Heidelberger Texte zur Mathematikgeschichte

Autor: **Liebmann, Heinrich** (1874–1939)

Titel: **Die Mendelschen Gesetze und ihre Fortbildung**

Quelle: Mitteilungen der Zentralstelle für deutsche Personen- und Familiengeschichte
Band 7 (1910),
Seite 26 – 37

Erläutert die Wahrscheinlichkeit des Auftretens einer erblichen Eigenschaft nach den Mendelschen Gesetzen.

Liebmann spricht ganz unbefangen von „rassereinen Eltern“, nicht ahnend, dass die Rassenideologie des Nationalsozialismus ihn 20 Jahre später wegen eines jüdischen Großvaters aus dem Heidelberger Professorenamt drängen wird.

Mitteilungen

der

Zentralstelle für deutsche Personen- und Familiengeschichte

7. Heft

Leipzig 1910.
H. A. Ludwig Degener,
Verlagsbuchhandlung.

2.

Die Mendel'schen Gesetze und ihre Fortbildung.

Von Heinrich Liebmann.

Zu ungeahnter Bedeutung für den Genealogen sind die mühsamen Versuche gelangt, welche der fleißige Augustinermönch Gregor Mendel[1]) in den sechziger Jahren des vorigen Jahrhunderts mit Züchtung von Pflanzenbastarden veranstaltet hat; Beobachtung und Theorie machten weitere bedeutende Fortschritte. Da ist es denn wohl Zeit, in unserer Zeitschrift eine orientierende Übersicht dieser wichtigen Entdeckungen zu geben.

Wenn ich in den folgenden Zeilen diesen Versuch auf ausdrücklichen Wunsch hin zu unternehmen wage, so werde ich dabei in erster Linie die physiologischen Grundlagen an der Hand sachverständiger Vorgänger[2]) auseinandersetzen, sodann auf die Mendelschen Versuchsreihen einzugehen haben, endlich aber — und das wird für den Genealogen die Hauptsache sein — der Verhältnisse gedenken, welche bei der Vererbung von Eigenschaften im Menschengeschlechte vorwalten.

Der nahe liegenden Versuchung, interessante Beispiele auszumalen, muß ich mich wohl aus Mangel an Raum entziehen — ich darf es im Hinweis auf die Literatur, die demnächst durch E. Devrient's Buch über Familienforschung eine weitere Bereicherung erfahren wird.

1. Physiologische Grundlage.

In den Keimzellen der rassereinen Eltern müssen wir als Repräsentanten einer Eigenschaft die Chromosome betrachten, jene eigentümlichen Elemente des Zellkerns, die, für gewöhnlich mit ihresgleichen in dem mikroskopisch nicht auflösbaren Chromatin vereinigt, bei der Zellteilung wie bei der Zellvereinigung (Befruchtung) gesondert hervortreten.

[1]) Gregor Mendel, Versuche über Pflanzenhybriden (1865 und 1869), herausgegeben von E. Tschermak (Ostwalds Klassikersammlung Nr. 121).

[2]) z. B. Thesing, Biologische Streifzüge (1908).

Rasserein sind Eltern nur dann, wenn Inzucht oder Selbstbefruchtung durch viele Generationen die Konstanz der Eigenschaften erwiesen hat.

Schon *Mendel* ahnte die Chromosomentheorie, mannigfaltige Beobachtungen haben sie bestätigt — sie hat also vor der Atomtheorie der Chemie voraus, daß das Objekt dem Auge in einigen Fällen wirklich zugänglich geworden ist, sie steht aber hinter ihr zurück dadurch, daß sie nur mit Mühe die komplizierten Verhältnisse der Biologie vollständig beherrschen wird; es müßte die Anzahl der Chromosome in einem Zellkern ins Ungeheuerliche angeschwollen sein bei einigermaßen komplizierten Organismen. Ob die Biologie dieser Schwierigkeit Herr zu werden vermag, das ist eine Frage der Zukunft.

Wir greifen jetzt ein Merkmalspaar (A, B) heraus, z. B. rotblühend und weißblühend bei Mirabilis Jalapa, oder Samenkorn rund und Samenkorn eckig bei der Erbse.

Wie müssen wir die Kinder eines solchen Elternpaares bezeichnen?

Der Eigenschaft A entspricht ein Chromosomenpaar AA im Zellern des rassereinen Individuums, ebenso gehört BB zu B. Das Chromosomenpaar AA vereinigt sich mit BB, also ist die erste Bastardgeneration von der Form:

AB

In die äußere Erscheinung tritt die Bastardierung entweder durch *Mischung* (C) z. B. rosa Farbe oder *gar nicht*, z. B. die Samen sind wieder rund (A). Im ersten Falle sagen wir A und B sind *gleich mächtig*, im zweiten Fall: A dominiert, B ist rezessiv.

2. *Die Gesetze von Mendel.*

Diese erste Generation weist hiernach statt der Chromosomenpaare AA und BB die Chromosomenpaare AB durchgängig auf. Wenn wir jetzt wahllos kreuzen, so haben folgende Kombinationen gleiche Berechtigung, sind gleich möglich — was dies heißt, dabei werden wir noch verweilen.

Ein A des Elters 1 vereinigt sich mit einem A des Elters 2 zu AA
„ A „ „ 1 „ „ „ „ B „ „ 2 „ AB
„ B „ „ 1 „ „ „ „ A „ „ 2 „ AB
„ B „ „ 1 „ „ „ „ B „ „ 2 „ BB

oder AA + 2 AB + BB, d. h. es werden vertreten sein unter den Kindern

$$\frac{1}{4}\ \mathrm{AA},\ \frac{1}{2}\ \mathrm{AB},\ \frac{1}{4}\ \mathrm{BB}.$$

Es ist die Grundannahme der Wahrscheinlichkeitsrechnung, daß jede gleich mögliche Kombination auch gleich oft auftritt. Man kann sie am „Urnenschema“ erläutern: Ist eine Urne gegeben mit gleichviel schwarzen und weißen Kugeln, und wir ziehen eine Kugel, notieren uns die Farbe, legen sodann die Kugel wieder zurück und wiederholen dieses Verfahren recht oft; wie wird dann unsere Liste aussehen? Ja, da wird wohl die Antwort lauten: beinahe ebensoviel Weiße wie Schwarze. Um dieses Argument noch eindringlicher zu gestalten, braucht man sich nur die andere Frage vorzulegen: Wird das vorgeschriebene Verfahren ehrlich durchgeführt, d. h. werden die Kugeln jedesmal wieder tüchtig durcheinandergerührt und blindlings zugegriffen, ergibt sich aber unter 1000 Zügen nur 100 mal weiß und 900 mal schwarz, wird dann ein Mensch glauben, daß gleichviel weiße wie schwarze Kugeln in der Urne sind? Gewiß nicht!

Das ist so recht eine „Argumentatio ad hominem“, eine Dialektik, die auf Ablehnung des gegnerischen Standpunkts als unzulänglich beruht — kurz, kein Beweis, aber — die Grundlage aller Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen.

Die weitere Überlegung führt dann — mit gleichem Recht oder Unrecht — darauf, daß in unserem Fall auch alle gleichmöglichen Kombinationen gleichwahrscheinlich sind, und Mutter Natur wird nicht „mogeln“, insbesondere bei ihrer Fruchtbarkeit oder, in unserem Bild gesprochen, bei den vielen Urnenzügen, die sie veranstaltet. Ja, sie kommt uns sogar soweit entgegen, selbst bei verhältnismäßig geringer Zahl von Individuen die Kombinationen ziemlich gerecht zu verteilen.

M e n d e l, C o r r e n s u. a. experimentieren dann weiter mit Selbstbefruchtung, sie sind auf diese Weise sicher, AA mit AA zu kreuzen, AB mit AB, BB mit BB: Dominiert eine Eigenschaft, z. B. A, so kann man einem Individuum der Enkelgeneration gar nicht ansehen, ob es von der Art AA oder AB ist, und deshalb muß Selbstbefruchtung vorgenommen werden — eine Bedingung, die übrigens bei den Lippenblütlern nahezu auch von der Natur erfüllt ist.

Wir nehmen das Zahlenverhältnis an

$$AA + 2\,AB + BB$$

und weiterhin gleiche Fruchtbarkeit aller gepaarten Eltern, kümmern uns aber nur um Z a h l e n v e r h ä l t n i s s e.

Ergibt also etwa

$$\begin{aligned} AA &\ldots 4\,AA \\ 2\,AB &\ldots 2\,AA + 4\,AB + 2\,BB \\ BB &\ldots 4\,BB, \end{aligned}$$

so haben wir die Formel

$$3\,AA + 2\,AB + 3\,BB,$$

in der wir die Zahlen so reduziert haben, daß AB den Faktor 2 bekommt. Für die nächste Generation ergibt sich bei weiterer Inzucht

$$(3+2)AA + 2\,AB + (3+2)AB$$

und allgemein, wenn wir die erste Generation der Bastarde, die Enkel also der rassenreinen Eltern mit g_1 bezeichnen, für die n-te-Generation

$$(2^{n-1}+1)\,AA + 2\,AB + (2^{n-1}+1)\,BB.$$

In dieser Formel sind alle Ergebnisse von Mendel und seinen Nachfolgern ausgesprochen, nämlich

1. Dominiert A, so hat die erste Generation der Bastarde, die auch durch wahllose Kreuzung von AB mit AB entstanden sein kann, die Verteilung

$$3\,\mathfrak{A} + \mathfrak{B}.$$

Die durch Kreuzung von rassereinen Eltern A mit B entstandenen Bastarde selbst haben alle die Eigenschaft A.

2. Sorgt man für Selbstbefruchtung der weiteren Generationen, so ist für die n-te-Generation der Bastarde

$$AA : AB : BB = (2^{n-1}+1) : 2 : (2^{n-1}+1).$$

Qualitativ gesprochen: Der Mischtypus AB wird im Verhältnis zur Gesamtzahl immer seltner — eine Beobachtung, die sich auch bei der Rassenkreuzung europäischer Matrosen mit polynesischen Weibern aufgedrängt hat, vermutlich, weil bei der Generation g_1 bereits AA zu AA neigte, BB zu BB, nicht zum entgegengesetzten Typus, oder zum Mischtypus, denn „gleich und gleich gesellt sich gern".

Ein Merkmalspaar hatten wir durch B charakterisiert; wir wollen jetzt, mit kleiner Abänderung der Bezeichnung, zwei Merkmalspaare betrachten, charakterisiert durch

$$\begin{matrix} Aa \\ Bb \end{matrix}$$

(Es sei gestattet, Chromosom und Eigenschaft hier mit demselben Buchstaben zu bezeichnen).

Wir kreuzen rassereine Eltern A B mit rassereinen Eltern a b und erhalten also Bastarde

$$Aa,\ Bb.$$

Kreuzen wir diese wahllos mit einander, so ist einerseits auf das Merkmalspaar Aa, andrerseits auf das Merkmalspaar Bb zu achten.

Sie werden als von einander unabhängig angenommen, wir haben also

$$AA + 2\,Aa + aa$$

zu kombinieren mit

$$BB + 2\,Bb + bb,$$

und wir erhalten die Verteilung

$$\begin{aligned} & AB + 2\,A\beta + Ab \\ + & 2\,\alpha B + 4\,\alpha\beta + 2\,\alpha b \\ + & \;\; aB + 2\,a\beta + \;\; ab \quad \text{(16 Individuen).} \end{aligned}$$

Hierin bedeutet A, a, α: A ist rein, a ist rein, und endlich der Mischtypus α tritt auf. Entsprechendes gilt für B, b und β.

Führen wir wieder deutsche Buchstaben ein für die Eigenschaften, also $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{b}$, und nehmen wir z. B. an, es seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ dominierend, $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ dagegen rezessiv, so verleiht wie früher das Chromosomenpaar $\alpha = Aa$ dem Individuum die Eigenschaft $\mathfrak{A}$, das Chromosomenpaar $\beta = Bb$ dagegen die Eigenschaft $\mathfrak{B}$, unsere Formel verwandelt sich also in

$$\begin{aligned} & \mathfrak{AB}\,(1+2+2+4) + \mathfrak{Ab}\,(1+2) + \mathfrak{Ba}\,(1+2) + \mathfrak{ab} \\ = & \, 9\,\mathfrak{AB} + 3\,\mathfrak{Ab} + 3\,\mathfrak{aB} + \mathfrak{ab}. \end{aligned}$$

Ebenso kann für drei Merkmalspaare die Betrachtung durchgeführt werden, wobei Mendel auch die berechneten Zahlenverhältnisse bestätigt fand (a. a. O. S. 21). Abschreckend lang würden die Formeln werden, wollten wir von der hier betrachteten ersten Bastardgeneration, d. h. von Enkeln rassereiner Eltern, zu den weiteren übergehen, und hier wird auch die Fruchtbarkeit (bei der durchaus notwendigen Selbstbefruchtung!) so gering, daß Beobachtungen beinahe unmöglich werden.

3. Erweiterung auf menschliche Verhältnisse bei Panmixie (Weinberg).

Die bisher entwickelten Gedanken mögen dem einen oder andern Leser trivial erschienen sein, fußen sie doch nur auf den allerelementarsten Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen. Schwereres Geschütz muß jetzt aufgefahren werden, wenn es gilt, die verwickelten Verhältnisse der Panmixie zu analysieren nach den etwas kurzen Ausführungen von Weinberg.[1])

Grundvoraussetzung ist, daß wir ein Merkmalspaar A, B ($\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$) betrachten, welches „mendelt“, d. h. dem hypothetischen Chromosomenschema sich unterordnet und nur die Typen AA, AB, BB bei ganz beliebiger Kreuzung erzeugt, nicht etwa die unbegrenzte Skala aller Zwischenstufen.

[1]) W. Weinberg, Über den Nachweis der Vererbung beim Menschen. (Jahreshefte des Vereins für vaterländische Naturkunde in Württemberg 1908. S. 369—382.)

Wir gehen von der Annahme aus, daß ursprünglich die reine Eigenschaft A — Chromosomenpaar AA und B (BB) im Verhältnis $m:n$ vertreten sind. — Beiläufig, da es immer nur auf Zahlenverhältnisse ankommt, werden wir späterhin $m+n=1$ setzen.

Was ergibt dann die Kreuzung? Es ist ähnlich wie früher, die einfache Kombination von

$$(m\,AA+n\,BB)\times(m\,AA+n\,BB);$$

in Worten: die Wahrscheinlichkeiten der Ehen

$$AA\times AA,\ AA\times BB,\ BB\times BB$$

verhalten sich wie

$$m^2:2\,mn:n^2.$$

Indem wir den verschiedenen Ehen gleiche Fruchtbarkeit zuerkennen, etwa Eins, bekommen wir als „Bastarde"

$$m^2\,AA+2\,mn\,AB+n^2\,BB.$$

Um die Verteilung bei der folgenden Generation „der ersten Generation der Bastarde" zu berechnen, das Ergebnis also der Kreuzung

$$(m^2\,AA+2\,mn\,AB+n^2\,BB)\times(m^2\,AA+2\,mn\,AB+n^2\,BB)$$

müssen wir berücksichtigen:

$$\begin{array}{lll} AA\times AA & \text{ergibt} & AA, \\ AA\times AB & \text{„} & \frac{1}{2}(AA+AB), \\ AA\times BB & \text{„} & AB, \\ AB\times AB & \text{„} & \frac{1}{4}(AA+2AB+BB), \\ AB\times BB & \text{„} & \frac{1}{2}(AB+BB), \\ BB\times BB & \text{„} & BB. \end{array}$$

Setzt man diese Werte ein, so kommt als erste Generation der Bastarde

$$(m^2\,AA+2\,mn\,AB+n^2\,BB)\ (m^2+2mn+n^2),$$

d. h. das Zahlenverhältnis

$$AA:AB:BB=m^2:2mn:n^2$$

bleibt erhalten, und zwar, wie wir durch Wiederholung dieses Schlußverfahrens erkennen, für alle weiteren Generationen — im Gegensatz zur Mendelschen Inzucht oder Selbstbefruchtung.

Einfach erledigt sich auch die weitere Frage: Welche Verteilung der Eigenschaften A und B ist bei den Kindern eines A zu erwarten, wenn A

1. dominiert;
2. rezessiv ist.

Im ersten Fall kann 𝔄 ein AA oder ein AB sein, d. h. unter den Individuen, deren Kinder wir betrachten, sind

AA u. AB, und zwar im Verhältnis $m^2:2mn = m:2n$.

Kreuzt man jetzt 𝔄 „allgemein", d. h. mit $m^2AA + 2mn\,AB + n^2BB$, so kommt

$$(m\,AA + 2n\,AB) \times (m^2\,AA + 2mn\,AB + n^2\,BB)$$

$= AA(m^3 + m^2n + nm^2 + mn^2) + AB(m^2n + mn^2 + nm^2 + 2mn^2 + n^3) + BB\,(mn^2 + n^3)$

oder, wegen der Annahme $(n + m) = 1$:

$$AA(m^2 + mn) + AB(mn + nm + n^2) + BBn^2$$
$$= AAm + ABn(2m + n) + BBn^2$$
$$= AAm + ABn(m + 1) + BBn^2;$$

weil aber 𝔄 dominiert, so ist $AA = AB = \mathfrak{A}$, es kommt demnach

$$\mathfrak{A}(m + nm + n) + \mathfrak{B}n^2$$
$$= \mathfrak{A}(1 + nm) + \mathfrak{B}n^2.$$

Ist 𝔄 rezessiv, also nur durch AA vertreten, so ist die Rechnung einfacher, nämlich

$$AA \times (m^2AA + 2mnAB + n^2BB)$$
$$= m^2AA + mn(AA + AB) + n^2AB$$
$$= m\mathfrak{A} + n\mathfrak{B}.$$

Aus den Ehen 𝔄 mit einem beliebigen anderen Elter sind also zu erwarten

$(1 + mn)\mathfrak{A} + n^2\mathfrak{B}$ . . . 𝔄 dominierend,

$m\mathfrak{A} + n\,\mathfrak{B}$ . . . 𝔄 rezessiv.

Wesentlich tiefer müssen wir graben, um auf Eltern und Geschwister Rückschlüsse zu ziehen, d. h. also zunächst auf die Wahrscheinlichkeit der Ursache von 𝔄.

Daß man auf die Ursache einen Rückschluß ziehen kann, ist klar, wie wir, wenigstens qualitativ, am Urnenschema erläutern wollen: Liegen zwei Urnen vor, die eine mit 10 weißen und 10 schwarzen Kugeln, die andere mit 20 weißen und 10 schwarzen, und ich ziehe eine Kugel, ohne zu wissen aus welcher Urne, die Kugel ist aber weiß, so werde ich gewiß es für wahrscheinlicher halten, daß ich aus der zweiten Urne zog. Vorher (a priori) waren die beiden Ereignisse: Zug aus der ersten und Zug aus der zweiten Urne gleichwahrscheinlich, nachher (a posteriori), durch den Zug: weiße Kugel, hat sich die Wahrscheinlichkeit zu Gunsten der zweiten Urne geändert.

Die Wahrscheinlichkeit von U_1 (Urne Eins) und U_2 (Urne Zwei) war gleichgroß, solange wir nichts wußten über das Ergebnis. Wir bezeichnen die Wahrscheinlichkeiten mit w_1 und w_2 und haben also

$$w_1 = w_2 = \frac{1}{2}.$$

Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses: „aus U_1 wird weiße Kugel gezogen“ ist $p_1 = \frac{1}{2}$, die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses: „aus U_2 wird weiße Kugel gezogen“ ist $p_2 = \frac{2}{3}$.

Dann sind die Wahrscheinlichkeiten „a posteriori“ für die Ursachen proportional den Produkten wp, auf Grund der Bayesschen Regel[1]), die wir sogleich noch allgemein aussprechen werden.

Wenn also eine weiße Kugel gezogen wurde, wir wissen aber nicht, aus welcher der beiden Urnen, und wir nennen c_1 die Wahrscheinlichkeit, daß sie aus U_1 gezogen wurde, d. h. „daß auf Grund des Zuges weiße Kugel a posteriori die Herkunft aus der ersten Urne zu erschließen ist“, entsprechend c_2 für U_2, so folgt aus der Bayesschen Regel:

$$c_1 : c_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} : \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = 3 : 4, \text{ oder}$$

$$c_1 = \frac{3}{7},\ c_2 = \frac{4}{7}.$$

Für Leser, die vor mathematischen Formeln nicht zurückschrecken, geben wir die Bayesschen Regel in ihrer allgemeinen Form an:

Sind $C_1\ C_2 \,..\, C_n$ die möglichen Ursachen von E, $p_1\ p_2 \,..\, p_n$ die Wahrscheinlichkeiten von E aus $C_1\ C_2 \,..\, Cn$, und endlich $w_1\ w_2 \,..\, w_n$ die Wahrscheinlichkeiten von $C_1\ C_2 \,..\, Cn$ a priori, so wird durch das eingetretene Ereignis E die Wahrscheinlichkeit a posteriori

$$\text{für } C_1 = \frac{w_1\ p_1}{w_1\ p_1 \,..\, + w_n\ p_n},$$

$$\text{für } C_2 = \frac{w_2\ p_2}{w_1\ p_1 \,..\, + w_n\ p_n}.$$

Hieraus wollen wir auf die Eltern von A Rückschlüsse ziehen, zunächst wenn A recessiv ist.

---

[1]) Die Regel wurde 1763 veröffentlicht aus hinterlassenen Papieren von **Bayes**, aber erst 1837 von **Poisson** bewiesen, d. h. auf die Grundannahmen der Wahrscheinlichkeitsrechnung zurückgeführt, bei denen wir oben verweilten. — Vgl. **Mathematische Enzyklopädie** I, 2 (Leipzig 1900—1904), Seite 759, sowie **Bruns**, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmaßlehre, Leipzig 1906, Seite 23 ff.

$\mathfrak{A}$=AA kann abstammen von

$$AA\times AA \text{ mit der Wahrscheinlichkeit } p_1 = 1,$$
$$AA\times AB \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad p_2 = \frac{1}{2},$$
$$AB\times AB \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad p_3 = \frac{1}{4},$$

Ferner sind die Verhältnisse der Wahrscheinlichkeiten von Ehen AA×AA, AA×AB, AB×AB gegeben durch

$$m^2m^2,\ 4m^3n,\ 4m^2n^2,$$

$$\text{d. i. } w_1 : w_2 : w_3 = m^2 : 4mn : 4n^2.$$

Also ist die Wahrscheinlichkeit a posteriori, durch das Ereignis: Kind $\mathfrak{A}$:

$$\text{für die Ehe } AA\times AA: \frac{m^2}{(m+n)^2},$$
$$\text{„ „ „ } AA\times AB: \frac{2mn}{(m+n)^2},$$
$$\text{„ „ „ } AB\times AB: \frac{n^2}{(m+n)^2},$$

also sind unter den Eltern vom $\mathfrak{A}$ zu erwarten:

$$m^2 \text{ Paare } AA \times AA = 2\,m^2 \text{ Personen } AA$$
$$2mn \text{ „ } AA \times AB = 2\,mn\,AA + 2\,mn\,AB$$
$$n^2 \text{ „ } AB \times AB = 2\,n^2\,AB,$$

wofür, wegen $AA = \mathfrak{A}$, $AB = \mathfrak{B}$ schließlich

$$2\,m\,(m\,\mathfrak{A} + n\,\mathfrak{B}), \text{ wofür auch } m\,\mathfrak{A} + n\,\mathfrak{B}$$

geschrieben werden kann. Wir haben also für die zu erwartende Verteilung von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ unter den Eltern von $\mathfrak{A}$ dasselbe Verhältnis wie unter den Kindern von $\mathfrak{A}$ — freilich auf Grund einer viel weiter ausholenden Analyse.

Jetzt sind auch leicht die Geschwister zu berechnen, eben die Kinder der berechneten Eltern, also aus

$$m^2(AA\times AA) + 2mn(AA\times AB) + n^2(AB\times AB)$$

die Zahl:

$$m^2\,AA + mn\,(AA + AB) + \frac{n^2}{4}\,(AA + 2\,AB + BB),$$

und schließlich, wegen $AA = \mathfrak{A}$, $AB = \mathfrak{B}$, $BB = \mathfrak{B}$, $m + n = 1$, nach Multiplikation mit der Zahl Vier:

$$(1+m)^2\,\mathfrak{A} + n\,(3+m)\,\mathfrak{B}.$$

Dominiert $\mathfrak{A}$, so ist zu berücksichtigen, daß $\mathfrak{A}$ sowohl AB wie AA sein kann, und es kommt für die Eltern

$$(1+mn)\ \mathfrak{A}+n^2\,\mathfrak{B};$$

für deren Kinder, also die Geschwister, von denen eines ein $\mathfrak{A}$ ist:

$$(4\ (1+mn)+mn^2)\ \mathfrak{A}+n^2\ (3+n)\ \mathfrak{B}.$$ [1]

---

[1] Anwendung der Bayesschen Regel, wenn $\mathfrak{A}$ dominiert:
Von $\mathfrak{A}$=AA oder AB kann Ursache sein

$$AA\times AA,\ \text{dann}\ p_1=1,\ w_1=m^4\ ,\ \frac{p_1\ w_1}{m}=m^3;$$

$$AA\times AB,\ \text{„}\ p_2=1,\ w_2=4m^3n\ ,\ \frac{p_2\ w_2}{m}=4m^2n;$$

$$AA\times BB,\ \text{„}\ p_3=1,\ w_3=2m^2n^2,\ \frac{p_3\ w_3}{m}=2mn^2;$$

$$AB\times AB,\ \text{„}\ p_4=\frac{3}{4},\ w_4=4m^2n^2,\ \frac{p_4\ w_4}{m}=3mn^2;$$

$$AB\times BB,\ \text{„}\ p_5=\frac{1}{2},\ w_5=4mn^3\ ,\ \frac{p_5\ w_5}{m}=2n^3.$$

Es ist aber AA=AB=$\mathfrak{A}$, und nur BB=$\mathfrak{B}$, das gibt unter den Eltern

$$\begin{aligned}&\mathfrak{A}(m^3+4m^2n+mn^2+3mn^2+n^3)\\&+\mathfrak{B}(mn^2+n^3)\\&=n^2\mathfrak{B}\\&+\mathfrak{A}(m^2[m+n]+3mn[m+n]+n^2[m+n])\\&=n^2\mathfrak{B}+\mathfrak{A}(m^2+3mn+n^2)\\&=(1+nm)\ \mathfrak{A}+n^2\mathfrak{B}.\end{aligned}$$

Geschwister von $\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{A}$ eingerechnet: die Ehen sind

$$m^3(AA\times AA)+4m^2n(AA\times AB)+2mn^2(AA\times BB)$$
$$+3mn^2(AB\times AB)+2n^3(AB\times BB),$$

das ist

$$m^3AA+2m^2n(AA+AB)+2mn^2AB+\frac{3}{4}mn^2(AA+2AB$$
$$+BB)+n^3(AB+BB),$$

aber AA=AB=$\mathfrak{A}$, BB=$\mathfrak{B}$, also

$$\mathfrak{A}(m^3+4m^2n+2mn^2+\frac{9}{4}mn^2+n^3)+\mathfrak{B}\frac{(3mn^2+4n^3)}{4}$$

Faktor von $\mathfrak{A}$:

$$m(n^2+2mn+n^2)+2mn(m+n)+\frac{5}{4}mn^2+n^3$$

Die Aufgabe des Theoretikers ist gelöst; der Statistiker hat dann, an der Hand möglichst ausgedehnter Tabellen natürlich, zu prüfen, ob die drei Formeln

$$\text{Eltern} = m A + n \mathfrak{B},\quad \text{Geschwister} = (1+m)\,{}^2\mathfrak{A} + n\,(3+m)\,\mathfrak{B}$$

$$\text{Kinder} = m\mathfrak{A} + n\mathfrak{B}$$

oder die drei Formeln:

$$\text{Eltern} = (1+mn)\mathfrak{A} + n^2\mathfrak{B},\quad \text{Geschwister} = (4(1+mn)+mn^2)\mathfrak{A} + n^2(3+n)\mathfrak{B},$$

$$\text{Kinder} = (1+mn)\;\mathfrak{A} + n^2\mathfrak{B}$$

in denen $m+n$ gleich Eins ist, sich dem Beobachtungsmaterial besser anpassen lassen; im ersten Fall ist A rezessiv, im zweiten dominierend.

m und n kann z. B. aus dem Material und der Eltern- oder Kinderformel berechnet werden, und es ist dann nachzusehen, wie die bekannten Tatsachen über Geschwister mit der Geschwisterformel übereinstimmen. Das ist auszuführen, für A rezessiv und A dominierend, und aus der besseren Übereinstimmung des einen oder des anderen Formelntripels der noch mit manchen Unsicherheiten behaftete Rückschluß zu ziehen.

Weinberg gelangte z. B. zu dem Ergebnis, daß die Anlage zu Zwillingsgeburten rezessiv ist, nicht dominierend (oder gleichwertig); selbstverständlich stimmt weder das eine noch das andere Formeltripel genau mit den Tatsachen, es müssen hier die uns zu weit führenden Gesetze der Fehlertheorie herangezogen werden, auf Grund deren ein Genauigkeitsmaß definiert wird, das verschiedene Ergebnisse zu vergleichen gestattet.

Mit Mendel's einfachen Gesetzen haben wir begonnen, sie brachen die Bahn für die gesetzmäßige Erforschung dominierender und

---

$$= m + 2mn + n^2(m+n) + \frac{1}{4}mn^2 = m + 2mn + n^2 + \frac{1}{4}mn^2$$

$$= m + nm + n(n+m) + \frac{1}{4}mn^2$$

$$= 1 + nm + \frac{1}{4}mn^2 = \frac{1}{4}(4[1+nm] + mn^2)$$

von $\mathfrak{B}$: $\frac{n^2}{4}(3m+4n) = \frac{n^2}{4}(3+n)$

Eltern und Geschwister sind hiermit bei dominierendem A ausgerechnet.

rezessiver Merkmale, welche wir Weinberg's scharfsinnigen Überlegungen verdanken.

Möge es mir gelungen sein, das Interesse des einen oder anderen Lesers erweckt zu haben, gezeigt zu haben, welch' ein weites Feld der Tätigkeit sich hier dem Genealogen eröffnet! Vielleicht kann auch der Biologe einmal sein Glück mit den Zahlenverhältnissen bei Panmixie versuchen; gerade in den Kreisen der Biologen scheinen Weinberg's Formeln noch wenig bekannt zu sein.