Heidelberger Akademie der Wissenschaften

Mathematische Abhandlungen

Autor: **Noether, Fritz** (1884-1941)

Titel: **Bemerkung über die Lösungszahl zueinander adjungierter Randwertaufgaben bei linearen Differentialgleichungen**

Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse : Abt. A ; 1920, 1

Verfasser zeigt, daß bei gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen zwei zueinander adjungierte Randwertaufgaben stets die gleiche Zahl von Lösungen haben. Dagegen gilt das nicht mehr für partielle Differentialgleichungen. Verfasser stellt nämlich für die Lösbarkeit einer Randwertaufgabe eine Bedingung auf und für die Lösbarkeit der adjungierten Aufgabe eine andere Bedingung, die von der ersten zunächst formal verschieden ist; er zeigt dann an Beispielen, daß die Bedingungen sich auch inhaltlich nicht decken. Insbesondere kommt es vor, daß ein Problem eine gewisse Anzahl von Lösungen besitzt, während das adjungierte Problem überhaupt keine Lösungen hat.

(Zfassung aus: Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften / Jahresheft 1920, Seite XXV)

Sitzungsberichte
der Heidelberger Akademie der Wissenschaften
Stiftung Heinrich Lanz
Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse
Abteilung A. Mathematisch-physikalische Wissenschaften
Jahrgang 1920. 1. Abhandlung

Bemerkung über die Lösungszahl zueinander adjungierter Randwertaufgaben bei linearen Differentialgleichungen

Von
FRITZ NOETHER
Karlsruhe i. B.

Eingegangen am 6. Februar 1920

Vorgelegt von OSKAR PERRON

Heidelberg 1920
Carl Winters Universitätsbuchhandlung

Verlags-Nr. 1541

Man bezeichnet bekanntlich in der Theorie der Randwertaufgaben linearer Differentialgleichungen zwei Probleme als zueinander »adjungiert«, wenn sie durch die bilineare Beziehung des Greenschen Satzes so verknüpft sind, daß homogene Lösungen des einen Problems lineare Identitäten zwischen den Differentialbedingungen des homogenen zweiten Problems nach sich ziehen.

Es sei (um die Betrachtung zunächst auf gewöhnliche Differentialgleichungen zu beschränken)

$$(1) \qquad L(u) \equiv p\,u'' + q\,u' + r\,u$$

ein Differentialausdruck, der der Kürze halber von zweiter Ordnung gewählt ist. u, sowie die Koeffizienten p, q, r, die auch von einem Parameter abhängen können, seien im Gebiet $a-b$ der reellen Variabeln x stetige, differentierbare Funktionen, und überdies soll p in diesem Gebiete nicht verschwinden. Durch partielle Integration erhält man die als Greenscher Satz bezeichnete Identität:

$$(2) \qquad \int_a^b [v\,L(u) - u\,M(v)]\,dx = \left[p\,(v\,u' - u\,v') - (p' - q)\,u\,v\right]_a^b,$$

wobei der adjungierte Differentialausdruck $M(v)$ zu definieren ist als:

$$(1') \quad M(v) \equiv (p\,v)'' - (q\,v)' + r\,v \equiv p\,v'' + (2\,p' - q)\,v' + (p'' - q' + r)\,v\,.$$

Unter zwei zueinander adjungierten homogenen Randwertaufgaben versteht man nun die Bestimmung von zwei Funktionen u, v, die den Differentialgleichungen

$$(3) \qquad L(u) = 0$$

$$(3') \qquad M(v) = 0$$

genügen und außerdem jede für sich 2 linearen, homogenen Beziehungen zwischen ihren Randwerten u_a, u_b und den Randwerten ihres ersten Differentialquotienten u'_a, u'_b, bzw. v_a, v_b, v'_a, v'_b von solcher Art, daß die rechte Seite von (2) durch diese Randbedingungen zum Verschwinden gebracht wird. In allen in der mathematischen Literatur behandelten Fällen besteht das Theorem, daß die Anzahl der homogenen, unabhängigen Lösungen in v gleich der Anzahl der homogenen, unabhängigen Lösungen in u ist. Wenn eine bzw. zwei homogene Lösungen u_0 und entsprechend v_0 existieren, ist daher die inhomogene Aufgabe

$$L(u) = F(x) \tag{4}$$

mit den nämlichen Randbedingungen gemäß (2) nur dann lösbar, wenn die Bedingung

$$\int_a^b v_0 F dx = 0$$

erfüllt ist. Das Theorem ist bislang nur in solchen Fällen ausgesprochen, in denen die Randbedingungen in u und v die nämlichen sind. Das gleiche gilt für die in der Literatur vorliegenden Beweise bei partiellen Differentialausdrücken[1]. Doch ist sein Gültigkeitsbereich sicher ein weiterer: Der Ausdruck (1) ist selbstadjungiert, wenn $M(v) \equiv L(v)$, d. h. wenn die Bedingung $p' - q = 0$ und entsprechend weitere bei höherer Ordnung erfüllt sind. Für den gewöhnlichen Differentialausdruck zweiter Ordnung $L(u)$ kann daher stets ein Multiplikator $m(x)$ so gewählt werden, daß $m(x) \cdot L(u)$ ein selbstadjungierter Ausdruck wird, dessen adjungierte Funktion $v^* = v/m$ ist. Das Theorem gilt daher sicher auch in den Fällen, in denen nach dieser Transformation die Randbedingungen in u und v^* die nämlichen sind (sog. GREENsche Randbedingungen[2]).

Aufgaben der Physik[3] führen auf die verwandte Fragestel-

---

[1] Z. B. HILBERT: Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, 6. Mitteilung, Gött. Nachrichten, 1910 (bzw. gesammelt, Leipzig 1912, Kap. XVIII, S. 223 ff.).

[2] Vgl. O. HAUPT: Über eine Methode zum Beweise von Oscillationstheoremen; Math. Ann. Bd. 76 (1914) § 1. Für einen Fall von Differentialgleichungen vierter Ordnung vgl. F. NOETHER: Zur Theorie der Turbulenz, Gött. Nachrichten, 1917 (§ 3).

[3] F. NOETHER: Eine Randwertaufgabe der Potentialtheorie (erscheint demnächst). Auch gewisse mit dem RIEMANNschen Problem zusammenhängende Fragen; vgl. HILBERT, l. c. 3. Mitteilung (1905, bzw. Kap. X, S. 81).

lung: Wie verhält sich die Anzahl der Lösungen, wenn man wohl den Differentialausdruck als selbstadjungiert annimmt, aber die Randbedingungen nicht als GREENsche; also für u beliebige lineare Randbedingungen vorschreibt und dann die für v so bestimmt, daß die rechte Seite von (2) verschwindet? Da der Kern obigen Theorems in der linearen Beziehung liegt, die der Satz (2) zwischen den Gleichungen des adjungierten Problems vermittelt, wenn eine Lösung u_0 existiert, und eine ebensolche Beziehung sich auch bei der jetzigen Fragestellung ergibt, so läge es nahe, das gleiche Resultat zu erwarten. Wir untersuchen zunächst den gewöhnlichen Differentialausdruck, der jetzt als selbstadjungiert angenommen werden soll.

Die allgemeinen Randbedingungen, die in Frage kommen, seien geschrieben:

$$g_1(u) \equiv A_{11} u_a + A_{12} u_a' - B_{11} u_b - B_{12} u_b' = 0$$
$$g_2(u) \equiv A_{21} u_a + A_{22} u_a' - B_{21} u_b - B_{22} u_b' = 0\,,$$

während

$$(4) \qquad L(u) \equiv (p u')' + r u = 0 \;;\quad M(v) \equiv L(v) = 0\,.$$

Man bestimmt die adjungierten Randbedingungen, indem man aus diesen Gleichungen zwei der Größen u_a, u_a', u_b, u_b' durch die zwei übrigen ausdrückt. Das ist immer möglich, mit Ausnahme des Falls (der für spezielle Parameterwerte eintreten könnte), daß in der Matrix

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & B_{11} & B_{12} \\ A_{21} & A_{22} & B_{21} & B_{22} \end{vmatrix}$$

sämtliche Determinanten verschwinden. In diesem Falle (um ihn vorweg zu erledigen) ist nur eine Randbedingung in u vorhanden, so daß stets eine Lösung existiert. Die adjungierte Aufgabe kann in diesem Falle nicht eindeutig definiert werden, sondern hängt von dem allgemeinen Fall ab, von dem der Grenzübergang zu dem betreffenden Parameterwerte stattfindet. Wesentlich ist aber, daß die entsprechende inhomogene Aufgabe

$$L(u) = F(x) \;;\quad g_1(u) = f_1 \;;\quad g_2(u) = f_2$$

dann und nur dann lösbar ist, wenn eine lineare Beziehung besteht:

$$f_1 - c f_2 = g_1(u) - c g_2(u) = 0\,,$$

worin $c = A_{11}/A_{21}$.

Im allgemeinen Fall sei es etwa möglich, u_a, u_a' durch u_b, u_b' auszudrücken:

$$(5)\quad \begin{cases} u_a - \beta_{11} u_b - \beta_{12} u_b' \quad g_1^*(u) = 0 \\ u_a' - \beta_{21} u_b - \beta_{22} u_b' \quad g_2^*(u) = 0\,. \end{cases}$$

Die rechte Seite von (2) geht damit, unter Berücksichtigung von $p' - q = 0$, über in:

$$(6)\quad u_b\left(-p_b v_b' - p_a \beta_{21} v_a + p_a \beta_{11} v_a'\right) + u_b'\left(p_b v_b - p_a \beta_{22} v_a + p_a \beta_{12} v_a'\right)\,.$$

Hier müssen die Koeffizienten von u_b und u_b' verschwinden. Man erhält so die adjungierten Randbedingungen:

$$(7)\quad \begin{cases} h_1(v) \quad p_b v_b - p_a \beta_{22} v_a + p_a \beta_{12} v_a' = 0 \\ h_2(v) \quad p_b v_b' + p_a \beta_{21} v_a - p_a \beta_{11} v_a' = 0\,. \end{cases}$$

Es sei angenommen, daß eine, bzw. zwei Lösungen u_0 vorhanden seien, und die Lösung v_0 sei in der Form

$$(8)\qquad v_0 = \gamma_1 w_1 + \gamma_2 w_2$$

angesetzt, wobei w_1, w_2 Partikularlösungen von (4) bedeuten. Die Gleichungen (7) gehen dann in zwei homogene Gleichungen für die Konstanten γ_1, γ_2 über. (2) ergibt mit Rücksicht auf (6) soviel lineare Beziehungen zwischen diesen Gleichungen, als Lösungen u_0 existieren. Nach den Sätzen über lineare, homogene Gleichungen mit endlicher Variabelnzahl gibt es daher die gleiche Anzahl Lösungen in v wie in u.

Bei *gewöhnlichen* Differentialgleichungen ist somit in allen Fällen die *Anzahl der adjungierten Lösungen*, bzw. im inhomogenen Fall die Anzahl der linearen Bedingungen, denen die rechten Seiten zu unterwerfen sind, *gleich der Anzahl der ursprünglichen homogenen Lösungen*.

Die hier verwandte Schlußweise ist aber nicht auf Randwertaufgaben bei partiellen Differentialgleichungen übertragbar. Dem Ansatze (8) entspricht nämlich dann ein Ansatz mit unendlich vielen Konstanten $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ in inf., und es handelt sich entsprechend um unendlich viele homogene Gleichungen. Man kann aber für ein solches System im allgemeinen nicht aus der Existenz einer linearen, homogenen Beziehung zwischen den Gleichungen auf die Existenz einer Lösung schließen, und umgekehrt folgt aus der Existenz eines Lösungssystems nicht die Notwendigkeit des Bestehens linearer Beziehungen[4]. In der Tat lassen sich Beispiele angeben, für die die Lösungszahl des adjungierten Problems nicht mit der des ursprünglichen übereinstimmt.

Es handle sich um die Integration der Gleichung

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{9}$$

für das innere eines Kreises $x^2 + y^2 = 1$. Wenn mit $\partial u/\partial s$ und $\partial u/\partial n$ die Ableitung in Richtung der Kreistangente, bzw. der inneren Normalen bezeichnet wird, so sei die Randbedingung für u:

$$g(u) \equiv \lambda(s) \frac{\partial u}{\partial n} + \mu(s) \frac{\partial u}{\partial s} = f(s) \tag{10}$$

längs des Kreises S, worin λ und μ stetige, auf dem Kreis eindeutige Funktionen der Bogenlänge s bedeuten, die keine gemeinsame Nullstelle haben. Sie können noch von einem Parameter abhängen.

Es sei nun angenommen, daß für bestimmte Parameterwerte zwischen den Gleichungen (9), (10) eine, bzw. mehrere homogene, lineare Identitäten bestehen, so daß für alle Funktionen u, die (9) genügen, gelte:

$$\int\limits_S p(s)\, g(u)\, ds = \int\limits_S p(s) \left(\lambda(s) \frac{\partial u}{\partial n} + \mu(s) \frac{\partial u}{\partial s} \right) ds = 0 \tag{11}$$

[4] Für die Bedingungen, unter denen sich ein System mit unendlich vielen Unbekannten wie ein solches mit endlicher Variabelnzahl verhält, vgl. z. B. Hilbert, l. c. 4. Mitt. (1906) bzw. Kap. XII. E. Schmidt: Über Auflösung linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten, Rend. circ. Mat., Palermo, 25 (1908).

mit einer stetigen, auf dem Rand eindeutigen Funktion $p(s)$. Wählen wir $p(s) \cdot \lambda(s)$ als Randwerte einer im Innern regulären Potentialfunktion v, so folgt zunächst, mit der Abkürzung $\mu(s)/\lambda(s) = C(s)$:

$$(11') \qquad \int\limits_S v\left(\frac{\partial u}{\partial n} + C(s)\frac{\partial u}{\partial s}\right) ds = 0.$$

Für die Potentialfunktionen u, v gilt der GREENsche Satz:

$$\int\limits_S \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right) ds = 0.$$

Ferner wegen der Eindeutigkeit von u, v, C:

$$\int\limits_S \left(Cv\frac{\partial u}{\partial s} + u\frac{\partial (Cv)}{\partial s}\right) ds = \int\limits_S \frac{\partial (Cuv)}{\partial s}\, ds = 0.$$

Setzen wir also

$$\frac{1}{\lambda} g(u) = g^*(u) \equiv \frac{\partial u}{\partial n} + C\frac{\partial u}{\partial s}\ ; \quad h(v) \equiv \frac{\partial v}{\partial n} - \frac{\partial (Cv)}{\partial s},$$

so nimmt der GREENsche Satz die Form an:

$$(12) \qquad \int\limits_S (v g^*(u) - u h(v))\, ds = 0.$$

Also folgt aus (11'):

$$\int\limits_S u h(v)\, ds = 0$$

für jede Potentialfunktion u. Da für eine solche die Randwerte u eine willkürliche Funktion bilden, folgt

$$h(v) = 0.$$

Außer dieser Randbedingung genügt v seiner Definition nach der Bedingung, daß Cv an den Unendlichkeitsstellen von C (das sind die Nullstellen von λ) endlich bleibt. Das ist die »adjungierte« zu unserer (in bezug auf die Feldgleichung selbstadjungierten) Randwertaufgabe. Nur wenn eine Lösung v existiert, besteht für alle Potentialfunktionen u eine Beziehung (11) und umgekehrt.

Wir führen jetzt Polarkoordinaten ein: $x = r\cos\alpha$, $y = r\sin\alpha$, und setzen

$$\varphi_n = r^n \cos n\alpha\,, \quad \psi_n = r^n \sin n\alpha \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)\,,$$

so daß die allgemeine Potentialfunktion

$$u = \sum_0^\infty {}_n \gamma_n \varphi_n + \sum_1^\infty {}_n \delta_n \psi_n \tag{13}$$

gesetzt werden kann. Eine Beziehung von der Form (11) erfordert daher, daß identisch für alle n:

$$\int_S p\,g(\varphi_n)\,ds = 0\,; \quad \int_S p\,g(\psi_n)\,ds = 0\,;$$

d. h.: Eine solche Beziehung und somit eine Lösung der homogenen adjungierten Aufgabe existiert dann und nur dann, wenn es eine zu allen Funktionen des Systems der $g(\varphi_n)$, $g(\psi_n)$ (von denen $g(\varphi_0) = 0$) längs des Rands orthogonale Funktion $p(s)$ gibt.

Eine homogene Lösung der ursprünglichen Aufgabe (10) ist stets $u_0 = \varphi_0 = 1$; jede weitere kann in der Form (13) angesetzt werden; ihre Existenz erfordert daher, daß eine lineare Beziehung:

$$\sum_1^\infty {}_n \gamma_n\, g(\varphi_n) + \sum_1^\infty {}_n \delta_n\, g(\psi_n) = 0$$

mit konstanten Koeffizienten γ_n, δ_n besteht. Diese beiden Bedingungen sind keineswegs identisch, wie an Beispielen ohne weiteres ersichtlich ist.

Wir nehmen beispielsweise:

$$\lambda(s) = -\sin\alpha\,; \quad \mu(s) = \cos\alpha\,,$$

also $$g(u) = \sin\alpha \frac{\partial u}{\partial r} + \cos\alpha \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Es existieren offenbar die homogenen Lösungen: $u_0 = 1$ und $u_1 = x = r\cos\alpha$ von (10). Die Ausdrücke $g(\varphi_n)$, $g(\psi_n)$ ergeben aber:

$$g(\varphi_n) = -n\sin(n-1)\alpha \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$
$$g(\psi_n) = n\cos(n-1)\alpha \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Die ersteren verschwinden in der Tat für $n=0$ und $n=1$, entsprechend den beiden homogenen Lösungen. Die übrigen ergeben das vollständige System der Funktionen $n\sin k\alpha\,(k=n-1=1,2,\ldots)$, $n\cos k\alpha\,(k=n-1=0,1,\ldots)$, so daß es keine zu sämtlichen $g(\varphi_n)$, $g(\psi_n)$ orthogonale Funktion gibt.

Allgemein sei

$$\lambda = -\sin m\alpha\,; \quad \mu = \cos m\alpha$$

mit einer beliebigen ganzen Zahl m. Für $m=0$ wird:

$$g(\varphi_n) = -n\sin n\alpha \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$
$$g(\psi_n) = n\cos n\alpha \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Es existiert die homogene Lösung: $u_0 = \varphi_0 = 1$ und keine weitere, da zwischen den angegebenen Ausdrücken der $g(\varphi_n)$, $g(\psi_n)$ keine linearen Beziehungen bestehen. Es existiert ferner die eine zu allen $g(\varphi_n)$, $g(\psi_n)$ orthogonale Funktion $p(s) = 1$. Für die Lösbarkeit der inhomogenen Aufgabe (10) ist daher nach (11) die eine Bedingung:

$$\int_S f(s)\,ds = 0$$

erforderlich. Die Zahl der Bedingungen stimmt hier mit der Zahl der homogenen Lösungen überein.

Für beliebiges m ist:

$$g(\varphi_n) = -n\sin(n-m)\alpha \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$
$$g(\psi_n) = n\cos(n-m)\alpha \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Wenn m eine positive ganze Zahl, bestehen also die $2m$ homogenen Lösungen von (10):

$$u_0 = \varphi_0\ ; \quad u_i = (2m-n)\,\varphi_n + n\,\varphi_{2m-n} \qquad (n = 1, 2, \ldots m-1)$$
$$u_m = \varphi_m\ ; \quad u_k = (2m-n)\,\psi_n - n\,\psi_{2m-n} \qquad (n = 1, 2, \ldots m-1)\,.$$

Da aber die $g(\varphi_n), g(\psi_n)$ das vollständige System der Funktionen $n \sin k\,\alpha\ (k = n - m = 1, 2, \ldots)$, $n \cos k\,\alpha\ (k = n - m = 0, 1, \ldots)$ durchlaufen, gibt es keine zu allen orthogonale Funktion $p(s)$, also keine adjungierte Lösung. Die inhomogene Aufgabe (10) ist also für jede beliebige Funktion f lösbar[5].

Ist aber m eine negative ganze Zahl, $-l$, dann ist

$$g(\varphi_n) = -n \sin(n+l)\,\alpha \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$
$$g(\psi_n) = n \cos(n+l)\,\alpha \qquad (n = 1, 2, \ldots)\,.$$

Dann bestehen zwischen den $g(\varphi_n), g(\psi_n)$ keine linearen, homogenen Beziehungen; es existiert also nur die eine homogene Lösung von (10): $u_0 = \varphi_0 = 1$. Dagegen existieren die $(2l+1)$ zu allen $g(\varphi_n)$, $g(\psi_n)$ orthogonalen Funktionen:

$$p_i = \cos i\,\alpha \qquad (i = 0, 1, \ldots l)$$
$$p_k = \sin k\,\alpha \qquad (k = 1, 2, \ldots l)\,.$$

Es besteht die gleiche Zahl, $(2l+1)$, von Lösungen der adjungierten, homogenen Aufgabe, und die inhomogene Aufgabe (10) ist gemäß (11) nur lösbar, wenn die $2l+1$ Beziehungen

$$\int_S p_i\, f\, ds = 0\ ; \quad \int_S p_k\, f\, ds = 0$$

erfüllt sind.

In allen Fällen verhält sich die Aufgabe wie ein System linearer Gleichungen mit (außer im Fall $m = 0$) verschiedener Anzahl der Reihen und Kolonnen. Die Mitteilung dieser Beispiele war der Zweck vorliegender Note. Sie sind ein spezieller Fall einer

[5] Vgl. den Existenzbeweis bei F. NOETHER, l. c. (3).

größeren Klasse von Aufgaben, die, wie die behandelte, von zwei auf einer geschlossenen Randkurve S definierten Funktionen $\lambda(s)$, $\mu(s)$ abhängen. Für diese Aufgaben gelten analoge Sätze über die Nullösungszahlen, wobei an Stelle der ganzen Zahl m (bzw. $-l$) der ganzzahlige Index

$$m = \frac{1}{2\pi i} \int_S d\left[\log\left(\lambda(s) + i\mu(s)\right)\right]$$

tritt. Sie sollen an anderer Stelle behandelt werden.