UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
HEIDELBERG

Heidelberger Texte zur
Mathematikgeschichte

Die römischen Agrimensoren und ihre Stellung in der Geschichte der Feldmesskunst

Selbstrezension Moritz Cantors

Digitale Ausgabe in neuer Rechtschreibung von
Gabriele Dörflinger
Universitätsbibliothek Heidelberg
2011

Quelle:
Cantor, Moritz: Die römischen Agrimensoren und ihre Stellung in der Geschichte der Feldmesskunst.
In: *Repertorium der literarischen Arbeiten aus dem Gebiete der reinen und angewandten Mathematik.* — 1 (1877), S. 117–128

Moritz Cantor (1829–1920) war der führende Mathematikhistoriker des 19. Jahrhunderts. Er publizierte eine vierbändige Geschichte der Mathematik und schrieb zahlreiche biographische Artikel. 1875 veröffentlichte er sein knapp 240 Seiten starkes Werk über die römischen Landvermesser.

1877 gründete Leo Koenigsberger gemeinsam mit Gustav Zeuner die Zeitschrift *Repertorium der literarischen Arbeiten aus dem Gebiete der reinen und angewandten Mathematik,* die Mathematikern die Möglichkeit bot, ihre neuen Publikationen in Eigenreferaten vorzustellen.

Im ersten Band 1877 berichtete Moritz Cantor auf Seite 117 bis 128 über sein 1875 erschienenes Werk „Die römischen Agrimensoren und ihre Stellung in der Geschichte der Feldmesskunst."

Die Rechtschreibung des Beitrags wurde modernisiert und einige Anmerkungen hinzugefügt.

30.11.2011 Gabriele Dörflinger
UB Heidelberg

M. Cantor: Die römischen Agrimensoren und ihre Stellung in der Geschichte der Feldmesskunst.

(Eine historisch-mathematische Untersuchung. Leipzig 1875. Druck und Verlag von B. G. Teubner, 185 S. Text; 46 S. Anmerkungen; 6 S. Sachverzeichnis für den Text; 6 lithographierte Tafeln.)

„Die Römer haben für die Feldmesskunst der Griechen und für unmittelbar oder mittelbar damit Zusammenhängendes, welches ihnen seit dem Beginne der christlichen Ära zufloss, eine aufbewahrende Mittelstelle abgegeben. Sie ähneln darin den Arabern, nur dass sie weniger in sich aufnahmen, entsprechend ihrer geringen mathematischen Begabung. Hinzuerfunden haben sie so gut wie nichts, höchstens einige Operationen wirklicher Feldmesskunst. Weggelassen haben sie von dem, was sie sich angeeignet hatten, auch nicht viel; die falschen, meistens altägyptischen Näherungsformeln vor allen haben sie niemals außer Übung treten lassen. Was für die Römer gilt, bleibt wahr für ihre Schüler im Mittelalter. Einzelne hervorragende Geister ausgenommen, nimmt das Verständnis des Aufbewahrten immer mehr ab, aber die Menge des Aufbewahrten bleibt. Sie ist nicht groß, doch immerhin erheblicher, als man sonst wohl annahm. Dass überhaupt irgend etwas von Geometrie in die wissenschaftliche Barbarei des frühsten Mittelalters hinüber sich retten konnte, das ist das unschuldige Verdienst der römischen Agrimensoren.“

So lautet der letzte Absatz des oben genannten Buches, und da ich auch heute kaum wüsste, den wesentlichen Inhalt der ganzen Untersuchung deutlicher in wenigen Sätzen darzustellen, so wird man mir verzeihen müssen, wenn ich den Bericht über meine Arbeit mit diesem wörtlichen Selbstzitate beginne. Ich knüpfe daran sofort eine Bemerkung über den Gang der Untersuchung. Es galt mir, den Nachweis zu führen, wie gewisse geometrische Dinge sich von Schriftsteller zu Schriftsteller, von Volk zu Volk vererbten, und so war es in der Natur des Stoffes von selbst begründet, wenn in einem ersten Kapitel die ägyptischen Anfänge der geometrischen Wissenschaft und des Rechnens, soweit es hier in Betracht kam, erörtert würden; wenn ein zweites Kapitel die Feldmesskunst der Griechen behandelte; wenn ein drittes, ein viertes Kapitel den Römern und deren Schülern sich zuwendeten; wenn in jedem folgenden Kapitel auf die früheren zurückgegriffen wurde, um die Übereinstimmung des aller Orten Gelehrten mitunter bis auf den Wortlaut genau hervortreten zu lassen. Äußere Gründe boten die Veranlassung, dass von diesem Gange so weit abgewichen wurde, dass jenes erste ägyptische Kapitel in Wegfall kam. Die auch heute noch nicht vollendete Herausgabe des mathematischen Papyrus Rhind[1] legte mir eine zu große Beschränkung in der Auswahl des in jenem ersten Kapitel zu verwertenden Materials auf, als dass nicht ein unziemliches Missverhältnis der Ausdehnung sich hätte ergeben müssen, welches ich zu vermeiden wünschte, sei es auch nur, um bei flüchtigen Lesern den Argwohn nicht aufkommen zu lassen, von den Ägyptern sei in der Tat nicht mehr zu sagen, als hier auf wenigen Seiten geboten wird. Darum zog ich es vor, das, was aus bisherigen Veröffentlichungen, insbesondere von Lepsius und Aug. Eisenlohr, zur freien Verfügung stand, in das Kapitel, welches mit

[1]Der Papyrus Rhind, der wahrscheinlich aus einer Raubgrabung stammte, wurde 1858 in Luxor an den Antiquar Alexander Henry Rhind verkauft und gelangte ins Britische Museum. Der Heidelberger Ägyptologe *August Eisenlohr* erschloss 1877 in seiner Schrift „Ein mathematisches Handbuch der alten Aegypter“ den Papyrus.

dem Griechentume, sowie teilweise in das, welches mit den Römern sich beschäftigt, hineinzuverarbeiten, und somit besitzt mein Buch neben einer kurzen Einleitung, in welcher die Aufgabe gestellt, den Verdiensten eines namhaften Vorgängers, Fr. Hultsch die gerechte Würdigung erteilt und den Vorstehern mehrerer Bibliotheken pflichtschuldiger Dank erstattet wird, nur drei Kapitel:

1) Heron von Alexandrien S. 6 – 63.
2) Römische Feldmessung S. 63 – 139.
3) Die Schüler der Römer S. 139 – 185.

In diesem Referate, wo es auf stilistische Abrundung weniger ankommt, als auf möglich scharf hervortretenden Inhalt, will ich von der angedeuteten Vierteilung im Gegensatze zu dem Buche selbst Gebrauch machen.

Die *Ägypter* legten sich schon vor dem Jahre 1700 v. Chr. Fragen vor, welche auf Ausmessung grad- und krummlinig begrenzter Figuren und Körper sich bezogen. Unter den Figuren scheinen sie das Dreieck in erster Linie beachtet zu haben, und zwar das gleichschenklige Dreieck, dessen Seiten a, a, b heißen mögen und dessen Fläche als $\frac{a \cdot b}{2}$ berechnet wurde. Aus dem gleichschenkligen Dreieck entstand durch Abstumpfung das gleichschenklige Paralleltrapez, dessen Seiten a, a, b_1, b_2 die Fläche $\frac{a(b_1+b_2)}{2}$ errechnen ließen. Dieselben falschen Näherungsformeln erhielten sich bis nach 100 v. Chr., wenn auch eine gewisse Änderung sich dadurch kund zu geben scheint, dass allmählich nicht das Dreieck, sondern das Trapez als die primäre Figur aufgefasst wurde, von welcher das Dreieck nur den speziellen Fall der einen verschwindenden Parallele darstellt, dem Begriffe nach ein gewisser Fortschritt, während zugleich ein Rückschritt darin sich offenbart, dass bei dem Trapeze die Bedingung des Parallelismus zweier Seiten, der Gleichheit der anderen beiden in Wegfall kommt und allgemein aus den einander gegenüberliegenden Seiten a_1, a_2 und b_1, b_2 die Fläche des Vierecks mit $\frac{a_1+a_2}{2} \cdot \frac{b_1+b_2}{2}$ gewonnen wird. Zusammengesetztere Figuren werden zum Zwecke der Berechnung durch Hilfslinien in Dreiecke und Vierecke zerlegt. Von Wichtigkeit ist noch, dass in der ältesten Zeit bereits ein Name, *merit*, für die oberste Linie jeder solchen gradlinigen Figur auftritt. Der Kreis wird quadriert als $(\frac{8}{9}d)^2$, wo d den Durchmesser bedeuten soll, eine Formel, welche dem Werte $\pi = (\frac{16}{9})^2 = 3,1604....$ entspricht. Das Rechnen der Ägypter war zu derselben frühen Zeit ein bereits sehr entwickeltes. Bruchrechnungen gehörten namentlich zu dem täglichen Bedürfnis und wurden so bewältigt, dass die vorkommenden Brüche stets in Gestalt von Summen einfacherer Brüche, welche nur die Einheit zum Zähler haben, behandelt wurden. Zu einer solchen Rechnungsweise war aber unbedingt eines notwendig: die Möglichkeit, jeden beliebigen Bruch in eine Summe von Partialbrüchen, oder wie ich lieber sage, von Stammbrüchen zu verwandeln. Das ist eine Aufgabe, welche Jahrtausende lang wiederkehrt, wenn auch unter den im Drucke bekannten Schriftstellern erst Leonardo von Pisa 1202 eine Methode dazu lehrt, auf deren möglicherweise uralten Ursprung ich hingewiesen habe. Als charakteristisch für dieselbe möchte ich die Benutzung von ein für alle Mal ausgerechneten Hilfstabellen hervorheben. Setze ich noch hinzu, dass jede Aufgabe des ältesten bekannten ägyptischen Übungsbuches die Auflösung durch die Worte „Mache es so“ einleitet, so dürfte in diesem Referate genug gegeben sein. Ägyptisch freilich ist noch mancherlei, worauf hier nicht ausführlicher eingegangen werden kann, so auch die Einrichtung des Schaltjahres von 366 Tagen, welches alle 4 Jahre wiederkehrend die Ordnung der Jahreszeiten und des kirchlichen Jahres unverrückt feststellt, eine Einrichtung, welche am 7. März 238 v. Chr. vielleicht unter dem Einflüsse des geistvollen Chronologen ERATOSTHENES durch das Edikt von Canopus ins Leben gerufen wurde, wenn auch nur, um bald wieder außer Übung zu kommen.

Die *Griechen* verkörpern sich für den bei der gegenwärtigen Untersuchung vorliegenden Zweck in die eine Persönlichkeit des HERON VON ALEXANDRIEN, eines Schriftstellers, der etwa um 100 v. Chr. mutmaßlich ein offizielles Werk über Feldmesskunst und Feldmesswissenschaft verfasste, die einzige derartige Schrift aus alexandrinischer Zeit, welche in umfangreichen Überresten zu uns gelangt ist. Feldmesskunst und Feldmesswissenschaft unterscheide ich dabei so, dass ich unter Ersterer die auf dem Felde selbst zu vollziehenden Operationen, als Abstecken von Geraden nach bestimmter Richtung, von rechten Winkeln, u. s. f. verstehe, unter Letzterer dagegen die Kenntnis von Formeln zur Berechnung insbesondere von Flächenräumen verschiedener, durch gradlinige Bestimmungsstücke gegebener Figuren. Heron von Alexandrien, ein vielseitiger Gelehrter, dessen sämtliche uns erhaltenen Werke verdienter Besprechung unterzogen wurden, hat sowohl in der Feldmesskunst als in der Feldmesswissenschaft Bedeutendes geleistet. Ersterer ist seine Dioptrik gewidmet, d. h. die Lehre von der Anwendung der Dioptra, eines feldmesserischen Werkzeuges, in welchem der Uranfang unserer Theodolithen nicht zu verkennen ist. Letztere bildet den Gegenstand einer Anzahl anderer Abhandlungen, teilweise auch der Dioptrik. Die Hauptaufgabe, welche ich mir nun in dem Kapitel über Heron von Alexandrien stellte, bestand darin: nachzuweisen, was er den Ägyptern entnahm, vorbereitend zu ordnen, was spätere Zeiten ihm entnehmen sollten, außer dem Zusammenhange auf Einzelheiten aufmerksam zu machen, deren Ursprung man noch nie so weit zurück verfolgt hatte. Als ägyptisch zeigte sich sofort die stilistische Form von dem einleitenden „Mache es so!“ bis zu der als $\kappa o \varrho \upsilon \varphi \eta$ benannten Scheitellinie; ägyptisch ist die fast durchgängige Benutzung von Summen von Stammbrüchen; ägyptisch ist die Zerlegung von Figuren durch Hilfslinien in Elementarfiguren; ägyptisch sind die falschen Näherungsformeln für die Fläche von Dreiecken und Vierecken. Eine Anzahl von mit dem Kreise sich beschäftigenden Aufgaben benutzen Formeln, welche auf den Wert $\pi = 3$ herauskommen. Dieser Wert ist allerdings, so viel wir wissen, nicht ägyptisch, dagegen habe ich an anderer Stelle, in einer ausführlichen Rezension von OPPERT: L'étalon des mesures Assyriennes (Zeitschr. Math. Phys. XX., histor.-literar. Abt. S. 149 – 165) den Nachweis zu führen gesucht, dass hier ein babylonischer Baustein mitten unter anderartigem Gemäuer zu erkennen sei. Darf ich heute eine bisher nicht veröffentlichte Bemerkung hinzufügen, so ist es die, dass ein auffallender Unterschied zwischen ägyptischer und babylonischer Kreisrechnung bestand, wofern wirklich $\pi = 3$ babylonischer Herkunft ist. Die Ägypter, das habe ich in meinem Buche hervorgehoben, „dachten die Zahl π als Quadratzahl, wodurch eine förmliche Umwandlung des Kreises in ein Quadrat leichter möglich war, als unter jeder anderen Voraussetzung“, oder anders gesagt: die Ägypter hatten keine andere Absicht als die der tatsächlichen Herstellung eines dem Kreise gleichflächigen Vierecks. Die Babylonier dagegen suchten die Länge des Kreisumfanges zum Durchmesser in Beziehung zu setzen. Die griechische Geometrie wechselte in ihren Auffassungen. Den Ägyptern folgend, suchten um 430 v. Chr. ein BRYSON, ein ANTIPHON, ein HIPPOKRATES VON CHIOS den Kreis in ein ihm gleichflächiges Quadrat zu verwandeln und nannten diese Aufgabe „Tetragonismus“ mit einem ihre Methoden überlebenden Namen; nachher gelangte die babylonische Auffassungsweise, zur

Geltung, und von ihr aus fand ARCHIMED $\pi = \frac{22}{7}$ in einer Abhandlung, welcher er aber auch statt des üblichen Namens einen neuen: den der Kreismessung beilegte. Von den geometrischen Eigenthümlichkeiten des HERON, welche auf spätere Nachfolger sich vererbt haben, mögen an dieser Stelle nur einige wenige hervorgehoben werden: die Formel für die Dreiecksfläche aus den 3 Seiten des Dreiecks; eine näherungsweise ziemlich zutreffende Berechnung des gleichseitigen Dreiecks als $\frac{1}{3} + \frac{1}{10}$ des Quadrates der Seite; eine Gleichung, welche den Zusammenhang der Seite a_8 des regelmässigen Achteckes und des Durchmessers d_8 des umschriebenen Kreises durch $(\frac{d_8}{2})^2 = [\sqrt{2(\frac{a_8}{2})^2} + \frac{a_8}{2}]^2 + (\frac{a_8}{2})^2$ darstellt; eine Regel zur Konstruction des regelmässigen Achteckes vom Quadrate aus, indem aus jedem Eckpunkte des Quadrates mit dessen halber Diagonale im Halbmesser Kreisbögen beschrieben werden, welche auf den Quadratseiten die 8 Eckpunkte des verlangten Achteckes als Durchschnittspunkte hervorbringen. Die beiden letzten Dinge stehen zwar an verschiedenen Orten, erweisen aber ihren sachlichen Zusammenhang durch die Möglichkeit, den Beweis für beides an einer und derselben Figur, an zwei einander symmetrisch durchsetzenden Quadraten zu führen. Endlich berichte ich allerdings wiederum in sehr zusammengeschrumpftem Auszuge über Dinge, welche man früher noch nicht bis in die vorchristliche Ära verfolgen zu können glaubte. Dazu gehören gewisse trigonometrische Kenntnisse, da man Formeln für die Fläche jedes regulären Vielecks vom Dreieck bis zum Zwölfeck aus der Seite berechnet, ferner Formeln für die Fläche von Kreisabschnitten, für die Länge von Kreisbögen, für den Rauminhalt von Kugelkalotten, mögen sie noch so sehr den Charakter ungenügender Näherung an sich tragen, nicht wohl unter einer andern Rubrik wird unterbringen können. Dazu gehört das erstmalige Vorkommen der Quadratwurzel aus der negativen Einheit, herbeigeführt durch den Mangel an richtiger Determination für die Länge gewisser Stücke, welche bei einer die Pyramide betreffenden Aufgabe in Rechnung kommen, und umgangen durch die wenn auch nicht ausdrücklich benutzte Annahme $\sqrt{-1} = 1$. Dazu gehört die Auflösung der unreinen quadratischen Gleichung, welche durchaus unentbehrlich war, um unter Voraussetzung der gegebenen Summe von Kreisfläche, Peripherie und Durchmesser den letzteren allein zu berechnen. Auch hier seien zwei ergänzende Bemerkungen erlaubt; die eine, dass die gegebene Summenzahl so recht Zeugnis davon gibt, wie hier eine vorzugsweise algebraische Aufgabe vorlag, da Flächen und Längen geometrisch nicht homogen, auch nicht addiert werden können, die andere, dass gezeigt werden kann, dass die Auflösungsmethode durchaus mit derjenigen übereinstimmt, welche NESSELMANN (Algebra der Griechen S. 319) bei DIOPHANT zu enthüllen wusste. Wichtig wäre auch die Methode der Quadratwurzelausziehung des HERON, wenn es gelänge, sie zu ermitteln. Leider war dieses bisher nicht der Fall und nur das negative Ergebnis konnte festgestellt werden, dass HERONs Methode eine andere gewesen sein muss als die THEONS VON ALEXANDRIEN, d. h. als die moderne Methode.

Den *Römern* ist der räumliche Hauptteil des Buches gewidmet. Es galt dabei zuerst ins Klare zu kommen über den verschiedenzeitigen und nach meinem Dafürhalten auch verschiedenseitigen Ursprung der Feldmesskunst und der Feldmesswissenschaft der Römer. Für jene nehme ich eine etruskische, für diese eine alexandrinische Herkunft an; jene in das graue Altertum urdenklicher Väterzeiten sich verlierend, diese an ein ganz bestimmtes Ereignis, an den durch Cäsar geführten alexandrinischen Krieg anknüpfend, nach welchem, um nicht zu sagen in dessen Folge, alexandrinische Chronologie und Geodäsie nach Rom übersiedelten. Mit dem altetruskischen Ursprung der

Feldmesskunst bei den Römern hängt der Name des hauptsächlichen dabei benutzten Apparates „Groma“ zusammen, welches keineswegs, wie immer angenommen worden ist, mit „Gnomon“ gleichbedeutend ist, sondern sachlich und lautlich durchaus von dem Sonnenzeiger zu unterscheiden, vielmehr eine Art von Winkelkreuz gewesen ist. Der alexandrinische Ursprung der Feldmesswissenschaft lässt sich noch genauer als heronischer Ursprung bezeichnen, indem es gelingt, zwischen den Schriften römischer Feldmesser und den heronischen Werken vollständige Textesgleichungen herzustellen, d. h. zu einer überwiegend großen Anzahl römischer Stellen die griechischen Paragraphe anzugeben, aus denen sie oft in wörtlicher Übersetzung entnommen sind, ein noch weit überraschenderes Zusammentreffen, nachdem es aus einzelnen bestimmten Angaben gelungen ist, den Beweis zu führen, dass wir nicht einmal diejenige Ausgabe heronischer Schriften besitzen, welche damals nach Rom gekommen ist. Die römischen Schriftsteller, welche zu diesem vergleichenden Endzwecke einer gründlichen Durchsicht unterzogen wurden, sind teils solche, welche zu den eigentlichen sogenannten Agrimensoren gehören und insbesondere in einer im VI. oder VII. Jahrhundert entstandenen Handschrift, dem Codex Arcerianus der Wolfenbüttler Bibliothek enthalten sind, teils andere, welche wie der Bauschriftsteller VITRUVIUS, der die Landwirtschaft behandelnde COLUMELLA, der Wasserbaumeister FRONTINUS, der vielseitig gewandte BOETIUS[2], vielleicht auch der Militärschriftsteller HYGINUS sich nur nebensächlich mit geometrischen Dingen beschäftigten. Der Letztgenannte wird in meinem Buche noch für die gleiche Persönlichkeit wie ein zu Trajans Zeiten lebender Feldmesser gleichen Namens gehalten. Erst nach vollendetem Drucke meiner Untersuchungen erschien in dem Rheinischen Museum für Philologie (Jahrgang 1875, Bd. XXX, S. 469) ein Aufsatz von H. DROYSEN, der den Militärschriftsteller in die Zeit zwischen 240 und 267, also um anderthalb Jahrhunderte später zu verweisen sucht. Unter den bei jener Durchsicht bemerkenswert erschienenen, vielfach noch nie beachteten Dingen zum Zwecke dieses Berichtes eine Auswahl zu treffen, fällt mir schwer. Ich muss der Hauptsache nach hier auf mein Buch selbst verweisen und möchte nicht einmal für einiges, welches ich in mein Referat aufnehme, den Anspruch auf besondere Wichtigkeit erheben. Bei VITRUVIUS z. B. fand sich allein eine Kreisberechnung vor, welche von der Voraussetzung $\pi = 3\frac{1}{8}$ ausgeht. Denselben Wert $\pi = 3\frac{1}{8}$ hat, wie ich zeigte, noch ALBRECHT DÜRER benutzt, und mir schien dieses ein Beweis von der konservativen Kraft solcher Volksschichten, welche nur übungsmässig nicht auf wissenschaftliche Grunde hin Rechnungsverfahren sich aneignen. Mochte mir auch kein Zwischenglied zwischen VITRUVIUS und ALBRECHT DÜRER bekannt sein, ich zweifelte nicht an der Möglichkeit, ein solches aufzufinden. MAX CURTZE hat, wie er in einer Besprechung meines Buches in der Jenaer Literaturzeitung ankündigt, das Material in Händen, jene Lücke genügend auszufüllen, und ich sehe der Veröffentlichung dieses Materials in GRUNERTs Archiv mit Spannung entgegen. Bei BOETIUS konnte auf die merkwürdige Figur zweier einander durchsetzender Quadrate hingewiesen werden, deren Bedeutung aus unseren obigen Bemerkungen über HERONs Achteckkonstruction einleuchtend für BOETIUS selbst verloren gegangen war, da er die Figur überhaupt nicht mit Geometrischen sondern mit der Darstellung eines arithmetischen Gegenstandes: der achteckigen Zahlen in Verbindung bringt. Eben bei BOETIUS fand sich auch der Wortlaut einer Aufgabe, welche

[2]Anicius Manlius Severinus Boethius (um 480 – 525) verfasste Lehrbücher zur Mathematik, zur Musik und zur Philosophie.

es möglich machte, einen Schreibfehler im Codex Arcerianus zu verbessern, der an sich höchst nebensächlich dadurch zu nie geahnter Bedeutung sich erhob, dass auf die abschreibende Wiederholung desselben eine ganze Beweisführung einer historisch wichtigen Tatsache sich aufbauen ließ. Der Schreibfehler findet sich in einer der Überschrift zufolge von Nipsus herrührenden Aufgabe und wurde dann später im Kloster Bobbio, wo der Codex am Ende des X. Jahrhunderts sich befand, von Gerbert[3] abgeschrieben, dabei aber so wenig daran gedacht, dass hier ein Wort weggefallen sein könne, dass vielmehr aus dem an sich widersinnigen Zusammenhange eine neue selbstverständlich falsche Definition ihren Ursprung nahm. Zu den Schriftstellern des Codex Arcerianus gehört auch Frontinus, oben als Wasserbaumeister bezeichnet. Es ist gelungen, aus einer handschriftlichen Randbemerkung zu Gerberts Geometrie den Nachweis zu führen, dass ein von mancher Seite angezweifeltes geometrisches Werk des Frontinus tatsächlich im XII. Jahrhunderte noch vorhanden war; es ist vielleicht sogar gelungen, ein Stück desselben mitten in der praktischen Geometrie des Leonardo von Pisa wieder zu entdecken. Ein größeres Bruchstück derselben alten Sammelhandschrift der Wolfenbüttler Bibliothek führt entstellte Autorennamen, welche von philologischer Seite als richtig Epaphroditus und Vitruvius Rufus lautend gelesen worden sind. Dieses Bruchstück habe ich zum ersten Male vollständig veröffentlicht, zum ersten Male mit Rückblick auf seine Quellen zu erläutern gesucht. Aus demselben geht mit unzweifelhafter Gewißheit hervor, dass die Verfasser 1) eine Formel kannten zur Darstellung einer Polygonalzahl aus ihrer Seite; 2) eine Formel zur Darstellung der Seite aus der Polygonalzahl; 3) eine Formel zur Auffindung der Pyramidalzahlen aus den zugehörigen Polygonalzahlen und ihren Seiten; 4) eine Summenformel für die Reihe der Kubikzahlen. Nicht minder unzweifelhaft ist es, dass alle diese Dinge ursprünglich in griechischem Texte vorgelegen haben müssen, wenn auch nicht die geringste Spur auf den Namen des eigentlichen Erfinders zurückweist. Nur dass die Griechen sich mit den figurierten Zahlen vielfach beschäftigten, steht fest, und eine dem griechischen Geiste verwandte Methode, die Kubikzahlensummen zu finden, nachträglich wiederherzustellen, ist mir; wie ich mir schmeichle, gleichfalls gelungen. In allen diesen römisch-geometrischen Schriftstücken lassen sich, wie zum Schlusse bemerkt werden mag, in Nachahmung der heronischen Schriften bestimmte Wortformen, aber auch bestimmte Hauptabschnitte erkennen. Die Scheitellinie heisst *vertex* oder *coraustus*, letzteres eine offenbare Verketzerung aus $\kappa o\varrho\upsilon\sigma\tau o\varsigma$ (sc. $\gamma\varrho\alpha\mu\mu\eta$), wie Gottfried Hermann bereits 1840 bemerkt hat. Das „Mache es so“ kehrt als S. Q. d.h. sic quaeres wieder. Die gemeinten Abschnitte, von denen allerdings bei dem einen Schriftsteller der Eine, bei dem anderen der Andere bevorzugt wird, sind Maßbestimmungen, geometrischen Definitionen der Feldmesskunst, der Feldmesswissenschaft und der Lehre von den figurierten Zahlen gewidmet. Leider sind uns Stücke über Feldmesskunst nur in sehr geringfügigen Überresten erhalten, so fest es steht, dass dergleichen z.B. aus der Feder eines Frontinus, eines Balbus, eines Celsus vorhanden gewesen sein müssen.

Die *Schüler der Römer*, welche dem letzten Abschnitte meines Buches Überschrift und Inhalt gaben, sind der Zeit wie dem Raume nach über viele Jahrhunderte, über weite Ländergebiete zerstreut. Auch war es nicht meine Absicht jeden einzelnen Autor zu nennen, geschweige denn eingehend zu behandeln, der in die-

[3]Gerbert von Aurillac (ca. 946 – 1003) wurde 999 zum Papst gewählt und nahm den Namen Sylvester II. an.

sem oder jenem Sinne Abhängigkeit von römischer Geometrie erkennen lassen mag. Nur einzelne Vertreter wurden ausgewählt, manche wegen ihrer eigenen geistigen Bedeutung, manche ich könnte fast sagen zufällig und beispielsweise. Die sogenannten Aufgaben zur Verstandsschärfung stehen an der Spitze dieses Abschnittes. Ich durfte mich der alten ehemals *Reichenauer* Handschrift dieser Aufgaben bedienen, welche gegenwärtig der Staats- und Hofbibliothek in Karlsruhe angehört, und welche, wenn sie es auch unentschieden lässt, wer der Sammler jener Aufgaben war, doch dafür die Gewissheit liefert, dass jene Sammlung um das Jahr 1000 vorhanden war, denn in jener Zeit ist die Handschrift selbst entstanden. Mag es nun in vielen anderen Beziehungen von keineswegs geringer Tragweite sein, ob die Sammlung noch weiter zurück bis auf Alcuin geht, was dem inneren Gehalte wie der Form nach gar wohl möglich ist, für die Geschichte der Mathematik und für die besondere Aufgabe, welche ich mir in meinem Buche gestellt hatte, ist es ziemlich müßig auf diese Frage sehr großes Gewicht zu legen. Dagegen ist die Entstehung der Aufgaben unter Benutzung römischer Quellen laut zu betonen. Der Nachweis einer dieser Aufgaben in einem rechtswissenschaftlichen Werke aus Trajans Zeiten war für mich selbst eine der freudigsten Überraschungen. Diese Aufgabe heute noch in allen Übungsbüchern mit geringen Ausnahmen als Lehrmittel verwertet gehört freilich nicht der Geometrie sondern der Teilungsrechnung an; sie bietet eine um so willkommenere Kontrolle des Ursprungs auch der geometrischen Aufgaben, welche daneben stehen. Ungleich bedeutender ist die Geometrie Gerberts. Ich hatte auch hier die Annehmlichkeit einer handschriftlichen Quelle mich bedienen zu können. Das einzige vollständige Exemplar von Gerberts Geometrie entstanden in der ersten Hälfte des XII. Jahrhunderts, war mir aus der Bibliothek des Benediktinerstiftes zu St. Peter in Salzburg zur Verfügung gestellt, und so konnte ich nicht nur die Frage entscheiden, ob überhaupt eine einheitliche Geometrie Gerberts existiere, sondern auch die Frage nach der Entstehungszeit jener Geometrie. Dass ich die erstere Frage bejahte bedarf keiner Rechtfertigung. Es müsste doch komisch sein, wenn moderne Zweifelsucht über das, was ein geometrischer Schriftsteller aus dem Jahre 1000 etwa verfasst haben kann oder nicht kann, besser unterrichtet zu sein wähnte, als die in mathematischen Dingen gar nicht ungeübte, an Gerbert noch voll Pietät sich erinnernde Mitte des XII. Jahrhunderts, und dass damals die Geometrie der Salzburger Handschrift als die Gerberts gedacht wurde, bezeugt ohne Möglichkeit des Widerspruchs der Anfang dieser Handschrift, deren vortrefflich faksimilierte Wiedergabe auf der letzten Figurentafel meines Buches jeden Leser in den Stand setzt, sich durch eigene Anschauung von der Folgerichtigkeit meiner Schlüsse zu überzeugen. Daneben habe ich nicht versäumt auch die Bemängelungen, welche gegen die Zusammengehörigkeit so verschiedenartiger Abschnitte, als in der sogen. Geometrie des Gerbert vereinigt wären, gerichtet zu werden pflegen, zu erörtern. Die Verschiedenartigkeit ist vorhanden, aber sie ist nicht größer als in den heronischen Schriften, als in deren römischen Nachbildungen, welche selbst wieder Gerbert als Quelle dienten. Alle jene früher genannten Teile, Maße und Definitionen, praktische und rechnende Geometrie und Arithmetik finden sich seit langer Zeit zuerst wieder vereinigt, in meinen Augen eine zuverlässigere Unterstützung der Annahme eines einheitlichen Verfassers als der entgegengesetzten Annahme. Ist aber Gerbert der Verfasser der ihm zugeschriebenen Geometrie, so ist deren Abfassungszeit leicht und genau zu bestimmen. Textvergleichungen waren zwischen Römern und Heron auch schon von Hultsch angestellt worden, wenn auch nicht so vollständig wie von mir, Textvergleichungen Gerberts mit den Römern sind nirgend veröffentlicht gewesen. Sie beweisen aber, dass Gerbert den Codex Arcerianus mit seinem Schreibfehler innerhalb einer Aufgabe des Nipsus sich aneignete, dass er dagegen die Geometrie des Boetius, aus welcher jener Schreibfehler ihm verständlich werden musste, nicht kannte, als er seine Geometrie verfasste. In Bobbio lebte Gerbert 981 und 982, die Geometrie des Boetius fand er 985 (nach anderen 982) in Mantua. Zwischen 981 und der Reise nach Mantua fällt demnach die Arbeitszeit, welche Gerbert auf seine Geometrie verwandte. Die Textvergleichungen bieten aber auch noch mehr. Für fast den ganzen eigentlich feldmesserischen Teil von Gerberts Geometrie fehlen uns die römischen Quellen. Werden sie auch Gerbert gefehlt haben? Ich habe zu zeigen gesucht, dass diese Annahme nicht wohl gewagt werden kann. Gerbert wird gerade in der Feldmesskunst am wenigsten als Orginalschriftsteller zu vermuten sein. Was von diesem Gegenstande bei ihm erhalten ist, kann uns folglich wahrscheinlich ersetzen, was in römischer Form verloren gegangen ist, und eine nicht geringe Bestätigung dieser Meinung gewährt das wiederholte Auftreten von durch Gerbert beschriebenen feldmesserischen Arbeiten bei Leonardo von Pisa. Nenne ich hier nur noch die Namen Herrmannus Contractus, Johannes Widmann von Eger, Gregorius Reysch, in deren Werken mehr oder weniger von den Römern aus übermitteltes heronisches Material nachgewiesen wird, so habe ich damit ein Gerippe auch des letzten Abschnittes meines Buches hergestellt. Einem wahren Körper kann es nicht zu gleichen den Anspruch erheben, auch wenn ich hinzufüge, dass hier zur vollen Wahrheit gelangt, was ich in den an die Spitze dieses Referates gestellten Schlussworten gesagt habe; dass es sich zeigt, dass das Alte nachgrade verständnislos und immer verständnisloser aufbewahrt wird, dass selbst Gerbert, sonst ein Riese unter Zwergen, nicht ganz, von Irrtümern frei zu sprechen ist, wie sein ängstliches Kleben an jenem Fehler des Nipsus veranschaulicht.

Heidelberg. *M. Cantor.*