



### III. Internationaler Mathematiker-Kongress

Heidelberg, 1904

Autor: **Wiener, Hermann** (1857 – 1939)

Titel: **Entwicklung geometrischer Formen**

Bereich: Die Literatur- und Modellausstellung

Verhandlungen des 3. Internationalen Mathematiker-Kongresses : in  
Heidelberg vom 8. bis 13. August 1904 / hrsg von A. Krazer. – Leipzig,  
1905. – S. 739 – 750

*Signatur UB Heidelberg:* L 26 Folio::3.1904

# Entwicklung geometrischer Formen.

Von

H. WIENER aus Darmstadt.

## I. Einleitende Betrachtungen.

Es ist eine Reihe von Abstraktionen nötig, die uns aus den physisch wahrgenommenen Gegenständen geometrische Gebilde liefern. Sieht man von Farbenunterschieden und Helligkeitstönen der Teile eines Gegenstandes ab, so bleibt nichts an ihm übrig, wodurch er sich unserem Auge darbieten könnte. Wenn man also die Form durch Abstraktion von Farbe und Helligkeit erklären will, so entsteht ein Widerspruch zwischen Idee und Darstellbarkeit der Form. In der Zeichnung geometrischer Formen behilft man sich von jeher dadurch, daß man das räumliche Gebilde durch Linien\*) darstellt (schwarz auf weiß), und man wählt als solche entweder die Grenzen aus, in denen ihre einzelnen Flächen zusammenstoßen, oder Umrisse, oder andere Linien, wie es gerade der Zweck verlangt. Entsprechendes gilt, wenn geometrische Gebilde räumlich, also in Modellen dargestellt werden.



Fig. 1.

Daraus entspringt die Forderung, die man an geometrische Modelle stellen muß, wenn sie auf das Auge wirksam sein sollen: sie dürfen nicht aus Flächen, sondern sollen aus Linien bestehend dargestellt werden, d. h. das ganze Modell bestehe aus Draht-Stäben und -Kurven, vielleicht auch mit eingespannten Fäden. Als Beispiel diene ein Würfel, dessen Bild beistehend wiedergegeben ist, einmal, wenn man ihn, unter

\*) In der Figur sind dies Körper von Druckerschwärze u. ä., die in ihrer geringen Breite und noch geringeren Höhe den gewollten Hinweis auf die Abstraktion der „Linie“ geben.

Abstraktion der Helligkeitstönung seiner Flächen als Vollkörper, und das anderemal, wenn man ihn aus Kanten gebildet darstellt. Nebenbei ergibt sich für solche Ausführung der wichtige Vorteil gegenüber den Gips- oder Pappmodellen, daß von den Flächen auch die hinteren, sonst verdeckten Teile sichtbar gemacht werden. Die in ihren Kanten aus Draht hergestellten regelmäßigen Körper geben ein nützliches Beispiel.

## II. Das Schattenwerfen von Modellen.

Sollen geometrische Modelle einem größeren Kreis vorgeführt werden, so hat das alleinige Vorzeigen mancherlei Nachteile; namentlich werden bei den sehr verschiedenen Sehrichtungen die Modelle jedem einzelnen wieder ein anderes Bild gewähren. Läßt man aber das in der geschilderten Weise durchsichtig gemachte Modell seinen Schatten auf einen hellen Schirm werfen, etwa auf einen durchscheinenden, der zwischen Zuschauer und Lichtquelle steht, so erhält man ein für alle Zuschauer gemeinsames Bild, das dasselbe ist, wie es ein an Stelle der Lichtquelle befindliches Auge sieht.

Die Vorteile der Benutzung von Modellen im mathematischen Unterricht (es ist nur davor zu warnen, die Modelle zum Ersatz des Tafelzeichnens nehmen zu wollen, statt zu seiner Ergänzung) treten beim Schattenwerfen besonders hervor. Die Konstruktion an der Tafel zeige z. B. eine Durchdringung von zwei Zylindern, dann gibt sie das Bild der Durchdringungskurve nur für eine Sehstrahlrichtung. Aber das gegen den Lichtstrahl verschiedentlich gedrehte Drahtmodell dieser Kurve gibt Bilder für alle möglichen Lagen des Sehstrahls. Leichter wie auf irgend eine andere Art treten hier die Übergänge von einer Form zur andern hervor. Als Beispiel mannigfaltiger Formen in verschiedenen Übergängen dienen wieder die Bilder der aus Drähten hergestellten regelmäßigen Körper.

Die im folgenden genannten Modelle wurden während des Vortrags alle in dieser Weise in Schattenbildern vorgeführt.

## III. Über die Entwicklung geometrischer Formen.

Um aus gegebenen geometrischen Formen neue zu entwickeln, kennt man verschiedene Weisen. Die einfachste ist das Projizieren, und zwar von ebenen Gebilden in andere Ebenen, oder von Raumgebilden in die Ebene und in etwas erweiterter Auffassung, von räumlichen Gebilden in den Raum (Reliefperspektive). Als Ergänzung hierzu muß die Imaginärprojektion genannt werden, bei der reelle Teile

der Figur in imaginäre übergehen und umgekehrt. Eine andere Weise besteht in der Erzeugung von Flächen aus Linien (aus Geraden, aus ebenen Kurven oder solchen des Raumes), wie z. B. die Erzeugung von Flächen durch Drehung und Schraubung einer Linie um eine Achse. Umgekehrt gewinnt man wieder Linien aus Flächen durch Beziehungen, die diese Flächen zu Ebenen (z. B. in ebenen Schnitten) oder zu Punkten oder Richtungen haben (z. B. Umrisse, Helligkeitskurven bei Beleuchtung aus einem Punkt oder in einer Richtung) oder aber durch Aufsuchen ausgezeichneter Linien und Liniensysteme auf der Fläche (parabolische Linie, Haupttangentenkurven, Krümmungslinien). Im folgenden sollen solche Entwicklungsweisen von Formen aus einfacheren betont werden, die auf das sinnliche Erfassen von Kurven und Flächen Bezug haben, d. h. auf ihre Darstellung im Bilde.

#### IV. Beispiele solcher Entwicklungen.

##### A. Kurven.

Zur Erläuterung der Projektion ebener Kurven (insbesondere der Parallelprojektion, der affinen Abbildung) werden Flachmodelle aus Draht vorgeführt: Regelmäßige Vielecke, Kreis, rechtwinklige Hyperbel, Parabel, Sinuslinie. Der Kreis mit umschriebenem Quadrat liefert bei Parallelprojektion Sätze über die Ellipse; die Sinuslinie hat ein affines Bild, das als Kunstform häufige Verwendung findet (vgl. später ihre Drehfläche, die Urne).

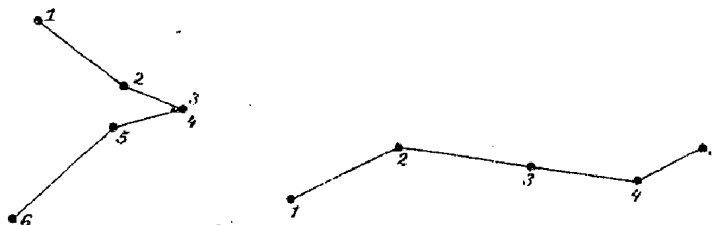


Fig. 2.

Bei Projektion von Raumkurven sind wichtig die scheinbaren Singularitäten: Spitze, wenn der Sehstrahl, Wendepunkt, wenn die Schmiegungebene einer singularitätenfreien Stelle der Raumkurve projiziert wird. Bei Veränderung der Sehstrahlen sind Übergänge zu beobachten vom scheinbaren Doppelpunkt durch die Spitze hindurch zum isolierten Doppelpunkt, dessen Auftreten sich durch zwei benachbarte Wendepunkte andeutet. Als Modell dient ein beliebiges Stück gewundenen Drahtes; statt dessen ist sehr lehrreich ein Sehnzug, der die obigen bei Projektion auftretenden Singularitäten an endlichen geraden Strecken versinnbildlicht (man vgl. die Figuren, wo einmal die Strecke 3 4, das anderemal die durch zwei aufeinanderfolgende Strecken gelegte Ebene 2 3 4 durch das Auge geht).

Von rationalen Raumkurven sind als einfachste Beispiele die von der 3. Ordnung zu erwähnen; sie haben in der Projektion stets einen Doppelpunkt (Knotenpunkt, Spitze oder isolierten Doppelpunkt). Von den vier durch ihr Verhalten im Unendlichen bestimmten Fällen eignen sich zwei noch zur Verdeutlichung der Entwicklung von Kurven durch stetiges Verändern, indem man die Kurve aus den (in den Modellen gleichfalls enthaltenen) drei Asymptoten (Fall der kubischen Hyperbel) oder aus der Geraden und der sie schneidenden parabolischen Asymptote (Fall der parabolischen Hyperbel) hervorgegangen denkt.

Von den Raumkurven 4. Ordnung sind diejenigen auch in Anwendungen wichtig, die als Durchdringungen von Flächen 2. Ordnung erscheinen, rationale mit Doppelpunkt (Knotenpunkt, Spitze oder isoliertem Doppelpunkt) und solche vom Geschlechte eins in ihren drei Gestalten: zwei paare Kurvenzüge, ein paarer Zug, zwei unpaare Züge.

Von transzendenten Raumkurven ist die wichtigste die gemeine Schraubenlinie. Ein Modell dieser Kurve zeigt gleichzeitig die Schmiegungeellipse (im Modell nach jedem beliebigen Punkt hin verschiebbar), d. h. den Schnitt der Schmiegungeebene mit dem Schraubenzylinder. Da diese Ellipse beim Projizieren der Raumkurve wieder zur Schmiegungeellipse wird, die insbesondere im Scheitel vierpunktig berührt, so liefert sie bei Konstruktion der Zykloiden (sowie der Sinuslinie) und ihrer affinen Bilder ein einfaches aus der Anschauung unmittelbar entnommenes Verfahren zur Konstruktion der Krümmung dieser Kurven.\*)

Als Beispiel für die Imaginärprojektion\*\*) sei eine Raumkurve erwähnt, die aus der Schraubenlinie abgeleitet wird. Durch Imaginärprojektion findet man aus dem Kreise die rechtwinklige (gleichseitige) Hyperbel, und durch dieselbe kinematische Konstruktion, die aus dem Kreise die Schraubenlinie liefert (wobei die Zeit der überstrichenen Fläche des Radius proportional gesetzt wird), erhält man aus der rechtwinkligen Hyperbel die genannte Raumkurve. Und wie sich die Schraubenlinie auf drei geeignet gewählte Koordinaten-Ebenen als Cosinuslinie, Sinuslinie und Kreis projiziert, so geschieht es mit unserer Kurve in die Linien des Cosinus hyperbolicus (Kettenlinie), des Sinus hyperbolicus und in die rechtwinklige Hyperbel.\*\*\*)

\*) In der Literatur finde ich die Schmiegungeellipse wohl für Bestimmung der Krümmung der Schraubenlinie und der Sinuslinie, nicht aber der Krümmung der Zykloiden benutzt.

\*\*) Chr. Wiener, Lehrbuch der darstellenden Geometrie, Bd. I, S. 315 ff.

\*\*\*) Weiteres vergleiche man im Zusatz III, S. 748.

Die wegen physikalischer Anwendung wichtigen ebenen und räumlichen Lissajousschen Kurven ergeben sich durch ähnliche kinematische Betrachtungen, wie die Schraubenlinie. Die ebenen lassen sich durch Projektion aus räumlichen Lissajousschen Kurven gewinnen, die durch Aufwickeln von Sinuslinien auf Drehzylinder entstehen. Durch Drehen des Zylinders erhält man bekanntlich Kurven, die sich durch größere oder kleinere Phasenverschiebungen unterscheiden. Für jedes (von 1 verschiedene) Schwingungsverhältnis lassen sich zweierlei solcher Raumkurven angeben.\*) Bei räumlichen Lissajousschen Kurven läßt sich in jedem Modell nur eine bestimmte Phasenverschiebung darstellen; so sind für das Schwingungsverhältnis 2 : 3 : 5 in vier Modellen Beispiele wechselnder Phasenverschiebung angegeben.

### B. Flächen.

Bei der bildlichen Darstellung von Flächen unter den zu Eingang erwähnten Abstraktionen gilt der Grundsatz, daß jede Fläche nur durch Kurven dargestellt werden kann, die auf ihr verlaufen. Geht die Fläche ins Unendliche, so ist sie, um vorstellbar zu sein, durch Randlinien auf ein endliches Stück abzuschneiden. Die Umrisse genügen nicht, um den Eindruck der Fläche als Grenze des Körpers hervorzurufen.

Da hier nämlich, nach Voraussetzung, von Helligkeitsunterschieden abgesehen wird, so müssen andre Zeichen der Rundung eintreten. Hierzu nimmt man Kurven, die von sichtbaren Teilen über den Umriß hinweg zu unsichtbaren Teilen führen. Das scheinbare Berühren des Umrisses ist hier das Bezeichnende. (Daß auch die Umrißlinien selbst vom Sichtbaren zum Unsichtbaren führen können, wird später besprochen.) Sind die Kurven der Flächen (wie bei Draht- oder Fadenmodellen) auch in ihrem hinteren Verlauf zu sehen, so kann in der Zeichnung, die diesen Modellen nachgebildet ist, die Umrißlinie entbehrt werden, und es entsteht ein klares Bild, wenn in der Zeichnung, wie bei Überschneidungen, die vorderen Teile gegenüber den hinteren Teilen kenntlich gemacht sind. Beim Schattenwerfen solcher Modelle sind die dem Schirme näheren Teile durch größere Schärfe von den anderen zu unterscheiden. Auf diese Weise geben Drahtmodelle von Flächen 2. Ordnung, die nur die Hauptschnitte, und falls die Flächen ins Unendliche gehen, Randkurven enthalten, ein deutliches Bild der Fläche.

---

\*) H. Wiener, Vortrag, gehalten im naturw. Verein für Sachsen u. Thür. (Zeitschrift für Naturwissenschaften, 67. Bd., 1894, S. 231 ff.).

Durch Einfachheit der Erzeugung und deshalb auch der konstruktiven Behandlung zeichnen sich die Dreh- (Rotations-) und Schraubenflächen aus. Der Kreisring und die urnenförmige Drehfläche, deren Meridianlinie das affine Bild einer Sinuslinie ist, eignen sich als Beispiele; der Ring ist wegen der Fülle seiner besonderen Eigenschaften weniger zur Erörterung der allgemeinen Eigenschaften der Drehflächen dienlich als die Urne. Von den Schraubenflächen sind die Wendelfläche (gerade geschlossene Schraubenfläche) und die schräge geschlossene Schraubenfläche die Beispiele, die in der Technik die weiteste Verwendung zeigen und zur geometrischen Behandlung am fruchtbarsten sind. Die Schraubenröhrenfläche sei ihnen hinzugefügt.

Eine eigenartige optische Erscheinung, die eine neue Entwicklungsweise von Kurvensystemen aus Flächen in sich birgt, entsteht bei Modellen von Drehflächen durch Drehung um ihre Achse. Wir denken uns die Fläche durch eine gewisse Anzahl sich regelmäßig wiederholender Meridiane\*) dargestellt, und sehen diese im Modell aus glänzenden Messingdrähten gefertigt. Dann erscheinen auf dem hinteren (etwa konkaven) Teil des durch die Drehung entstandenen Flächenscheines feststehende dunkle Linien in endlichen Abständen. Und umgekehrt erscheinen beim Schattenwerfen des sich drehenden Modells in der (in der Mitte blassen, am Rande dunkleren) Schattenfläche feststehende helle Linien, die als der vorderen, dem Licht abgewandten (etwa konvexen) Seite angehörig zu denken sind. Beiderlei Erzeugungen ergänzen sich und liefern ein die Fläche überlagerndes System von Linien, die ich Verdeckungslinien\*\*) nennen möchte.

Die zuletzt aufgezählten Flächengattungen besitzen Teile mit negativer Flächenkrümmung und geben als solche Beispiele ab für das Auftreten von verdeckten Umrissen. Wenn ein Umrißsehstrahl außer den beiden in den Berührungspunkt zusammenfallenden Punkten noch einen dritten Punkt mit der Fläche gemein hat, so kann es vor-

\*) Statt ihrer könnten beliebige kongruente, die Kurve durch ihre Drehung erzeugende Kurven in regelmäßiger Wiederkehr angenommen werden.

\*\*) Man kann sich ein zusammengehöriges Paar einer vorderen und hinteren Verdeckungslinie erzeugt denken durch den Schnitt der Fläche mit einer Geraden, die, stets Sehstrahl bleibend, längs eines vorderen und eines hinteren Meridians hingeleitet, während sich diese Meridiane bei der Drehung scheinbar gegeneinander bewegen. Da in kurzen Zwischenräumen der enteilende Sehstrahl durch einen solchen ersetzt wird, der die beiden folgenden, in die alte Lage einrückenden Meridiane trifft, so steht die vordere wie die hintere Linie fest. Wo der Sehstrahl mehrere Schnittpunkte mit der Fläche hat, überlagern sich mehrere Systeme von Verdeckungslinien. Bei den Schraubenflächen schreiten diese Linien, sich selbst kongruent bleibend, in der Richtung der Schraubenachse fort.

kommen, daß an einer Stelle dieser dritte mit den beiden andern zusammenrückt. Der wahre Umriß, d. h. der Ort der Berührungspunkte aller berührenden Sehstrahlen, wird dann an dieser Stelle einen Sehstrahl zur Tangente haben, und es wird der Umriß an dieser Stelle von sichtbaren Teilen zu unsichtbaren übergehen. Die Umrißlinie wird an der Stelle, wo sie vom Sehstrahl berührt wird, im Bilde eine Spitze zeigen. Die Tangente selbst, die drei zusammenfallende Punkte mit der Fläche gemein hat, ist dann eine Haupttangente (Asymptote ihrer Dupinschen Indikatrix).

Hierdurch treten die Haupttangentenkurven der Fläche als wichtig für ihre Bilder hervor. Im allgemeinen wird eine solche Kurve an der Umrißstelle einen scheinbaren Wendepunkt besitzen. Denn jede Berührungsebene der Fläche ist für eine durch ihren Berührungspunkt hindurchgehende Haupttangentenkurve Schmiegungeebene und für den Umriß geht die Berührungsebene durch das Auge. Daß nicht nur die Schmiegungeebene, sondern auch die Tangente der Haupttangentenkurve durch das Auge geht, so daß anstatt des scheinbaren Wendepunkts eine scheinbare Spitze tritt, ist hiervon ein Sonderfall, der sich an den vorhin erwähnten Stellen des verschwindenden Umrisses vorfindet.

In den in Schattenbildern vorgezeigten Modellen der beiden Regelschraubenflächen (Wendelfläche und schräge, geschlossene Schraubenfläche) sind die Haupttangentenkurven aus Drähten eingesetzt, auf der ersten bilden sie Schraubenlinien, auf der letzteren sind es Kurven, die sich auf eine zur Schraubenachse senkrechte Ebene in der Richtung der Achse als hyperbolische Spiralen projizieren.

Bei einer durchsichtigen Darstellung der Flächen, wie sie diese Drahtmodelle geben, sind die Haupttangentenkurven die für die Auffassung der Form wichtigsten Gebilde; denn schon für den Zeichner, der nach der Natur irgend welche verwickelteren Flächen mit negativ gekrümmten Teilen (z. B. eine Hand) aufnehmen will, bieten die Stellen des verschwindenden Umrisses die größten Schwierigkeiten. Hat er sich aber mit Hilfe solcher Modelle daran gewöhnt, wie von verschwindenden Randlinien, so auch von den verschwindenden Umrissen den verdeckten Verlauf hinzuzudenken, so lösen sich manche der Schwierigkeiten auf. Die Untersuchung der Haupttangentenkurven kann daher auch dazu beitragen, das Auffassen der Flächenform zu erleichtern.

---



## A n h a n g.

An die Vorträge schloß sich eine Führung durch die Sammlung an, und ebenso fanden während der Zeit der Ausstellung für Gruppen oder einzelne Besucher Erklärungen statt, aus denen in den folgenden Zusätzen einige wichtigere Punkte hervorgehoben sein mögen.

### Zusatz I. Bemerkungen über die Entstehung der Modelle.

Von den 180 Modellen, die durch H. Wiener und das mathematische Institut der Technischen Hochschule zu Darmstadt ausgestellt waren, ist die Mehrzahl im mathematischen Institut von Assistenten und Studierenden konstruiert und ausgeführt. Ein Teil wird auch anderen Unterrichtsanstalten zugänglich gemacht durch Veröffentlichung in „H. Wieners Sammlung mathematischer Modelle“ (Verlag von B. G. Teubner) oder ist früher im Brillschen (später M. Schillingsehen) Verlag erschienen. Die Modelle sind für den Gebrauch in Vorlesungen bestimmt und deshalb möglichst durchsichtig\*), meist aus Drähten und Fäden verfertigt, Gips ist als Material da gewählt, wo einzelne Schichten abzutönen waren. Sie sind für einen größeren Hörsaal bemessen, ihre Höhe i. a. etwa 30 cm und darüber.

### Zusatz II. Singularitäten der Raumkurven.

An einer gegebenen Stelle einer Raumkurve kann der Punkt, die Schmiegungebene und die Tangente ein Rückkehrelement sein, oder nicht, und man unterscheidet danach 8 verschiedene Fälle von Singularitäten (die nicht singuläre Stelle eingerechnet). Als Beispiele zu allen 8 Fällen dienen solche Kurven, die an einer gegebenen Stelle entweder den Punkt zum Spiegelpunkt, oder die Schmiegungebene, Normalebene, oder rektifizierende Ebene zur Spiegelebene, oder endlich die Binormale, Tangente oder Hauptnormale zur Spiegelachse besitzen. Wenn nun jede dieser Spiegelungen durch die Spiegelung am Punkte, an der Schmiegungebene und an der Tangente ausgedrückt wird (die Spiegelung an der Hauptnormale als Folge der Spiegelungen an Punkt, Schmiegungebene und Tangente, die Spiegelung an der Binormale als Folge der Spiegelungen an Punkt und Schmiegungebene, u. s. f.), so gilt der Satz, daß an der betrachteten Stelle dasjenige der drei Elemente Punkt, Schmiegungebene, Tangente bei einem jener 8 Fälle ein

---

\*) Man vergleiche den voranstehenden Bericht über H. Wieners Vortrag: „Entwicklung geometrischer Formen,“ S. 740.

Rückkehrelement ist, das in dieser Spiegelfolge nicht vorkommt, und das Element kein Rückkehrelement, das vorkommt.\*\*)

Richtet man es so ein, daß der unendlich ferne Punkt der Binormale ein Punkt der Raumkurve, die unendlich ferne Gerade der Normalebene seine Tangente und die unendlich ferne Ebene seine Schmiegungebene ist, so hat man eine unendlich ferne Stelle der Raumkurve, die infolge der von vorhin bestehenden Spiegelungen mit der zur ersten dualen Singularität behaftet ist. Denn die Spiegelenebene an dem ersten Punkt ist im projektiven Sinne gleichzeitig auch Spiegelung an der unendlich fernen Ebene, d. h. an der Schmiegungebene der zweiten Singularität, und ebenso die Spiegelung an der endlichen Schmiegungebene zugleich die am unendlich fernen Punkt der Raumkurve, und schließlich die (achsige) Spiegelung an der endlichen Tangente zugleich Spiegelung an der dazu windschiefen Tangente des unendlich fernen Punktes.

Daher kann man durch dieselben 8 Modelle von Raumkurven Singularitäten darstellen, die

1. einen endlichen Punkt (mit endlicher Tangente u. Schmiegungebene),
2. eine unendlich ferne Schmiegungebene (mit unendlich fernem Punkt und eben solcher Tangente) besitzt.

Die gegenseitige Lage dieser beiden Stellen ist so, daß die zwei Punkte Ecken, die zwei Tangenten windschiefe Kanten und die zwei Schmiegungebenen Seiten eines Tetraeders sind, von dem eine Seite im Unendlichen liegt.

Bildet man nun die Raumkurve kollinear so ab, daß das Tetraeder in sich übergeht, und daß beide betrachteten Stellen ins Unendliche fallen, so erhält man in den neuen 8 Raumkurven Beispiele für die 8 Fälle, wobei

3. ein Punkt unendlich fern wird, während seine Tangente und Schmiegungebene ins Endliche reichen;
4. eine Tangente (mit ihrem Kurvenpunkt) ins Unendliche rückt, während die Schmiegungebene ins Endliche reicht.

So werden durch 16 Modelle alle 8 Fälle von Singularitäten für die viererlei Lagen dargestellt, die ein Punkt mit seiner Tangente und Schmiegungebene gegen das unendlich Ferne haben kann.\*\*)

\*) Da die Charakteristik der Spiegelung  $= -1$  ist, so wird durch den obigen Satz auf die Bezeichnung v. Standts zurückgegriffen, der das Fortschreiten eines Elements durch  $-$ , das Rückkehren durch  $+$  ausdrückt (Geom. d. Lage, Nr. 209). Chr. Wiener (Lehrbuch der Darst. Geom. I Bd., S. 214) hat die umgekehrte Bezeichnung eingeführt.

\*\*) Für den einen Fall des endlichen Punktes hat Chr. Wiener an der

### Zusatz III. Verwandte der Schraubenlinie.

Ein Punkt  $P$  durchlaufe eine gleichseitige Hyperbel, deren reelle ( $x$ -) und ideelle ( $y$ -) Halbachse die Länge  $a$  habe, derart, daß sein aus der Hyperbelmitte  $O$  (dem Nullpunkt) gezogener Fahrstrahl in gleichen Zeiten gleiche Flächen überstreicht. Gleichzeitig werde die Hyperbel in der zu ihrer Ebene senkrechten Richtung (der  $z$ -Richtung) mit gleichförmiger Geschwindigkeit verschoben, und diese Geschwindigkeit sei so gewählt, daß, wenn der Fahrstrahl in der Hyperbelebene die Fläche  $\frac{1}{2}a^2$  überstrichen hat, der beschreibende Punkt die Höhe  $a$  über der Anfangsebene erreicht hat. Die senkrechten Projektionen der so durch  $P$  beschriebenen Raumkurve auf die  $(x, z)$ - und die  $(y, z)$ -Ebene sind die Cosinushyperbolicus-Linie (Kettenlinie) und die Sinushyperbolicus-Linie.\*)

Die Raumkurve hat mancherlei Übereinstimmung mit der gemeinen Schraubenlinie. Der aus einem beliebigen Punkte konstruierte Richtkegel der Kurventangenten ist ein Drehkegel, dessen Achse zur  $y$ -Achse parallel ist und dessen Öffnung gleich einem Rechten ist. Legt man den Scheitel des Richtkegels insbesondere in den Punkt  $Q$  der  $z$ -Achse, der die Höhe  $a$  über  $O$  hat, und trägt vom Kegelscheitel aus auf jeder Tangente die zugehörige Geschwindigkeit des Punktes  $P$  auf, so ist bei geeigneter Wahl der Streckeneinheit der Ort der Endpunkte der Geschwindigkeiten (der Hodograph der Raumkurve) die zur gegebenen konjugierte rechtwinkliche Hyperbel, während der Ort der Endpunkte der von  $O$  aus aufgetragenen Beschleunigungen (der 2. Hodograph) die gegebene Hyperbel selbst ist.

Da die nach  $Q$  parallel verschobene Schmiegungeebene eines Punktes  $P$  die Berührungsebene des Richtkegels längs der verschobenen Tangente ist, so fällt die ebenso verschobene Binormale des Punktes  $P$  (wegen der Rechtwinkligkeit der Kegelöffnung) mit der der Tangente gegenüberliegenden Erzeugenden zusammen und die nach  $Q$  verschobenen Hauptnormalen bilden einen Strahlenbüschel, der in die  $(x, z)$ -Ebene fällt. Die von  $Q$  aus gezogene Normalbeschleunigung beschreibt also ebenfalls diesen Strahlenbüschel, und man kann beweisen, daß ihre Endpunkte einen Kreis mit dem Radius  $a$  bilden.

---

Techn. Hochschule zu Karlsruhe solche Modelle durch Studierende anfertigen lassen; später hat für denselben einen Fall Björling in Lund solche Modelle herausgegeben. Diese beiden Reihen zeigen eine ganz andere Ausführung als die hier vorliegende.

\*) Die Gleichungen dieser Kurve und der Ausdruck ihrer Bogenlänge finden sich im Übungsbuch von Schlömilch, II. Teil, 1. Auflage (1870) S. 89.

Aus der Lage der verschobenen Binormalen folgt, daß die rektifizierenden Ebenen stets senkrecht zur  $(x, z)$ -Ebene sind, daß sie also einen senkrecht über der Kettenlinie errichteten Zylinder umhüllen; und da die Tangenten der Raumkurve mit der Achse des Richtkegels, also auch mit den Erzeugenden dieses Zylinders stets einen halben Rechten einschließen, so ist die Raumkurve eine geodätische Linie des über der Kettenlinie senkrecht errichteten Zylinders. Aus der Lage der verschobenen Tangente und Binormale folgt, daß beide gleichzeitig gleiche Winkel überstreichen, daß also (abgesehen von einer näheren Festsetzung des Vorzeichens) in jedem Punkte der Raumkurve ihre Krümmung gleich ihrer Torsion ist. Diese Eigenschaft, und die andere, daß die 2. Ableitung des Krümmungsradius nach dem Bogen eine Konstante  $(= \frac{2}{a})$  ist, ergeben die natürlichen Gleichungen dieser Raumkurve.

Die Kettenlinie wird hierbei von einem Punkte  $P'$ , der die senkrechte Projektion von  $P$  auf die  $(x, z)$ -Ebene ist, so durchlaufen, daß die  $x$ -Koordinate einer jeden Lage von  $P'$  die Beschleunigung des Punktes nach Größe und Richtung angibt; Geschwindigkeit und Beschleunigung haben dann stets gleiche Länge, und die Normalbeschleunigung ist für alle Lagen nach Größe und Richtung gleich der der Raumkurve, hat also die konstante Länge  $a$ .

#### Zusatz IV. Büschel von Flächen 2. Ordnung.

v. Staudt\*) unterscheidet 22 Arten von Büscheln der Flächen 2. Ordnung, von denen die 8 ersten Arten in einem Bündel enthalten sind; unter den 14 übrigen Arten enthält eine unendlich viele Kegel, die 13 andern enthalten vier Kegel, deren Getrenntsein oder Zusammenrücken in einen doppelten, dreifachen oder vierfachen durch das Schema ausgedrückt wird:

a) 1111      b) 211      c) 22      d) 31      e) 4.

Ganz allgemein kann ein Kegel 2. Ordnung in dreierlei Gestalt auftreten, als eigentlicher Kegel und als entartend in ein Ebenenpaar oder

\*) Die v. Staudtschen Untersuchungen geben die Ableitung dieser Fälle durchaus unabhängig von Stetigkeitsbetrachtungen, wie sie hier der kürzeren Ausdrucksweise halber beim „Zusammenrücken“ benützt sind. Wegen der Literatur über diesen Gegenstand, insbesondere über den Zusammenhang mit der Determinante des Büschels und ihren Elementarteilern vergl. man in der Enzykl. d. math. Wiss. die Abhandlung von O. Staudé über „Flächen 2. Ordnung und ihre Systeme und Durchdringungskurven“. Dort findet sich auch die im Text folgende Tabelle, aber ohne die hier gegebene geometrische Deutung.

in eine Doppellebene; dementsprechend ist die Kegelspitze ein Punkt (einstufiges Gebilde) oder jeder Punkt der Schnittgeraden der Ebenen des Paares (zweistufiges Gebilde), oder jeder Punkt der Doppellebene (dreistufiges Gebilde). Im Büschel geschieht das Zusammenrücken zweier Kegel so, daß entweder auch die Spitzen zusammenrücken (einstufig, eigentlicher doppelt gerechneter Kegel), oder so, daß sie getrennt bleiben und eine Gerade bestimmen, von der jeder Punkt als Spitze gilt (zweistufig, als doppelter Kegel zu rechnendes Ebenenpaar). Und Entsprechendes gilt für das Zusammenrücken von drei oder vier Kegeln; rücken insbesondere drei Kegel so zusammen, daß ihre Spitzen getrennt bleiben, so bilden sie eine dreifach zu rechnende Doppellebene, von der jeder Punkt als Spitze gilt.

Für das Zusammenrücken der vier Kegelspitzen erhält man ein dem obigen gleiches Schema:

I) 1111      II) 211      III) 22      IV) 31      V) 4.

Beide lassen sich kombinieren und liefern so die 13 erwähnten Arten von Flächenbüscheln:

	a	b	c	d	e
I	1, 1, 1, 1	11, 1, 1	11, 11	111, 1	
II		2, 1, 1	2, 11	21, 1	211
III			2, 2		22
IV				3, 1	31
V					4

In dieser Tabelle bedeutet jede der durch Kommas getrennten Zifferngruppen einen Kegel von einer Vielfachheit, die die Quersumme dieser Gruppe ergibt; eine alleinstehende Ziffer bedeutet einen eigentlichen Kegel, zwei durch Kommas nicht getrennte Ziffern ein Ebenenpaar, drei eine Doppellebene, die Zahlen 1, 2, 3, 4 geben die Anzahl der Kegelspitzen an, die zusammenrücken.