Universitätsbibliothek
Heidelberg

Grundlagen der Zahlentheorie und Analysis

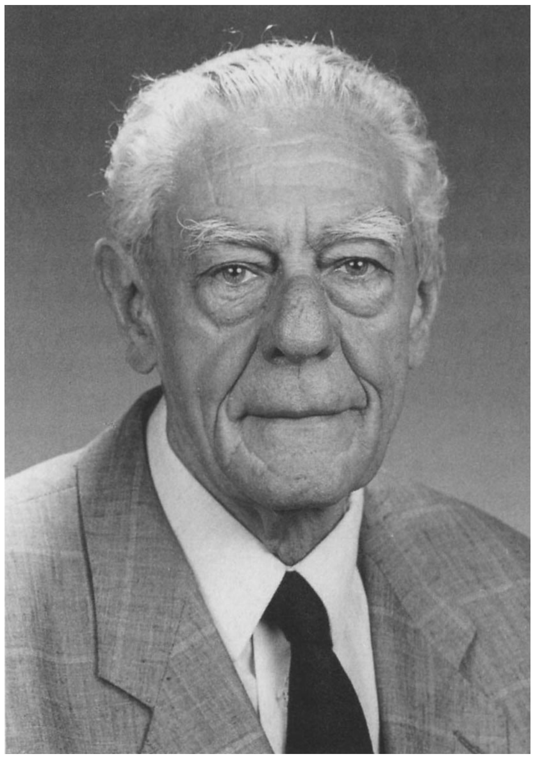
von

Gert H. Müller

Neu herausgegegeben von **Gabriele Dörflinger**,
Universitätsbibliothek Heidelberg, 2007

Heidelberger Texte zur Mathematikgeschichte

Gert Heinz Müller
geb. 1923 in Troppau
gest. 2006 in Heidelberg



Der Aufsatz erschien in Band 2 von

Emeriti erinnern sich : Rückblicke auf die Lehre und Forschung in Heidelberg / hrsg. von Otto M. Marx und Annett Moses. Weinheim : VCH, 1994. - S. 199–233

Die Photographie ist dem gleichen Werk entnommen.

Die Witwe des Autors, Frau Dr. Lotte Müller, gestattete freundlicherweise die Neupublikation des Aufsatzes.

Gert H. Müller

Professor Müller wurde 1923 in Troppau geboren. Nach dem Abitur studierte er von 1945 bis 1948 Mathematik und Astronomie an der Universität Graz und promovierte 1947 zum Doktor der Philosophie. Von 1947 bis 1949 war unser Referent Assistent an der Sternwarte in Graz, von 1949 bis 1951 Assistent von Ferdinand Gonseth an der ETH Zürich. Nach einem Forschungsaufenthalt als Stipendiat am Institut H. Poincaré (Paris) wurde Herr Müller Assistent von Paul Bernays an der ETH. Zürich (1952-1960). Während eines Forschungsaufenthalts am Mathematischen Institut der Universität Heidelberg (1960-1963) erfolgte 1962 die Habilitation für „Reine Mathematik und mathematische Logik". Zwischen 1963 und 1973 war unser Referent zunächst Dozent und später C2- bzw. C3-Professor am Mathematischen Institut in Heidelberg. Von 1973 bis 1990 war Professor Müller Ordinarius an selbigem Institut.

Professor Müller war sowohl Direktor des Mathematischen Instituts der Universität Heidelberg als auch zweimaliger Dekan der Fakultät. Seine Heidelberger Lehr- und Forschungstätigkeit wurde durch zahlreiche Gastprofessuren und -aufenthalte unterbrochen (Bonn, Leeds, College de France, Oxford, Jerusalem, Tromsoe, Marseille-Luminy, Tokyo, Patras, Canberra, Sydney, Kyoto, Prag, Nanjing, Beijing, Moskau).

Professor Müller war Präsident der Deutschen Gesellschaft für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik sowie der International Society for the Study of Time, Desgleichen war unser Referent Vizepräsident der Division of Logic, Methodology and Philosophy of Science (of the IUPHS) und von 1969 bis 1989 Leiter des Logikunternehmens der Heidelberger Akademie der Wissenschaften. Seit 1986 ist er ordentliches Mitglied der Academie Internationale de Philosophie des Sciences (Brüssel).

Grundlagen der Zahlentheorie und Analysis vom deduktiven Gesichtspunkt

Vorbemerkung

Erinnerungen sind einerseits lückenhaft und andererseits durch ihre Menge störend. Dazu kommt, daß post festum manche Zusammenhänge und Bewertungen sichtbar werden, die selbst keineswegs Erinnerungen proprio sensu sind, sondern bereits Konstruktionen geistiger Art. Meine Erinnerungen — und das gilt sicher auch für manche meiner Kollegen — sind mit Fortschritten in einem hochspezialisierten Gebiet verbunden. Ohne hinreichend breite Erläuterungen würden gewisse Erinnerungen mit so vielen „Fachwörtern" gemischt sein, daß sich schließlich für den Nichtfachmann unverständliche Verbalisierungen ergäben.

Mir war und ist es stets darum zu tun, zu verstehen, was wir zu wissen glauben — und in den Wissenschaften gibt es sehr viel, was zwar sachlich feststeht, aber teils in keinen Zusammenhang eingeordnet ist, teils einer Interpretation bedürftig ist. In dieser Einstellung bin ich, wie mir nun voll bewußt ist, schon in frühen Jahren an jeden Lernstoff, den Schule und Leben bieten, herangegangen. Fast jedes Verstehen führt zur Suche nach neuem Wissen, und wenn andere oder man selbst etwas von dem Gesuchten gefunden haben, so ist es oft so, daß das vorherige Verständnis nur als ein erster Ansatz übrigbleibt, wenn man nicht gar grundlegend umdenken muß. Die Suche nach neuem Wissen und dessen Einordnung in schon erreichtes Wissen gehen Hand in Hand.

Meine Studien in Graz waren zuerst auf Astronomie, Physik und Mathematik ausgerichtet, und es wäre naheliegend gewesen, in einem dieser Gebiete zu promovieren; ich habe auch eine in zwei Teilen erschienene Arbeit über Punktmengen in Kuratowskischen Räumen — heute nach Alfred Tarski besser „closure algebras" genannt — geschrieben. Aber zu dieser Zeit (1947) durften in der Steiermark Professoren, die Mitglied der NSDAP waren, keine Doktorarbeiten annehmen. Davon waren alle meine Lehrer außer dem Experimentalphysiker Hans Benndorf betroffen. Nun hatte ich an diesem Teil der Physik (mehr aus jugendlichem Hochmut als aus sachlichen Gründen) kein besonderes Interesse, und außerdem war damals die technische Ausstattung in Graz für Experimente fast jeder Art völlig antiquiert. Da war es Konstantin Radakovic, ein Mitglied der Wiener Schule (des Positivismus in der Philosophie), der bereit war, eine Doktorarbeit von mir anzunehmen. Dadurch, und durch Eigeninteresse habe ich mich den erkenntnistheoretischen Grundlagen der Naturwissenschaften — und dann auch den Grundlagenfragen der Mathematik zugewandt. (Mein Doktorat erwarb ich in Graz in Philosophie. In Heidelberg wurde ich in Reiner Mathematik und Mathematischer Logik habilitiert.) Mein Interesse an Physik und Astronomie habe ich bis heute behalten und wenigstens durch „Mitlesen" versucht, ein gewisses Verständnis darin zu bewahren.

Nun wende ich mich der Grundlagenforschung der Mathematik, also der Mathematischen Logik zu. Diese umfaßt heute die Mengenlehre, die Modelltheorie, die Rekursionstheorie, die Beweistheorie und neuerdings auch die theoretische Informatik. Historisch interessant ist es, daß bei der Entwicklung der Informatik auf Ergebnisse der Logik aus den dreißiger Jahren (Gerhard Gentzens „Hauptsatz“, Wahrheitsbegriff von Tarski) und auf Weiterentwicklungen (Tableau-Methode, Interpolationssätze etc.) der späteren Jahre manchmal in neuem Gewande und durch Wiederentdeckungen zurückgegriffen wurde. Die Grundlagenforschung hat mich geistig geprägt und war auch meine akademische Lebensaufgabe.

Die historische Entwicklung im wissenschaftlichen wie im eigenen Interessenbereich entspricht natürlich kaum dem inhaltlichen Zusammenhang einzelner Themata. Ich gebe den Themata den Vorrang; und daher habe ich folgende Auswahl und Aufteilung des Stoffes gewählt: Zunächst zur Auswahl: Von den verschiedenen, für sich selbst reichen Teilgebieten, die auch eigener *methodischer* und *erkenntnistheoretischer Betrachtung bedürfen* — nehme ich nur die Frage der Grundlegung der üblicherweise als Zahlentheorie, Algebra (z.T.) und Analysis bezeichneten Gebiete heraus. (Technisch gesprochen: die Arithmetik zweiter Stufe, in der diese Gebiete vollentwickelt werden können.) Schon dabei kommen eine Vielfalt von Gesichtspunkten zur Sprache, die vor und während meiner akademischen Laufbahn eine Rolle spielten. Das Eingehen auf die anderen Gebiete würde nicht nur mehr Raum, sondern viel mehr technischen Aufwand erfordern, als es hier angemessen erscheint. Es sei nachdrücklich betont, daß durch die Auswahl *wichtige* Themata, z.B. der Morleysche Satz in der Modelltheorie, die Turing-Berechenbarkeit, der Satz von Martin und Steel in der Mengenlehre, die Forcingmethode etc., nicht weitere Erwähnung finden.

Es mag (berechtigterweise kritisch) auffallen, daß ich keine Literatur angebe; es existieren neben den Spezialarbeiten sehr viele Bücher, in denen die hier erörterten Themata von dieser oder jener Warte, z.T. auch recht technisch, behandelt werden. Darin sind historische und weitere Quellen genannt. Hier soll der Gemeinschaft an unserer Universität ein — wie ich hoffe halbwegs lesbarer — Überblick über eine Forschungslinie, die in meiner Zeit einen gewissen Abschluß erreicht haben mag, gegeben werden. Da erscheinen mir Hinweise auf Quellen, die kaum bekannt sind, eher hinderlich als förderlich.

Zunächst beschreibe ich (in Abschnitt A) die formale Einführung von mathematischen Systemen und hebe die wesentlichen Stellen hervor, an denen ein strikter Formalismus Ergänzungen inhaltlicher Natur erfordert. Danach (in Abschnitt B) betrachte ich die typentheoretische — de facto heute übliche — Darstellungsweise der Mathematik (soweit eine formale Darstellung erforderlich ist). Die Typentheorie stellt ein Rahmensystem bereit, in dem die klassische Mathematik deduktiv entwickelt werden kann. Dabei ergibt sich eine ziemlich genaue Schranke der erforderlichen axiomatischen Annahmen, die durch die Beweistheorie aufgefunden und in einer spezifischen Weise gesichert wurde (Abschnitt C). In Abschnitt D führe ich den Intuitionismus von Luitzen Egbertus Jan Brouwer ein, den einzigen alternativen, von philosophischen Gesichtspunkten geleiteten Aufbau der Mathematik. Die damit verbundenen Schwierigkeiten führen (in Abschnitt E) zur Rückbesinnung auf die klassische Mathematik; ich versuche eine möglichst schwache Formulierung ihrer Prinzipien, die noch als Basis für den Bereich von Mathematik, die wir seit der griechischen Zeit so erfolgreich betreiben, dienen kann.

A. Die Formalisierung der Mathematik und Logik

Zum Ende der vierziger und Anfang der fünfziger Jahre hatten meine führenden Lehrer (von denen ich bis auf Bertrand Russell wohl alle persönlich kennenlernte) die *mathematische* Präzisierung der wichtigsten philosophischen Ansätze zur Grundlegung der Mathematik geleistet. Das Erstaunliche daran war und ist, in welchem Ausmaß und mit welcher Feinheit im Detail sich dies als möglich erwies. Seit der Antike gaben Logik und Mathematik (zwei Disziplinen, die ja selbst erst aus dem Gesamtwissen des Menschen herausgeschält wurden, aber *nicht unabhängig* davon sind) Anlaß zur philosophischen Reflexion über deren Stellung zu anderen Wissenschaften, über ihren Wahrheitsanspruch und natürlich über ihre Inhalte. Für die Logiker und Mathematiker waren dabei vor allem Schwierigkeiten und Zweifel von Bedeutung, die diese Disziplinen so stark betrafen, daß deren Einheit und Fortschritt bedroht erschien. Zeichen dessen waren z.B. die so frühe, schon in der Antike erforderliche Formulierung des Archimedischen Axioms (zu zwei Zahlen $a \geq b > 0$ gibt es eine Ziffer z (d.h., 0, 0', 0", 0"', ...), so daß z mal b größer als a wird), die vielfältigen Antinomien in der scholastischen Logik, die Unstimmigkeiten in der Behandlung unendlicher Reihen und manches mehr. Aber es schien, daß nach einem konzisen Aufbau der Zahlsysteme, im 19. Jahrhundert also, insbesondere der Begriffe der natürlichen und der reellen Zahlen, zumindest für die Mathematik eine Abrundung und Sicherheit erreicht war, und dies umso mehr angesichts der Erfolge der Analysis in den Naturwissenschaften.

Diese Situation änderte sich einerseits durch die Entdeckung der Antinomien, aber vielleicht stärker durch den Fortschritt der Mathematik selbst in Richtung einer neuen Höhe der Abstraktion, einer ungewohnten Komplexität der Begriffe und Beweise und einer Unanschaulichkeit mancher Ergebnisse (etwa in der Topologie); letztlich erfolgte ja die Kontrolle der Beweise und mathematischen Ergebnisse (sozusagen „in pectore“) durch einen einigermaßen anschaulichen Nachvollzug. Diesen Problemen, der Existenz der Antinomien und dem Fehlen einer Kontrolhnöglichkeit, wurde im wesentlichen — sagen wir etwa bis Anfang der fünfziger Jahre unseres Jahrhunderts — Rechnung getragen. Für diesen Schritt erwies sich eine strikte Fassung (Formalisierung) der Sprachen der Mathematik, der benutzten Logik und der spezifischen mathematischen Theorien als de facto unabdingbar.

Die *Sprache* der Mathematik, die Prädikaten- und Funktionensprache wurde entwickelt: In dieser beziehen sich die Variablen auf einen (eventuell mehrere) Gegenstandsbereich(e) und die Prädikat- und Funktionenzeichen erhalten ihre Interpretation durch den Bezug auf diese Gegenstandsbereiche. Mit dem Zeichenmaterial werden Begriffe wie Formel, Satz, Term etc. eingeführt, kurz die Syntax solcher Sprachen.

Prinzipiell braucht man für eine exakte Einführung der Syntax *inhaltlich* einen elementaren Teil der Zahlentheorie (etwa die primitiv rekursiven Funktionen), aber um diesen Teil der Zahlentheorie *formal* einzuführen, braucht man umgekehrt den Formelbegriff und die Logik (erster Stufe). Das ist ein typisches Problem aller Grundlagenfragen. Um zu beginnen, muß man mit etwas beginnen; woher dieses „etwas“ nehmen? Ferdinand Gonseth, einer meiner Lehrer an der ETH Zürich, hat den deskriptiven Begriff „synthèse dialectique“ eingeführt, einer Synthese unserer elementaren Erfahrungen mit: Fallunterscheidungen, mit einfachen Figuren, im Zählen, in unserer Vorstellungsfähigkeit, unbegrenzte Iterationen, zu erlauben, und unserer Tendenz, zu technisch brauchbaren und leicht übertragbaren Regeln zu gelangen. Eine Rückbesinnung auf diese Quellen unseres exakten Denkens, also besonders der Mathematik, hat vor allem Saunders MacLane in neuerer Zeit für die Grundlagenforschung gefordert.

Damit Sprachen ihre Aufgabe erfüllen, muß nicht nur eine Syntax, sondern auch eine Interpretation gegeben sein. Und dann erfolgt eine *Bewertung* gewisser syntaktischer Ausdrücke: der Formeln und hier speziell der Sätze. Auf diese Bewertung beziehen sich die aussagenlogischen Operatoren, von denen anzugeben ist, wie die Bewertung für *zusammengesetzte* Ausdrücke gefunden wird, wenn die Bewertung der einfachsten Ausdrücke gegeben ist, nämlich: der atomaren Ausdrücke, z.B. $R(k,l)$ mit zweistelligem Prädikatzeichen R, zwei Konstanten k,l oder der Quantorenausdrücke, wie $\forall x\varphi(x), \exists x\varphi(x)$ (gelesen „für alle $x, \varphi(x)$“, bzw. „es gibt ein $x, \varphi(x)$“).

Und was sind solche Bewertungen? Natürlich z.B. die „*Wahr/Falsch*“-Scheidung der zweiwertigen Logik, aber auch „*ich habe eingesehen, daß ...*“ der intuitionistischen Logik und auch „*mit x-Prozent Wahrscheinlichkeit, daß ...*“, „*möglicherweise, daß ...*“ etc. Für die Mathematik beschränke ich mich auf die ersten beiden Fälle. Eine Logik soll nun gestatten, von vorgegebenen Ausdrücken mit der ausgezeichneten Bewertung (z.B. wahr) zu weiteren Ausdrücken (Folgerungen) durch *Regeln* zu gelangen unter Erhaltung des ausgezeichneten Wertes. Dabei soll die *Anwendung* der Regeln auf vorgegebene, syntaktisch korrekt aufgebaute Ausdrücke im Prinzip durch Maschinen kontrollierbar sein. Dieses Ziel ist für die klassische Logik wie für die intuitionistische (formale) Logik erreicht. Ein Risiko ist damit verbunden: Wenn man nach langen Ketten von Schlüssen

(Descartes) zu einer Folgerung kommt, hat dann diese noch *im selben Sinne* den ausgezeichneten Wert wie die Ausgangsausdrücke? Das Risiko betrifft natürlich die Bewertung der intuitionistischen Logik in besonderem Maße, da es fraglich ist, ob Einsichtigkeit sich lange genug vererbt.

Nun kann man eine Art des *Formalismus* wie folgt einführen:

(i) Man fixiere eine formale Sprache S (z.B. der Gruppentheorie, der Geometrie, der Zahlentheorie, der Analysis, der Mengenlehre oder einer noch ganz unbekannten Theorie).

(ii) Man formuliere in S eine endliche oder rekursiv-unendliche entscheidbare Satzmenge P (als „Postulate").

(iii) Man ziehe daraus mittels der formal vorgegebenen Logik Folgerungen.

(iv) Wenn eine der Folgerungen laut (iii) die Figur $s \wedge \neg s$ (gelesen „s und non s") s aus S hat, dann verwerfe man P (Forderung der Widerspruchsfreiheit).

(v) Anwendungen von P haben so zu erfolgen, daß der Benutzer einen Gegenstandsbereich angibt, auf diesem die Prädikat- und Funktionszeichen von S in ihrem Wertverlauf (Belegung) so festlegt, daß die Sätze aus P den ausgezeichneten Wert erhalten und dann die Folgerungen (als Theoreme, ebenfalls mit ausgezeichnetem Wert) benutzt.

Bemerkung: Natürlich ist die Bedingung (iv) insofern unzugänglich, als der Benutzer zuerst alle (abzählbar vielen) Ableitungen aus P — das sind endliche baumartige Figuren — generieren muß, um sicher zu sein, daß $s \wedge \neg s$ *nicht* vorkommt. (Es gibt andere Methoden, wie die Rückführung der Widerspruchsfreiheit eines Systems P_1 auf die von P_2, was aber das Problem nur verschiebt.) Natürlich kann man gewisse Postulatensysteme aus *inhaltlichen* Gründen (z.B. Evidenz) als widerspruchsfrei betrachten, aber auf diese Weise überschreitet man den Formalismus. In der Bedingung (iv) liegt ein prinzipielles *Risiko*, von dem ich nicht sehe, wie es ausgeschaltet werden soll. Noch ein anderes *Risiko* müssen wir ins Auge fassen; dazu zunächst zwei Beispiele:

Der Begriff der Stetigkeit: Der Gebrauch des Wortes „stetig" und unsere Anschauung schien durch die übliche Definition der Analysis in plausibler Weise erfaßt zu werden. (Die rechte Seite dieser Definition ist im Rahmen der Analysis ein formales System.) Nun wird dem Studenten (als Warnung für seine Prüfung) beigebracht, daß gewisse Kurven von G. Peano *stetig* sind, die anscheinend für jede vernünftige Anschauung und gegen die Intention, so unstetig sind, wie man es sich nur wünschen kann! Methodisch kann man die Lehrbuchdefinition als inadäquat zur Erfassung von „stetig" ansehen *oder* das Ergebnis von Peano als neue Entdeckung auffassen, was, „stetig“ alles bedeuten kann. (Und Analoges gilt für viele andere Beispiele.) Weder der Formalismus noch die anderen generellen Ansätze zur Begründung oder gar Abgrenzung der Mathematik sind gegen solche Situationen gefeit. Diese zeigen, daß sowohl die Kodierung von Intentionen, wie auch die Dekodierung von Ergebnissen eines (ante festum nicht präzisierbaren) Consensus der Mathematiker bedürfen.

Der Begriff der natürlichen Zahl: Es ist offenbar eine Aufgabe der Mathematik, diesen Begriff zu präzisieren. Vom klassischen Standpunkt aus wird ein Axiomensystem erster logischer Stufe (heute Peano-System) eingeführt, und Gegenstandsbereiche, die dieses Axiomensystem erfüllen, könnten „natürliche Zahlen“ heißen. Nun gibt es aber — die Widerspruchsfreiheit des Peano-Systems vorausgesetzt, nach einem Satz von Leopold Löwenheim und (in verschärfter Form) von Thoralf Skolem — unendlich viele (genauer $2^{\aleph_0}$viele), wechselseitig nicht isomorphe (abzählbar unendliche) Modelle dieses Axiomensystems: sogenannte *Nonstandardmodelle*. Diese erfüllen also die Axiome von Peano. Unter ihnen befindet sich *ein* Ausnahmemodell, eben das Standardmodell, dessen Elemente genau die Ziffern 0, 0’, 0”, 0”’, . . . sind. Und dieses sollte ja gerade charakterisiert werden! Rekursive (entscheidbare) Axiomensysteme, die man als Erweiterungen des Peanosystems betrachten kann, erlauben *nicht* den intendierten Begriff der natürlichen Zahl zu charakterisieren. Verstärkt man das Peanosystem durch typentheoretische oder mengentheoretische Axiome, dann kann man zwar die Struktur der intendierten Zahlenreihe *in* diesen Verstärkungen (als neuen Axiomensystemen) bis auf Isomorphie *eindeutig* charakterisieren; aber von außen gesehen, d.h., durch einen analogen Prozeß, der zu den oben genannten Nonstandardmodellen führte, gelangt man auch hier wieder zu Nonstandardmodellen.

Somit kommen wir hier, wo es sich um eine so fundamentale Struktur handelt, zu dem Tatbestand, daß wir weder sicherstellen können, daß wir das Intendierte durch ein formales System „korrekt“ kodiert haben, noch daß die Dekodierung der formal hergeleiteten Theoreme „korrekt“ ist — eine Situation, die wir vom Gebrauch der Sprache im täglichen Leben nur allzu genau kennen.

Der Vorteil des formalistischen Ansatzes, nämlich die Befreiung von den Sachinhalten der Mathematik, ist mit der Trennung von Intendiertem und Produziertem zu bezahlen. Und dieser Tatbestand macht sich methodisch bei einer versuchten Auswahl von „relevanten“ formalen Systemen bemerkbar; diese *bedarf* inhaltlich verstandener Kriterien. Der formalistische Ansatz ist methodisch nur ein *Aspek*t des Mathematischen, aber unabdingbar, um aus der Vielfalt philosophischer Betrachtungen die Mathematik als Einzeldisziplin herauszuheben; nur durch die Formalisierung gewinnen wir Intersubjektivität und ein unglaublich empfindliches Kontrollsystem hinsichtlich fast unscheinbar feiner Variationen der betrachteten Postulatensysteme. Wenn wir nun auch in wesentlichen Fällen den intendierten Inhalt durch die Formalisienmg nicht *vollständig* erfassen können, so schließt das nicht aus, daß durch formale Axiomensysteme sogar sehr relevante Teilaspekte unserer Intentionen erfaßt werden, nicht zu reden davon, daß Begriffspräzisierungen, also gewisse Formalisierungen, unser einziges Mittel sind, um zu intersubjektiv anerkannten Wissenschaften zu kommen.

Ich wende mich nun dem klassischen (Abschnitt B) und dem intuitionistischen Ansatz (Abschnitt D), die Mathematik aufzubauen, zu. In beiden Fällen soll ein *Rahmen* gewonnen werden, in dem die „Gesamtmathematik“ deduktiv entwickelt und die Widerspruchsfreiheit sichergestellt werden kann. Dazu allerdings erfolgt eine Berufung auf inhaltliche Erkenntnisse — im Grunde auf gewisse Evidenzen.

B. Der klassische Ansatz (Teil l)

Der vielzitierte (post festum so einsichtige) Sachverhalt, daß Steine und Haufen von Steinen — sogar vom logischen Standpunkt aus — etwas Verschiedenes sind, war beim ersten Lesen auch für mich eine Erleuchtung, so grotesk das klingen mag. Es war Russells Verdienst, die hinter dem Beispiel stehende Intuition zur Typentheorie auszubauen; diese liegt heute in technisch bequem arrangierten Formalismen vor. Sie stellt insofern ein *Rahmensystem* der Mathematik dar, als

1) die Korrektheit im syntaktischen Sinn von Begriffsbildungen (Definitionen) und von Beweisen durch Maschinen kontrolliert werden kann,

2) die Begriffe der speziellen mathematischen Theorien darin explizit definierbar sind und

3) die Theoreme dieser Theorien mit Hilfe dieser Definitionen und den Axiomen der Typentheorie in dieser ableitbar sind.

Dasselbe leistet die formalisierte Mengenlehre, etwa die Systeme von Zermelo-Fraenkel oder von Bernays-Gödel-(Quine). Die Mengenlehre kann formal als eine Erweiterung der Typentheorie aufgefaßt werden, wobei im elementaren Teil technisch Änderungen erforderlich sind und die Iteration der Typenbildungen im wesentlichen auf Iterationen der Potenzmengenbildung zurückgeführt wird. Auch die Mengenlehre ist eine kontrollierbare Rahmentheorie. Obwohl die Mengenlehre eines meiner Hauptinteressengebiete war und ist, werde ich, wie in der Vorbemerkung schon gesagt, auf diese nicht näher eingehen, da der technische Aufwand zu groß wäre. Außerdem liegt ihr Interesse in eigenständigen mathematischen Fragestellungen (der von Georg Cantor entwickelten Ordinal- und Kardinalzahltheorie, der Frage der Kontinuumhypothese usw., kurz in einer Theorie von aktual-unendlichen Strukturen). Ihre Rolle als *Rahmentheorie* ist marginal, wenn man die übliche Arithmetik und Analysis betrachtet; für diese sind schon Teiltheorien der Typentheorie, die ihrerseits deduktiv viel schwächer als die Systeme der Mengenlehre sind, als Rahmentheorie hinreichend.

Sowohl in der Typentheorie als in der Mengenlehre kann man zeigen, – - und in recht allgemeiner Weise — daß die bekannten Herleitungen von Antinomien nicht durchführbar sind; in beiden Fällen ist die letzte Sicherheitsgarantie nur durch Berufung auf eine „Evidenz“ gegeben. Diese wird zwar durch die Unzahl z.T. sehr komplexer Anwendungen in der Mathematik gestützt, aber gerade die uns langsam bewußt werdende Weite, Komplexität und Unanschaulichkeit der Folgerungen, die wir mit dem Evidenzanspruch mitgesetzt haben, kann auch Zweifel erwecken. (Drei sehr berühmte Mengentheoretiker, mit denen ich in engem Kontakt stand, haben behauptet, inhärente Widersprüche in der Mengenlehre entdeckt zu haben; die Nachricht wurde bei den Insidern z.T. brieflich, z.T. später telephonisch bekannt und erregte jedesmal eine Schockwirkung; allerdings stellte sich der jeweilige Irrtum in den „Beweisen“ dieser Behauptungen relativ rasch heraus, obwohl diese Irrtümer prima facie *nicht trivial* erschienen. Historisch zeigen diese Vorfalle, daß die Mengentheoretiker sich der Tatsache, an einer Grenze unserer Abstraktionsfähigkeit zu arbeiten, sehr bewußt sind.)

Wie sehen die Prinzipien eines typentheoretischen Systems aus? Wir wollen davon ausgehen, daß die Zahlentheorie durch die Peanoaxiome bereits vorliege: Das sind die üblichen Axiome für die 0, der Nachfolger x' einer Zahl x, die Addition und Multiplikation und das Induktionsaxiomenschema

$$\mathrm{IND}_1 : \varphi(0) \wedge \forall x(\varphi(x) \rightarrow \varphi(x')) \rightarrow \forall x \varphi(x),$$

worin φ eine Formel in den genannten Operationen und der Logik mit Gleichheit ist, und φ weitere freie Variable (das sind Parameter) sowie natürlich auch gebundene Zahlvariable enthalten kann; für das weitere verwenden wir kleine Buchstaben $(a, b, c; x, y, z)$ für Zahlvariable. (IND_1 — und analog im Folgenden — heißt Axiomenschema, da es sich um ein (unendliches) Bündel von Einzelaxiomen für jede Formel φ handelt. Die Formeln φ kann man schrittweise generieren.) Nun berufen wir uns auf Evidenz, daß dieses Axiomensystem einen Teil der für den vorgestellten Bereich der Zahlen wahren Tatbestände beschreibt. Dieser Bereich ist offenbar unendlich. Nun erweitern wir unsere Sprache durch Hinzunahme von neuen Variablen $(A, B, C; X, Y, Z)$ und einem neuen Prädikatzeichen $\in$, das nur so vorkommen darf, daß links eine kleine und rechts eine große Variable steht, z.B.

$$a \in A, x \in X,$$

gelesen, „a ist Element von A“; die großen Variablen sollen intuitiv gesprochen über Mengen von Zahlen laufen. Das Extensionalitätsaxiom besagt, daß zwei Mengen A, B schon dann gleich sein sollen, wenn sie denselben Umfang (Extension) habend

$$\text{EXT: } \forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B) \rightarrow A = B.$$

(Genau besehen, sollten wir eine neue Gleichheitsbeziehung für Mengen, also z.B. $A =^{(2)} B$ einführen, aber da $a = B$ keine erlaubte Formel ist — eine Zahl ist keine

Menge von Zahlen — verzichten wir darauf.) Vorweg sei noch bemerkt, daß wir nun IND_1 auf Formeln ausdehnen, die nun auch Mengenvariable (d.h. Variable *zweiter* Stufe) und damit auch das Prädikatzeichen $\in$ enthalten; das neue Induktionsaxiomenschema (für alle alten und neuen Formeln) heiße IND_2. Es stellt sich (nachher) heraus, daß IND_2 viel stärker als IND_1 ist, womit wir eigentlich bezüglich der Zahlen nun eine stärkere Induktivität fordern, — und per Evidenz als gerechtfertigt ansehen. Nun kommt das entscheidende Axiomenschema der Komprehension:

COMP_2: $\exists X \forall y (y \in X \leftrightarrow \varphi(y))$
(Der Buchstabe X darf in φ nicht verwendet werden.)

Die Motivierung für COMP_2 kann etwa so formuliert werden: „Klare und deutliche“ Eigenschaften geben Anlaß, ihre Extension als mathematische Objekte zu betrachten; Hier werden Eigenschaften durch Formeln einer festgelegten formalen Sprache gegeben. Die Extension z.B. der Eigenschaft, Primzahl zu sein oder der Eigenschaft, ein Bruch zu sein, dessen Quadrat kleiner als 2 ist (beide Eigenschaften lassen sich leicht in der Zahlentheorie ausdrücken), ist zunächst die Klasse der entsprechenden Zahlen bzw. Brüche. Laut dem Prinzip werden diese zu mathematischen Objekten, d.h. Mengen, an denen selbst mathematische Operationen, die für die Mengen angemessen sind, vorgenommen werden können. COMP_2 besagt, daß eine (durch EXT eindeutig bestimmte) Menge X existiert, die genau die Zahlen (und nichts anderes) enthält, die die Bedingung φ erfüllen. Wie kann die Formel φ in COMP_2 nun aussehen? In φ können *freie* Variable für Zahlen und für Mengen von Zahlen vorkommen, sowie natürlich auch *gebundene Zahlvariablen.* Die entscheidende Alternative betrifft die in φ eventuell vorkommenden (durch Quantoren $\forall, \exists$) gebundenen Mengenvariablen:

a) *Imprädikativer* Fall: in φ treten gebundene Mengenvariable auf.
b) *Prädikativer* Fall: das wird nicht erlaubt.

Seit Russells Zeit bis heute scheiden sich die Geister, ob imprädikative Eigenschaften „deutlich“ sind, also ob in diesem Fall das Axiomenschema COMP_2 evident ist, um als sichere Grundlage der Mathematik zu dienen!

Zu der Typentheorie (wie auch zur Mengenlehre) tritt dann in verschiedenen Varianten ein Auswahlaxiom, in dem wiederum die Existenz einer Menge gefordert wird, die aber nicht im Axiom extensional durch eine ausdrückbare Eigenschaft festgelegt wird. Auf die Problematik mit dem Auswahlaxiom gehe ich hier nicht weiter ein, da diese auch historisch breit diskutiert und durchleuchtet wurde und übrigens schon gewisser technischer Mittel bedarf, um Trivialitäten zu vermeiden. Übrigens bereitet es keine Schwierigkeiten, die Typentheorie *zweiter* Stufe durch Variable für höhere Stufen $X_3, Y_3; X_4, Y_4; \ldots$usw. z.B. für Mengen von Mengen von Zahlen etc. zu erweitern. Solche Erweiterungen sind vor allem für den prädikativen Fall von Bedeutung. (Man beachte, daß bei allen Spracherweiterungen stets auch das Induktionsschema auf Formeln der neuen Sprache miterweitert wird.)

Wir müssen uns aber nun der genaueren Analyse von COMP_2 zuwenden. In *beiden* Fällen a) und b) ist in COMP_2 eine Existenz gefordert, von der nicht *vorher* der Laufbereich, in dem die entsprechende Menge X vorkommen soll, festgelegt ist: Das ist die übliche Auffassung von Axiomensystemen. (Wenn man zu den Körperaxiomen das Axiom $\exists r(r^2 - 2 = 0)$ hinzunimmt, ist man in der gleichen methodischen Situation.) Gesucht wird nach einem Modell, in dem solche Mengen vorkommen und die Axiome erfüllt sind.

In *beiden* Fällen sind die geforderten Mengen Mengen von Zahlen. Um den Unterschied der Fälle a) und b) deutlich zu machen, betrachten wir Beispiele für den Fall a) von COMP_2:

1) φ habe die Gestalt $\forall Z \psi_1(y, Z, \ldots)$ Π^1_1-Fall,
2) φ habe die Gestalt $\forall Z \exists \psi_2(y, Z, U, \ldots)$ Π^1_2-Fall,
3) φ habe die Gestalt $\exists Z \forall U \psi_3(y, Z, U, \ldots)$ Σ^1_2-Fall;

hier sind ψ_1, ψ_2, ψ_3 beliebige Formeln (in denen der Buchstabe X nicht vorkommt), die außer den angegebenen Mengenvariablen, also Z bzw. Z, U, *keine* anderen gebundenen Mengenvariablen enthalten. Es handelt sich hier also um die einfachsten Fälle des imprädikativen Komprehensionsschemas COMP_2. In einem Modell, das COMP_2 erfüllt, wird also in 1) verlangt, daß eine Menge $\underline{X}$ (für X) existiert, die unter Bezugnahme auf alle Zahlenmengen $\underline{Z}$ (für Z) in dem Modell bestimmt ist; dabei kann $\underline{X}$ selbst ein solches $\underline{Z}$ sein! Noch undurchsichtiger erscheint die Situation in den beiden folgenden Beispielen, denn $\underline{X}$ könnte auch $\underline{U}$ sein. Somit sind schon in diesen Beispielen Rückbezüglichkeiten in unvorhersehbarer Komplexität und Zahl enthalten. Ein Aufdröseln solcher Fälle, sozusagen „von unten“, erscheint prima facie aussichtslos. (Ich bin hier auf diese Anfangsfalle der imprädikativen Typentheorie genauer (aber nicht genau!) eingegangen, erstens, weil ich mich mit diesen Fragen oft und lange beschäftigt habe, zweitens an fast endlosen Diskussionen darüber teilnahm und drittens, weil damit ein wichtiger Fortschritt in der Beweistheorie verbunden ist.)

C. Ein fundamentales Ergebnis der Beweistheorie

Hier handelt es sich um Forschungen der 80er Jahre, die jedoch insofern auch heute nicht abgeschlossen sind, als gewisse Verstärkungen noch offen stehen.

Zunächst greife ich noch einmal auf den Ansatz des Formalismus zurück: darin war eines der Risiken die Frage der Unableitbarkeit etwa von $s \wedge \neg s$, oder, was für das folgende äquivalent ist, von $0 = 1$. Nun hat Kurt Gödel 1931 gezeigt, daß für formale Systeme, die einen bescheidenen Teil der Peano-Zahlentheorie enthalten, ein Beweis der Unableitbarkeit von $0 = 1$ hinsichtlich der erforderlichen Mittel sicher ein solches formales System überschreitet, d.h. relativ zu diesem System *inhaltlicher Einsicht* bedarf. (Nur der Baron Münchhausen konnte sich am eigenen Schöpf aus dem Sumpf ziehen!) Die ursprüngliche Euphorie für Hilberts Programm fußte wohl darauf, daß man für die Widersprachsfreiheitsbeweise ja „nur“ eine (abzählbar unendliche) Menge von *endlichen* Bäumen, die übrigens sogar in *drastischer* Weise spezifiziert und normiert werden konnten, zu betrachten hatte. Daß diese Menge so kompliziert ist, daß sie in der Peanoarithmetik für *diese selbst* nicht formal übersehbar ist, war zunächst nicht zu vermuten. Die Problematik lag an den Gabelungen durch den modus ponens

$$\frac{p, p \to q}{q},$$

den man nach leichten Umformungen (in der klassischen Logik!) mit dem Tertium non datur und dadurch mit dem „Schnitt“

$$\frac{p \to q, \neg p \to q}{q}$$

(etwas kurz ausgedrückt) identifizieren kann. Man bemerke, daß in einem formalen Beweis mit Schnitt die „Information“ $p, \neg p$ verloren geht, also vielleicht einen „Umweg“ darstellt, der vermeidbar sein könnte. Und gerade dies ist das außerordentliche Resultat von G. Gentzen 1936, daß man in den Beweisen, z.B. in einem (die Peanoarithmetik technisch überschreitenden) System die genannten Gabelungen ausschalten, also umweglos zu allen ableitbaren Formeln gelangen kann. (Die anderen Schlußregeln verkürzen im wesentlichen die Unterformel nicht, so daß, wenn $0 = 1$ kein Axiom ist, es auch nicht abgeleitet werden kann.) Die für diesen Widerspruchsfreiheitsbeweis erforderliche Überschreitung der formalen Mittel der Peanoarithmetik liegt in der Anwendung der *transfmiten* Induktion über Ordnungszahlen. Diese Anwendung ist intuitionistisch akzeptabel! Die genannten Ordnungszahlen können durch Iterationen von Iterationen ... von generierbaren Zahlenfolgen dargestellt werden.

Die Beweismethode von Gentzen ließ sich auf viel stärkere mathematische formale Systeme als es die Zahlentheorie ist, ausdehnen: Dies ist im wesentlichen durch Kurt Schütte und seine Schule geschehen, aber der Weg dahin war nicht leicht. Hier ist zunächst ein bahnbrechendes Resultat von Gaisi Takeuti (1967) zu nennen; ich erinnere mich seines Vortrages, worin er zuerst über das Erstaunen und die Mühe berichtete, die Detailschritte nachzuvollziehen. Immerhin konnte er einen Widerspruchsfreiheitsbeweis (mit syntaktischen Mitteln) für die Analysis mit dem Π^1_1-COMP$_2$-Schema liefern. Seine Schülerin Mariko Yasugi dehnte das Ergebnis auf die sogenannte Δ^1_2-Komprehension aus; daraufkomme ich gleich zurück. In den frühen 70er Jahren gelang es im wesentlichen Solomon Feferman, die Π^1_1-Komprehension einer Analyse mit transfiniten Ordinalzahlen zu unterwerfen. Etwa gleichzeitig hat ein Doktorand von Schütte einen Weg gefunden, die von Takeuti verwendeten syntaktischen Mittel auf die Benutzung von transfiniten

Ordinalzahlen zurückzufuhren. Auf dieser Basis gelangte man zu dem folgenden Ergebnis der Beweistheorie, nämlich einem Widerspruchsfreiheitsbeweis (gestützt auf eine — nun viel längere und kompliziertere transfinite Induktion) von folgendem System:

Δ^1_2-Analysis mit „Bar-Induktion" (kurz „Δ^1_2+BI-Analysis")

Hier soll unter dem technischen Ausdruck „Bar-Induktion" grob gesagt verstanden werden, daß die Induktion (natürlich schon in der typentheoretischen Sprache) nun nicht nur über die Zahlen, sondern auch über baumartige Strukturen laufen darf. Das bedeutet eine wesentliche Verstärkung.

Erinnern wir uns nun an die Beispiele 2) und 3), die Π^1_2- und Σ^1_2-Komprehension in Abschnitt B. Das Komprehensionsschema in der Δ^1_2-Analysis fordert nun die Existenz solcher Mengen $\underline{X}$, die *simultan* durch eine Π^1_2- *und* eine Σ^1_2-Komprehension bestimmt werden (dies ist nur eine sehr grobe Beschreibung), also durch *zwei* Formeln ψ_1 und ψ_2 aus den genannten Beispielen. Diese Komprehension ist stärker als die Π^1_1-COMP$_2$ und schwächer als die Π^1_2- und Σ^1_2-COMP$_2$.

Natürlich benutzt der Widerspruchsfreiheitsbeweis — der übrigens nur ein Nebenergebnis eines viel stärkeren Theorems ist — imprädikative Mittel, wie nach dem Gödelschen Satz zu erwarten war. Aber der Beweis, bzw. die Interpretation der benutzten Schritte darin, ist konstruktiv und als intuitionistisch gerechtfertigt anerkannt!

Was ist das Bedeutsame an diesem Ergebnis? Die Δ^1_2+BI-Analysis umfaßt unsere durch die Geschichte gegebene Analysis und Algebra. Es sind keine Beispiele bekannt — *außer der Mengenlehre selbst* — die diesen Rahmen überschreiten. Damit ist — abgesehen von den Bedingungen des Gödelschen Satzes — Hilberts Ziel für die übliche klassische Mathematik erreicht. Die durch Gödel erforderliche Einschränkung ist mathematisch de facto irrelevant, wohl aber vom grundlagentheoretischen Standpunkt wesentlich; risikolos beweisbar ist nichts zu haben!

Die genannten Widerspruchsfreiheitsbeweise nehmen *keinen* Bezug auf den *Inhalt* der formalen Systeme, eben z.B. der Peanoarithmetik oder der Analysis, wie sie bis heute in der klassischen Mathematik verwendet wird. Es hätte ja sein können, daß im Laufe der Geschichte der Mensch stets nur solche Anwendungen mit Fragestellungen in diesen Systemen (also z.B. in der Analysis) untersucht hätte, die aus spezifisch menschlichen Interessen entstanden sind, und daß man daher bis heute auf keine Widersprüche gestoßen ist. In den Widerspruchsfreiheitsbeweisen werden *alle* möglichen (formalen) Beweise als mathematische Objekte in Betracht gezogen. Das ist die erstaunliche Wende (zur Metamathematik), die Hilbert vollzogen hat. Im Werk *Grundlagen der Mathematik, I* (1934) *und II* (1939) von David Hilbert und Paul Bernays — es wurde zur Gänze von Bernays abgefaßt — wurden die Ideen, die von Hilbert ausgingen, zu einer lehr- und lernbaren Disziplin der mathematischen Logik entwickelt, nämlich der *Beweistheorie*.

Die Verwendung von Ordinalzahlen ergab eine außerordentlich feine Meßlatte für die Stärke von formalen Systemen, speziell von verschiedenen, aus besonderen Gründen hervorgehobenen Subsystemen der Δ^1_2+BI-Analysis. Dieser Gesichtspunkt ergibt sich besonders aus den Arbeiten der Schütteschen Schule. Man gelangt auf diesem Weg zu einem Maß der beweistheoretischen Komplexität.

Nun hat sich — initiert durch Haryey Friedman — eine neue Forschungsrichtung entwickelt, leider „reverse mathematics" genannt, die gerade nach der beweistheoretischen Komplexität mathematischer Theoreme fragt; genauer: Welche Existenzaxiome für Zahlenmengen — d.h. welche formalen Subsysteme unserer Analysis — sind gerade *genau* erforderlich, um klassische Existenzsätze der Mathematik zu beweisen? Ein solcher Satz ist z.B. der Peanosche *Existenzsatz* für Lösungen, etwa $y = g(x)$ für ordentliche Differentialgleichungen

$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, $y(0) = 0$, f stetig etwa in einem Rechteck.

Schließlich sei noch auf ein erkenntnistheoretisches Problem hingewiesen. Der Tatbestand, daß die durch das fundamentale Ergebnis der Beweistheorie gesicherte Δ^1_2+BI-Analysis alle unsere bekannten mathematischen Überlegungen enthält, führt zur Frage, warum wir mit diesen logischen Mitteln auskommen, wo uns formal auch schon mit dem uneingeschränkten Schema COMP_2 soviel mehr Mittel (Existenzsätze) zur Verfügung stehen? Ja, nicht einmal (abgesehen von ad hoc konstruierten Fällen) Anwendungen, die Π^1_2-COMP_2 erfordern, sind bekannt. Die Frage ist noch allgemeiner: Gegeben sei ein Axiomsystem der Mengenlehre mit Zusatzannahmen über große Kardinalzahlen; benutzen wir für unsere Theoreme in einem solchen System —*relativ* zu den vorausgesetzten Existenzaxiomen — jemals Überlegungen z.B. mit Komprehensionen der Art Π^1_2? Was ist für den menschlichen Geist, z.B. für die Auswahl unserer Fragestellungen, so spezifisch, daß wir bei Δ^1_2-Überlegungen stehenbleiben?

D. Intuitionismus

(Mit dieser Richtung in der Grundlagenforschung habe ich mich nur aufnehmend beschäftigt; ich kann Begriffsbildungen und Beweise in dem Sinne des Intuitionismus nachvollziehen. Ich habe mich dieser Richtung des Aufbaues der Mathematik nicht angeschlossen, aber es erscheint mir nicht leicht, rationale Gründe für eine Bevorzugung der klassischen Mathematik zu geben (siehe dazu Abschnitt E). Gewiß lag zur Zeit von Brouwers Leistungen die Cantorsche Schöpfung der Mengenlehre und zum wesentlichen Teil die Typentheorie von Russell vor, aber es steht für mich ohne Zweifel fest, daß die geistige Leistung Brouwers, eine Mathematik ab ovo aufzubauen, die das intensional potentiell Unendliche als allein dem Menschen zugänglich erlaubt, einzigartig ist.)

Auch im Intuitionismus erfolgt eine Berufung auf „Evidenz", aber korrekter ist es, von „selbständig zu erwerbender Einsicht" zu sprechen. Damit ist ein Moment eines methodischen Solipsismus gegeben sowie die Gefahr, die Einheitlichkeit der Mathematik zu verlieren; beides hat Brouwer bemerkt und in späteren Jahren die Idee eines „schöpferischen idealen Subjektes“ eingeführt, das in einer offenen Folge die einsichtigen Theoreme und nur diese kreiert, womit die Eindeutigkeit der intuitionistischen Mathematik ideell gewährleistet werden soll. (In der Mengenlehre stehen wir methodisch vor einem analogen Problem, da ja das Axiomensystem, z.B. ZFC, wenn widerspruchsfrei, nicht vollständig ist. Der Bereich aller Mengen — Cantors „Absolut“ — ist nicht beschreibbar, aber als ideelles Objekt legt es die klassische Mathematik eindeutig fest.) Es ist wohl kaum nötig, zu sagen, daß Brouwers „schöpferisches Subjekt“ und Cantors „Absolut“ Glaubensgegenstände sind, die zwar vom methodischen Standpunkt nicht leicht beiseite geschoben werden sollten, die aber andererseits jedenfalls bisher allen versuchten Präzisierungen erhebliche Hindernisse entgegenstellten.

Welche „selbständig zu erwerbenden Einsichten“ haben wir im Betreiben der (intuitionistischen) Mathematik zu gewinnen? Zunächst liegt eine Ur-Intuition der Folge der natürlichen Zahlen (als Prototyp eines *offenen ideellen Generierungsprozesses*) vor, etwa durch Fixierung eines Ausgangsobjektes 0 und eines Fortschreitungsprozesses, der zu „schon erreichten“ Objekten z ein *neues* Objekt z' zu bilden gestattet.

Die Induktivität wird eingesehen für Eigenschaften S, die für die generierten Objekte — weiterhin kurz „Ziffern“ genannt — in entscheidbarer Weise erklärt sind, derart, daß man sich wieder durch einen Generierungsprozeß von $\Sigma(0), \Sigma(0) \wedge \Sigma(0) \rightarrow \Sigma(1), \Sigma(1) \wedge \Sigma(1) \rightarrow \Sigma(2), \ldots$ überzeugt und damit zu „für alle,$x, \Sigma(x)$“ gelangt. Allgemeiner werden die primitive Rekursion und viele weitere Überlagerungen von Generierungsvorschriften (und an diese schrittweise geknüpfte Entscheidungen) ohne Bedenken in die intuitionistische Mathematik aufgenommen.

Hinsichtlich der *Sprache* der Mathematik besteht viel Unklarheit in den Diskussionen, aber Folgendes scheint akzeptabel zu sein: für jedes erreichte Stadium der intuitionistischen Mathematik kann eine formale Sprache im allgemeinen Sinn, wie eingangs beschrieben, festgelegt werden, aber der im Sinne Brouwers denkende Mathematiker kann *neue* Primitivbegriffe im Zusammenhang mit neuen (oder schon bestehenden) Generierungsvorschriften einführen. Jedoch muß das Zu- oder Nichtzutreffen dieser Begriffe auf die in Frage kommenden generierten Objekte zumindest durch Generierung entschieden werden können. Beispielsweise gilt dies bereits für das Prädikat der Gleichheit.

Nun sind die Einsichten der intuitionistischen Mathematik natürlich nicht auf so einfache Theoreme wie $5^2 + 12^2 = 13^2$ oder 8 ist die Summe zweier Primzahlen beschränkt. Allsätze $\forall x \varphi(x)$ ergeben sich (in den wesentlichen Fällen schließlich) aus den für die (eventuell zusammengesetzte) Formel $\varphi(x)$ relevanten Generierungsprozessen; Existenzsätze $\exists x \varphi(x)$ müssen durch Aufweis eines generierten

Objektes $\underline{x}$ (für x) geführt werden. Die Offenheit der Generierungsprozesse hat zur Folge, daß von „generierten Bereichen", die also als extensional abgeschlossen vorliegen, im Prinzip nicht gesprochen werden kann, jedenfalls *nicht* im klassischen Sinn des Abschlusses solcher Bereiche bezüglich aller ausdrückbaren Eigenschaften φ durch $\forall x \varphi(x) \vee \exists x \neg \varphi(x)$; somit entfallt das Tertium non datur. Die Einführung der Negation $\neg\varphi$ kann durch $\varphi \to 0 = 1$ geschehen. Nun wird „$0 = 1$" als „*absurd*" erklärt, keinesfalls als „falsch"! Es gibt keine zwei- oder höherzahlige Bewertung der intuitionistischen Logik, also insbesondere nicht die der klassischen Logik zugrundehegende Wahr/ Falsch-Unterscheidung. (Um $\varphi \wedge \psi$ zu erhalten, müssen φ und ψ eingesehen worden sein; für die Einsicht von $\varphi \vee \psi$ wird verlangt, daß mindestens einer der Ausdrücke φ, ψ eingesehen wurde, was im klassischen Sinn z.B. bei $\varphi \vee \neg\varphi$ nicht der Fall sein muß.) Ein bis heute ungelöstes Problem ist die Interpretation von $\varphi \to \psi$! Viele Deutungen wurden versucht, stießen aber auf Gegenargumente.

Nun ist es eine der erstaunlichen wissenschaftlichen Tatsachen, daß eine intuitionistische Logik formal — Aussagen- und Prädikatenkalkül auch zweiter Stufe — entwickelt werden konnte, was Arend Heyting für den Prädikatenkalkül erster Stufe 1930 gelang. Dieses System läßt sich speziell mit der Arithmetik — auch zweiter Stufe — in zwei formale Kalküle $\mathrm{HA}^{(1)}, \mathrm{HA}^{(2)}$ verbinden, die als die entsprechenden Heytingkalküle eine wesentliche Rolle in der Beweistheorie spielen. Durch diese Kalküle werden darin vorgelegte Ableitungen mechanisch kontrollierbar (siehe die vorangegangenen Hinweise auf den Intuitionismus in Abschnitt C).

Wie stehen die Heytingkalküle mit den Grundideen des Intuitionismus in Zusammenhang? Es sind kaum Zweifel erhoben worden, daß die Axiome und die daraus abgeleiteten Theoreme intuitionistisch „akzeptabel" sind; aber Brouwer sagte in meiner Gegenwart noch (etwa 1950) zu Bernays und Gonseth in Zürich, daß er die Fixierung durch ein Axiomensystem als eine Beschränkung und als eine dem Geist des Intuitionismus zuwiderlaufende Methode ablehne.

Die Forschung nach dem zweiten Krieg von vielen Seiten, speziell von der Schule von Heyting, von Stephen C. Kleene, Georg Kreisel und Anne Troelstra und deren Schülern haben die Einsicht in die intuitionistische Mathematik außerordentlich erweitert, und Michael Dummet hat die damit zusammenhängenden philosophischen Doktrinen analysiert und vertieft. (Von der Seite der Angewandten Mathematik hat Erret Bishop unter der Leitidee, daß diese zu *numerischen* Ergebnissen fuhren muß, eine konstruktive Analysis ab ovo entwickelt, inspiriert durch intuitionistische Prinzipien, aber frei von expliziten philosophischen Voraussetzungen; auch in seinem Werk wird ausdrücklich auf das Desideratum einer akzeptablen Deutung der Implikation hingewiesen.)

Es ist nicht nur die mit vielen Kautelen belastete einzelne Einführung von (in der Tat in der klassischen Mathematik recht naiv benutzten) Begriffen, die Schwierigkeit von Beweisen und die oft beklagte Einschränkung der gewohnten Mathematik, die ein Hindernis für die Anerkennung der intuitionistischen Mathematik als eigenständigen Bereich darstellt, es sind tieferliegende Schwierigkeiten:

a) Nimmt man die Deutung der Sprache der intuitionistischen Mathematik ernst in dem Sinne, daß damit eingesehene Feststellungen über generierte Objekte ausgedrückt werden sollen, dann kann man keine Postulatentheorie mit der zugehörigen Modelltheorie entwickeln, womit ein prinzipieller Teil der Mathematik wegfallt. (Notabene, man kann z.B. Ringtheorie im Intuitionismus für konkret konstruierte Ringe im Rahmen der Heytingschen Logik durchaus betreiben. Man muß aber schon Umwege beschreiten, um Nullteilerfreiheit zu behandeln.)

b) Es erscheint nach mehr als 60 Jahren Forschung zweifelhaft, ob die formale Implikation $(\varphi \to \psi)$ als Bestandteil der intuitionistischen Logik auf derselben Stufe wie die anderen aussagenlogischen Verknüpfungen aufgenommen werden soll. Vielleicht ist ein gestufter Ableitungsbegriff erforderlich.

c) Die Methodik der Einführung der intuitionistischen Mathematik stößt global auf die Schwierigkeit, daß der Beweisbegriff (nicht der formale Ableitungsbegriff in den Heytingkalkülen) selbst *imprädikativen* Charakter hat. Wenn man versucht $p \to q$ dadurch zu erklären, daß man sagt, ein Beweis von $p \to q$ bestehe in einer Konstruktion, von der man erkennt, daß sie, angewandt auf einen beliebigen Beweis von p, einen Beweis von q liefert, so wird man in konkreten einfachen Fällen durchaus verstehen, was gemeint ist, aber als Erklärung von $p \to q$ im allgemeinen Fall stoße ich zumindest auf Schwierigkeiten. Man betrachte die Beispiele $0 = l \to q$ für beliebiges q, und die Peircesche Formel $((p \to q) \to p) \to p$, die ja in der intuitionistischen Logik nicht allgemein widerlegbar sein darf.

Zu diesen Schwierigkeiten tritt das historisch-empirische Phänomen des Glanzes der klassischen Denkweise seit der Zeit der Griechen. Schließlich gelang es ohne Bezugnahme auf philosophische Prolegomena, einen *konstruktiven* Teil der klassischen Mathematik ab ovo — dies allerdings nach der Leistung Brouwers und seiner Nachfolger — herauszusondern, der gerade durch die Erfordernisse der angewandten Mathematik und der Informatik (also der Programmierung konkreter Berechnungen) gelenkt wird.

Bemerkung: Die Heytingarithmetik HA als formales System betrachtet, bedarf für einen formalen Widerspruchsfreiheitsbeweis gerade genau derselben (metamathematischen) Mittel wie dieser Beweis für das (klassische) Peanosystem, d.h. die beweistheoretische Komplexität dieser beiden formalen Systeme ist dieselbe.

Es erscheint mir fraglich, ob der intuitionistische Aufbau der Mathematik, der griechischen Leitidee folgend, als *ein* in sich geschlossenes System aufgefaßt werden soll, ja, kann. Die methodisch erforderlichen Vorbetrachtungen um etwa die formale Heytingsche Arithmetik HA, bzw. $\mathrm{HA}^{(2)}$ interpretiert einzuführen, erscheinen mir undeutlich, vor allem wegen der oben erwähnten Schwierigkeiten b) und c). Das hindert nicht, daß HA, bzw. $\mathrm{HA}^{(2)}$ als bewährte *Test*-Formalismen Verwendung finden, derart, daß, wenn ein „konstruktiv" vorgelegter Beweis darin *nicht* formal nachvollziehbar ist, nach einem Fehler im Beweis oder einem bislang nicht isolierten (vielleicht konstruktiv anerkennbaren) Prinzip gesucht wird.

E. Zurück zur klassischen Auffassung der Mathematik

Wie eben gesagt, enthält der intuitionistische Aufbau der Mathematik keinen Bezug auf die Wahr/Falsch-Unterscheidung. (Natürlich wird ein Theorem, etwa in HA, als „wahr" für die natürlichen Zahlen verstanden und angewandt, aber das ist methodisch eine façon de parler.) Betrachten wir nun die sprachlich (in der Arithmetik) korrekt formulierte Aussage U: „Es gibt eine ungerade vollkommene Zahl". (Eine natürliche Zahl ist vollkommen, wenn sie die Summe ihrer echten Teiler +1 ist, z.B. 28=14+7+4+2+1). Niemand weiß heute, ob es eine solche (ungerade) Zahl gibt, aber aus Berechnungen weiß man, daß eine solche Zahl enorm groß sein muß. Die Negation $\neg U$ von U lautet: „$\forall x(\text{vollkommen}(x) \to \text{gerade}(x))$". Haben U, bzw. $\neg U$ einen *Sinn*l Wenn wir eine solche Zahl bzw. einen Beweis von $\neg U$ gefunden haben werden, ist die Antwort offenbar *ja*. Auf diese Weise wird aber der Sinnbegriff für mathematische Sätze (in nicht-trivialen Fällen) vom Kennmisstand abhängig.

Ein nächster Schritt könnte darin bestehen, einem mathematischen Satz Sinn zuzusprechen genau dann, wenn wir angeben können, wie er *bewiesen* werden kann. Wenn es „wirklich" eine ungerade vollkommene Zahl gibt, dann kann diese auch auf einem Computer gefunden werden — wir wissen nur nicht, wie lange wir warten müssen. Wir könnten auch einen Computer ansetzen, der schrittweise alle formalen Ableitungen, z.B. im (als widerspruchsfrei vorausgesetzten) Peanosystem, generiert. Wird dabei eine der Formeln U bzw. $\neg U$ als Endformel von Ableitungen gefunden, dann sind U bzw. $\neg U$ sinnvoll, denn wir können in jedem Fall die entsprechende Ableitung vorlegen und wir wissen, was wir zu tun haben, um nach ihr zu suchen; aber wir wissen nicht, wie lange wir warten müssen. Hier ist im Falle $\neg U$ die Situation aber noch schlimmer: nach dem Unvollständigkeitssatz von Gödel könnte es passieren, daß wir *nach* Generierung *aller* Ableitungen im Peanosystem *keine* Ableitungen von U bzw. $\neg U$ finden. Damit hätten wir einen „unendlich langen Beweis", daß ¬U „gilt", denn; andernfalls hätten wir einen Beweis von U finden müssen. Die Situation für Sätze mit mehreren (Zahl-)Quantoren werden nur noch komplizierter. Vervollständigungsprozesse, die man zwecks Erweiterung des Peanosystems anwenden kann, fuhren nicht aus dem Dilemma, unendlich lange Beweise betrachten zu müssen heraus. Auch die Rückführung des Sinnbegriffes mathematischer Sätze auf Beweisbarkeit in vorgelegten mathematischen Systemen erscheint mir gelinde gesagt (in nicht-trivialen Fällen) ganz unzulänglich.

Nun räume ich ein, daß der Sinnbegriff für mathematische Sätze nicht explizit definierbar sein muß. In manchen Versionen des Intuitionismus werden „Sinn", „Beweis", „gültige Schlußregeln" simultan eingeführt, was aber die oben (Abschnitt D) genannte Schwierigkeit c) nach sich zieht, nämlich, daß auch der Sinnbegriff imprädikativ wird.

Unendliche Bereiche sind so anders als konkret endlich zahlige Bereiche, daß wir eine Rückführung des Sinnbegriffes für Sätze auf irgendeine (auch ideell verstandene) Erkennbarkeit der Korrektheit solcher Sätze nicht erwarten dürfen. (All die Analogien, die man schon in der Logik verwendet, um vom Endlichen zum Unendlichen zu gelangen, sind mit einem „Riesenkorn" von Salz zu verstehen! Eine Formel $\exists x \varphi(x)$ als „lange" Disjunktion, etwa $\varphi(2) \vee \varphi(3) \vee \varphi(5) \vee \varphi(7) \vee \varphi(11) \vee \ldots$ anzusehen, ist so verfehlt, wie es eben „Halbwahrheiten" sind.) Daß bei einer Einführung des Sinnbegriffes der Bezug auf den Menschen völlig aus dem Bild verschwinden soll oder kann, erscheint mir allerdings *auch zweifelhaft*. Nun versuche ich, den klassischen Standpunkt (in einer möglichst schwachen Form) einzuführen.

(i) Der Mensch hat (bzw. kann dazu gelangen) eine so *klare Vorstellung* des Bereiches der natürlichen Zahlen, daß dieser als *vollendet* und *unveränderbar* aufgefaßt werden kann. Dieser Bereich liegt in dieser Vorstellung als eine Ganzheit — N genannt — vor. N enthält genau die Elemente — Zahlen genannt —, die wir von der 0 ausgehend als Ziffern generiert denken. Das archimedische Axiom ist für diesen Bereich trivialerweise wahr!

(ii) Für die Ziffern sind (in üblicher Weise) die primitiv rekursiven Prädikate und Funktionen (also jedenfalls Gleichheit, Addition und Multiplikation) erkärt; d.h. es wird die *Unterscheidung* wahr/falsch so eingeführt, daß die (üblichen) richtigen Zifferbeziehungen in den obigen Grundbegriffen den Wert *wahr* erhalten und deren *Negationen* den Wert *falsch*. (Das sogenannte Robinson-Diagramm für die atomaren und negiert atomaren Sätze dieser Sprache liegt in unserer Vorstellung fest.)

(iii) Die aussagenlogischen Verknüpfungen (Boolesche Operationen) werden in üblicher (klassischer) Weise erklärt. Wie bekannt liegt das aussagenlogische Robinson-Diagramm für N fest und kann auch für jeden darin formulierten Satz getestet werden,

(iv) Die Quantoren $\forall$ und $\exists$ beziehen sich auf den Bereich N, und die Wahrheit für Ausdrücke $\forall x \varphi(x)$ bzw. $\exists x \varphi(x)$ wird (wie im klassischen Wahrheitsbegriff) so erklärt wie wir umgangssprachlich „für alle" und „es gibt" benutzen. Aufgrund dieser Erklärung ist $\forall x \varphi(x) \vee \exists x \neg \varphi(x)$ für alle ausdrückbaren Eigenschaften *wahr* (und die Negation dieser Formel *falsch*).

(v) Ein ausdrückbarer Satz über die Elemente von N heißt sinnvoll, wenn für ihn die Bedingungen, unter denen er wahr/falsch ist wie oben (nach dem von Tarski formulierten Verfahren) erklärt ist. Die wesentliche Voraussetzung dafür ist, daß wir gemäß (i) zu einer klaren Vorstellung von N gelangt sind (das elementare Robinson-Diagramm).

In dieser Erklärung ist in (v) von einer Erkennbarkeit, welche Sätze (mit Quantoren) wahr sind, nicht die Rede. Es stellt sich heraus, daß zwischen den wahren Sätzen über Zahlen Beziehungen bestehen, die uns gestatten, aus schon bekannten *wahren* Sätzen weitere *wahre* Sätze zu erkennen. Das ist die klassische *Schlussweisenlogik*. Es ist Gottlob Frege gelungen, für die Logik erster Stufe ein mechanisch kontrollierbares Regelsystem anzugeben, das von Gödel als vollständig nachgewiesen wurde; für formalisierte Logiken höherer Stufe kann es ein solches Regelsystem, aufgrund des Gödelschen Unvollständigkeitssatzes, nicht geben.

Die Axiome der Zahlentheorie — in unserem Falle im wesentlichen das Induktionsschema etwa in erster Stufe für Formeln in den gewohnten primitiv rekursiven Grundbegriffen — stellen Einsichten über die Zahlen dar, die wir für wahr in N ansehen, die also als Ausgangssätze für Schlußfolgerungen der Logik benutzt werden können. Das Peanosystem ist unvollständig, und wir haben neben der Aufgabe, (interessante) Folgerungen aus den Axiomen aufzufinden auch das Problem, neue Wahrheiten über N zu finden, etwa durch Benutzung neuer Begriffe, bezüglich derer N auch als induktiv eingesehen wird. (Hierbei kann allerdings ein Rückgang zu konstruktiven Ergebnissen erschwert oder unmöglich werden.)

Die Zahlentheorie ist natürlich ein Paradebeispiel für methodische Erörterungen, aber in vielerlei Hinsicht zu speziell. Das berühmte andere Beispiel ist „das Kontinuum" — es heiße C — , wobei schon der bestimmte Artikel Zweifel erwecken mag. Nun sind die Brüche (die rationalen Zahlen, deren Theorie in ganz elementarer Weise auf die Zahlentheorie zurückführbar ist) schon so *dicht* gepackt, daß man anschaulich schwerlich eine dichtere Packung verlangen bzw. erwarten kann. Daß man mit Hilfe von formal beschreibbaren Teilmengen von Brüchen (Dedekindsche Schnitte), z.B. mit der Menge aller rationalen Zahlen r , so daß $r^2 < 2$ ist, Stellen ($\sqrt{2}$) findet, die mit keiner rationalen Zahl übereinstimmen, wohl aber ordnungsmäßig bezüglich der rationalen Zahlen wohl bestimmt sind (Eudoxus), war und sollte auch heute noch ein Wunder sein. Selbst für die besten Experimentiermethoden der Physik gibt es $1 : 10^{(10^{10})}$ nicht, noch weniger $\sqrt{2}$.

Nun können wir verschiedene Vorstellungen von der Ganzheit C, die sich nachher als äquivalent erweisen, entwickeln; eine heute gängige wird gegeben durch die Bezeichnung der Elemente von C („reelle Zahlen") in der Dualdarstellung mit den Ziffern $0, 1$. (Der Einfachheit halber beschränken wir uns ohne Verlust an Allgemeinheit auf die Zahlen zwischen 0 und 1. Eine solche Zahl hat z.B. die folgende Darstellung: 0,1101001010001...; zählen wir von links nach dem Komma die Stellen und schreiben uns die Stellennummern auf, an denen eine 1 steht, so erhalten wir die folgende Zahlenmenge $\{1,2,4,7,9,13,\ldots\}$, und aus dieser können wir offenbar die obige Dualzahl eindeutig wieder zurückgewinnen, d.h. Teilmengen von N und Dualbrüche entsprechen einander eindeutig. (Man kann das Verfahren auch auf Dezimalbrüche und auch für beliebig große reelle Zahlen ausdehnen.) Nimmt man noch die übliche Hilfsvorstellung der Punkte, z.B. auf einer Geraden zwischen 0 und 1, zur Hilfe, dann erscheint C durch unsere Vorstellung einigermaßen gesichert. Übrigens lernt man schon in der Schule, wie man mit den reellen Zahlen die vier Grundrechenoperationen durchführen kann. So weit, so gut!

Die Schwierigkeit für eine Theorie der reellen Zahlen, also von C, läßt sich z.B. daran erkennen, daß wir kein Generierungsverfahren für die reellen Zahlen, oder äquivalent für alle Teilmengen von N haben. Hierin liegt ein wesentlicher Unterschied zur Zahlentheorie: In unserer Vorstellung können wir jede natürliche Zahl als generiert von 0 an, also als individuell bezeichenbar ansehen. (Wir konnten bei festliegendem elementaren Robinson-Diagramm nur im allgemeinen die Quantorensätze nicht entscheiden.)

Hier brauchen wir Axiome, die uns die Existenz von reellen Zahlen (im Grunde die Existenz von Limites!) sichern. Unsere Vorstellung — das ist der klassische Ansatz! — sagt uns, daß *jede* (z.B. nach oben) beschränkte Folge von, Elementen von C auch eine kleinste obere Schranke (den Grenzwert) in C besitzt. Hier benutze ich bereits die Ordnung der reellen Zahlen; man kann sich auf Folgen von rationalen Zahlen, die ihrerseits als Teilmengen von N codiert werden können, beschränken und die Ordnungsbeziehung der rationalen Zahlen (also der Brüche) nach dem Verfahren von Eudoxus auf die reellen Zahlen übertragen. Diese Vorstellung von C liegt uns vor. Die Komprehensionsaxiome liefern Teilmengen von N (Zahlenmengen), die — nach geeigneten Umformungen — die oben genannten Limites, also reelle Zahlen liefern. (Da verschiedene Folgen von rationalen Zahlen (Cauchyfolgen) gleiche Limites haben können, muß man eigentlich Äquivalenzklassen von Folgen betrachten, aber ich lasse dieses (nicht-triviale) technische Detail beiseite.)

Der imprädikative Charakter der Komprehensionsaxiome (äquivalent der Bildung kleinster oberer Schranken) wurde erst durch Russell und Poincaré in das Bewußtsein der Mathematik gehoben, also durch eine logische Analyse. Dabei beging man noch einen methodischen Fehler, nämlich diese Axiome als *Definitionen* anzusehen (wegen ihrer Form und der eindeutigen Bestimmung der als existierend behaupteten Menge durch das Extensionalitätsaxiom). Dieser Fehler gab Anlaß zu dem Titel des berühmten Buches von Herrmann Weyl *Der circulus vitiosus in der Analysis*; worin dann Weyl ein Muster für die *prädikative* Analysis schuf (also unter Benutzung des Alternativfalles b), Abschnitt B), ein Muster, das durch Paul Lorenzen, Schütte und Feferman zu einer prädikativen Analysis mit transfiniter Iteration von Stufen von prädikativen Komprehensionsaxiomen führte. Es gelang Feferman und Schütte (unabhängig voneinander), die genaue Grenze einer solchen Erweiterung zu bestimmen. An die diesbezüglichen Diskussionen mit

Lorenzen und Schütte erinnere ich mich persönlich genau. Die prädikative Analysis, in der also die Existenzaxiome nur eine gewisse Art von reellen Zahlen (dies von außen gesehen) sichern, ist ein echtes Subsystem schon der Π^1_1-Analysis, die wiederum ein *echtes* Subsystem der Δ^1_2-Analysis ist.

Die früher (Abschnitt B) genannte Selbstbezüglichkeit der imprädikativen Existenzaxiome überträgt sich natürlich auf Axiome, die die Existenz von Limites fordern. Bernays, der sich dieser Selbstbezüglichkeiten nur zu bewußt war, hat bis in seine letzte Zeit betont, daß die *geometrische Anschauung* als eine Stütze für die Richtigkeit der Komprehensionsaxiome COMP_2, auch COMP_n usw., für die Beschreibung unserer Vorstellung von C dient, da diese Axiome ja die Existenz der Limites (reelle Zahlen, *„Punkte" auf der Geraden*) liefern.

Jedenfalls stehen wir in der klassischen Mathematik vor der Frage, welches nun unsere vorausgesetzte „klare" Vorstellung von C ist. Hier ist zunächst der Definitionssatz von Richard Dedekind zu nennen. Man kann in einer leichten Erweiterung (zweiter Stufe, Δ^1_1-Analysis) den Begriff der natürlichen Zahl explizit so definieren, daß die Struktur N (bis auf Isomorphie) in diesem stärkeren System festliegt; weiter kann man in der Δ^1_2-Analysis den Begriff der reellen Zahlen explizit so definieren, daß die Struktur C (bis auf Isomorphie) festliegt. Dieses Phänomen wiederholt sich (mit einem analogen Beweis) auch für die volle Typentheorie und Mengenlehre.

Einerseits zeigt uns die mathematische Grundlagenforschung, daß wir Bereiche N und C kategorisch festlegen können und andererseits, daß wir diese Festlegung wieder zerstören können (vgl. dazu das zweite Beispiel in Abschnitt B!). Beide Schritte können (nach technisch bedingten Vorbereitungen) fast kanonisch vorgenommen werden. Außerdem können wir weder für N noch für C zu einem Entscheidungsverfahren für Quantorensätze über die jeweiligen Elementenbereiche gelangen.

Was soll nun die „klare" Vorstellung von C sein? So wie wir für die Bestimmung unserer Vorstellung von N — abgesehen von Einzelergebnissen — nur Verstärkungen des Induktionsschemas hatten (worunter solche Einzelergebnisse, etwa die formal ausgedrückte Widerspruchsfreiheit des Peanoaxioms selbst fällt), so haben wir im Falle von C die Verstärkungen des Komprehensionsschemas durch die imprädikative, schließlich transfinit iterierte Typentheorie, womit — wie früher schon gesagt — auch das Induktionsschema verstärkt wird. Beide Verfahren führen zu gewissen Vervollständigungen hinsichtlich *Induktivität* und *Dichte* (natürlich *nicht* zu einem vollständigen Axiomensystem im logischen Sinn!).

Die klassische Vorstellung von N ist gelenkt durch die Idee einer *induktiv* bestimmten Folge 0, 0', 0", ... bezüglich „aller" für Zahlen relevanten Eigenschaften. Die Vorstellung von C ist gelenkt durch die Idee der *Dichte bezüglich „aller" Schnitte* im Bereich der Brüche — oder, wenn man will durch die Idee der Limesabgeschlossenheit bezüglich „aller“ (beschränkten) Folgen. Induktivität und Dichte betrachte ich als regulative Ideen für unsere Suche, aber ich sehe nicht — so wenig wie im Falle des schöpferischen idealen Subjektes Brouwers oder des Cantorschen Absoluts — wie diese Ideen mathematisch fixiert werden sollen; alle Erfahrung der mathematischen Grundlagenforschung zeigt, daß Fixierungen zu Überschreitungen Anlaß geben.

Auch idealisierte Vorstellungen können Chimären sein, denn sie sind Menschenwerk. Hier kommt man, angesichts dessen, daß sich diese Vorstellungen (bzw. regulativen Ideen) auf unendliche Bereiche beziehen, auf die Frage der Widerspruchsfreiheit zurück. Ein Widerspruch muß konkret und kontrollierbar vorliegen, erst dann kann darauf geantwortet werden. Natürlich kann man „Gefahren“ wittern. Um mich darin zu betätigen, weise ich darauf hin, daß sehr starke Axiomensysteme, z.B. für die Analysis, Möglichkeiten der Selbstcodierung bieten, die zu Schwierigkeiten Anlaß geben könnten. Eine Selbstcodierung findet z.B. bei den Beweisen der Gödelschen Unvollständigkeitssätze statt, und es bedürfen die Beweisführung und die Formulierung dieser Sätze großer Sorgfalt.

Die genannten regulativen Ideen fuhren direkt zu dem wohl tiefsten Problem der Mengenlehre, nämlich der Frage der Balance zwischen der „Länge“ der Klasse der Ordinalzahlen und der „Weite“ der Potenzmenge (= Menge aller Teilmengen) von gegebenen Mengen. Aber diese Problematik, die mich am stärksten fasziniert, ist ein weites Feld.

Die Methodologie der klassischen Mathematik erscheint mir klar zugänglich zu sein. Offenbar trägt dieser Ansatz, der weit von jedem grob formulierten sogenannten Platonismus entfernt und auf die menschliche Vorstellungsfähigkeit von Ganzheiten beschränkt ist, dem historischen Faktum Rechnung, daß auch unsere Vorstellungen unter dem Wachstum unseres Wissens verschärft bzw. modifiziert werden können.

Die Grundlagenforschung für einen Aufbau der Mathematik hat während meiner akademischen Arbeitszeit eine Präzision von ungewöhnlicher mathematischer Feinheit erreicht. Das besagt insbesondere, daß Varianten der philosophischen Ideen über den Aufbau der Mathematik ihren kontrollierbaren Niederschlag gefunden haben. Was sich aber in meinen Augen als *überflüssig* erweist, sind *Exklusivitätsansprüche*, z.B. daß die prädikative Fixierung des Kontinuums allein erlaubt sein soll, oder daß der intuitionistische, bzw. der konstruktive Aufbau ausschließlich sinnvoll sind, oder daß die „wahre“ Mathematik, z.B. der Bereich aller Mengen, irgendwo festliegt.

Die Zukunft der mathematischen Logik — von der ich, wie eingangs gesagt, nur einen *kleinen Teil* herausgenommen habe — liegt einerseits in den *neuen Ergebnissen*, den sogenannten großen, aber auch den kleinen, denn im Aufbau der Mathematik darf kein Steinchen wackeln oder fehlen, und andererseits in der *Interpretation* unseres Wissens in Theorien und neuen Linien von Zusammenhängen.