Heidelberger Akademie der Wissenschaften

Mathematische Abhandlungen

Autor: **Liebmann, Heinrich** (1874 – 1939)

Titel: **Flächen mit einer vorgeschriebenen Schar geodätischer Parallelkurven**

Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse : Abt. A ; 1921, 9

Es werden zwei Aufgaben behandelt: einmal soll eine Schar geodätischer Parallelkurven aus Krümmungslinien, sodann aus Asymptotenlinien bestehen. Alle Flächen mit der ersten Eigenschaft sind analytisch und geometrisch leicht zu bestimmen; von der zweiten Aufgabe werden einige Lösungen angegeben.

(Zsfassung aus: Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften / Jahresheft 1921, S. XVIII)

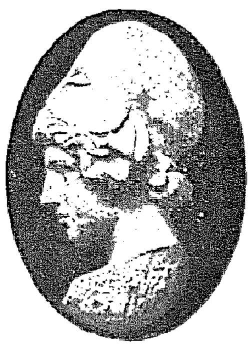
Sitzungsberichte
der Heidelberger Akademie der Wissenschaften
Stiftung Heinrich Lanz
Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse
Abteilung A. Mathematisch-physikalische Wissenschaften
Jahrgang 1921. 9. Abhandlung

Flächen mit einer vorgeschriebenen Schar geodätischer Parallelkurven

Von

HEINRICH LIEBMANN
Heidelberg

Eingegangen am 29. Oktober 1921



Heidelberg 1921
Carl Winters Universitätsbuchhandlung

Verlags-Nr. 1675

Bedient man sich eines Systems geodätischer Linien ($v = \text{const}$) und ihrer Orthogonaltrajektorien ($u = \text{const}$), also einer Schar von geodätischen Parallelkurven als Gaussscher Koordinaten auf der Fläche, so erhält man für die erste quadratische Differentialform oder das Quadrat des Linienelements

$$ds^2 = du^2 + G(u, v)\, dv^2$$

oder, wie wir hier statt dessen schreiben wollen,

$$ds^2 = du^2 + g^2(u, v)\, dv^2 \,.$$

Bezeichnet man sodann partielle Differentialquotienten nach u und v in bekannter Weise durch Fußmarken 1 und 2, so erhalten die Mainardi-Codazzischen Gleichungen[1] für die Koeffizienten L, M, N der zweiten quadratischen Differentialform die Gestalt

$$(1)\quad \left|\begin{aligned} L_2 - M_1 &= \frac{g_1}{g} M \,, \\ L N - M^2 &= -g_{11} g \,, \\ N_1 - M_2 &= \frac{g_1}{g} N - \frac{g_2}{g} M + g_1 g L \,. \end{aligned}\right.$$

Diese Gleichungen sollen jetzt für die beiden folgenden Aufgaben verwendet werden:

1. Bestimmung von Flächen, auf denen eine Schar von Krümmungslinien aus geodätischen Parallelkurven besteht.

2. Bestimmung von Flächen, auf denen eine Schar von *Asymptotenlinien* (Haupttangentenkurven) aus geodätischen Parallelkurven besteht.

---

[1] Vgl. Scheffers, Einführung in die Theorie der Flächen (Leipzig 1902), Tafel XVII.

Eine triviale Lösung der ersten Aufgabe stellen die *Rotationsflächen* dar: Die Parallelkreise sind zugleich geodätische Parallelen und Krümmungslinien. Für die zweite Aufgabe gibt es ebenfalls von vornherein zwei sehr einfache Lösungen, nämlich einmal die *Zylinder*, deren Mantellinien ja die Asymptotenlinien der Fläche sind und zugleich Orthogonaltrajektorien der Schnitte senkrecht zur Achse, also einer Schar von geodätischen Linien. Dazu kommen noch die Schraubenflächen

$$(2)\left\{\begin{aligned} x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = av, \\ ds^2 = du^2 + \left(a^2 + u^2\right)dv^2\,; \end{aligned}\right.$$

die Asymptotenlinien dieser Flächen sind die erzeugenden Geraden $(v = \text{const})$ und die Schraubenlinien $(u = \text{const})$; letztere aber sind zugleich geodätische Parallelkurven.

I.

Die erste Aufgabe läßt sich mit Hilfe von (1) vollständig lösen. Die (zueinander senkrechten) Parameterkurvenscharen müssen hier alle beide Krümmungslinien sein, denn für die eine Schar ist dies vorgeschrieben, woraus es für die zweite Schar wegen der Orthogonalität von selber folgt.

In diesem Fall ist M gleich Null[1]. Die Formeln (1) geben dann

$$\begin{aligned} &L_2 = 0\,, \\ &LN = -g_{11}g\,, \\ &N_1 = g_1 g L + \frac{g_1}{g} N\,. \end{aligned}$$

Es wird also L eine Funktion von u allein

$$L = L(u)\,,$$

sodann

$$N = -\frac{g_{11}g}{L(u)}\,.$$

[1] SCHEFFERS, a. a. O., Tafel XIX.

$$N_1 = -\frac{g_1 g_{11}}{L(u)} - \frac{g g_{111}}{L(u)} + \frac{g g_{11} L'(u)}{L^2(u)},$$

und man erhält, wenn man in die dritte Gleichung einsetzt und für $L(u)$, $L'(u)$ wieder kurz schreibt L, L':

$$g_{111} - \frac{L'}{L} g_{11} + g_1 L^2 = 0 .$$

Diese partielle Differentialgleichung dritter Ordnung für g kann vollständig integriert werden.

Man macht den Ansatz

$$g = \int e^{\varphi} \partial u + V(v)$$

und erhält

$$\varphi_{11} + \varphi_1^2 - \frac{L'}{L} \varphi_1 + L^2 = 0 .$$

Diese Differentialgleichung hat die Riccatische Form, läßt sich aber durch den weiteren Ansatz

$$\varphi = \int L \psi \partial u + W(v)$$

umformen in die sofort integrable Form

$$L \psi_1 + L^2 (1 + \psi^2) = 0 .$$

Es ist daher

$$\psi = \operatorname{tang}\left(T(v) - \int L d u\right) .$$

Somit ist auch g bestimmt, daher N. — Die Lösung enthält schließlich eine willkürliche Funktion $L(u)$ und drei willkürliche Funktionen $V(v)$, $W(v)$, $T(v)$ von v.

Wir haben die Lösung dieser Aufgabe als erfreuliches Vorbild für die zweite, wesentlich schwierigere vorangestellt, wollen aber hervorheben, daß durch geometrische Betrachtungen die Lösung auch *sofort* gefunden werden kann! Die geodätischen Kurven $v = \text{const}$ müssen, wie schon zu Anfang gesagt wurde, ebenfalls Krümmungslinien sein; geodätische Linien aber, die zugleich Krümmungslinien sind, sind notwendig ebene Kurven[1], und die Kurvenebene ist für alle ihre Schnittpunkte mit der Fläche zugleich Normalebene.

Demnach besteht eine Fläche von der vorgeschriebenen Eigenschaft notwendig aus einer Schar von Orthogonaltrajektorien einer Ebenenschar — diese Orthogonaltrajektorien sind auf der Fläche geodätische Parallelkurven und zugleich Krümmungslinien —; sie werden von den (untereinander kongruenten) in den Ebenen gelegenen geodätischen Krümmungslinien senkrecht geschnitten.

II.

Es sind jetzt die MAINARDI-CODAZZIschen Gleichungen für den Fall zu lösen, daß die Kurven

$$u = \text{const}, \quad \text{d. i.} \quad du = 0$$

zugleich die Differentialgleichung

$$L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = 0$$

der Asymptotenlinien erfüllen, also ist zu verlangen

$$N = 0 .$$

Man hat dann die Gleichungen

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} L_2 - M_1 &= \frac{g_1}{g} M , \\ M^2 &= g_{11} g , \\ -M_2 &= -\frac{g_2}{g} M + g g_1 L \end{aligned} \right.$$

[1] Wegen der geforderten Doppeleigenschaft müssen die Hauptnormalen der Kurven eine Tangentenschar bilden, und das ist nur bei ebenen Kurven der Fall.

zu integrieren. Elimination von L und M würde für g eine sehr unübersichtliche partielle Differentialgleichung vierter Ordnung geben. Wir bevorzugen daher die folgende Reduktion: Wir machen den Ansatz

$$M = g L w\,, \tag{4}$$

wobei w, nebenbei bemerkt, eine einfache geometrische Bedeutung hat; es ist nämlich die halbe Tangente des Winkels (φ) der Asymptotenkurven. Setzt man (4) in die erste und dritte Gleichung ein, und berechnet dann L_1 und L_2, so kommt

$$\frac{L_1}{L} + \frac{w_1}{w} + \frac{g_1}{g}\left(2 + \frac{1}{w^2}\right) + \frac{w_2}{g\,w^2} = 0\,,$$

$$\frac{L_2}{L} + \frac{w_2}{w} + \frac{g_1}{w} = 0\,.$$

Sodann ist noch

$$g^2 L^2 w^2 = M^2 = g_{11}\,g$$

oder

$$\log L = \tfrac{1}{2}\left(\log g_{11} - \log g - 2\log w\right)$$

zu berücksichtigen, so daß schließlich die MAINARDI-CODAZZIschen Gleichungen ersetzt sind durch die beiden partiellen Differentialgleichungen

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{g_{111}}{g_{11}} - \frac{g_1}{g} + \frac{2g_1}{g}\left(2 + \frac{1}{w^2}\right) + \frac{2w_2}{g\,w^2} = 0\,,\\ &\frac{g_{112}}{g_{11}} - \frac{g_2}{g} + \frac{2g_1}{w} = 0\,. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Von diesen Gleichungen soll jetzt durch geeigneten Ansatz eine partikuläre Lösung gefunden werden.

Wir wollen verlangen, daß

$$g = g(t) = g(u + \varkappa v)$$

sein soll. Dieser Ansatz findet seinen Rückhalt darin, daß bei der Schraubenfläche (2) g eine Funktion von u allein ist, bei den Zylindern g eine Funktion von v, die übrigens ohne Einschränkung der Allgemeinheit gleich Eins angenommen werden kann. Die Differentialquotienten von g nach t bezeichnen wir jetzt einfach durch Akzente und erhalten

$$(6)\quad \left|\begin{array}{l} \dfrac{g'''}{g''} - \dfrac{g'}{g} + \dfrac{2g'}{g}\left(2 + \dfrac{1}{w^2}\right) + \dfrac{2w_2}{g\,w^2} = 0\,, \\ \varkappa\left(\dfrac{g'''}{g''} - \dfrac{g'}{g}\right) + \dfrac{2g'}{w} = 0\,. \end{array}\right.$$

Die zweite Gleichung zeigt, daß dann w eine Funktion von t oder, was auf dasselbe hinauskommt, eine Funktion von g wird, also

$$w_2 = \frac{\partial w}{\partial v} = \frac{d w}{d g}\, g'\, \varkappa\,.$$

Um dieses Ergebnis zu benützen, setzen wir noch

$$\frac{1}{w} = \psi\,, \qquad \text{also} \qquad \frac{w_2}{w^2} = -\frac{d\psi}{d g}\, g'\, \varkappa\,,$$

sodann eliminieren wir aus den Gleichungen (6) den Ausdruck

$$\frac{g'''}{g''} - \frac{g'}{g}$$

und erhalten die RICCATIsche Gleichung

$$(7)\qquad \varkappa^2\,\frac{d\psi}{d g} + \psi g - \varkappa\left(2 + \psi^2\right) = 0\,.$$

Auf die Integration dieser Gleichung und der Gleichung

$$(8)\qquad \varkappa\left(\frac{g'''}{g''} - \frac{g'}{g}\right) + 2g' \cdot \psi(g) = 0$$

ist jetzt die Aufgabe zurückgeführt, Flächen mit dem Bogenelement

$$ds^2 = du^2 + g^2(u+\varkappa v)\,dv^2$$

zu bestimmen, auf denen die geodätischen Parallelkurven $du = 0$ zugleich Asymptotenlinien sind.

Die RICCATIsche Gleichung läßt sich hier integrieren, denn man kann leicht bestätigen, daß

$$\psi(g) = \frac{g}{\varkappa} - \frac{\varkappa}{g} \tag{9}$$

eine partikuläre Lösung ist, erhält dann nach bekannten Methoden auch die allgemeine Lösung

$$\psi(g) = \frac{g}{\varkappa} - \frac{\varkappa}{g} + \frac{g^{-2}\, e^{\frac{g^2}{2\varkappa^2}}}{c - \frac{1}{\varkappa}\int g^{-2}\, e^{\frac{g^2}{2\varkappa^2}}\, dg}\,. \tag{10}$$

Die Bestimmung von g als Funktion von t macht nun weiter keine Schwierigkeiten, wenn man die partikuläre Lösung (9) benützt; es ist noch die Gleichung (8) zu integrieren. Einmalige Integration ergibt

$$g'' = c_1 g^3 e^{-\frac{g^2}{\varkappa^2}}$$

mit der Integrationskonstante c_1 und nochmalige Integration

$$(g')^2 = c_2 - c_1 \varkappa^2 e^{-\frac{g^2}{\varkappa^2}}(g^2 + \varkappa^2)\,.$$

Auch L und M lassen sich dann aus den MAINARDI-CODAZZIschen Formeln (3) berechnen, und zwar findet man für $c_1 = 1$:

$$M = (g g'')^{\frac{1}{2}} = g^2 e^{-\frac{g^2}{2\varkappa^2}}\,,$$

$$L = \frac{1}{g g'}\left(\frac{g'\varkappa M}{g} - M_2\right) = \left(\frac{g^2}{\varkappa} - \varkappa\right) e^{-\frac{g^2}{2\varkappa^2}}\,.$$

Zur Probe für die Richtigkeit der Berechnung dient dann die erste Formel (3); es wird

$$L_2 - M_1 = e^{-\frac{g^2}{2\varkappa^2}}\left(-\frac{g}{\varkappa^2}\left(\frac{g^2}{\varkappa} - \varkappa\right) + \frac{2g}{\varkappa}\right)\cdot \varkappa g'$$

$$- e^{-\frac{g^2}{2\varkappa^2}}\left(2g - \frac{g^3}{\varkappa^2}\right) g' = e^{-\frac{g^2}{2\varkappa^2}} g g' ,$$

ein Wert, der in der Tat mit

$$\frac{g'}{g} M = e^{-\frac{g^2}{2\varkappa^2}} g g'$$

übereinstimmt.

Die hier gewonnenen Flächen mit einem Bogenelement von der Form

$$d s^2 = d u^2 + g^2(u + v\varkappa) d v^2$$

sind *Schraubenflächen*. Das zeigt die folgende einfache Überlegung. Zunächst einmal gestattet die Fläche die (innere) Transformation

$$u_1 = u + c\,, \quad v_1 = v - c/\varkappa$$

in sich. Außerdem aber werden L und M — und das gilt für *jede* Lösung $\psi(g)$ der RICCATIschen Gleichung, nicht nur für die hier herausgehobene partikuläre (9) — Funktionen von $u + \varkappa v$; es ist also klar, daß bei der angegebenen Transformation die Kurven

$$u + \varkappa v = \text{const}$$

ihre Gestalt nicht ändern; Krümmung und Torsion einer jeden von diesen Kurven bleibt längs der Kurven konstant; d. h. sie sind *Schraubenlinien*, die Flächen also in der Tat Schraubenflächen.

Hier begegnet uns nun noch eine wohl tiefer liegende Frage rein analytischen Charakters: Setzt man in der RICCATIschen Gleichung die Konstante $\varkappa$ gleich Null, so erhält man eine von ψ' freie Gleichung

$$\psi = 0\,.$$

Wie kann diese Lösung aus dem Integral (10) *durch Grenzübergang gefunden werden?*

Das Verschwinden von

$$\psi = 1/w = 2 \cot \varphi \,,$$

wobei φ der Winkel der Asymptotenkurven ist, tritt, wie schon oben bemerkt, bei der gemeinen Schraubenfläche oder Minimalregelfläche (2) ein.

Zum Schluß mag noch auf eine *imaginäre* Fläche hingewiesen werden, welche die verlangte Eigenschaft besitzt.

Setzt man

$$g = \sqrt{u} \,,$$

so geben die Gleichungen (3)

$$M^2 = -\frac{1}{4u}, \quad L = 0 \,,$$

die Gleichung der Haupttangentenkurven wird einfach

$$du\, dv = 0$$

und zeigt, daß die geodätischen Linien

$$dv = 0$$

hier ebenfalls Haupttangentenkurven sind; sie sind daher gerade Linien.

Die so erhaltene Fläche ist die bekannte, von Lie ausführlich behandelte imaginäre Minimalregelfläche dritter Ordnung[1].

---

[1] Vgl. Scheffers, a. a. O., Seite 248.