Heidelberger Akademie der Wissenschaften

Mathematische Abhandlungen

Autor: **Stickelberger, Ludwig** (1850-1936)

Titel: **Neuer Beweis eines Satzes von Bertini über zerlegbare lineare Scharen von Polynomen**

Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse ; 1936, 9

Der Satz von Bertini behandelt den Zerfall von Polynom-Systemen. Der 1915 von Stickelberger verfasste Beweis, der erst aus seinem Nachlass publiziert wurde, beweist den Satz auf rein algebraischem Weg mit Hilfe des Kroneckerschen Satzes.

Sitzungsberichte
der Heidelberger Akademie der Wissenschaften
Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse
Jahrgang 1936. 9. Abhandlung

Neuer Beweis eines Satzes von Bertini über zerlegbare lineare Scharen von Polynomen

Von

L. Stickelberger †

Eingesandt von LOTHAR HEFFTER
am 10. September 1936

HEIDELBERG 1936
Kommissionsverlag der Weiß'schen Universitätsbuchhandlung Heidelberg

Neuer Beweis eines Satzes von Bertini über zerlegbare lineare Scharen von Polynomen.

Von **L. Stickelberger** †. [1])

Der Satz von BERTINI betrifft die Bedingung dafür, daß die Polynome der Schar

$$\lambda_1 \varphi_1 + \cdots\cdots + \lambda_r \varphi_r,$$

wo $\varphi_1, \ldots\ldots, \varphi_r$ Polynome in $x_1, \ldots\ldots, x_m$ ohne gemeinsamen Teiler bedeuten, für beliebige Werte der Parameter $\lambda_1, \ldots\ldots, \lambda_r$ in Faktoren niedrigeren Grades zerfallen, und weiter die Form dieser Faktoren [2]).

Abweichend von früheren Beweisen finde ich es für die Darstellung vorteilhaft, die Parameter homogen zu wählen. Ich werde zeigen, daß durch Anwendung eines Satzes von KRONECKER [3]), den

---

[1]) Dieser Beweis, der aus dem Jahr 1915 stammt, ist derjenige, auf dessen Existenz ich in dem Nachruf auf STICKELBERGER im Jahresheft 1935/36 der Heidelberger Akademie hingewiesen habe und der sich dann tatsächlich in STICKELBERGERs Nachlaß gefunden hat. Herr W. KRULL, Erlangen, hatte die Güte, das Manuskript nachzuprüfen und festzustellen, daß der Beweis auch heute noch die Veröffentlichung verdient. Herr KRULL wurde durch diese Arbeit zu einer selbständigen Abhandlung über denselben Gegenstand in moderner Form angeregt, die an anderer Stelle erscheinen wird. L. HEFFTER.

[2]) Literatur zum BERTINIschen Satz [KRULL]:

E. BERTINI: Sui sistemi lineari. Rend. Istituto Lombardo, (2) Bd. **15** (1882), S. 24—29. (Erstmalige Aufstellung des Satzes, geometrischer Beweis).

Algebraische Beweise:

J. LÜROTH: Beweis eines Satzes von Bertini über lineare Systeme ganzer Funktionen I u. II. Math. Annalen, Bd. **42** (1892), S. 457—470 bezw. Math. Annalen. Bd. **44** (1894), S. 539—552.

G. SALOMON: Über das Zerfallen von Systemen von Polynomen. Jahresber. d. Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. **24** (1915), S. 225—246. Nachtrag ebenda S. 472.

A. RIEHLE: Über den Bertinischen Satz und seine Erweiterung. (Dissert. Tübingen 1919.)

[3]) Zur Theorie der Formen höherer Stufen. Sitz.-Ber. Preuß. Akad. Wiss. 1883, S. 357. [Krull].

DEDEKIND und HURWITZ wiedergefunden und der Theorie der Ideale zu Grunde gelegt haben, der Beweis kurz und durchsichtig geführt werden kann.

Dem KRONECKERschen Satz gebe ich die folgende etwas erweiterte Fassung:

Sind $f_1, f_2, \ldots, f_s$ irgendwelche Polynome in $x_1, \ldots, x_m$ und ist F ihr Produkt, so ist jedes Produkt von je einem Koeffizienten der Faktoren f_i und jede Summe solcher Produkte eine ganz algebraische Funktion der Koeffizienten von F, d. h. Wurzel einer Gleichung, in der der Koeffizient der höchsten Potenz der „Unbekannten" gleich Eins, die folgenden Koeffizienten ganze rationale und ganzzahlige Funktionen der Koeffizienten von F sind.

Man kann hinzufügen, daß diese Koeffizienten der Reihe nach von den Dimensionen 1, 2, 3, ... in den Koeffizienten von F sind.

Man denke sich zunächst

$$\lambda_1 \varphi_1 + \cdots + \lambda_r \varphi_r$$

irgenwie in Polynome niedrigerer Dimension $f_1, f_2, \ldots, f_s$ zerlegt; unter diesen kann nach Annahme kein von den λ_i unabhängiges vorkommen. Die nichtkonstanten Faktoren wähle man so, daß überall der Koeffizient des höchsten Gliedes, d. h. desjenigen, das die höchste Potenz von x_1, daneben die höchste Potenz von x_2, u. s. w. enthält, den Wert Eins hat. Das höchste Glied des Produktes ist gleich dem Produkt der höchsten Glieder seiner Faktoren, hat also gleichfalls den Koeffizienten Eins. Somit muß

$$\lambda_1 \varphi_1 + \cdots + \lambda_r \varphi_r = \Lambda \cdot f_1 \cdot f_2 \cdots f_s \tag{1}$$

sein, wobei

$$\Lambda = a_1 \lambda_1 + \cdots + a_r \lambda_r \tag{2}$$

eine lineare Funktion der λ_i mit konstanten Koeffizienten ist.

Der Satz von KRONECKER besagt nun, daß jedes Produkt aus je einem Koeffizienten der s Funktionen f_i, also auch, da je einer dieser Koeffizienten gleich 1 ist, jeder einzelne Koeffizient und jedes Produkt aus Koeffizienten verschiedener Faktoren, nach Multiplikation mit Λ eine *ganze* algebraische Funktion der λ_i ist. Damit ist die Grundlage für den neuen Beweis gegeben.

Nunmehr sei f ein unzerlegbarer Faktor der angegebenen Form. Nach dem eben Bemerkten sind die Koeffizienten algebraische Funktionen der λ_i, nach dem Vorgang von ABEL kann man sie rational durch die λ_i und *eine* algebraische Funktion μ derselben ausdrücken, und zwar so, daß μ wieder rational durch jene Koeffizienten ausgedrückt ist. Im Grunde handelt es sich gerade um die zweckmäßige Wahl dieser Größe. Wir schreiben den Faktor demgemäß

$$f(x_1, \ldots, x_m; \lambda_1, \ldots, \lambda_r, \mu)$$

oder abgekürzt

$$f(x; \lambda, \mu)$$

und die irreduzible Gleichung zwischen den λ_i und dem μ, die vom n-ten Grad in μ sein möge,

$$F(\lambda, \mu) = 0.$$

Ihre Wurzeln seinen $\mu_1, \ldots, \mu_n$. Wegen der Irreduzibilität von F ist

$$\lambda_1 \varphi_1 + \cdots + \lambda_r \varphi_r$$

durch jedes der n-Polynome $f(x; \lambda, \mu_i)$ teilbar. Wegen der Wahl von μ sind keine zwei von diesen identisch; weil der Koeffizient des höchsten Gliedes Eins ist, können sich auch keine zwei unter ihnen nur durch einen konstanten Faktor unterscheiden; endlich haben wegen der Irreduzibilität von f keine zwei einen gemeinsamen Teiler niedrigerer Dimension. Daher ist

$$\lambda_1 \varphi_1 + \cdots + \lambda_r \varphi_r$$

auch durch das Produkt $\prod_{i=1}^{n} f(x; \lambda, \mu_i)$ teilbar, das rational in den λ ist, und zwar ist

$$\Lambda \cdot \prod_{i=1}^{n} f(x; \lambda, \mu_i) = \Phi(x; \lambda) \tag{3}$$

zugleich eine ganze algebraische Funktion, also eine ganze rationale Funktion der λ_i.

Diese muß homogen und linear sein, da das Produkt nur von den Verhältnissen der λ_i abhängt; sie kann auch nicht durch Λ teilbar sein, da sonst der Quotient von den λ_i unabhängig wäre, während doch

$$\lambda_1 \varphi_1 + \cdots + \lambda_r \varphi_r$$

keinen derartigen Teiler besitzt.

Setzt man noch

$$\begin{aligned}\lambda_1 \varphi_1 + \cdots + \lambda_r \varphi_r &= \Phi(x, \lambda) \cdot g(x, \lambda) \\ &= \Lambda \cdot \prod_{i=1}^{n} f(x; \lambda, \mu_i) \cdot g(x, \lambda),\end{aligned}$$

so hat in $g(x; \lambda)$ das höchste Glied den Koeffizienten Eins; also ist auch (nach KRONECKER)

$$\Lambda \cdot g(x, \lambda) = \Psi(x, \lambda)$$

rational, ganz und linear in den λ_i. Außerdem ist aber das Produkt

$$\Phi(x, \lambda) \cdot \Psi(x, \lambda) = \Lambda \cdot (\lambda_1 \varphi_1 + \cdots + \lambda_r \varphi_r)$$

durch Λ teilbar. Da der erste Faktor diese Eigenschaft nicht hat, so kommt sie dem zweiten zu; d. h. g selber ist von den λ_i unabhängig und muß gleich Eins sein. Es besteht also die Gleichung (1) für

$$f_i = f(x; \lambda, \mu_i).$$

Aus dem Vorangehenden wissen wir außerdem, daß jedes Produkt aus einigen der f_i, mit Λ multipliziert, eine ganz algebraische Funktion der λ ist.

Bilden wir daher mit einer neuen Variablen z

$$\Lambda \cdot \prod_{i=1}^{n} [f(x; \lambda, \mu_i) - z] = X(x; \lambda; z), \tag{4}$$

so ist dies ein Polynom in $x_1, \ldots, x_m, z$ (von n-tem Grad in z) und außerdem eine ganze rationale Funktion der λ_i, und zwar aus dem vorhin angegebenen Grunde in Bezug auf diese homogen und linear.

Für den Fall $r = 2$ lehrt diese Gleichung durch einen bekannten funktionentheoretischen Schluß, daß $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ und μ für nicht zu spezielle Werte ξ_i der x_i rational durch $f(\xi; \lambda, \mu)$ ausdrückbar sind. Denn $\nu_i = f(\xi; \lambda, \mu_i)$ ist als algebraische Funktion von $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ in dem durch $F(\lambda, \mu) = 0$ definierten Funktionskörper vom ersten Grade.

Ich ziehe es aber vor, auf rein algebraischem Boden zu bleiben.

Für unbestimmte Werte der λ_i sind die n Polynome $f(x; \lambda, \mu_i)$ unter sich verschieden. Da ferner φ_1 mit $\lambda_2 \varphi_2 + \cdots + \lambda_r \varphi_r$ keinen gemeinsamen Teiler hat, so sind auch die Funktionen $f(x; \lambda, \mu_i)$, die zu zwei verschiedenen Werten von λ_1 und den nämlichen Werten von $\lambda_2, \ldots, \lambda_r$ gehören, durchaus verschieden. Nun gebe man den x_i solche Werte $\xi_1, \ldots, \xi_m$, daß diese $2n$ verschiedenen Polynome durchaus verschiedene Werte ν_i, ν_i' annehmen.

Schreibt man

$$X(\xi;\lambda;z)=\lambda_1 M(z)+N(z),$$

so können $M(z)$, $N(z)$ keinen gemeinsamen Teiler haben, weil sonst zu verschiedenen Werten von λ_1 teilweise gleiche Werte ν_i, ν_i' gehören würden. Somit ist vermöge

$$X(\xi;\lambda;z)=0$$

wirklich λ_1 rational durch ν, $\lambda_2, \ldots, \lambda_r$ ausdrückbar. Da ferner die n-Werte ν_i, die zu denselben λ_k und zu verschiedenen μ_i gehören, verschieden sind, sind, wie bekannt, die μ_i rückwärts durch die ν_i und die λ_k rational ausdrückbar. Somit sind λ_1 und μ_i durch $\nu_i, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ rational ausdrückbar (unabhängig von i).

Somit werden die Koeffizienten des Polynoms

$$f(x;\lambda,\mu)=g(x;\nu,\lambda_2,\ldots,\lambda_r)$$

rationale Funktionen von $\nu, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, deren Generalnenner also von den x_i unabhängig ist.

Gibt man nun den x_i andere, denselben Ungleichheitsbedingungen genügende Werte ξ_i', so ist nicht allein das entsprechende

$$\nu'=f(\xi';\lambda,\mu)=g(\xi';\nu,\lambda_2,\ldots,\lambda_r)$$

rational durch ν ausdrückbar, sondern es gilt auch das Umgekehrte. Dann sind aber diese Ausdrücke notwendig *linear*. Wegen der Willkürlichkeit der ξ' ist also auch $g(x;\nu,\lambda_2,\ldots,\lambda_r)$ linear in ν. Da aber der Nenner von den x_i nicht abhängt und diese lineare Funktion sich für $x_1=\xi_1, \ldots, x_m=\xi_m$ auf ν selbst reduziert, ist der Nenner notwendig konstant, und wir haben

$$f(x;\lambda,\mu)=A+B\nu,$$

wo A, B Polynome in $x_1, \ldots, x_m$ sind, die noch von $\lambda_2, \ldots, \lambda_r$ rational abhängen können.

Nun können wir aber statt λ_1 ebensogut etwa λ_r bevorzugen. Dieselbe Schlußweise ergibt dann

$$f(x;\lambda,\mu)=A'+B'\nu,$$

wo nun A', B' noch $\lambda_1, \ldots, \lambda_{r-1}$ enthalten können. Wäre nun B' von B verschieden, so wäre vermöge

$$(A-A')+(B-B')\cdot\nu=0$$

ν rational in $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, d. h. $n=1$; d. h. keine Zerlegung von $\lambda_1\varphi_1+\cdots+\lambda_r\varphi_r$. Es muß also vielmehr $B=B'$, $A=A'$ sein, d. h. A, B sind auch von λ_r frei, und aus gleichem Grunde von $\lambda_2, \ldots, \lambda_{r-1}$.

Somit zerfällt

$$\lambda_1 \varphi_1 + \cdots\cdot + \lambda_r \varphi_r$$

in n-Faktoren $A + \nu_i \cdot B$, *während zugleich die* ν_i *die Wurzeln einer Gleichung*

$$X(\xi;\ \lambda;\ \nu) = 0$$

sind, welche $\lambda_1, \ldots\ldots, \lambda_r$ *linear und homogen enthält.*

Das ist aber der zu beweisende Satz.

Es hat sich also herausgestellt, daß als Hilfsgröße zweckmäßigerweise der Wert eines der irreduziblen Faktoren von

$$\lambda_1 \varphi_1 + \cdots\cdot + \lambda_r \varphi_r$$

für geeignete spezielle Werte der x_i gewählt wird; ändert man diese, so tritt an Stelle von ν einfach eine ganze Funktion ersten Grades.