# Heidelberger Texte zur Mathematikgeschichte

Autor: **Fuchs, Lazarus** (1833–1902)

Titel: **Über Grenzen, innerhalb deren gewisse bestimmte Integrale vorgeschriebene Vorzeichen behalten**

Quelle: Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.
Jahrgang 1902, 1. Halbband,
Seite 4 – 10.


Es wird für das Integral $\int_0^x F(u, u', \ldots, u^{(n)})dx$, wo $F$ eine quadratische Form der Funktion $u$ und ihrer Ableitungen $u', \ldots, u^{(n)}$ mit konstanten Koeffizienten bedeutet, ein Intervall festgestellt, innerhalb dessen die reelle Variable $x$ sich bewegen kann, ohne dass das Vorzeichen des Integrals sich ändert.

Dies war der letzte Vortrag, den Lazarus Fuchs (1833–1902) an der Berliner Akademie gehalten hat.

1902.
II.

# SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN

# AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

## 9. Januar. Sitzung der physikalisch-mathematischen Classe.

1. Hr. Fuchs las: Über Grenzen, innerhalb deren gewisse bestimmte Integrale vorgeschriebene Vorzeichen behalten.

Es wird für das Integral $\int_0^x F(u, u', \ldots, u^{(n)})\,dx$, wo $F$ eine quadratische Form der Function $u$ und ihrer Ableitungen $u', \ldots, u^{(n)}$ mit constanten Coefficienten bedeutet, ein Intervall festgestellt, innerhalb dessen die reale Variable $x$ sich bewegen kann, ohne dass das Vorzeichen des Integrals sich ändert.

2. Hr. Kohlrausch legte eine Mittheilung der HH. Prof. Dr. O. Lummer und Dr. E. Gehrcke in Charlottenburg vor: Über den Bau der Quecksilberlinien; ein Beitrag zur Auflösung feinster Spectrallinien.

Die Verfasser bedienen sich der Interferenzmethode von Lummer, um die feinsten, mit Prismen und Gittern nicht auflösbaren Spectrallinien zu analysiren. Das Licht durchsetzt eine unbelegte, planparallele Glasplatte grosser Dimension, bei jeder wiederholten inneren Reflexion nahezu streifend austretend. In Folge der Einführung eines Nicol'schen Prismas und der Verwirklichung streifender Incidenz ohne einen zu grossen Intensitätsverlust leistet diese Methode die erwartete Auflösungsfähigkeit. Alle lichtstarken Linien des Arons'schen Quecksilberbogenlichts zeigen einen weit complicirtern Bau, als aus den bisherigen Untersuchungen hervorgeht. So konnte z. B. jede der beiden gelben Hg-Linien in einen Complex von wenigstens 5 bez. 6 Linien aufgelöst werden. Der complicirte Bau der untersuchten Spectrallinien kann zur Erklärung der Anomalien herangezogen werden, welche man beim Zeeman-Effect beobachtet hat. Dass jede der gelben Hg-Linien im Magnetfelde eine Abweichung vom normalen Duplet bez. Triplet zeigen wird, ist von vorn herein zu erwarten.

3. Hr. Klein legte eine Mittheilung des Assistenten am Mineralogischen Institut der Universität Breslau Hrn. Dr. A. Sachs vor: Über Anapait, ein neues Kalkeisenphosphat von Anapa am Schwarzen Meere.

Verf. schildert die krystallographischen, physikalischen und chemischen Eigenschaften des neuen Minerals, das triklin krystallisirt und von der Zusammensetzung $FeCa^2(PO^4)^2 + 4H^2O$ ist.

4. Hr. von Bezold überreichte den soeben erschienenen I. Band der »Abhandlungen« des Königl. Meteorologischen Instituts.

# Über Grenzen, innerhalb deren gewisse bestimmte Integrale vorgeschriebene Vorzeichen behalten.

Von L. Fuchs.

## 1.

Die folgende Notiz ist ein Auszug aus einem ausführlicheren Aufsatze, welcher demnächst erscheinen wird und sich mit der folgenden Aufgabe beschäftigt.

Ist $F(u, u', \ldots, u^{(n)})$ eine quadratische Form der unbestimmten Function $u$ und ihrer $n$ ersten Ableitungen $u', \ldots, u^{(n)}$, deren Coefficienten gegebene reale Functionen der realen Variablen $x$ sind; wird ferner vorausgesetzt, dass die Function $u$ ebenfalls real ist und nebst ihren Ableitungen in der Nähe eines Werthes $x = a$ sich regulär verhält, so soll ein Intervall $a$ bis $b$ angegeben werden, von der Beschaffenheit, dass das Vorzeichen des Integrals

$$\int_a^x F(u, u', \ldots, u^{(n)})\,dx$$

für jede beliebige der bezeichneten Functionen $u$ beständig dasselbe bleibt, solange $x$ dem Intervalle $a$ bis $b$ angehört. Wir bedienen uns hierzu des Hülfsmittels, welches dem in der Variationsrechnung bei der Umformung der zweiten Variation angewendeten analog ist.

Wir suchen nämlich einen linearen Differentialausdruck

$$(1.)\qquad Q(u) = u^{(n)} + q_1 u^{(n-1)} + \ldots + q_n u,$$

dessen Coefficienten reale Functionen von $x$, so zu bestimmen, dass

$$(2.)\qquad F(u, u', \ldots, u^{(n)}) - p_{nn} Q(u)^2 = \frac{d}{dx}\left(\phi(u, u', \ldots, u^{(n-1)})\right)$$

wird, wo $p_{nn}$ den Coefficienten von $u^{(n)2}$ in $F(u, u', \ldots, u^{(n)})$ bezeichnet, und wo $\phi$ ebenfalls eine quadratische Form ist, deren Coefficienten wohlbestimmte reale Functionen von $x$ bedeuten.

Während jedoch in der Gleichung

$$(3.)\quad \int_a^x F(u, u', \ldots, u^{(n)})\,dx = \phi(u, u', \ldots, u^{(n-1)})_{x=x} - \phi(u, u', \ldots, u^{(n-1)})_{x=a} + p_{nn}\int_a^x Q(u)^2\,dx$$

das Vorzeichen des Ausdruckes

$$\phi(u, u', \ldots, u^{(n-1)})_{x=x} - \phi(u, u', \ldots, u^{(n-1)})_{x=a}$$

in der Variationsrechnung, der Natur der in dieser Disciplin behandelten Probleme entsprechend, ausser Betracht kommt, ist es für unsere Aufgabe unumgänglich nöthig, das Vorzeichen dieses Ausdruckes zu kennen.

In der oben bezeichneten Arbeit führen wir die Untersuchung zunächst für den Fall aus, wo die Coefficienten der Form $F(u, u', \ldots, u^{(n)})$ von $x$ unabhängige reale Grössen sind, also für

$$(4.)\quad F(u, u', \ldots, u^{(n)}) = \sum_{k,l} c_{kl} u^{(k)} u^{(l)}, \qquad \begin{pmatrix} k = 0, 1, \ldots, n \\ l = 0, 1, \ldots, n \end{pmatrix}$$

wo $c_{kl}$ reale Constanten bedeuten.

Ohne der Allgemeinheit Eintrag zu thun, können wir $a = 0$ wählen.

## 2.

Für $n = 1$ sei

$$(1.)\quad Q(u) = u' + q_1 u$$

und

$$(2.)\quad F(u, u') - c_{11} Q(u)^2 = 2(c_{01} - c_{11} q_1)\, u u' + (c_{00} - c_{11} q_1^2)\, u^2.$$

Wenn dann

$$(3.)\quad c_{00} - c_{11} q_1^2 = -c_{11} q_1',$$

so ist[1] also

$$(4.)\quad F(u, u') - c_{11} Q(u)^2 = \frac{d}{dx}\left((c_{01} - c_{11} q_1)\, u^2\right).$$

Wir wählen die Lösung $q_1$ der Gleichung (3.) so, dass $q_1$ für $x = 0$ unendlich wird. Dieselbe ist

$$(5.)\quad q_1 = -r \cdot \frac{e^{rx} + e^{-rx}}{e^{rx} - e^{-rx}},$$

wo

$$r = \sqrt{\frac{c_{00}}{c_{11}}}.$$

[1] Vergl. Legendre. Mémoires de l'Académie des sciences de Paris 1786.

Der Ausdruck $q_1$ ist immer eine reale Function von $x$. Haben nämlich $c_{00}$, $c_{11}$ gleiche Vorzeichen, so ist $r$ real, sind die Vorzeichen von $c_{00}$, $c_{11}$ entgegengesetzt, so ist $r$ rein imaginär $r = \rho i$ und es ist $q_1 = -\rho \operatorname{cotg} \rho x$.

Für Functionen $u$, welche sich in der Nähe von $x = 0$ regulär verhalten und für $x = 0$ verschwinden, ist $Q(u)$ ebenfalls in der Nähe von $x = 0$ regulär. Dasselbe gilt von dem Ausdrucke $(c_{01} - c_{11} q_1) u^2$, welcher für $x = 0$ den Werth Null annimmt.

Aus (4.) ergiebt sich

$$\int_0^x F(u, u')\, dx = (c_{01} - c_{11} q_1) u^2 + c_{11} \int_0^x Q(u)^2 dx. \tag{6.}$$

Wir nehmen jetzt an, das $c_{11}$ positiv sei. Da $q_1$ nach Gleichung (5.) für hinlänglich kleine positive Werthe von $x$ einen negativen Werth erhält, so ist für dieselben Werthe von $x$ $c_{01} - c_{11} q_1$ positiv, und dieser Ausdruck behält das positive Vorzeichen bis

$$c_{01} - c_{11} q_1 = 0 \tag{7.}$$

wird.

Ist $x = \alpha$ der kleinste positive Werth für welchen $q_1$ unendlich wird, $\beta$ die kleinste positive Wurzel der Gleichung (7.), und bezeichnen wir mit $b$ die kleinere der beiden Grössen $\alpha$ und $\beta$, so ergiebt sich demnach, dass für eine beliebige Function $u$, welche für $x = 0$ verschwindet und in der Nähe von $x = 0$ sich regulär verhält, die linke Seite der Gleichung (6.) positiv bleibt, solange $x$ dem Intervalle 0 bis $b$ angehört.

## 3.

Für $n > 1$ würde das Legendre'sche Verfahren die Integration eines complicirten Systems von Differentialgleichungen erfordern, dessen Discussion in Bezug auf Realität und Stetigkeit der Lösungen sehr mühsam wäre. Es ist daher die Bestimmung von $Q(u)$ nach einem Verfahren vorzuziehen, welches dem von Jacobi[1] für die Discussion der zweiten Variation gelehrten analog ist. Wir gehen zu diesem Zwecke von der Differentialgleichung

$$P(y) = \sum_{kl} (-1)^l c_{kl} y^{(k+l)} = 0 \tag{1.}$$

$$(k = 0, \ldots, n;\ l = 0, \ldots, n)$$

aus.

Da

$$c_{kl} = c_{lk}, \tag{2.}$$

[1] Crelle's Journal Bd. 17.

so erhält die Gleichung (1.) die Form

$$(3.)\qquad P(y) = \sum_{m=0}^{n} C_m y^{(2m)} = 0,$$

wo

$$(4.)\qquad C_m = 2\sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k c_{2m-k,k} + (-1)^m c_{mm}.$$

Wir bilden nunmehr den linearen Differentialausdruck $Q(u)$ derart, dass $Q(u)$ verschwindet, wenn für $u$ ein System linearer unabhängiger Lösungen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ der Gleichung (3.) gesetzt wird.

Diese Lösungen haben gewisse von Hesse[1] und Clebsch[2] aufgestellte Bedingungen zu befriedigen. Dieselben sind erfüllt, wenn wir die Anfangswerthe von $y_1, y_2, \ldots, y_n$ so wählen, dass für $x = 0$ $y_1, y_2, \ldots, y_n$ bez. der Ordnung $2n-1, 2n-2, \ldots, n$ verschwinden.[3]

Wir wollen der Einfachheit wegen, ohne der Allgemeinheit Abbruch zu thun, voraussetzen, dass die Wurzeln $\pm r_1, \pm r_2, \ldots, \pm r_n$ der Gleichung

$$(5.)\qquad \sum_{m=0}^{n} C_m r^{2m} = 0$$

von einander verschieden sind. Ist $y$ eine Lösung der Gleichung (3.), so ist auch jede Ableitung von $y$ eine Lösung derselben Gleichung. Wir wählen daher $y_1$ so, dass diese Lösung für $x = 0$ der Ordnung $2n-1$ verschwindet und dann

$$y_2 = \frac{dy_1}{dx},\ y_3 = \frac{d^2 y_1}{dx^2}, \ldots, y_n = \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}}.$$

Es ergiebt sich

$$(7.)\qquad y_1 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{r_k f_k(r_k)} \left\{ e^{r_k x} - e^{-r_k x} \right\},$$

wo

$$(8.)\qquad \begin{cases} f(z) = \sum_{m=0}^{n} C_m z^{2m} \\ f_k(z) = \dfrac{f(z)}{z^2 - r_k^2}. \end{cases}$$

Es ist $y_1$, folglich auch $y_2, y_3, \ldots, y_n$ reale Functionen von $x$. In der Gleichung

$$(9.)\qquad Q(u) = 0,$$

[1] Crelle's Journal Bd. 54.

[2] Crelle's Journal Bd. 55.

[3] Vergl. Frobenius, Crelle's Journal Bd. 85. S. 198.

welche durch $y_1, y_2, \ldots, y_n$ befriedigt wird. sind $q_1, q_2, \ldots, q_n$ demnach reale Functionen von $x$, welche bekanntlich in der Umgebung von $x = 0$ eindeutig werden und welche bez. mit $x, x^2, \ldots, x^n$ multiplicirt für $x = 0$ die Werthe $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ annehmen, wo

$$(10.)\qquad \alpha_k = (-1)^k \frac{n^2(n^2-1^2)\ldots(n^2-(k-1)^2)}{k!}.$$

Um in der Gleichung

$$(11.)\qquad F(u, u', \ldots, u^{(n)}) - c_{nn} Q(u)^2 = \frac{d\phi}{dx}$$

$\phi$ zu bestimmen, sei

$$(12.)\qquad \phi = \sum_{kl} A_{kl} u^{(k)} u^{(l)}. \quad (k = 0, \ldots, n-1;\ l = 0, \ldots, n-1)$$

Bezeichnen wir wie bisher mit oberen Accenten die Ableitungen nach $x$, so ist

$$(13.)\qquad \frac{d\phi}{dx} = \sum_{kl} A'_{kl} u^{(k)} u^{(l)} + 2u' \sum_{l=0}^{n-1} A_{0l} u^{(l)} + 2u'' \sum_{l=0}^{n-1} A_{1l} u^{(l)} + \ldots + 2u^{(n)} \sum_{l=0}^{n-1} A_{n-1l} u^{(l)}.$$

Es hat daher (11.) die Gestalt

$$(14.)\qquad \begin{aligned} &F(u, u', \ldots, u^{(n)}) - c_{nn} Q(u)^2 \\ &= \sum_{kl} A'_{kl} u^{(k)} u^{(l)} + 2u' \sum_{l=0}^{n-1} A_{0l} u^{(l)} + 2u'' \sum_{l=0}^{n-1} A_{1l} u^{(l)} + \ldots + 2u^{(n)} \sum_{l=0}^{n-1} A_{n-1l} u^{(l)}. \end{aligned}$$

Daraus, dass diese Gleichung in Bezug auf $u, u', \ldots$ identisch erfüllt ist, ergiebt sich

$$(15.)\qquad \frac{dA_{kl}}{dx} + A_{k-1l} + A_{kl-1} = c_{kl} - c_{nn} q_{n-k} q_{n-l} \quad \text{für } \begin{array}{l} k = 0, 1, \ldots, n-1 \\ l = 0, 1, \ldots, n-1 \end{array}$$

$$(15a.)\qquad A_{n-1l} = c_{n-1l} - c_{nn} q_{n-l}.$$

Die Gleichung (15.) bleibt bestehen für $k = 0$ oder $l = 0$ oder $k = 0$ und $l = 0$, wenn die Grössen mit negativem Index gleich Null gesetzt werden.

Die Gleichungen (15.) und (15a.) liefern auch leicht die expliciten Ausdrücke für $A_{n-\lambda, \kappa}$. Setzen wir nämlich

$$(16.)\qquad a_{kl} = c_{kl} - c_{nn} q_{n-k} q_{n-l},$$

so ergiebt sich

$$\begin{aligned} A_{n-\lambda-1, \kappa} &= a_{n-\lambda, \kappa} - a_{n-\lambda+1, \kappa-1} + \ldots \pm a_{n, \kappa-\lambda} \\ &- D_x(1_1 a_{n-\lambda+1, \kappa} - 2_1 a_{n-\lambda+2, \kappa-1} + 3_1 a_{n-\lambda+3, \kappa-2} - \ldots \pm \lambda_1 a_{n, \kappa-\lambda+1}) \\ &+ D_x^2(2_2 a_{n-\lambda+2, \kappa} - 3_2 a_{n-\lambda+3, \kappa-1} + 4_2 a_{n-\lambda+4, \kappa-2} - \ldots \pm \lambda_2 a_{n, \kappa-\lambda+2}) + \ldots \\ &\ldots \\ &\pm D_x^\lambda(\lambda_\lambda a_{n, \kappa}), \end{aligned}$$

wo $\lambda_k$ Binomialcoefficient ist.

## 4.

Für beliebige reale Functionen $u$, welche nebst ihren $n-1$ ersten Ableitungen für $x=0$ verschwinden und in der Nähe von $x=0$ sich regulär verhalten, ist $Q(u)$ für positive von der Null hinlänglich wenig verschiedene Werthe von $x$ ebenfalls regulär.

Wir beweisen in der oben bezeichneten Arbeit den Satz:

I. Die quadratische Form

$$\phi = \sum_{k,l} A_{kl} u^{(k)} u^{(l)} \tag{1.}$$
$$(k=0,\ \ldots,\ n-1;\ l=0,\ \ldots,\ n-1)$$

ist für positive in der Nähe von $x=0$ gelegene Werthe von $x$ definit und positiv.

Die Form $\phi$ behält also diese Eigenschaft, bis $x$ zum ersten Male die Gleichung

$$|A_{kl}| = 0 \tag{2.}$$

erfüllt.

Die Function $Q(u)$, welche bei den gemachten Annahmen in der Nähe des singulären Punktes $x=0$ der Differentialgleichung

$$Q(y) = 0 \tag{3.}$$

endlich und stetig ist, verliert diese Eigenschaft, wenn $x$ sich dem nächsten singulären Punkte der Gleichung (3.) annähert.

Bezeichnen wir den nächsten positiven singulären Punkt mit $\alpha$, während $\beta$ die kleinste positive Wurzel der Gleichung (2.) darstellt, so ergiebt sich, wenn wir $c_{nn}$ als positiv voraussetzen und die über die Functionen $u$ getroffene Vereinbarung festhalten, nach der aus der Gleichung (11.) Nr. 3 fliessenden Gleichung

$$\int_0^x F(u, u', \ldots, u^{(n)})dx = \phi(u, u', \ldots, u^{(n-1)}) + c_{nn}\int_0^x Q(u)^2 dx \tag{4.}$$

der Satz:

II. Bedeutet $u$ eine beliebige Function, welche nebst ihren $n-1$ ersten Ableitungen für $x=0$ verschwindet und in der Nähe von $x=0$ sich regulär verhält, so ist das Integral

$$\int_0^x F(u, u', \ldots, u^{(n)})dx$$

für positive zwischen $0$ und $b$ gelegene Werthe von $x$ positiv, wenn $b$ die kleinere der beiden Grössen $\alpha$ und $\beta$ darstellt, und wenn $c_{nn}$ positiv vorausgesetzt wird.

## 5.

Die im vorhergehenden skizzirte Untersuchung hat nicht nur für die Anwendungen ein praktisches Interesse: sie kann vielmehr auch in rein analytischen Fragen verwerthet werden.

Es möge genügen, dieses an dem folgenden Beispiele zu erläutern. Betrachten wir die Differentialgleichung

$$(\alpha) \qquad F(u, u', \ldots, u^{(n)}) = f(x). \qquad (f(o) \neq o)$$

wo $F(u, u', \ldots, u^{(n)})$ dieselbe Beschaffenheit wie im vorhergehenden hat, während $f(x)$ eine innerhalb des Intervalls von $x = o$ bis $x = b$ reguläre reale Function der realen Variablen $x$ ist ($b$ ist die in voriger Nummer charakterisirte Grösse).

Wird eine Lösung der Gleichung ($\alpha$) durch die Anfangswerthe $u = o$, $u' = o, \ldots, u^{(n-1)} = o$ für $x = o$ bestimmt und diese Lösung für reale positive Werthe von $x$ verfolgt, so unterliegt die Frage, ob man in einem gewissen Intervall einer Singularität von $u$ begegne, bekanntlich grossen Schwierigkeiten. Aus den Resultaten der vorigen Nummer kann man nun beispielsweise folgenden Schluss ziehen:

Ist $\int\limits_o^x f(x)dx$ nicht für alle Werthe von $x$ des Intervalles $o$ bis $b$ positiv, so kann $u$ nicht in dem ganzen Intervalle eine reale sich regulär verhaltende Function bleiben.