Heidelberger Texte zur Mathematikgeschichte

Autor: **Cantor, Moritz** (1829–1920)

Titel: **Ein mathematischer Papyrus in griechischer Sprache**

Quelle: Zeitschrift für Mathematik und Physik / Historisch-literarische Abt.
Band 38 (1893),
Seite 81 – 87.
Signatur UB Heidelberg: L 6::38.1893

Bericht über einen aus dem 7.–8. Jahrhundert n. Chr. stammenden Papyrus im Museum von Gizeh, dem sogenannten „Rechenbuch von Achmim". Der Inhalt besteht aus einigen mathematischen Tabellen und ca. 50 Aufgaben und beschäftigt sich vornehmlich mit der Bildung von Stammbrüchen.

Historisch-literarische Abtheilung

der

Zeitschrift für Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

Dr. O. Schlömilch und **Dr. M. Cantor.**

---

38. Jahrgang.

Leipzig,
Verlag von B. G. Teubner.
1893.

Historisch-literarische Abtheilung.

Ein mathematischer Papyrus in griechischer Sprache.

Von

Moritz Cantor

in Heidelberg.

In Achmîm, am rechten Nilufer, ungefähr $26\frac{1}{2}$ Grad nördlicher Breite, auf dem Boden des alten Panopolis sind in koptischen Gräbern höchst merkwürdige Funde gemacht worden. Einer ist für die Geschichte der Mathematik von so hohem Interesse und der gedruckte Bericht über denselben den meisten Mathematikern vermuthlich so wenig zugänglich, dass wir uns für berechtigt, wenn nicht für verpflichtet halten, an dieser Stelle darauf hinzuweisen.

Es war ein Papyrus in griechischer Sprache, um welchen die Fellahs, welche ihn entdeckten, lebhaft stritten. Der Moudir (Bezirksvorsteher) schlichtete den Streit durch Beschlagnahme des Gegenstandes, welcher heute dem Museum von Gizeh angehört. Ein französischer Forscher, Herr J. Baillet, kam so in die Lage, den Papyrus untersuchen zu können, und er veröffentlichte seine Bearbeitung in den *Mémoires publiés par les membres de la Mission archéologique française*, welche mit Unterstützung des französischen Unterrichtsministeriums bei dem bekannten Verleger der Asiatischen Gesellschaft Ernest Leroux in Paris erscheinen. Die Abhandlung kam 1892 im ersten Fascikel des IX. Bandes der genannten Sammlung heraus, wo sie die Seiten 1—89 und acht Tafeln füllt; wir selbst wurden durch unseren Freund, Herrn August Eisenlohr, den Herausgeber des alten mathematischen Papyrus des Ahmes, mit der Druckschrift bekannt.

Der Papyrus ist nicht als Rolle, sondern als eingebundenes Buch aufgefunden worden. Der Deckel besteht aus hartem Leder. Die einzelnen Blätter, deren Abmessung 315 auf 275 Millimeter ist, hafteten fest an einander und konnten nur mit grosser Mühe von einander getrennt werden. Die meisten Blätter fanden sich leer, nur sechs derselben waren, und zwar auf beiden Seiten, beschrieben. Den Inhalt bilden zunächst einige mathematische Tabellen, dann fünfzig Aufgaben. Von grösster Wichtigkeit wäre es, eine genaue Datirung des Heftes vornehmen zu können. Leider scheint dieses unmöglich. Herr Baillet betont nur die unzweifelhaft christliche Religion des Schreibers, welcher mehrfach das Zeichen des Kreuzes hinmalte, betont weiter, dass also die Entstehung früher anzusetzen sei, als Aegypten unter arabische Herrschaft kam. Das sechste bis neunte Jahrhundert dürften seiner Meinung nach die Grenzen sein, innerhalb deren der Schreiber lebte; die Gestalt der Schriftzeichen veranlasst ihn dann, die Grenzen weiter einzuengen und auf das siebente und achte Jahrhundert zu beschränken.

Sprachlich sind drei Ausdrücke vornehmlich bemerkenswerth. Das Capitel heisst *κεφάλαιον*, wie der Römer des Wortes *caput* sich bediente. Das Anfangswort vieler Sätze ist *ὁμοίως*. Der Herausgeber sieht darin den Beweis, dass gewisse Musterbeispiele vorhanden waren, an welche mittelst dieses „ebenso" angeknüpft wurde. Wir wollen dieser Meinung nicht gerade entgegentreten, wenn wir bei dem *ὁμοίως* auch zunächst an das lateinische *item* dachten, durch welches auch im Abendlande die Angaben von Zahlenthatsachen häufig eingeleitet wird. An einigen Stellen beginnt die Auseinandersetzung des Auszuführenden mit *Οὕτω ποίει.* Bei Heron von Alexandria heisst es regelmässig *ποίει οὕτως*, und die im Papyrus vorkommende Umstellung sieht täuschend wie eine wörtliche Uebersetzung des *sic quaere* aus, dessen römische Feldmesser sich bedienten. Man verstehe uns recht. Wir denken natürlich nicht daran, als ob jemals römische Mathematik griechische beeinflusst haben könnte, aus der sie vielmehr zweifellos entstanden ist, aber die Schreibweise des Verfassers des Papyrus von Achmim hat für uns wenigstens eine deutliche römische Betonung, es ist elsasser Französisch, wenn wir ein Vergleichswort anwenden dürfen.

Nun zu dem eigentlichen Inhalte. Gleich dem altägyptischen Papyrus des Ahmes sind die Auseinandersetzungen des Rechenbuches von Achmîm, wenn wir dieser Benennung uns bedienen wollen, dadurch gekennzeichnet, dass sie fortwährend Brüche behandeln, mithin nicht für Anfänger, sondern für weiter Fortgeschrittene abgefasst sind. Eine zweite Aehnlichkeit besteht, wie nicht anders zu erwarten ist, in der fortwährenden Anwendung von Stammbrüchen, welche bei ganzzahligem Nenner die Einheit als Zähler haben, und des Bruches $\frac{2}{3}$, der einem Stammbruche gleich geachtet wird. Eine dritte bildet das schon erwähnte Vorhandensein einiger an die Spitze des Ganzen gestellten Tabellen. Aber gleich bei diesen Tabellen ist ein wesentlicher Unterschied gegenüber von dem alten Handbuche bemerkbar. Wenn wir unsere Leser auf unsere Vorlesungen über Geschichte der Mathematik verweisen dürfen (welche als Gesch. Math. bezeichnet werden sollen), so finden sie dort (Gesch. Math. I, 22—23) die Tabelle des Ahmes, welche die Zerlegung von $\frac{2}{2n+1}$ in Stammbrüche lehrt, wo n der Reihe nach die ganzen Zahlen von 1 bis 49 bedeutet. Der Zähler bleibt unverändert, während der Nenner sich ändert, oder etwas anders und ägyptischer Denkart verwandter ausgesprochen: Eine und dieselbe Zahl 2 wird durch andere und andere Zahlen dividirt und der Quotient als Summe von Stammbrüchen aussprechbar gemacht. Das Rechenbuch von Achmîm dagegen lässt an die Stelle einer Tabelle eine grössere Anzahl von solchen treten und innerhalb jeder Tabelle den Dividenden sich ändern, während der Divisor unverändert bleibt. Mit anderen Worten: Jede Tabelle ist die Vervielfachungstabelle eines und desselben Stammbruches mit verschiedenen ganzen Zahlen. Dürfen wir dabei an einen römischen Rechenknecht erinnern, an den Calculus des Victorius aus der Mitte des fünften nachchristlichen Jahrhunderts? (Gesch. Math. I, 450.) Mit unserer ausgesprochenen Meinung von einem römisch mehr als griechisch gebildeten Lehrmeister stimmt dieser Anklang trefflich überein und ebenso auch damit, dass die einzelne Tabelle jeweils als ψῆφος dem griechischen Worte für *calculus* bezeichnet wird, wenn wir auch Herrn Baillet zugeben, dass ψῆφος bereits bei Heron von Alexandria in dem Sinne von Calcul, als Rechnungsweise gedacht, vorkommt. Der wesentliche Unterschied gegen den römischen Rechenknecht ist unter allen Umständen hervorzuheben, dass dort die vorkommenden Brüche nicht Stammbrüche, sondern Minutien, d. h. römische Duodecimalbrüche waren. Die einzelnen Tabellen fangen alle mit der Vervielfachung des jedesmaligen Bruchmultiplicators mit der Zahl (ἀϱίομῳ) an, unter welcher regelmässig die Zahl 6000 verstanden ist, jedenfalls, wie Herr Baillet sehr scharfsinnig bemerkt hat, weil ein Talent ursprünglich aus 6000 Drachmen bestand, weil seit Constantin dieselbe Zahl das Verhältniss des Denars zum Goldsolidus bezeichnete, weil ebendeshalb byzantinische Rechentafeln Bruchtheile von 6000 angeben. Nach 6000 erscheinen als die zu multiplicirenden Zahlen die Einer 1 bis 9, die Zehner 10 bis 90, die Hunderter 100 bis 900, die Tausender 1000 bis 10 000, wobei unter dieser letzten Gruppe die Zahl 6000 abermals auftritt, als wenn sie nicht vorweg genommen wäre. Diese Ausdehnung haben wenigstens die Tabellen, deren Multiplicatoren $\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \frac{1}{10}$ sind, während die folgenden mit den Multiplicatoren $\frac{1}{11}, \frac{1}{12}, \frac{1}{13}, \dots \frac{1}{20}$ wesentlich weniger umfangreich sind; bei ihnen ist $\frac{1}{k}$ nur jeweils mit $1, 2, \dots k$ vervielfacht. Selbstverständlich reicht diese Ausdehnung hin, um die Zerlegung wirklicher Brüche mit den Nennern 3 bis 20 in Stammbrüche den Tabellen entnehmen zu können.

In den 50 Aufgaben, welche an die Tabellen sich anschliessen, ist vielfach von denselben Gebrauch gemacht, aber auch solche Bruchrechnungen sind vollzogen, bei welchen der Nenner über 20 hinausreicht, bei welchen also die Tabellen ihren Dienst versagen. Das Lehrreiche und wodurch das Rechenbuch von Achmîm besondere geschichtliche Bedeutung erhält, ist nun, dass dabei an verschiedenen Stellen deutlich gemacht ist, wie die Vereinigung von Stammbrüchen zu einem gewöhnlichen Bruche, wie die Zerlegung eines gewöhnlichen Bruches in Stammbrüche vollzogen wurde.

Ersteres geschah, wie seit der Zeit des Ahmes, durch Zurückführung auf einen gemeinsamen Nenner (Gesch. Math. I, 30), als welchen man nicht selten den grössten bereits vorkommenden Nenner wählte, ohne Rücksicht darauf, ob die Zähler des umgewandelten Bruches alsdann ganzzahlig oder gemischtzahlig ausfielen. Solcherlei Brüche blieben in anhaltender Uebung. Diophant hat dergleichen in den Aufgaben II, 36; III, 13; IV, 23, 43, 45; V, 1, 2 und bei den Arabern fehlen sie ebenso wenig wie bei Leonardo von Pisa. Herr Baillet will zwar in Nachfolge einer durch Herrn Rodet seiner Zeit gegen Herrn Eisenlohr und uns vom Zaune gebrochenen Polemik von einer Zurückführung auf einen gemeinsamen Nenner dabei Nichts wissen. Nur eine einer solchen Zurückführung ähnliche Zwischenrechnung komme vor. Aber haben wir, Herr Eisenlohr und der Verfasser dieser Notiz, Anderes behauptet? Wir fürchten fast, Herr Baillet habe das *Audiatur altera pars* nicht in vollem Umfange geübt, und wir möchten uns der Meinung hingeben, wenn er, was der deutschen Sprache wegen, deren wir uns bedienten, vielleicht weniger bequem war, unsere Schriften dem gleichen Studium unterzogen hätte, wie Herrn Rodet's Aufsatz, er die gleiche Ueberzeugung gewonnen hätte, deren auch andere Leser sind: dass Herr Rodet trotz scheinbarem Widerspruch gegen unsere Darstellungen damals kaum Anderes sagte, als was er bei uns finden konnte und wirklich gefunden hatte. Wir kämen nicht nach 11jähriger Frist auf jenen Streit zurück, wenn nicht die Redaction der Zeitschrift, in welcher der Angriff erfolgt war, eine im April 1882 ihr zugeschickte, in französischer Sprache abgefasste Erwiderung einfach unterdrückt hätte, ohne uns sofort ihre Verweigerung der Aufnahme anzuzeigen. Es liegt uns daran, auch heute noch unser damaliges scheinbares Stillschweigen zu erklären, nachdem wir von befreundeter Seite vor Kurzem über dasselbe befragt wurden.

Ueber das Zerlegen von Brüchen in Stammbrüche hat Ahmes keine Andeutung hinterlassen. Erst Leonardo von Pisa (Gesch. Math. II, 12—13) und nur dieser, soweit bekannt war, hat Regeln zusammengestellt, nach welchen man bei Lösung dieser unentbehrlichen Aufgabe zu verfahren hat. Von Leonardo's Vorschriften stimmen welche mit der einen Formel

$$\frac{2}{p} = \frac{1}{\frac{p+1}{2}} + \frac{1}{\frac{p+1}{2} \times p},$$

welche aus der Tabelle des Ahmes leicht herauszulesen war, überein. Eine andere Formel:

$$\frac{2}{p \times q} = \frac{1}{q \times \frac{p+q}{2}} + \frac{1}{p \times \frac{p+q}{2}},$$

welche wir (Gesch. Math. I, 27) den Zerlegungen

$$\frac{2}{35} = \frac{1}{30}\,\frac{1}{42}, \quad \frac{2}{91} = \frac{1}{70}\,\frac{1}{130}$$

entnehmen zu dürfen glaubten, fand bei dem Pisaner keine Bestätigung. Man wird es uns nicht verübeln, wenn wir heute unsere Freude ausdrücken, dass das Rechenbuch von Achmîm unsere Vermuthung als Gewissheit bestätigt hat.

Herr Baillet hat die Zerlegungsmethoden, wie sie im Rechenbuche von Achmîm gelehrt werden, sorgsam gesammelt. Sie kommen in letzter Linie auf folgende zurück:

I. Die Subtractionsmethode. Der Nenner wird in Factoren zerlegt, und, wo möglich, mehrere solche Zerlegungen vorgenommen. Einzelne Factoren werden alsdann vom Zähler abgezogen, bis derselbe erschöpft ist. In der 21. Aufgabe z. B. ist $\frac{239}{6460}$ zu zerlegen.

$$6460 = 68 \,.\, 95 = 76 \,.\, 85; \quad 239 = 76 + 68 + 95;$$

also

$$\frac{239}{6460} = \frac{1}{85}\,\frac{1}{95}\,\frac{1}{68}.$$

Eben diese Zahl 6460 hätte in zahlreiche andere Factorenpaare zerlegt werden können. Dass man gerade die hier in Verwendung gekommenen Factoren bevorzugte, beruht darauf, dass, wie sehr fein erkannt worden ist, den Stammbrüchen am Liebsten solche Nenner beigelegt wurden, die nicht durch gar zu grosse Unterschiede von einander abwichen.

II. Die Methode der durch Summentheile multiplicirten Factoren. Herr Baillet kleidet sie in die Formel:

$$\frac{a}{b \,.\, c} = \frac{1}{c \cdot \frac{b+c}{a}} + \frac{1}{b \cdot \frac{b+c}{a}}.$$

Das ist aber genau unsere oben in's Gedächtniss zurückgerufene Formel, sofern $a = 2$. Die allgemeinere Formel aufzustellen waren wir nicht in der Lage, weil Ahmes in seiner Tabelle keinen Bruch mit von der 2 verschiedenem Zähler zur Zerlegung bringt. Ein Beispiel des Rechenbuches von Achmîm aus dessen 23. Aufgabe bietet $\frac{2}{35}$. Hier ist

$$35 = 5 \,.\, 7, \quad 5 + 7 = 12, \quad \frac{12}{2} = 6,$$

also

$$\frac{6 \,.\, 2}{6 \,.\, 5 \,.\, 7} = \frac{5+7}{6 \,.\, 5 \,.\, 7} = \frac{1}{42}\,\frac{1}{30}.$$

Unsere Leser sehen, dass hier das Beispiel des Ahmes und seine Zerlegung genau wiederkehren. Dagegen ist bei Ahmes $\frac{2}{77} = \frac{1}{44}\,\frac{1}{308}$, indem augenscheinlich $\frac{2}{7} = \frac{1}{4}\,\frac{1}{28}$ durch 11 dividirt wurde. In der 19. Aufgabe des Rechenbuches von Achmîm ist folgendermassen zerlegt:

$$77 = 7.11,\quad 7 + 11 = 18,\quad \frac{18}{2} = 9,\quad \frac{9.2}{9.7.11} = \frac{7 + 11}{9.7.11} = \frac{1}{99}\,\frac{1}{63}.$$

Hier erkennt man, dass 63 und 99 weniger weit von einander abstehen als 44 und 308, und dass deshalb jene ältere Zerlegung verlassen wurde, wenn sie vielleicht auch noch bekannt war. Eine Zerlegung nach dieser Methode mit grösserem Zähler des zu zerlegenden Bruches bietet $\frac{4}{143}$ in der 24. Aufgabe. Hier ist:

$$143 = 11.13,\quad 11 + 13 = 24,\quad \frac{24}{4} = 6,\quad \frac{6.4}{6.11.13} = \frac{11 + 13}{6.11.13} = \frac{1}{78}\,\frac{1}{66}.$$

Wie diese Methoden combinirt werden können, zeigt beispielsweise die 18. Aufgabe an $\frac{43}{1320}$. Zunächst ist $1320 = 15.88$, also

$$\frac{43}{1320} = \frac{15 + 28}{15.88} = \frac{1}{88} + \frac{28}{1320}.$$

Ferner ist

$$1320 = 11.120,\quad 12.11 = 132,\quad 132 + 120 = 252 = 9.28.$$

Demzufolge ist

$$\frac{28}{11.120} = \frac{9.28}{9.11.120} = \frac{11.12 + 120}{9.11.120} = \frac{1}{90}\,\frac{1}{99}$$

und

$$\frac{43}{1320} = \frac{1}{88}\,\frac{1}{90}\,\frac{1}{99}.$$

Wir bemerken wiederholt, dass in allen von uns, nach Herrn Baillet's Vorgang, beigezogenen Beispielen, sämmtliche Zwischenrechnungen dem Rechenbuche von Achmîm genau entnommen sind, dass es sich also hier nicht um Vermuthungen, sondern um die wirklichen, damals benutzten Methoden handelt. Wer neuere Vermuthungen, die früher, als Herrn Baillet's Veröffentlichung bekannt wurde, entstanden sind, zu lesen wünscht, den verweisen wir auf den Aufsatz von Herrn Gino Loria: *Congetture e ricerche sull' aritmetica degli antichi Egiziani* in der Bibliotheca mathematica 1892, p. 97–109.

Die Aufgaben selbst sind, wie uns scheinen will, von geringerer Wichtigkeit, als dasjenige, was wir ihnen bezüglich der Stammbrüche entnommen haben. Es genüge die Bemerkung, dass mitunter Subtractionen gefordert werden, deren Vollziehung unter Hindurchgehen durch einen gemeinsamen Nenner gelehrt wird. Es genüge ferner die Mittheilung, dass

Zweisatzrechnungen vorkommen, welche durch Zinsaufgaben nothwendig gemacht sind. Der Zinsfuss ist theils procentual, theils in Stammbruchform angegeben.

In der 26. Aufgabe heisst es, von 100 erhalte man $1\frac{2}{3}$, wie viel von 195? Die Auflösung vervielfacht $1\frac{2}{3}$ mit 195 zu 325 und dieses mit $\frac{1}{100}$ zu $3\frac{1}{4}$.

In der 35. Aufgabe heisst es, man habe 1 von $15\frac{1}{2}\frac{1}{4}$ zu fordern, wie viel von 100? Es findet sich $\frac{1}{2}\frac{1}{4}$ bei der Division von 3 durch 4 und $15\frac{1}{2}\frac{1}{4}$ bei der Division von 63 durch 4. Folglich ist 4 mit 100 zu vervielfachen und dann 400 durch 63 zu dividiren. Damit begnügt der Verfasser sich, die Division

$$\frac{400}{63} = 6\frac{1}{3}\frac{1}{63}$$

vollzieht er nicht und giebt dieses Endergebniss nicht an.

Auch einige wenige Aufgaben geometrischen Ursprunges sind vorhanden, die indessen kaum ein längeres Verweilen lohnen. Das Wichtigste über das Rechenbuch von Achmîm und dessen sehr dankenswerthe Herausgabe dürfte in unserer Notiz enthalten sein.