Heidelberger Texte zur Mathematikgeschichte

— Rezensionen —

Autor: **Cantor, Moritz** (1829–1920)

Titel: **Grundzüge einer Elementararithmetik**

erschienen: Heidelberg, 1855

Rezensent: **Schlömilch, Oscar** (1823-1901)

Rez.-Quelle: Zeitschrift für Mathematik und Physik / Literaturzeitung.
Band 1 (1856),
Seite 25 – 28.

Literaturzeitung

der

Zeitschrift für Mathematik und Physik

herausgegeben

von

Dr. O. Schlömilch und **Dr. B. Witzschel.**

Erster Jahrgang.

LEIPZIG,

Verlag von B. G. Teubner.

1856.

Literaturzeitung.

Recensionen.

Grundzüge einer Elementararithmetik als Leitfaden zu akademischen Vorträgen, von Dr. M. Cantor, Privatdocent. Heidelberg, Verlag von Bangel und Schmitt, 1855.

In der Vorrede sucht sich der Verfasser zunächst desswegen zu rechtfertigen, dass er die Anzahl (resp. Unzahl) der arithmetischen Lehrbücher um ein Werkchen vermehre und macht zu diesem Zwecke auf die Eigenthümlichkeit des Universitätsstandpunktes aufmerksam; er sagt in dieser Beziehung: „Auf dem Universitätsstandpunkte, wo die Elementararithmetik nur als Stützpunkt der höheren Mathematik dient, kommt es weniger darauf an, einzelne Sätze zu beweisen, als ein festes Fundament zu gewinnen; hier werden also die eigentlichen Lehrsätze mehr im Vorbeigehen behandelt werden dürfen, während das Hauptgewicht auf die theoretischen Begründungen fällt, auf das, was man die Philosophie der Mathematik nennen kann." Bis hierher sind wir mit dem Verfasser unter der Voraussetzung, dass die Zuhörer einen guten arithmetischen Unterricht genossen haben, einverstanden und geben gern zu, dass an Lehrbüchern, welche von diesem Gesichtspunkte ausgehen, kein Ueberfluss ist, woraus dann die Berechtigung eines neuen Werkes von selber folgt; dagegen möchten wir aber die im Folgenden aufgestellten philosophischen Grundsätze nicht so ohne Weiteres unterschreiben. Das philosophische Glaubensbekenntniss des Verfassers lautet nämlich auf S. V also: „Die Mathematik ist eine **Erfahrungswissenschaft;** die Elementararithmetik entlehnt aus der Erfahrung die (Begriffe) Vielheit, Gegensatz, Theilbarkeit, Homogeneität und Heterogeneität, endlich die Verallgemeinerung des Gegensatzes als conträrer Gegensatz. Eine nach diesem Systeme weitergeführte Mathematik hätte dann in der Differentialrechnung (nicht vielmehr in der Integralrechnung?) nur noch eine letzte Thatsache aus der Erfahrung zu entnehmen und auf die in ihr behandelten Grössen zu übertragen: das Werden". — — Ein altes Wort sagt nun zwar *contra principia nulla disputatio*, wir meinen aber, aller Streit kann sich vernünftiger Weise blos um Grundsätze drehen, weil man es sonst nur mit der Aufklärung gemeiner logischer Schnitzer zu thun haben würde; in dieser Ueberzeugung wagen wir es, den obigen Grundsätzen, namentlich dem ersten, zu widersprechen, und zwar mit Gründen der Erfahrung. Wenn die Mathematik, mithin auch die Geometrie, eine Erfahrungswissenschaft sein soll, so müssten ohne Zweifel ihre Axiome der Erfahrung entstammen, wie z. B. der Grundsatz: „von einem Punkte A nach einem anderen Punkte

B ist der gerade Weg der kürzeste". Wo ist der Mensch, der mit einer Rolle Bindfaden in der Hand, die Wege von A nach B ausgemessen und die Beobachtung $AB < Arc\,AB$ gemacht hat? kennt Jemand den Experimentator? Seit Menschengedenken ist dieser Versuch nicht gemacht worden, woher also jene Kunde? Aber vielleicht hat in ganz unvordenklicher Zeit, vielleicht einer der sieben Weisen Griechenlands jene Entdeckung gemacht; möglich wohl, aber dann wäre der betreffende Satz nur durch Tradition auf uns gekommen, und da nach bekannten Gesetzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung die Probabilität der Richtigkeit eines Referates in geometrischer Progression abnimmt, wenn die Zahl der Wiedererzähler in arithmetischer Progression wächst, so würde die gegenwärtige Wahrscheinlichkeit der Richtigkeit jenes Satzes enorm klein sein, während sie thatsächlich $= 1$ ist. — Aber noch mehr; man kann *a priori* wissen, dass der Satz nicht aus der Erfahrung stammt, weil *a priori* bewiesen werden kann, dass die betreffende Erfahrung unmöglich ist. Von A nach B giebt es einen einzigen geradlinigen Weg, aber unendlich viel krumme Wege; alle letzteren auszumessen und mit dem ersten zu vergleichen, erlaubt die Endlichkeit des menschlichen Lebens nicht — in seiner präcisen Fassung kann also der Satz gar nicht aus der Erfahrung sein — wollte man sich aber mit der Ausmessung einiger Wege begnügen und im Uebrigen nach Analogie schliessen, so hätte man aus einer endlichen Anzahl von Fällen auf eine unendliche Anzahl verschiedener höchst unähnlicher Fälle geschlossen und das gäbe nur eine geringe Wahrscheinlichkeit. Auf diesem Standpunkte muss es sich der Verfasser ganz ruhig gefallen lassen, wenn ihm Jemand erzählt, er habe durch längjährige feine astronomische Beobachtungen herausgebracht, dass der kürzeste Weg von Frankfurt nach Heidelberg über den Mond gehe. Es wundert uns um so mehr, dass der Verfasser in den alten Sensualismus zurückverfallen ist, als es ein sehr naheliegendes Kennzeichen giebt, um die nothwendigen Wahrheiten (Sätze *a priori*) von den zufälligen (*a posteriori* = Erfahrungssätzen) zu unterscheiden; nothwendig ist nämlich jeder Satz, dessen Gegentheil man sich nicht denken kann. Wer nur ehrlich gegen sich selber sein will, wird gewiss zugestehen, dass er sich einen von zwei geraden Linien umschlossenen Raum schlechterdings gar nicht vorzustellen vermag, während er sich z. B. sehr wohl denken kann, dass die Wärme zusammenziehend auf Körper wirke, etwa wie beim Schwinden des Thones. Aehnlich geht es mit allen mathematischen Grundsätzen und daraus erklärt sich sattsam die allgemeine höchliche Verwunderung, wenn Jemand die erwähnten Axiome mit experimentalen Beweisen zu versehen sucht*).

Zum Glück für das vorliegende Buch hat die philosophische Ansicht des Verfassers keinen wesentlichen Einfluss auf die Behandlung des Stoffes ausgeübt; der Verfasser ist zu guter Mathematiker, als dass er sich durch

*) Man hat es der Kant'schen Lehre von den Urtheilen *a priori* hier und da zum Vorwurfe gemacht, dass sie die verrufenen „angeborenen Ideen" rehabilitire und hat die Existenz der letzteren sehr unbegreiflich gefunden. Dieser Einwand hätte Grund, wenn Kant so unbedachtsam gewesen wäre, jedem Neugeborenen ohne Weiteres fertige Urtheile beizulegen; beachtet man aber das zwar kurze; aber klare Wort (Kritik der reinen Vernunft S. 1), „Dass alle unsere Erkenntniss mit der Erfahrung anfange, daran ist gar kein Zweifel ... Wenn aber gleich alle unsere Erkenntniss mit der Erfahrung anhebt, so entspringt sie darum doch nicht eben alle aus der Erfahrung", so reducirt sich jener Vorwurf auf ein reines Missverständniss. Die Erfahrung wirkt nämlich auf doppelte Weise; sie bereichert uns einerseits historisch mit

philosophische Grillen in seinem ruhigen Gedankengange stören liesse. Der ganzen Anordnung nach ähnelt das Werkchen der früheren schönen Arbeit von Wittstein (Hannover 1846), ohne indess die meistens synthetische etwas spröde Form derselben nachzuahmen; im Gegentheil besitzt die Cantor'sche Darstellung eine gewisse akademische Eleganz, die wenigstens den Referenten angenehm berührt hat, auch lässt der Verfasser an geeigneten Stellen historische und kritische Anmerkungen gern einfliessen. Nur an zwei verwandten Stellen ist Referent durch die Philosophie des Verfassers etwas gestört worden. Der Verfasser gelangt nämlich durch die Subtraction für den Fall, dass der Subtrahend den Minuenden übersteigt, zum Begriff der negativen Zahl, und das wäre soweit ganz schön, wenn der Verfasser es nicht für nothwendig gehalten hätte, dies auch philosophisch mittelst des Begriffes vom Gegensatze zu begründen. Zu diesem Zwecke werden statt $+a$ und $-a$ vor der Hand die Zeichen $\rightarrow a$ und $\leftarrow a$ eingeführt und nun sollte eigentlich auch der Beweis geliefert werden, dass die durch den Begriff des Gegensatzes gewonnenen Zahlen mit den bei jenem besonderen Falle der Subtraction nothwendigen negativen Zahlen einerlei sind ($\rightarrow a = +a$, $\leftarrow a = -a$); dieser ganze Beweis fehlt aber und statt dessen heisst es nur S. 19: „in der Regel werden nicht die von uns benutzten Zeichen $\rightarrow$ und $\leftarrow$, sondern $+$ und $-$ verwandt“. Wie es uns scheinen will, hat sich der Verfasser die Sache unnütz schwer gemacht und ist dabei in eine antiquirte Vorstellungsweise zurückverfallen. In den früheren Lehrbüchern (wie z. B. in Tellkampf's Vorschule der Mathematik) pflegte man sehr eilig mit dem Positiven und Negativen bei der Hand zu sein; weil es entgegengesetzte Grössen, wie Wärme und Kälte, Vermögen und Schulden giebt, wollte man auch entgegengesetzte Zahlen haben, aber dabei war immer die Noth, dass sich nicht recht beweisen liess, warum gerade die Zeichen der Addition und Subtraction diesen Gegensatz ausdrücken sollten; lässt man dagegen die negativen Zahlen aus der Subtraction entstehen, wobei $-a$ das unausgeführte Subtractionsexempel $0-a$ bedeutet, so versteht sich das Minuszeichen *eo ipso* und wenn man jene Operation in der Zahlenlinie zu construiren versucht, so zeigt sich von selbst, dass die negativen Zahlen die entgegengesetzten Zahlen sind; mit anderen Worten, der heutige Gedankengang ist gerade das Umgekehrte des früheren. Sei es nun, dass der Verfasser es Beiden recht machen wollte, sei es, dass ihn nur eine philosophische Regung beschlichen hat, befriedigend scheint uns das gleichzeitige Inbetrachtziehen von unausführbarer Subtraction und von Gegensatz nicht, und es wäre besser gewesen, der modernen Anschauung stricte zu folgen. Damit steht die nachherige Betrachtung der lateralen Zahlen in Verwandtschaft. Kaum ist $\sqrt{-a}$ als nicht angebbar erkannt, so verlässt der Verfasser das mathematische Gebiet, spricht von conträren Gegensätzen und will diese in die Mathematik übertragen wissen;

der Kenntniss von allerhand Thatsachen, sie regt aber gleichzeitig zum Selbstdenken an und durch letzteres bilden wir die Keime der nothwendigen Wahrheiten zu fertigen Urtheilen aus, was ohne jene Anregung allerdings nicht geschehen wäre. Wer es liebt, von einem Baume der Erkenntniss zu reden, dem sind die Urtheile *a priori* diejenigen Früchte, welche der Baum bei normaler Witterung und gehöriger Pflege kraft seiner Organisation von selber hervorbringt, und dass es in diesem Sinne nothwendige Wahrheiten giebt, ist gerade nicht wunderbarer, als dass der Weinstock Trauben und keine Datteln trägt; die zufälligen Wahrheiten dagegen gleichen in diesem Bilde den vergoldeten, oft genug tauben Nüssen, womit eine freigebige Hand den Weihnachtsbaum schmückt.

wenn dies **consequent** geschehen sollte, so musste $\nearrow a$ mit Hilfe des Begriffs vom conträren Gegensatz definirt und nachher gezeigt werden, wie $\nearrow a$ mit $\sqrt{-a}$ und dergl. zusammenhängt (es ist nämlich $\nearrow a = a e^{\varphi i}$, wenn φ den Winkel zwischen $\nearrow$ und $\rightarrow$ bezeichnet). Von dem Allen ist aber nicht die Rede, es wird nur statuirt, dass $\uparrow a = + ia$ und $\downarrow = - ia$ sei und dann die Lehre von den conplexen Grössen wie gewöhnlich behandelt, wobei aber Referent nicht recht einsicht, warum immer $\cos\beta \uparrow \sin\beta$ statt $\cos\beta + i \sin\beta$ und $\cos\beta \downarrow \sin\beta$ statt $\cos\beta - i\sin\beta$ geschrieben wird.

Wenn wir im Vorigen einige wenige Partien des Werkes als nicht gelungen bezeichnet haben, so wolle man daraus doch keinen Schluss auf das Ganze ziehen; im Gegentheil bekennen wir gern, dass uns das Werkchen in seiner Totalität recht gut gefallen hat und dass namentlich das ernste Streben des Verfassers, gepaart mit der glücklichen Gabe einer anziehenden Darstellung, im Allgemeinen den Eindruck der Befriedigung hinterlässt.

SCHLÖMILCH.

A treatise on the calculus of operations: designed to facilitate the processes of the differential and integral calculus and the calculus of finite differences. By the Rev. Robert Carmichael, Fellow of the trinity college, Dublin etc. London, Longman, Brown, Green and Longmans. 1855.

Bei der mehrfachen Differentiation der Produkte von abhängigen Variabelen hatte bereits **Leibnitz** die zwischen den Potenzexponenten und den Wiederholungsexponenten der Differentiation stattfindende Analogie bemerkt, so kann z. B. die bekannte Formel

$$d^n(uv) = u\,d^n v + (n)_1\, du\, d^{n-1} v + (n)_2\, d^2 u\, d^{n-2} v + \ldots$$

auch unter der Gestalt

$$d^n(uv) = (d_u + d_v)^n$$

dargestellt werden, wenn man $d_u{}^k$ für einerlei mit $d^k u$ und $d^0 u$ für u erklärt. Diese Beobachtung blieb indessen unfruchtbar bis zum Jahre 1772, wo **Lagrange** die Idee Leibnitzens in allgemeinerer Form wieder aufnahm, sie auf die Differenzen der Funktionen ausdehnte und eine Reihe von sogenannten **symbolischen** Formeln aufstellte; wird z. B. $u = f(x, y)$ gesetzt, so ist hiernach

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = [(1 + \Delta_x)(1 + \Delta_y)]\, u,$$

wobei die rechte Seite den Ausdruck

$$u + \Delta_x u + \Delta_y u + \Delta_x \Delta_y u$$

bedeuten soll; in demselben Sinne ist unter der Voraussetzung, dass der Taylor'sche Satz gilt und Δx mit h bezeichnet wird,

$$\Delta u = (e^{hD_x} - 1)\, u = \frac{h}{1} D_x u + \frac{h^2}{1\,.\,2} D^2{}_x u + \frac{h^3}{1\,.\,2\,.\,3} D^3{}_x u + \ldots$$

Lagrange leitet seine Formeln auf inductorischem Wege ab und hält direkte Beweise derselben für ziemlich schwer, später hat aber **Laplace** (im 7. Bande der *Savans étrangers*) die letzteren auf sehr elegante Weise gegeben und im 1. Buche der *Théorie analytique des probabilités* zahlreiche Anwendungen davon namentlich auf die Theorie der Reihen gemacht. Eine weitere Verfolgung dieser Idee, jedoch immer noch auf die Differenzen und Differentiale beschränkt, findet man in dem *Calcul de dérivation* von **Arbogast** (Nr. 371 und 404), die Bezeichnung ist aber unbequem und die ganze