_1, (y_1)_{w_1}, \dots w_\lambda, (y_\lambda)_{w_\lambda}$$

rationalen Koeffizienten, oder

$$(58) \quad F = P J_1^{\alpha_1} J_2^{\alpha_2} \dots J_\lambda^{\alpha_\lambda} + Q J_1^{\beta_1} J_2^{\beta_2} \dots J_\lambda^{\beta_\lambda} + R J_1^{\gamma_1} J_2^{\gamma_2} \dots J_\lambda^{\gamma_\lambda} + \cdots,$$

so wird die Gleichung $\Delta F = 0$ oder

$$(59) \begin{cases} J_1^{\alpha_1} J_2^{\alpha_2} \dots J_\lambda^{\alpha_\lambda} \Delta P + J_1^{\beta_1} J_2^{\beta_2} \dots J_\lambda^{\beta_\lambda} \Delta Q + \cdots \\ \quad + \alpha_1 P J_1^{\alpha_1 - 1} J_2^{\alpha_2} \dots J_\lambda^{\alpha_\lambda} \Delta J_1 + \alpha_2 P J_1^{\alpha_1} J_2^{\alpha_2 - 1} \dots J_\lambda^{\alpha_\lambda} \Delta J_2 \\ \quad + \alpha_3 P J_1^{\alpha_1} J_2^{\alpha_2} J_3^{\alpha_3 - 1} \dots J_\lambda^{\alpha_\lambda} \Delta J_3 + \cdots \\ \quad + \beta_1 Q J_1^{\beta_1 - 1} J_2^{\beta_2} \dots J_\lambda^{\beta_\lambda} \Delta J_1 + \beta_2 Q J_1^{\beta_1} J_2^{\beta_2 - 1} \dots J_\lambda^{\beta_\lambda} \Delta J_2 + \cdots \\ \quad + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = 0 \end{cases}$$

unter der Voraussetzung, daß nicht schon zwischen $J_1, J_2, \dots J_\lambda$ eine mit Zuziehung der oben bezeichneten Größen algebraische Beziehung stattfindet, identisch dadurch erfüllt sein, daß die Koeffizienten aller untereinander verschiedenen Verbindung der J_1, $J_2, \dots J_\lambda$ verschwinden. *Enthält die Gleichung* (59) *nur untereinander verschiedene Verbindungen, so müssen*

$$\Delta P = 0, \quad \Delta Q = 0, \dots \Delta J_1 = 0, \quad \Delta J_2 = 0, \dots \Delta J_\lambda = 0,$$

also $P, Q, \dots J_1, J_2, \dots J_\lambda$, *oder, wie oben gezeigt,* $P, Q, \dots w_1, w_2, \dots w_\lambda$ *algebraische Integralfunktionen von* (39), *also auch* F *eine Integralfunktion sein, wenn* J_1 *durch* $J_1 + u_1$ *ersetzt wird und* u_1 *eine algebraische Integralfunktion ist.*

Kommen aber in der Gleichung (59) gleiche Verbindungen der Transzendenten vor, so ist leicht zu sehen, daß dies nur für die Beziehungen zwischen den Exponenten

$$\beta_1 = \alpha_1, \quad \beta_2 = \alpha_2, \dots \beta_\lambda = \alpha_\lambda$$
$$\beta_1 = \alpha_1 + 1, \quad \beta_2 = \alpha_2, \dots \beta_\lambda = \alpha_\lambda$$
$$\beta_1 = \alpha_1 - 1, \quad \beta_2 = \alpha_2 + 1, \dots \beta_\lambda = \alpha_\lambda$$

und den ähnlichen stattfinden kann, so daß die Koeffizienten der selbständigen Verbindungen der Transzendenten in der Gleichung (59) den Bedingungen genügen müssen:

$$(60)\quad \Delta P+\Delta Q=0,\ \Delta P+(a_1+1)Q\Delta J_1=0,\ a_1 P\Delta J_1+(a_2+1)Q\Delta J_2=0;$$

und den ähnlichen.

Daraus folgt aber, daß, weil die Gleichungen (60) usw. bestehen bleiben, wenn J_1 durch J_1+u_1 ersetzt wird, und u_1 eine algebraische Integralfunktion, also $\Delta u_1=0$ ist, *daß die Integralfunktion F wieder in eine Integralfunktion übergeht, wenn J_1 durch J_1+u_1 ersetzt wird;* und dasselbe gilt, wenn F in $J_2,\dots J_\lambda$ rational gebrochen ist.

Stellen wir aber die Integralfunktion (57) und die, wie eben gezeigt, aus dieser hervorgehende

$$F_1=R_0(J_2,\dots J_\lambda)(J_1+u_1)^\mu+R_1(J_2,\dots J_\lambda)(J_1+u_1)^{\mu-1}+\dots+R_\mu(J_2,\dots J_\lambda)$$

miteinander zusammen, so ergibt sich für dieselbe Differentialgleichung (39) eine Integralfunktion von der Form

$$F_1-F=S_0(J_2,\dots J_\lambda)J_1^{\mu-1}+S_2(J_2,\dots J_\lambda)J_1^{\mu-2}+\dots+S_{\mu-1}(J_2,\dots J_\lambda);$$

worin, wenn u_1 eine in den Größen

$$x_1, x_2, \dots x_n, y, \Omega_1, \Omega_2, \dots \Omega_n, \Omega, w_1, (y_1)_{w_1}, \dots w_\lambda, (y_\lambda)_{w_\lambda}$$

rationale Integralfunktion derselben ist, wieder $S_0, S_1, \dots S_{\mu-1}$ rational gebrochene Funktionen von $J_2, J_3, \dots J_\lambda$ mit Koeffizienten von demselben Charakter sind; zugleich ist, wie oben für R_0, ersichtlich, daß S_0 eine Integralfunktion ist.

So wird die fortgesetzte gleiche Operation zu einer Integralfunktion

$$F_2=T_0(J_2,\dots J_\lambda)J_1+T_1(J_2,\dots J_\lambda)$$

führen, welche auch in den Transzendenten $J_2,\dots J_\lambda$ linear und ganz sein kann; ist dies nicht der Fall, so wird wieder

$$F_3 = T_0(J_2, \dots J_\lambda)(J_1 + u_1) + T_1(J_2, \dots J_\lambda),$$

und also auch $F_3 - F_2$ eine Integralfunktion liefern, die, von J_1 unabhängig, eine rational gebrochene Funktion von $J_2, J_3, \dots J_\lambda$ ist, während, wenn F_2 in $J_1, J_2, \dots J_\lambda$ linear ganz ist, dieselbe in die algebraische Integralfunktion $T_0 u_1$ übergeht. Wendet man nunmehr auf $F_3 - F_2$, wie oben auf die in $J_1, J_2, \dots J_\lambda$ rational gebrochene Integralfunktion, die angegebene Reduktionsmethode an, so wird sich wieder entweder eine ganz und linear aus $J_2, J_3, \dots J_\lambda$ zusammengesetzte Integralfunktion ergeben oder eine in $J_3, J_4, \dots J_\lambda$ rational gebrochene usw., bis man zu einer, nur J_λ linear und ganz enthaltenden Integralfunktion von der Form gelangt:

$$\overline{F} = U_1 J_\lambda + U,$$

in welcher U_1 und U algebraische Funktionen der Variabeln sind, von denen die erstere eine Integralfunktion ist. Da aber wieder

$$[U_1(J_\lambda + u_1) + U] - [U_1 J_\lambda + U] = U_1 \cdot u_1,$$

also eine von allen Transzendenten freie Funktion eine Integralfunktion sein würde, so folgt, daß auch U_1 eine solche ist, und wir finden,

daß, wenn die lineare partielle Differentialgleichung (39) *eine Integralfunktion*

$$F = f(x_1, x_2, \dots x_n, y, J_1, J_2, \dots J_\lambda)$$

besitzt, welche algebraisch aus den Variabeln $x_1, x_2, \dots x_n, y$ *und den* λ *Transzendenten* (47) *zusammengesetzt ist, welch letztere untereinander mit den Variabeln nicht in einem algebraischen Zusammenhange stehen, dann auch stets eine Integralfunktion der Differentialgleichung* (39) *von der Form existiert:*

$$F_1 = U_1 J_1 + U_2 J_2 + \dots + U_\lambda J_\lambda + U,$$

in welcher $U_1, U_2, \dots U_\lambda$ *algebraisch aus den Variabeln zusammengesetzte Integralfunktionen darstellen, die auch zum Teil oder alle konstant oder Null sein können, und* U *eine algebraische Funktion*

der Variabeln ist. Die Funktion F ist dann eine algebraische Zusammensetzung solcher Funktionen F_1. Die Existenz einer solchen in den Variabeln algebraischen, in den Quadraturen $J_1, J_2, \dots J_\lambda$ linearen Integralfunktion zieht das Bestehen einer ebensolchen von der Form

$$F = u_1\left(J_1 + J_1^{(1)} + \dots + J_1^{(p_1-1)}\right) + \dots + u_\lambda\left(J_\lambda + J_\lambda^{(1)} + \dots + J_\lambda^{(p_\lambda-1)}\right) + V$$

nach sich, worin $u_1, u_2, \dots u_\lambda$ wieder Konstanten oder rational aus $x_1, x_2, \dots x_n, y, \Omega_1, \Omega_2, \dots \Omega_n, \Omega, w_1, w_2, \dots w_\lambda, (y_1)_{w_1}, (y_2)_{w_2}, \dots (y_\lambda)_{w_\lambda}$ zusammengesetzte Integralfunktionen sind, V eine rationale Funktion eben dieser Größen darstellt, ferner p_a das Geschlecht des Abelschen *Integrals J_a bedeutet, und die Grenzen der Integrale $J_a, J_a^{(1)}, \dots J_a^{(p_a-1)}$ sowie die Werte der zu diesen Grenzen gehörigen algebraischen Irrationalitäten die Lösungen von algebraischen Gleichungen sind, deren Koeffizienten rational aus den oben angegebenen Größen zusammengesetzt sind.*

Es soll nun endlich noch die Frage erörtert werden, ob zwischen $\varkappa$ Integralfunktionen der Differentialgleichung (39), wenn $\varkappa \leqq n+1$, also $\varkappa$ Integralen der partiellen Differentialgleichung

$$\Omega_1(x_1, \dots x_n, y)\frac{\partial F}{\partial x_1} + \dots + \Omega_n(x_1, \dots x_n, y)\frac{\partial F}{\partial x_n} - \Omega(x_1, \dots x_n, y)\frac{\partial F}{\partial y} = 0,$$

in welcher *die Ω algebraische Funktionen bedeuten, ein algebraischer Zusammenhang stattfinden kann*, und wenn dies der Fall ist, wie diese algebraische Beziehung beschaffen sein muß.

Sei der algebraische Zusammenhang zwischen $F_1, F_2, \dots F_{\varkappa-1}, F_\varkappa$ durch die Gleichung definiert:

$$F_\varkappa^m + r_1(x_1, \dots x_n, y, F_1, \dots F_{\varkappa-1})F_\varkappa^{m-1} + \dots + r_m(x_1, \dots x_n, y, F_1, \dots F_{\varkappa-1}) = 0,$$

in welcher $r_1, \dots r_m$ rationale Funktionen der eingeschlossenen Größen sind, oder

$$(61)\left\{\begin{aligned} F_\varkappa^m \sum_{(\lambda)} g_{0\lambda}(x_1, \dots x_n, y) F_1^{\lambda_1} \dots F_{\varkappa-1}^{\lambda_{\varkappa-1}} + F_\varkappa^{m-1} \sum_{(\mu)} g_{1\mu} F_1^{\mu_1} \dots F_{\varkappa-1}^{\mu_{\varkappa-1}} + \dots \\ + \sum_{(\nu)} g_{m\nu} F_1^{\nu_1} \dots F_{\varkappa-1}^{\nu_{\varkappa-1}} = 0, \end{aligned}\right.$$

wenn $g_{0\lambda}, g_{1\mu}, \dots g_{m\nu}$ ganze Funktionen bedeuten.

Sondert man aus der ersten Summe eines der Glieder ab, welche die höchste Dimension in $F_1, \dots F_{\varkappa-1}$ besitzen, und dividiert die Gleichung durch den Koeffizienten dieses Gliedes, so geht (61) in

$$F_\varkappa^m \left[F_1^{\lambda'_1} \dots F_{\varkappa-1}^{\lambda'_{\varkappa-1}} + \sum_{(\lambda)} r_{0\lambda}(x_1, \dots x_n, y) F_1^{\lambda_1} \dots F_{\varkappa-1}^{\lambda_{\varkappa-1}} \right]$$
$$+ F_\varkappa^{m-1} \sum_{(\mu)} r_{1\mu}(x_1, \dots x_n, y) F_1^{\mu_1} \dots F_{\varkappa-1}^{\mu_{\varkappa-1}} + \dots$$
$$+ \sum_{(\nu)} r_{m\nu}(x_1, \dots x_n, y) F_1^{\nu_1} \dots F_{\varkappa-1}^{\nu_{\varkappa-1}} = 0$$

über, worin $r_{0\lambda}, r_{1\mu}, \dots r_{m\nu}$ rationale Funktionen sind, und

$$\lambda'_1 + \lambda'_2 + \dots + \lambda'_{\varkappa-1} \geq \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{\varkappa-1}$$

ist, und man erhält durch Anwendung des oben definierten Symbols Δ die Gleichung

$$F_\varkappa^m \sum_{(\lambda)} \Delta\, r_{0\lambda} F_1^{\lambda_1} \dots F_{\varkappa-1}^{\lambda_{\varkappa-1}} + F_\varkappa^{m-1} \sum_{(\mu)} \Delta\, r_{1\mu} F_1^{\mu_1} \dots F_{\varkappa-1}^{\mu_{\varkappa-1}} + \dots$$
$$+ \sum_{(\nu)} \Delta\, r_{m\nu} F_1^{\nu_1} \dots F_{\varkappa-1}^{\nu_{\varkappa-1}} = 0\,,$$

oder, indem man wieder in dem Koeffizienten von $F_\varkappa^m$ ein Glied der höchsten Dimension in $F_1, \dots F_{\varkappa-1}$ absondert und die Gleichung durch den in $x_1, \dots x_n, y, \Omega_1, \dots \Omega_n, \Omega$ rationalen Koeffizienten dividiert,

$$F_\varkappa^m \left[F_1^{\varrho'_1} \dots F_{\varkappa-1}^{\varrho'_{\varkappa-1}} + \sum_{(\varrho)} R_{0\varrho}(x_1, \dots x_n, y, \Omega_1, \dots \Omega_n, \Omega) F_1^{\varrho_1} \dots F_{\varkappa-1}^{\varrho_{\varkappa-1}} \right]$$
$$+ F_\varkappa^{m-1} \sum_{(\sigma)} R_{1\sigma} F_1^{\sigma_1} \dots F_{\varkappa-1}^{\sigma_{\varkappa-1}} + \dots$$
$$+ \sum_{(\tau)} R_{m\tau}(x_1, \dots x_n, y, \Omega_1, \dots \Omega_n, \Omega) F_1^{\tau_1} \dots F_{\varkappa-1}^{\tau_{\varkappa-1}} = 0\,,$$

worin die Funktionen R rationale Funktionen der eingeschlossenen Größen sind, und

$$\varrho_1' + \varrho_2' + \cdots + \varrho_{\varkappa-1}' \leq \lambda_1' + \lambda_2' + \cdots + \lambda_{\varkappa-1}'$$

ist.

Wendet man die oben vollzogene Operation mittels des Symbols Δ wiederholt an, so gelangt man, da die partiellen Differentialquotienten der algebraischen Funktionen $\Omega_1, \Omega_2, \ldots \Omega_n, \Omega$ wieder rational durch eben diese Größen und die Variabeln $x_1, \ldots x_n, y$ ausdrückbar sind, sukzessive zu Gleichungen, welche in $F_\varkappa$ von immer niedrigerem Grade werden, und zwar entweder zu einer Gleichung, welche in bezug auf $F_\varkappa$ vom ersten Grade ist:

$$F_\varkappa = \sum_{(\vartheta)} \mathfrak{R}_\vartheta(x_1, \ldots x_n, y, \Omega_1, \ldots \Omega_n, \Omega) F_1^{\vartheta_1} \ldots F_{\varkappa-1}^{\vartheta_{\varkappa-1}},$$

worin die $\mathfrak{R}$, wie sich aus der nochmaligen Anwendung des Symbols Δ, wegen $\Delta F_a = 0$ und der Voraussetzung der algebraischen Unabhängigkeit der Integralfunktionen $F_2, F_3, \ldots F_{\varkappa-1}$ voneinander ergibt, der Bedingung unterliegen $\Delta \mathfrak{R} = 0$, und somit rational aus den oben bezeichneten Größen zusammengesetzte Integralfunktionen sind, oder schon vorher zu einer Gleichung der Form

$$F_\varkappa^p \sum_{(\vartheta)} T_\vartheta F_1^{\vartheta_1} \ldots F_{\varkappa-1}^{\vartheta_{\varkappa-1}} + F_\varkappa^q \sum_{(\eta)} U_\eta F_1^{\eta_1} \ldots F_{\varkappa-1}^{\eta_{\varkappa-1}} + \cdots + \sum_{(\zeta)} S_\zeta F_1^{\zeta_1} \ldots F_{\varkappa-1}^{\zeta_{\varkappa-1}} = 0,$$

worin $p, q, \ldots$ positive ganze Zahlen $\leq m$, und

$$\Delta T_\vartheta = 0, \ \Delta U_\eta = 0, \ \ldots \Delta S_\zeta = 0$$

also die in $x_1, \ldots x_n, y, \Omega_1, \ldots \Omega_n, \Omega$ rationalen Funktionen $T_\vartheta, U_\eta, \ldots S_\zeta$ wiederum algebraische Integralfunktionen sind, während eine erneute Anwendung des Symbols Δ auf die linke Seite der letzteren Gleichung dieselbe identisch zu Null machen würde, immer unter der Voraussetzung, daß nicht schon zwischen $x_1, \ldots x_n, y, F_1, \ldots F_{\varkappa-1}$ eine algebraische Beziehung besteht. Wir finden somit,

daß, wenn $\varkappa \leq n+1$ transzendente oder algebraische Integralfunktionen der linearen partiellen Differentialgleichung (39) *in einer von den Variabeln $x_1, \ldots x_n, y$ abhängigen algebraischen Beziehung zueinander stehen, und nicht schon eine solche zwischen weniger als*

$\varkappa$ dieser Integralfunktionen existiert, dann eine jede derselben eine ganze Funktion der andern oder die Wurzel einer algebraischen Gleichung in diesen Größen ist, deren Koeffizienten algebraische Integralfunktionen sind, welche rational aus den Variabeln $x_1, \ldots x_n, y$ und den algebraischen Funktionen $\Omega_1, \ldots \Omega_n, \Omega$ dieser zusammengesetzt sind.