Heidelberger Texte zur Mathematikgeschichte

Autor: **Cantor, Moritz** (1829–1920)

Titel: **Zur ältesten Geschichte der Zahlzeichen**

Quelle Amtlicher Bericht über die Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte.
Band 34. 1858 (1859)
Seite 135 – 142.

AMTLICHER BERICHT

ÜBER DIE

VIER UND DREISSIGSTE VERSAMMLUNG

DEUTSCHER NATURFORSCHER UND ÄRZTE

IN

CARLSRUHE

IM SEPTEMBER 1858.

3

HERAUSGEGEBEN

VON DEN GESCHÄFTSFÜHRERN DERSELBEN

EISENLOHR UND VOLZ.

MIT 5 TAFELN UND 16 HOLZSCHNITTEN.

CARLSRUHE.
CHR. FR. MÜLLER'SCHE HOFBUCHHANDLUNG.
1859.

IV. Section für Mathematik, Astronomie und Mechanik.

Erste Sitzung am 17. September 1858.

Präsident: Professor Argelander von Bonn.
Ständiger Secretär: Professor Dr. Wiener von Carlsruhe.

Privatdocent Dr. Cantor von Heidelberg:

Zur ältesten Geschichte der Zahlzeichen.

Die Einführung unserer gegenwärtigen Ziffern in Europa ist der Gegenstand vielfacher Untersuchung gewesen, deren wahrscheinliches Resultat ich in einem früheren Aufsatze [1]) zusammenzustellen versuchte. Es ergab sich dabei, dass ein so später Ursprung der modernen Zahlzeichen, als sonst wohl angenommen wurde, durchaus unstatthaft ist; dass man vielmehr zu der Behauptung berechtigt ist, es sei im Wesentlichen nur eine Auffrischung des fast Vergessenen, was die Araber vermittelten [2]), und deren Hauptanspruch auf unsere Dankbarkeit bestehe darin, dass sie bei Anwendung der Null zur Schrift machen konnten, was vorher nur Rechenvortheil war, und in dieser Gestalt wohl nie wirkliches Volkseigenthum geworden wäre. In der That besassen schon die alten Griechen in ihrem ἄβαξ eine Tafel, die, nach decadischem Systeme eingetheilt, mit Zeichen beschrieben wurde, welche den einzelnen Ziffern, deren wir uns noch heute bedienen, äquivalent waren. Nur die Null scheint eine neue Erfindung zu sein, deren indischer Ursprung wohl selten bezweifelt worden ist. Ich behalte mir vor, auf diesen Punkt im Verlaufe dieser Abhandlung näher einzugehen. Meine Hauptaufgabe aber soll sein, solche Angaben zu sammeln, welche auf den ersten Ursprung der Zeichen Bezug haben, von welchen eine frühere europäische Anwendung feststeht, als Leonardo Fibonacci mit den Arabern zusammentraf. Es ist dieses ein fast durchaus neuer Gegenstand, indem theils noch kein Mathematiker sich damit beschäftigt hat, theils die Untersuchungen von Seiten der Philologen und Archäologen so zerstreut und bruchstückweise vorhanden sind, dass schon desshalb ein Nebeneinanderstellen derselben berechtigt erscheint, da nur der Vergleich den Schlüssen, die ich zu ziehen gedenke, als Prüfungsmittel dienen kann.

Die Hauptstelle zur Begründung der Ansicht von einem frühern europäischen Gebrauche der Ziffern ist die auch bisher von allen Historikern angeführte aus der Geometrie von Boethius, deren wörtliche Anführung hier am Platze sein dürfte, wenn sie auch schon vielfältig abgedruckt ist. Dort heisst es: „Pythagorici vero ne multiplicationibus et partitionibus et in podismis aliquando fallerentur, ut in omnibus erant ingeniosissimi et subtilissimi descripserunt sibi quandam formulam, quam ob honorem sui praeceptoris mensam Pythagoream nominabant, quia hoc quod depinxerant magistro praemonstrante cognoverant. A posterioribus vero appellabatur abacus, ut, quod alta mente concepe-rant, melius, si quasi videndo ostenderant, in notitiam hominum transfundere possent, eamque subterius habita *) sat mir adescriptione formabant." Dann folgt in einigen Manuscripten die Multiplicationstabelle (das Einmaleins), in anderen, und zwar gerade in solchen, welche man für die älteren zu halten Grund hat, eine Abbildung der römischen Rechentafel.

Von diesen letzteren Manuscripten war schon seit Anfang dieses Jahrhunderts der Altdorfer Codex durch Mannert entdeckt worden. Chasles fand einen ganz ähnlichen Codex in Chartres, und derselbe Forscher machte noch auf zwei Manuscripte der Pariser Bibliothek (*Bibliothèque impériale, rue Richelieu*) aufmerksam, welche dort unter den Nummern 7377 *C* und 7185 registrirt sind. Ich habe Gelegenheit genommen, diese beiden selbst einzusehen, und die Zeichen, welche in denselben vorkommen, zu copiren.

An das schon Angeführte sich anschliessend existirt nämlich in den genannten Manuscripten der Zusatz von unzweifelhafter Gleichzeitigkeit mit dem übrigen Texte: „Quidam hujuscemodi apicum notas sibi conscripserunt", und Zeichen, welche in ihrer Analogie mit den modernen Ziffern sich als Ursprung derselben erweisen. Dann endlich folgt noch als Schluss: „Quidam vero in hujus formae depictione litteras alfabeti assumebant".

Zu diesen schon bekannten Thatsachen möchte ich indessen noch hinzufügen, dass das Manuscript 7185 der Pariser Bibliothek auf dem Rücktitel fälschlich Gerbert als Verfasser zugeschrieben ist, ein Irrthum, welcher nicht ohne Bedeutung für den Satz ist (der auch Bd. I. S. 71 Zeitschrift für Mathematik und Physik aufgestellt wurde), dass Gerbert seine Kenntniss der Zahlzeichen nicht von den Arabern, sondern aus der Geometrie des Boethius besass.

Wenn nun in solcher Weise, bei Mitberücksichtigung der in meinem früheren Aufsatze angeführten sonstigen Gründe, dargethan ist, dass die Pythagoräer schon Zahlzeichen besassen, so drängt sich unmittelbar die weitere Frage auf, woher sie dieselben bezogen hatten,

---

1) Vgl. die Zeitschrift für Mathematik und Physik, I. Bd. S. 65 fg.

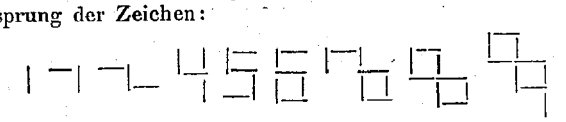
2) Dieser Ansicht scheint schon Pater Caspar Schott, *Cursus Mathematicus. Herbipoli.* 1662, gewesen zu sein.

*) Andere Lesart: *subtervis habiti.*

und eine Beantwortung dieser Frage, wenn sie innere Wahrscheinlichkeit besitzt, wird auch umgekehrt jeden noch vorhandenen Zweifel an der Aechtheit jener Stelle des Boethius zu heben im Stande sein. Woher lassen sich also jene Zeichen in letzter Instanz herleiten?

Die Ansichten, welche in dieser Beziehung laut wurden, gehen weit auseinander. In einem wenigstens an barocken Gedanken nicht armen Buche[1]) der neuesten Zeit finde ich die weitverbreitete (?) Annahme mitgetheilt, die Zahlzeichen seien einem mit seinen Diagonalen versehenen Quadrate ⊠ entnommen, dadurch, dass diese oder jene Linien wegblieben.

In arithmetisch-geometrischer Auffassung zählt ein anderer Autor[2]) die Striche, welche zur Bildung der einzelnen Ziffern nöthig sind und findet darin den Ursprung der Zeichen:



Ja er setzt sogar hinzu: „Diese Einfachheit der Zahlzeichen, sowie ihre Uebereinstimmung mit der Sprache[3]) lassen keinen Zweifel übrig, dass wir unsere Ziffern 1, 2, 3 . . . als die eigenthümlichen Zahlzeichen der alten germanischen Völker zu betrachten und nicht nöthig haben, den Ursprung derselben mit vieler erfolgloser Mühe bei den orientalischen Völkern zu suchen“.

Zwei nordische Gelehrte, der Holländer Rudbec und der Schwede Brixhorne, hatten übrigens schon früher einen germanischen Ursprung angenommen[4]).

Ernster ist die Auffassung zu erwägen, welche besonders einigen Diplomatikern[5]) des vorigen Jahrhunderts die plausibelste schien, dass nämlich unsere Ziffern aus den sogenannten tironischen Zeichen sich entwickelt hätten, welche bei den Römern das vertraten, was heut zu Tage, freilich in erhöhtem Maasse, die Stenographie leistet. Allein diese Annahme ist ungenügend, den ἄβαξ der Griechen aus frühester Zeit nebst seinen Zeichen zu erklären. Wenn es also auch keineswegs unmöglich ist, dass Tiro etwa von jenen Zeichen Kenntniss gehabt und sie in seiner abgekürzten Schrift benutzt haben sollte, so kann man doch darin keine Quelle erkennen. Zu deren Auffindung sind wir genöthigt, uns weiter östlich zu wenden, dorthin, wo die Quellen aller Wissenschaft und Bildung so ergiebig flossen.

1) Elementare Arithmetik für Berg-, Gewerbe- und Fortbildungsschulen von Dr. Chr. Rauch. Zweite vermehrte Auflage. Duisburg 1857.

2) Arithmetik und Algebra von Anton Müller. Heidelberg 1833.

3) Diese Uebereinstimmung findet der Verfasser darin, dass Hundert, Tausend wesentlich deutsche Klänge und nicht aus fremden Sprachen abgeleitete Namen sind.

4) Vergl. *Angelo Fumagalli*, *Delle Istituzioni Diplomatiche. Milano* 1802. 4. Bd. I. S. 170—184.

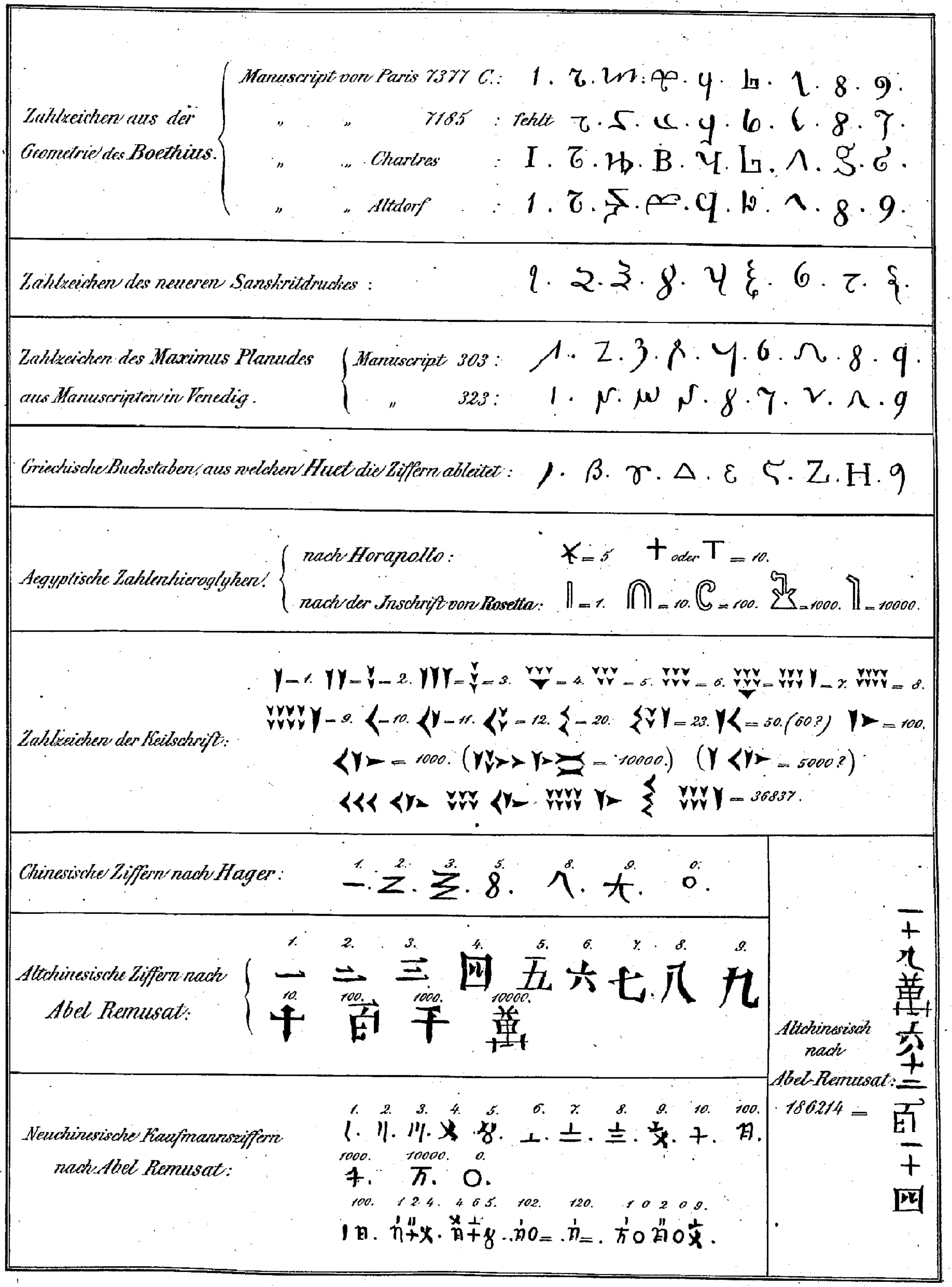
5) *Don Calmet* in den *Mémoires de Trévoux* (*Septembre* 1707, *p.* 1622), *J. B. C. d'Ansse de Villoison*, *Anecdota Graeca. Venetiis.* 1781. 4. *p.* 152—157, u. A.

Einen Anhaltspunkt bei dieser Untersuchung kann uns das Leben eines Mannes gewähren, dessen Name, wie in der ganzen Geschichte der Mathematik, auch bei der Geschichte des Zahlensystems und der Ziffern an dem Anfange steht, dessen eigener Bildungsgang aber erst in allerneuester Zeit durch die Arbeiten eines anderen Mannes von ähnlich universellem Wissen zur sicheren Kenntniss gelangt ist. Ich brauche wohl kaum hinzususetzen, dass ich Pythagoras meine und mich für dessen Lebensumstände auf den zweiten Band der „Geschichte unserer abendländischen Philosophie“ von Eduard Röth beziehe.

Es ist hier nicht der Ort, das interessante Lebensbild des Vaters griechischer Mathematik ganz aufzurollen, so sehr es verdient, in weiteren und weitesten Kreisen bekannt zu werden[1]). Ich muss mich für den Augenblick darauf beschränken, nur mit dürren Worten und todten Jahreszahlen die Hauptmomente hervorzuheben: Die Geburt des Pythagoras im Jahre 569 auf der Insel Samos. Seinen ersten wissenschaftlichen Unterricht durch Pherekydes von Lesbos und Thales und Anaximander von Milet 551—547. Dann seine Reise nach Aegypten, wo er 21 Jahre lang im Dienste der Tempel die Priesterschulen besuchte und deren ganze Gelehrsamkeit empfing, bis er zuletzt selbst die heiligsten Weihen erhielt. Es folgt die Eroberung Aegyptens durch Cambyses 525, bei welcher die ganze Priesterschaft, und unter ihr auch Pythagoras, als Gefangene nach Babylon geführt wurden. Dort stand er während weiterer 12 Jahre in nächster Berührung zur chaldäischen Wissenschaft, bevor er, wieder befreit, in einem selbstgewählten neuen Vaterlande, in Unteritalien, seine Schule gründen konnte. Aus diesem an romanhaften Ereignissen und Abenteuern reichen Geschicke erklärt es sich auch, warum wir in seinen Lehren offenbar so Heterogenes gemischt finden. Es sind eben die Erwerbungen der verschiedensten Gegenden, in welche theils sein Wille, theils der Zufall ihn führte, und nur an den Faden dieser Erinnerungen konnte Röth das pythagoräische System der Philosophie und Religion aufreihen. Ganz ähnlich wird die Sache im vorliegenden Falle sich verhalten. Es wird nöthig sein, nach den Zahlzeichen der verschiedenen Orte zu fragen, welche Pythagoras auf seinem Bildungsgange berührte, und dann weiter die Frage aufzuwerfen, wo sich etwa Analogien mit den Zeichen finden lassen, deren Ursprung wir gerade aufsuchen wollen.

Es sei mir erlaubt, eine allgemeine Bemerkung über solche Analogien vorauszuschicken, welche freilich Niemanden fremd sein wird, der sich irgendwie mit vergleichenden Sprachstudien zu beschäftigen Gelegenheit hatte. Um Aehnlichkeiten der Art zu begründen, ist es nämlich nur nöthig, dass die einzelnen Zeichen auf einander hinweisen, ohne dass es auf die Lage der-

1) Vergleiche meine ausführliche Recension des Röth'schen Werkes in der „Kritischen Zeitschrift für Chemie, Physik und Mathematik“, Bd. I, Heft 6.



Amtlicher Bericht über die
XXXIV. Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte
Carlsruhe 1858 (Pag. 135.)

Cantor: Zur ältesten Geschichte der Zahlzeichen.

Carlsruhe. Chr. Fr. Müller'sche Lith. Anstalt.

selben, und ganz besonders, ohne dass es auf ihren Sinn ankommt.

Was namentlich den letzteren Punkt betrifft, so erinnere ich daran, wie noch heute Franzosen und Deutsche unter dem Worte Billion verschiedene Mengen verstehen. Ich mache weiter auf die Sanskritziffern aufmerksam welche in modernen Druckwerken benutzt werden, und bei welchen die Vier aussieht wie unsere 8, die Sieben wie unsere 6, die Acht wie unsere 7. Ich will endlich aus einem Uebergangs-Stadium zwei Manuscripte eines und desselben Buches aus der Bibliothek San Marco in Venedig anführen [1]), welche für die Ziffern derartige Gestalten geben, dass das Zeichen der Sieben in dem einen Codex gerade so aussieht, wie das der Acht in dem andern, während die Fünf des letztern mit der Vier des Sanskrit übereinstimmt, und die Zwei und Drei auch die Gleichgiltigkeit der Lage der Zeichen näher erläutern. Das Buch selbst rührt von Maximus Planudes her, welcher mit Leo Orphanostrophus als Gesandter des Andronicus Paläologus d. Ae. 1327 nach Venedig kam, wo er 1353 noch lebte. Ein Mann von mannigfaltigen Kenntnissen, dessen Ansichten über die Ziffern und ihren Ursprung wir später noch des Nähern berücksichtigen müssen.

Kehren wir jetzt zu den Zahlzeichen der Völker zurück, unter welchen Pythagoras sein Leben zubrachte. Schon die Griechen hatten vor seiner Zeit eine durchaus fertige Schrift und in derselben eine Bezeichnung der Zahlen durch Buchstaben, oder vielmehr, wie Fumagalli angiebt, dreierlei Arten solcher Bezeichnungen. Die älteste habe nur die Buchstaben

	I.	*Π.*	*Δ.*	*H.*	*X.*	*M.*
für die Zahlen	1.	5.	10.	100.	1000.	10000.

benutzt, wie der Grammatiker Herodian bezeuge [2]). Die Schreibweise war wie bei allen Buchstabenbezeichnungen additiv. Nur das Zeichen *Π* (πέντε) trat dabei multiplicativ auf und nahm alsdann das zu vervielfachende Gruppenzeichen zwischen sich, z. B. $50 = \overline{|\Delta|}$, $500 = \overline{|\Pi|}$, $612 = \overline{|\Pi|}\ H\ \Delta\ I\ I$. Die zweite Bezeichnungsweise legte den Buchstaben α bis ω die Werthe 1 bis 24 bei; so seien nämlich die Bücher des Homer numerirt und in ähnlicher Weise im hebräischen Alphabete der 118. Psalm und die Klagelieder Jeremiä. Endlich die dritte Bezeichnungsweise ist die allgemein bekannte, in meinem früheren Aufsatze schon besprochene $\alpha = 1, \ldots \vartheta = 9$, $\iota = 10$ u. s. w. Aus dieser letzteren wollen verschiedene Autoren theils unsere modernen Ziffern, theils wenigstens die im frühern Mittelalter benutzten [3]) herleiten. Am feurigsten erfasste wohl der Bischof Huet diese Ansicht, der sie in seiner *Demonstratio evangelica ad seren. Delphinum.* Paris 1679, p. 647 in pomphafter Weise vertheidigt. Die 1 sei ein einfacher Strich, 2 das unten abgeschnittene β, 5 der Buchstabe ε mit umgedrehten Kopfe u. s. w. [1]) Das ἀλώπηξ-Fuchsartige dieser Ableitungen liegt zu sehr auf der Hand, als dass ein näheres Verweilen dabei nöthig wäre.

1) Bruchstücke daraus vergl. bei Villoison, aus welchem auch die auf der Tafel angegebenen Zeichen entnommen sind.

2) Nesselman citirt für diese Zeichen H. Stephanus, *thesaurus linguae Graecae.*

3) Don Calmet in dem oben citirten Aufsatze.

Gehen wir mit Pythagoras nach Aegypten über, so zeigt sich uns daselbst eine Hieroglyphenschrift, welche noch nicht durchgehends entziffert, manches Räthsel für zukünftige Forschung übrig lässt. Nichts desto weniger hat bereits die Entzifferung der Inschrift von Rosetta [2]) zur Kenntniss einiger wichtigen Zahlzeichen geführt, welche ich auf unserer Tafel nebst zwei anderen Zeichen dargestellt habe, deren Erklärung dem Horapollo [3]) entnommen ist. Es war lange Zeit Mode, lächelnd und mit Achselzucken über diesen letzteren halb apogryphen Autor vom Anfange des 5. Jahrhunderts nach Chr. Geb. abzusprechen und seine Competenz in Betreff des behandelten Gegenstandes geradezu zu leugnen. Es war dieses ein Schicksal, welches er mit allen Werken theilte, in welchen Thatsachen vorgetragen waren, die mit der Annahme des classischen Philologenthums in Widerspruch standen, dass von den Griechen erst Bildung, Kunst und Wissenschaft erfunden und verbreitet worden. Musste doch in ähnlicher Weise selbst Herodot, der Vater der Geschichte, als Fabeldichter sich bezeichnen lassen. Die grossartigen Bemühungen der letzten dreissig Jahre haben indessen die Ehrenrettung der meisten jener verläumdeten Schriftsteller aufs Klarste zu Tage gebracht, und so hat auch Horapollo sich als durchaus wahrheitsliebend, als vollständig in der Hieroglyphen-Sprache bewandert und als untadelhafte Controle bei modernen Uebersetzungen bewährt. Es erscheint danach auch gerechtfertigt, nach ihm den Stern [4]) als Zeichen der 5 und zwei sich schneidende Linien [5]) als Zeichen der 10 anzunehmen. Hierbei drängen sich aber mehrere Bemerkungen von vielleicht nicht ganz unbedeutender Tragweite auf [6]). Das Zeichen der 1 ist nämlich mit dem von den Römern benutzten Striche ganz identisch; das Zeichen der 10, wie Horapollo es beschreibt, weisst verschoben auf das römische Kreuz hin; und endlich das Zeichen der 100 zu Rosetta ist vollständig das spätere römische C. So wären also von den vier selbstständigen Zahlenelementen der Römer I, X, C, M [7]) drei auf die Aegypter zurückgeführt, und ich wenigstens möchte danach die in meinem ersten Aufsatze noch angenommene Entstehung aus Strichen um so mehr aufgeben, als auch in sehr alten römi-

1) Vergl. auf der beigegebenen Tafel die Formen der einzelnen Buchstaben, aus welchen Huet die Zahlzeichen herleitet.

2) Vergl. W. Osburn, *The monumental history of Egypt.* London 1854, 8., Vol. 1, p. 147.

3) *Horapollinis Niloei Hieroglyphica edidit Leemans.* Amsterdam 1835.

4) *Ἀστέρα γράφοντες δηλοῦσι τὸν πέντε ἀριθμόν· ἐπειδὴ πλήθους ὄντος ἐν οὐρανῷ πέντε μόνοι ἐξ αὐτῶν κινούμενοι τὴν τοῦ κόσμου οἰκονομίαν ἐκτελοῦσιν.* Lib. I., cap. 13.

5) *Γραμμὴ ὀρθὴ μία ἅμα γραμμῇ ἐπικεκαμμένῃ δέκα γραμμὰς ἐπιπέδους σημαίνουσιν.* Lib. II, cap. 30.

6) Die von Champollion aus dem sogenannten Grab der Zahlen entnommenen Hieroglyphen stimmen fast identisch mit denen aus Rosetta überein. Die Numerationsmethode ist additiv und nur selten multiplicativ.

7) V, L, D sind bekanntlich nur deren Hälften.

schen Inschriften nicht blos die eckigen, sondern auch die abgerundeten Formen der Ziffern vorkommen.

Das Zeichen der Tausend in Rosetta lässt einen anderen Zusammenhang noch ahnen. Ich möchte dasselbe nämlich für einen Lotos halten und dann ergiebt sich die eigenthümliche Uebereinstimmung, dass *padma*, der Name dieser Blume auf Sanskrit, gleichzeitig auch ein Zahlwort ist, und als solches Tausend Millionen bedeutet.

Endlich das letzte Zeichen, welches zu Vergleichungen Anlass geben kann, ist der für die Fünf gebrauchte Stern. Ich will nur daran erinnern, dass die Araber als ältestes Zeichen der Fünf ihren Finalbuchstaben *He* benutzten, welcher mit einem Stern die grösste Aehnlichkeit hat. Freilich war dieser Buchstabe, wenn auch jetzt einer der letzten des arabischen Alphabetes, in einer früher gebräuchlichen Reihenfolge [1]) der fünfte, so dass die Aehnlichkeit mit dem Sterne nichts absolut Beweisendes hat. Interessant ist jedoch, dass als später die Araber, gleichviel aus welcher Quelle, die Null erhielten, sie auch dieses Zeichen mit ihrem *He* identificirten und aus Furcht vor Verwechselungen in einen Punkt concentrirten. Es ergiebt sich dieses deutlich aus einer Stelle des arabischen Scholiasten zum *Khilâsat-al-Hisab* [2]), welche Nesselmann (Gesch. der Alg. bei den Griechen, S. 103) im Original, sowie in der Uebersetzung abgedruckt hat, und welche auf deutsch folgendermassen lautet: „Wenn an irgend einer Stelle keine Zahl vorhanden ist, so schreibt man der Deutlichkeit wegen an der Stelle das Finalzeichen des Buchstaben *Ha*, nämlich 8, welches das Zeichen *Sifr*, in dem Sinne von etwas Leerem ist. Gegenwärtig ist die Veränderung eingetreten, dass das Finalzeichen *Ha* die Fünf bedeutet und für das Zeichen *Sifr* ein Punkt geblieben ist.“ [3])

So ergab sich also auf ägyptischem Boden zwar manches Erwähnenswerthe, aber durchaus kein Anhaltspunkt dafür, dass Pythagoras seine Kenntniss der Zahlen dort geschöpft haben sollte. In der That stimmen auch damit die Zeugnisse der Alten überein, welche die mathematischen Kenntnisse des Pythagoras besprechen. Theon von Smyrna, Porphyr und Jamblich [4]) erzählen in ganz gleicher Weise, aus Aegypten stammten die geometrischen Kenntnisse des Pythagoras, während sie für seine arithmetischen und zahlentheoretischen Kenntnisse auf die Phöniker und Chaldäer verweisen. Begleiten wir desshalb Pythagoras in die Gefangenschaft nach Babylon, um zu sehen, ob und was er eigentlich dort lernen konnte. Ich sage, ob er dort etwas lernen konnte, nicht als wenn ich glaubte, noch näher zeigen zu müssen, was seit Layard's und anderer Bemühungen aus 2500jährigem Schutt klar und deutlich ans Licht kam, dass in Babylon eine ganze Civilisation mit allen ihren Vorzügen und Mängeln dem Ankommenden entgegentrat, sondern weil der Einwand leicht wäre, wie die Stellung als Gefangener einem tieferen Bekanntwerden mit der Wissenschaft der Mager hindernd in den Weg treten konnte. Sieht man doch gerade auf den Wandsculpturen der dortigen Ausgrabungen, wie Kriegs-Gefangene zum härtesten Frohndienste angehalten werden und unter der Peitsche des Aufsehers Statuen ziehen, Steine tragen und sonstiges Material beschaffen müssen. Allein abgesehen von dem zwölfjährigen Aufenthalte, während dessen ein so hervorragender Geist sich aus jeder Stellung zu erheben vermochte, ist doch wohl nicht anzunehmen, dass auch die gefangenen Priester zu gleich strengem Loose wie das gemeine Volk mitgeschleppt wurden, und ganz besonders dem Pythagoras, der ausser dem ägyptischen Tempeldienste auch in sämmtliche phönikische, dem assyrischen so nahe stehende Mysterien eingeweiht war [1]), musste es leicht werden, mit den babylonischen Priestern, den Magern, in nähere Berührung zu treten.

Diese besassen aber in der Keilschrift ein zwar nur aus wenigen Elementen bestehendes, aber aus diesen in überraschendster Reichhaltigkeit zusammengesetztes Alphabet nebst Zahlzeichen, deren Erklärung den nach einander folgenden Bemühungen von Hincks [2]), Rawlinson [3]), Grotefend [4]) (1847—1852) nicht Widerstand zu leisten vermochte. Ich will versuchen, das Gemeinsame dessen, was die genannten Gelehrten entdeckten, hervorzuheben, wenn auch deren Entzifferungen sich auf drei unter einander wesentlich verschiedene Arten von Keilschriften beziehen. Es ergiebt sich nämlich hier das eigenthümliche Verhältniss, dass trotz der Verschiedenheit der Sprachen gerade in der Schreibart der Zahlen die grösste Analogie herrscht. Genau betrachtet darf uns diese Thatsache bei Zahlzeichen am wenigsten wundern; auch heute werden wegen dieser Identität der Ziffern mathematische Schriften selbst von Solchen gelesen werden können, welche die Sprache des Textes absolut nicht verstehen. Und auch sonst lässt sich ein oder das andere Beispiel dafür auffinden, dass verschiedene Völker derselben Schrift sich bedienen. So erzählt Staunton [5]), dass Inselbewohner des indischen Oceans bei totaler Unkenntniss der chinesischen Sprache einen schriftlichen Verkehr in den Zeichen dieser Sprache durchführen konnten, welche offenbar in ihrer Landessprache denselben Wortbedeutungen zum Bilde dienten.

---

1) Jene ältere Reihenfolge, welche in den meisten Buchstaben mit der hebräischen übereinstimmt, ist noch unter dem Namen *Abudjed* in Erinnerung.

2) Ueber dieses persische Sammelwerk habe ich Bd. II, S. 361 der Zeitschrift für Mathematik und Physik Näheres angegeben.

3) Der Scholiast scheint mir hier ein Hysteronproteron zu begehen, indem er die Null als länger bekannt, als das runde Zeichen für fünf annimmt. Hätte er indessen recht, so würde dieses nur um so mehr für die im Texte ausgesprochene Hypothese beweisen.

4) Vergl. Röth in dem citirten Bande, Note 51, 404, 817.

---

1) Vergl. Röth, S. 309.

2) Hincks, *On the Inscription at Van. (Journal of the Asiatic society. Vol. IX.)*

3) Rawlinson, *The Persian cuneiform Inscription at Behistun. (Journal of the Asiatic society, Vol. X.)*

4) Grotefend, Die Tributverzeichnisse des Obelisken aus Nimrud. (Abhandlungen der königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Bd. V).

5) Staunton, *Embassy to China*, Vol. I, p. 311.

Die Elemente der Keilschrift bestehen aus einem verticalen Keile, einem horizontalen Keile und zwei mit der breiten Seite aneinander stossenden geneigten Keilen, welche letztere in der Regel Winkelhaken genannt werden. Von diesen drei Elementen wurden bisher das erste und dritte vereinzelt als Zahlzeichen gefunden, indem der Verticalkeil die Einheit, der Winkelhaken die Zehn bedeutet. Aus einzelnen neben oder übereinander stehenden Verticalkeilen sind alsdann die Ziffern bis neun gebildet, wobei ein ungerader Keil bald in breiterer Gestalt unter den übrigen, bald länger nach den übrigen steht, so dass die vorhergehende Doppelreihe ihn nicht überragt. Von zehn an wird, wie bereits bemerkt, der Winkelhaken hinzugenommen und dann die folgenden Zahlen aus Winkelhaken und Verticalkeilen additiv so zusammengesetzt, dass immer die höhere Ziffer links steht. Darin scheint demnach auch der Grund zu liegen, dass der ungerade Verticalkeil immer am Ende rechts steht. Aus der angegebenen Regel folgt nun von selbst die Vermuthung, dass ein der höhern Zahl vorgesetztes niedrigeres Element nicht mehr additiv zu nehmen sein dürfte, wie z. B. auch bei den Römern eine derartige Functionsänderung stattfand. In der That ergab sich der Operationswechsel dahin, dass ein niedrigeres Element, dem höheren vorgesetzt, dasselbe multiplicirt[1]), während dabei zugleich der Verticalkeil den Sinn fünf annahm, so dass damit ein leichtes Zeichen für fünfzig entstand, an welches wieder additiv nach rechts fortgezählt wurde[2]). Bei der Hundert findet sich auch wieder ein Verticalkeil am Anfange, dem aber ein horizontaler Keil folgt, so dass ich die Hypothese nicht unterdrücken kann, es dürfte vielleicht auch der horizontale Keil in der Bedeutung zwanzig noch einzeln vorkommen. Dass nämlich zwanzig auch durch zwei Winkelhaken bezeichnet wird, kann bei einer an Varianten so überreichen Schrift nicht als Einwand gelten[3]). Wenigstens bleibt von hier an das Gesetz der Addition zur Rechten, der Multiplication zur Linken bis in die höchsten Zahlen, so dass Tausend als 10×100 durch Vereinigung der drei Elemente (Winkelhaken, Verticalkeil, Horizontalkeil) sich darstellt, und in ähnlicher Weise auch weiter nummerirt wird. Ob der Verticalkeil vor 1000[4]) etwa 5000 bezeichnet, muss ich dahin gestellt sein lassen. Grotefend scheint diese Ansicht nicht zu theilen, indem er gerade in Bezug auf diese Stelle bemerkt: „Das Zeichen 1000 wurde so sehr als ein Nennwort behandelt, dass man sogar einen einzelnen Verticalkeil davorgesetzt findet.“

1) Gewissermassen als Coefficient des folgenden Gruppenzeichens, also ganz in moderner Weise.

2) Hincks scheint der Ansicht zu sein, dass der einer höheren Zahl vorhergehende Verticalkeil schon allein das fünffache folgende Element bedeute. Demnach liest er das als 50 erklärte Zeiche als 60 und will in Khorsabad einen längeren Verticalkeil vor zwei kleineren über einander stehenden Verticalkeilen als 7 erkannt haben.

3) Wichtiger ist der Einwand von Hincks, welcher das Zeichen für 100 für den Anfangsbuchstaben des Zahlwortes hält und ebenso das Zeichen für 1000, das also nur zufällig der Multiplicationsregel zu folgen scheine. Derselbe will auch noch ein Zeichen für 10000 gefunden haben, welches auf der Tafel eingeklammert ist.

4) Dieses Zeichen findet sich *Br. Mus. Plate* 13, *Nr.* 2.

Wir haben somit hier ein System der Bezeichnung, welches von dem Abacussystem in doppelter Weise sich unterscheidet. Erstens, und das wäre durchaus ohne Bedeutung, dadurch, dass beim Abacus die Gruppenzeiger über den Ziffern stehen (resp. ganz weggelassen werden), während hier die Gruppenzeiger 10, 100, 1000 in der Regel den Ziffern nachgesetzt werden[1]). Zweitens ist aber dann noch der Hauptunterschied, dass beim Abacus und bei sämmtlichen übrigen Systemen, die mir bekannt geworden, die Ziffern in jeder Stellung denselben Werth behalten, während hier der Wechsel von eins in fünf characteristisch und bisher ganz einzig auftritt. Dieser letzte Unterschied kann desshalb auch nicht genug hervorgehoben werden und so sind wir abermals in der Hoffnung getäuscht, sichere Spuren der künftigen pythagorischen Zeichen zu finden.

Freilich giebt Layard[2]) an, es existire noch eine assyrische Cursivschrift, welche, dem Hebräischen ähnlich, von rechts nach links sich lese, und welche auch eigenthümliche Zahlzeichen besitze, mit denen die Backsteine numerirt wurden; doch ist diese kurze nichtssagende Angabe Alles, was ich über diesen Gegenstand auffinden konnte.

Und dennoch muss es in Babylon gewesen sein, wo Pythagoras jene Kenntnisse schöpfte; dafür sprechen zu deutlich jene bereits erwähnten Angaben der Alten. So bleibt uns nur noch, bei den Völkern nachzuforschen, welche in damaliger Zeit mit Babylon in beständigem Handelsverkehr standen, und deren Rechen- und Schreibart dem von Wissbegierde Erfüllten nicht fremd bleiben konnte, wenn gleich der durchaus conventionelle Styl chaldäischer Kunst und Wissenschaft in starrer Undurchdringlichkeit nichts davon aufnahm. Bei dieser Untersuchung fühlen wir uns aber auf das Freudigste überrascht durch die deutlichen Spuren des Gesuchten, wenn uns gleich andererseits eine kleine Verwirrung wieder dadurch bevorsteht, dass zwei Quellen sich ergeben, deren jede gewisse Gründe innerer Berechtigung in sich trägt.

Das erste Volk, von dem ich rede, ist das der Chinesen. Schon Hager stellte die Hypothese eines chinesischen Ursprungs unserer Ziffern auf und vertheidigte sie ausführlich in seiner „*Memoria sulle cifre arabiche*“[3]), auf welche sich die folgenden Betrachtungen wesentlich stützen. Ausserdem aber wurde noch der Aufsatz von Biernatzki: „Die Arithmethik der Chinesen“[4]) einer genauen Berücksichtigung unterworfen.

1) Die rein additive Bezeichnung von 20, 30, 40 u. s. w. wäre so als Ausnahme zu betrachten.

2) *Niniveh and its remains.* London 1849, Vol. II, p. 165.

3) Diese Abhandlung ist zuerst abgedruckt in den „Fundgruben des Orients“, Wien 1811, Bd. II, S. 65; dann in der *Bibliothèque Britannique*, *Genève* 1812, *Mai Nr.* 393, *Littérature p.* 15; endlich als selbstständige Brochüre, Milano 1813. Ich konnte nur den ersten und dritten Abdruck vergleichen.

4) Crelle's Journal, Bd. LII, S. 59 ff.

Dass die Chinesen in frühester Zeit mit einer ganzen Reihe von Kenntnissen vertraut waren, welche bei den Europäern erst spät Eingang fanden, grösstentheils nachentdeckt werden mussten, ist bekannt genug. Ich erinnere nur an die Bereitung des Schiesspulvers, an die Benutzung des Compasses, an die wichtigste aller Erfindungen, an die Buchdruckerkunst, welche unbestrittenes Eigenthum jenes fernsten Ostens war lange bevor auch nur die Morgendämmerung der Wissenschaft für Europa erwachte. Weniger erforscht waren bis vor einigen Jahren die Kenntnisse des alten China's in Arithmetik und Geometrie und erst ein Aufsatz: *Jottings on the science of chinese arithmetic* [1]) im *Shanghae Almanac for* 1853 *and Miscellany, printed Shanghae*, hat auch hier den Beweis mannigfacher Prioritätsrechte für China geführt. So weist die Sage wenigstens den Anfang der gegenwärtig gebräuchlichen chronologischen Aera der Cyclen auf das 61. Jahr des Kaisers Hwang-ti zurück, welches dem Jahr 2637 vor Chr. Geb. entspricht. So setzte nach dem Schu-king Kaiser Yaou (2300 vor Chr. Geb.) ein Collegium von Astronomen ein, um die nöthigen Zeitrechnungen zu machen und einen Kalender abzufassen. So existirt bis auf den heutigen Tag eine mathematische Schrift „Tschau-pi" (Schenkelbein des Tschau) [2]), welche von dem Kaiser Tschau-kong selbst (um 1100 vor Chr. Geb.) oder doch unter seiner Mitwirkung verfasst wurde, und deren erster Abschnitt in übersichtlicher Weise den Inhalt des ganzen Werkes angibt. Nicht ohne Staunen sieht man darin schon den Satz von den Seiten des rechtwinkeligen Dreiecks in folgender Gestalt auftreten: „Zerlegt man einen rechten Winkel in seine Bestandtheile, so ist eine die Endpunkte seiner Schenkel verbindende Linie gleich 5, wenn die Basis gleich 3 und die Höhe gleich 4 ist". Und wenn wir in späteren Paragraphen die Stelle finden: „Aufgerichtet bedient man sich des rechten Winkels zu Höhenmessungen. Umgekehrt braucht man ihn, um Tiefen zu ergründen. Mittelst des horizontal liegenden rechten Winkels bestimmt man Entfernungen", in welcher die Idee der ganzen neueren trigonometrischen Vermessungen ausgesprochen liegt, dann können wir nur in die Schlussworte jenes Abschnittes mit einstimmen: „Tschau-kong rief aus: In der That, das ist vortrefflich!" Von weiteren Sätzen, deren Vorhandensein bei den Chinesen in dem Aufsatze von Biernatzki besprochen ist, will ich nur noch eine Auflösung unbestimmter Aufgaben erwähnen, welche unter dem Namen Ta-yen (grosse Erweiterung) von Sun-Tsze [3]) gelehrt wurde, und welche in den Zeichen unserer Algebra sich folgendermassen darstellt. Soll eine Zahl x gefunden werden, welche den Bedingungen entspricht:

$$x \left\{ \begin{array}{ll} \equiv n_1 & (\mathrm{mod}\ a_1) \\ \equiv n_2 & (\mathrm{mod}\ a_2) \\ \equiv n_3 & (\mathrm{mod}\ a_3), \end{array} \right.$$

so bilde man drei Hülfszahlen h_1, h_2, h_3 in der Weise, dass

$$h_1 = (a_2 \cdot a_3)^2 - a_1 \cdot a_2 \cdot a_3\ E\left(\frac{a_2 \cdot a_3}{a_1}\right),$$

$$h_2 = (a_1 \cdot a_3)^2 - a_1 \cdot a_2 \cdot a_3\ E\left(\frac{a_1 \cdot a_3}{a_2}\right),$$

$$h_3 = (a_1 \cdot a_2)^2 - a_1 \cdot a_2 \cdot a_3\ E\left(\frac{a_1 \cdot a_2}{a_3}\right),$$

wo E das bekannte Abel'sche Zeichen für Ganze bedeutet. Alsdann wird der Aufgabe genügt durch

$$x = h_1 \cdot n_1 + h_2 \cdot n_2 + h_3 \cdot n_3.$$

Offenbar ist übrigens diese Auflösung im Allgemeinen unrichtig, wenigstens nur in dem sehr speciellen Falle richtig, wenn gleichzeitig

$$(a_2 \cdot a_3)^2 \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ a_1)$$
$$(a_1 \cdot a_3)^2 \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ a_2)$$
$$(a_1 \cdot a_2)^2 \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ a_3);$$

und so scheinen gerade in Untersuchungen der unbestimmten Analytik die Chinesen hinter anderen gleichzeitigen Culturvölkern eher zurück gewesen zu sein.

Natürlich ist aber von solchen verhältnissmässig höheren Untersuchungen auf die Existenz der Zahlzeichen keinenfalls ein ungünstiger Rückschluss zu ziehen. Für das Vorhandensein solcher Zeichen spricht hingegen besonders ein Grund, welchen schon Hager scharf hervorgehoben hat. Die Chinesen, so lauten ungefähr seine Schlüsse, haben eine Schrift ohne irgend Buchstabenbezeichnung; jedes Wort wird vielmehr durch ein besonderes Zeichen angegeben. Da aber in jedem Buche wohl auch Zahlenausdrücke vorkommen, bald grössere, wenn es der Gegenstand so mit sich bringt, jedenfalls aber doch kleinere, wie zwei, drei, vier, so müssen auch Zeichen für solche Zahlwörter erfunden worden sein, und zwar gleichzeitig mit der übrigen Schrift. Wenn nun chinesische Zahlzeichen mit den unsrigen Aehnlichkeit haben, so müssen sie doch wohl dort erfunden sein. Denn wie so hätten die Chinesen gerade die Ziffernschrift allein von den Fremden übernommen, die dem Principe ihrer Sprache schon so nahe liegt?

Sehen wir nun zu, welche Zeichen Hager als ächt chinesisch uns angibt und wie er deren Zusammenhang mit unseren Ziffern erläutert. Wir werden jetzt im Stande sein, die Bedeutsamkeit dieser Vergleichung zu würdigen. Es ist in der That keinem Zweifel unterworfen, dass die Zeichen, welche Hager für eins, zwei, drei, fünf, acht, neun angibt, die grösste Aehnlichkeit besonders mit den Zeichen des Altdorfer Codex ergeben, wo sie in der Bedeutung eins, zwei, drei, acht, sieben, vier wieder vorkommen; es

1) Dieser Aufsatz wird von Biernatzky als seine Hauptquelle angegeben. Ich konnte mir das Original nicht verschaffen.

2) Die Basis und Höhe eines rechtwinkeligen Dreiecks wurden nämlich, nach Biernatzky, mit den Namen Schenkel und Bein angedeutet, ähnlich wie man auch im Deutschen von den Schenkeln eines Winkels spricht.

3) Dieser Schriftsteller lebte nach Einigen 220 vor Chr. Geb., wahrscheinlicher im dritten Jahrhundert nach Chr. Geb.

lässt sich ferner nicht läugnen, dass die Null der Chinesen von Hager in ganz moderner Gestalt abgebildet ist, und dass endlich die Schreibweise nach Rangordnung, wie derselbe Schriftsteller sie uns angibt, völlig mit unserer heutigen übereinstimmt.

Trotz dieser wichtigen Analogieen steigen doch einzelne Zweifel an der Richtigkeit dieser Abstammung auf. Ein Einwand, den man erheben könnte, bestände darin, ob dem Princip der chinesischen Sprache nicht gerade das Zahlensystem widerspräche; ob nicht vielmehr eigentlich für jede neue Zahl ein neues Zeichen hätte erfunden werden müssen. Dem steht indessen siegreich entgegen, dass die Chinesen auch sonst zusammengesetzte Wörter kennen, welche durch Neben- oder vielmehr Untereinanderstellung der Zeichen für die einzelnen Wörter gebildet werden.

Ein anderer Einwand besteht darin, dass selbst Hager nicht im Stande ist, alle Ziffern aus China herzuleiten, und für den Ursprung einiger auf andere Quellen verweist; gewiss ein Zeichen von Schwäche bei seiner Hypothese.

Endlich der wichtigste Gegengrund ist folgender: Nach Hager's Annahme kannten die Chinesen vollständig die Schreibweise der Zahlen mit Positionswerth und Andeutung des Nichtvorhandenseins von Einheiten eines gewissen Ranges. Wenn nun Pythagoras von ihnen die Zahlenschrift gelernt haben soll, so scheint es im höchsten Grade unwahrscheinlich, dass er nur die Hälfte des Erlernten angewandt haben sollte. Mag auch der sogenannte pythagoräische Lehrsatz aus chinesischer Urquelle stammen und dem directen oder indirecten Zusammenhange des Pythagoras mit chinesischer Cultur [1]) zum Stützpunkte dienen, wie können wir annehmen, dass er Positionswerth und Werthziffern beibehalten, den Gebrauch der Null wieder vergessen haben sollte. Und dass der Gebrauch einer solchen nicht stattfand, dafür zeugt schon der negative Umstand, dass gerade der ἄβαξ der alten Griechen nur eine Rechenmethode blieb und niemals eigentliches Volkseigenthum als Schrift wurde.

Ich weiss sehr wohl, dass in den Manuscripten des Boethius aus Altdorf und Chartres ausser den Zeichen des Textes auch noch auf der Rechentafel Zahlzeichen mit semitischen Namen vorkommen, welche von den angegebenen sich etwas unterscheiden und auch noch ein zehntes Zeichen neben sich haben, welches als Null gelesen wird. Aber gerade die Verschiedenheit der Zeichen in einem und demselben Manuscripte, auf einer und derselben Seite spricht, wie Chasles [2]) sehr richtig bemerkt hat, gegen die Gleichzeitigkeit und für ein späteres Einschmuggeln dieser letzteren Ziffern, die auf dem Tableau ohnedies an durchaus ungehöriger Stelle sich befinden. Ich kann daher die Ansicht nicht aufgeben: Pythagoras kannte eine Rechentafel; er kannte auch Zeichen für die 9 Werthziffern, welche auf der Rechentafel benutzt wurden, aber die Null kannte er nicht; und somit hatte er die von Hager als altchinesisch bezeichnete Zahlschrift nicht gekannt.

Oder hat Hager in Beziehung auf die Null geirrt? Manches scheint dafür zu sprechen. So besonders der Umstand, dass nach der chinesischen Grammatik von Abel-Rémusat (Paris 1822) ein Unterschied zwischen neu- und altchinesischen Zahlzeichen gemacht ist; dass aber bei den letzteren keine Null vorkommt, während selbst in der neuen Schrift die Null nur in der Mitte, nie am Ende der Zahlen benutzt wird [1]). Den Unterschied, dass die alten Zahlen übereinander, die neuen nebeneinander geschrieben erscheinen, führe ich nur der Vollständigkeit wegen an. Darnach könnte vielleicht doch die alte Schreibweise der Chinesen dem pythagorischen System nicht widersprechen, und es liegt hier jedenfalls ein Gegenstand zur Untersuchung vor, über welchen nur Sinologen abzuurtheilen berechtigt sind.

Für das Vorhandensein der Null bei den alten Chinesen muss ich allerdings noch auf einen wichtigen Punkt aufmerksam machen, den Hager auffallend genug übersehen hat. Ich meine das dyadische Zahlensystem mit den Zeichen für Eins und Null, welches schon zu Fohi's Zeiten (etwa 2200 vor Chr. Geb.) in einem astronomischen Werke vorkommen soll. Leibnitz lieferte bekanntlich in seiner *Arithmétique binaire* [2]) Proben eines dyadischen Systems, in welchem er eine allegorische Darstellung der Schöpfung aus Nichts sah. *Omnibus ex nihilo ducendis sufficit unum* schrieb er schon 1697 an den Herzog von Braunschweig, und fügte hinzu, er wolle seine Erfindung dem Pater Grimaldi nach China schicken, in der Erwartung, dass ihr tiefer Sinn den Kaiser von China bekehren möge. Auf diese Weise lernte der Missionär Bouvet die Dyadik kennen, welche ihm alsbald zur Entzifferung alter Manuscripte diente. Wenn aber somit die Null in einem Systeme bekannt war, so ist doch wohl kein Grund vorhanden, ihre Existenz in einem anderen Systeme zu läugnen.

Ich komme nun zu dem zweiten Volke, welches mit Babylon in Verkehr stand und bei welchem Spuren unserer Ziffern sich finden, zu den Indern. Es ist zum Volksausdrucke geworden, unsere Ziffern die indischen zu nennen, und so sehr ich damit einverstanden bin, dass weit verbreiteten Ansichten im Allgemeinen historische Wahrheit anhaftet, so muss man doch, wo es um eine Abstammung sich handelt, sich nicht dadurch täuschen lassen, dass oft der Name des blossen Vermittlers unterschoben wird. Heissen doch die Ziffern

---

1) Für den Zusammenhang von China mit Assyrien zeugen auch Glasfläschchen mit chinesischer Inschrift, welche Layard in Arban unter altassyrischem Schutte fand. Vergl. dessen *Nineveh and Babylon*. London 1853, p. 279.

2) Geschichte der Geometrie (deutsche Uebersetzung) S. 533 Note.

1) Vergl. die Bezeichnungsweise auf der beigegebenen Tafel. Die altchinesischen Ziffern ohne Null sind nach Abel-Rémusat p. 49. Indessen findet sich ebendaselbst p. 115 neben den neuen Kaufmannsziffern ein altes sehr complicirtes Zeichen für Null.

2) *Mémoires de l'académie des sciences. Année 1703.*