Universitätsbibliothek
Heidelberg

Otto Hesse

von

Felix Klein

(1849 – 1925)

S. 46 – 50 aus

Bericht über die Königl. Polytechnische Schule zu München für das Studienjahr 1874 – 1875

In moderner Rechtschreibung neu herausgegeben von
Gabriele Dörflinger
Universitätsbibliothek Heidelberg, 2010.

Heidelberger Texte zur Mathematikgeschichte

Am 4. August des vorigen Jahres starb nach längerer Krankheit *Otto Hesse*, seit 1868 Professor für Differential- und Integral-Rechnung, analytische Geometrie und Mechanik am hiesigen Polytechnikum, aber weit über die Kreise desselben hinaus gefeiert und verehrt als einer der hauptsächlichen Begründer der neueren analytischen Geometrie.

Ludwig Otto Hesse war den 22. April 1811 zu Königsberg geboren. Nachdem er das dortige Gymnasium absolviert und sich, an der Universität, fünf Jahre lang mathematischen Studien hingegeben hatte (1832-37), übernahm er zunächst, ebendort, nach abgelegtem Oberlehrerexamen, eine mathematische Lehrstelle am Gymnasium, dann weiter den physikalischen und chemischen Unterricht an der Gewerbeschule. Erst dem bestimmenden Einflusse *Jacobi*s scheint es zuzuschreiben, dass er im Jahre 1840 promovierte und sich zugleich an der Universität Königsberg als Privatdozent niederließ. Seine Ernennung zum Professor extraordinarius daselbst erfolgte 1845; 1855 gelangte er als ordentlicher Professor nach Halle, 1856 nach Heidelberg, von wo er 1868 nach München übersiedelte.

Das sind die wenigen äußeren Erlebnisse, innerhalb deren sich die wissenschaftliche Entwicklung vollzog, deren Schilderung die Aufgabe der folgenden Zeilen ist.

*Hesse*s Stellung innerhalb der mathematischen Forschung ist im Allgemeinen einfach zu bezeichnen. Durch *Monge* und seine Schule hatte die Geometrie ein neues Leben gewonnen; es hatte *Poncelet*, dann weiter *Steiner* die sog. neuere synthetische Geometrie geschaffen; es hatten andererseits *Moebius* und besonders *Plücker* die analytische Geometrie umgestaltet. Aber die Methode der Letztgenannten war keine *rein* analytische, sofern bei ihnen die unmittelbare geometrische Anschauung vielfach die von der Analysis geforderten Eliminationen zu vertreten hatte, und hier eben hat *Hesse*, als Schüler *Jacobi*s, eingegriffen: er hat gezeigt, dass die Probleme der neueren Geometrie als *algebraische* aufgefasst und mit *algebraischen Mitteln* durchgeführt werden können.

Die ersten Arbeiten[1] Hesses tragen noch nicht diesen bestimmten Charakter, sie bekunden den geschickten aber noch nicht den bahnbrechenden Geometer. Er behandelt Sätze und Konstruktionsaufgaben betreffend Gebilde zweiten Grades. Ihr Gegenstand ist großenteils *Poncelet* entnommen; die analytischen Hilfsmittel sind noch ganz diejenigen *Plücker*s: die homogenen Koordinaten treten (wie es übrigens *Hesse* stets beibehielt) nur als formal von den gewöhnlichen verschieden auf, das Haupthilfsmittel zum Beweise ist das identische Umformen der Gleichungen, das Lesen in den Gleichungen, wie man es genannt hat. Noch fehlt das später immer angewandte Rechnungsinstrument, die Determinante. Dafür tritt das rein geometrische Interesse mehr in den Vordergrund. So entwickelt *Hesse* den Begriff der „konjugierten

[1] Dieselben beginnen mit dem Jahre 1838 und sind fast alle in „Crelles Journal für die reine und angewandte Mathematik“ enthalten.

Punkte“ bei Kurven und Flächen zweiten Grades und untersucht die von verschiedenen derartigen Punktepaaren zusammengesetzten Figuren; so gibt er, der erste, eine Lösung der Aufgabe: aus neun Punkten einer Fläche zweiten Grades beliebig viele andere zu konstruieren, u. s. f.

Wenig später sehen wir *Hesse* mit rein algebraischen Fragen betr. Elimination beschäftigt. Er entdeckte die allerdings vorher schon von *Sylvester* gefundene „dialytische Methode“ zur Elimination einer Unbekannten aus zwei Gleichungen beliebigen Grades. Er versuchte weiter, bei drei Gleichungen mit zwei Unbekannten ein ähnlich einfaches Resultat zu gewinnen. Dies gelang, auf eine durchaus neue Weise, wenn die Gleichungen als nur vom zweiten Grade vorausgesetzt wurden, wo sie denn geometrisch Kegelschnitte vorstellen. *Hesse* betrachtet die aus ihren ersten Differentialquotienten gebildete Determinante (die sog. *Jacobi'sche Form*), welche, gleich Null gesetzt, eine Kurve dritter Ordnung repräsentiert. Sind die drei gegebenen Gleichungen mit einander verträglich, so verschwindet nicht nur diese Determinante, sondern es verschwinden auch ihre drei nach den homogenen Koordinaten genommenen Differentialquotienten, und man hat also sechs quadratische Gleichungen, aus denen man die linear vorkommenden Quadrate und Produkte der Variabeln nach gewöhnlichen Regeln eliminieren kann.

War *Hesse* so von algebraischer Seite zur Betrachtung von Kurven dritter Ordnung gekommen, so hatten dieselben auch rein geometrisch sein Interesse auf sich gezogen. Nachdem zuerst[2] *Poncelet* eine Reihe merkwürdiger Theoreme über diese Kurven aufgestellt, hatte *Plücker* dieselben einer eingehenden Diskussion unterworfen und namentlich gezeigt, dass diese Kurven neun Wendepunkte besitzen (von denen sechs imaginär), die in der merkwürdigen Weise angeordnet sind, dass sie zwölfmal zu drei auf einer Geraden liegen. Die Bestimmung dieser Wendepunkte erfolgte bei *Plücker* durch den Schnitt mit einer Kurve vierter Ordnung, die noch drei überflüssige Punkte mit der Kurve dritter Ordnung gemein hat, die unendlich weiten Punkte derselben. *Hesse* zeigte, dass man bei durchgängigem Gebrauche homogener Koordinaten statt dieser Kurve eine solche von der dritten Ordnung angeben kann, welche die neun Wendepunkte allein aus der gegebenen Kurve ausschneidet: die gemeinte Kurve ist dargestellt durch die gleich Null gesetzte Determinante der zweiten Differentialquotienten der Grundkurve.

Diese *Hesse*'sche *Determinante*, wie sie jetzt allgemein genannt wird, sollte für alle einschlägigen Fragen und insbesondere für *Hesse*s eigene Arbeiten von der weitgreifendsten Bedeutung werden. *Hesse* bewies, dass sie in einer Weise von der Grundform abhängt, welche durch beliebige lineare Transformation der Veränderlichen ungeändert bleibt: es entstand die Aufgabe, alle bei algebraischen Problemen auftretenden Verhältnisse durch analoge Bildungen darzustellen. Es mag in dieser Hinsicht namentlich der schönen

[2]Es scheint damals unbekannt gewesen zu sein, dass bereits 1748 *Maclaurin* einen Teil der von *Poncelet* und *Plücker* aufgestellten Sätze gefunden hatte.

Form gedacht werden, welche *Hesse* fernerhin für die Oskulationsebene einer Raumkurve aufstellte, die als Schnitt zweier Flächen gegeben ist. Andererseits aber ergab die Determinante selbst neue Fragestellungen; indem *Hesse* ihr Verhalten auch bei anderen Formen untersuchte, erhielt er eine Reihe schöner Resultate, die sogleich noch angeführt werden sollen.

Bei den Kurven dritter Ordnung erörterte *Hesse* namentlich auch den Zusammenhang zwischen der Determinante und der Grundform. Indem er Sätze entwickelte wie etwa diese: dass die Determinante der Determinante eine lineare Kombination derselben und der Grundform ist, dass jede Kurve dritter Ordnung als Determinante dreier anderen aufgefasst werden kann etc., ward er der Begründer der Theorie der ternären kubischen Formen und damit eines der wichtigsten Teile der Invariantentheorie. Andererseits ergriff *Hesse* das Problem der algebraischen Bestimmung der neun Wendepunkte. Weil man die zwölf Linien, auf welchen dieselben zu drei verteilt liegen, in vier Dreiecke ordnen kann, hängt die Lösung der betr. Gleichung *neunten* Grades von einer Gleichung *vierten* Grades ab. Es war dies ein erstes merkwürdiges Beispiel, welches die Geometrie für diejenige Theorie der Gleichungen lieferte, die es mit den besonderen Affekten der Auflösbarkeit zu tun hat. *Jacobi*, den das *Hesse*'sche Resultat in dieser Richtung besonders interessierte, regte *Hesse* an, derartige Gleichungen neunten Grades an sich zu studieren. *Hesse* gab weiterhin eine Darstellung der betr. Verhältnisse. Aber er hat diese Fragen nicht eigentlich weiter verfolgt; seine Stärke lag in der eleganten rechnerischen Behandlung bereits formulierter Probleme.

Unter den Anwendungen, die *Hesse* fernerhin von seiner Determinante machte, erwähnen wir zunächst die Bestimmung der sog. parabolischen Kurve auf einer beliebigen Fläche. Er betrachtet die Determinante ferner bei Gleichungen mit nur einer Veränderlichen und findet, dass man mit ihrer Hilfe die Auflösung der Gleichungen dritten Grades in übersichtlichster Weise gestalten kann. Er untersucht ihr Verhalten bei biquadratischen Gleichungen und entwickelt die merkwürdige Analogie, welche zwischen diesen Gleichungen und den Kurven dritter Ordnung besteht. Er gibt endlich den wichtigen Satz, dessen strenger Beweis bis jetzt freilich nur in einzelnen Fällen hat geleistet werden können, dass das identische Verschwinden der Determinante einer Form mit n Veränderlichen die notwendige und hinreichende Bedingung dafür abgibt, dass dieselbe durch lineare Substitution in eine Form mit nur n-1 Veränderlichen verwandelt werden könne.

Von den Kurven dritter Ordnung, wurde *Hesse* naturgemäß zu den Kurven vierter Ordnung geführt. Auch hier wieder knüpfte er an *Plücker* an, der zuerst die Existenz der 28 Doppeltangenten dieser Kurven nachgewiesen und schon begonnen hatte, deren Gruppierungen zu studieren. Bald darauf hatten die englischen Geometer *Cayley* und *Salmon* den merkwürdigen Gegenstand in Angriff genommen, in einer Weise, die *Hesse*s eigenen Intentionen ziemlich nahe lag; es dauerte aber lange Zeit, bis die beiderseitigen Entdeckungen als zusammengehörig verstanden wurden. Andererseits konkurrierte *Hesse* bei diesen Untersuchungen mit *Steiner*. Derselbe beeilte sich, als *Hesse*s erste Resultate bekannt wurden, seinerseits eine große und inhaltreiche Abhandlung über den Gegenstand zu veröffentlichen, leider, wie er in späterer Zeit pflegte, ohne Beweise und selbst ohne Andeutung der Beweismethode. *Hesse*s Arbeit gibt nicht nur klar und deutlich den Ausgangspunkt, sondern zeigt auch, was noch zu leisten ist. Denn im Vergleiche mit dem, was *Hesse* bei den Kurven dritter Ordnung gelungen war und was er zweifellos auch bei den Kurven vierter Ordnung erstrebte, ist diese Untersuchung *Hesse*s nur erst ein Anfang, über den man allerdings noch nicht weit hinausgekommen ist.

Das Problem, welches *Hesse* voranstellt, ist dasselbe, welches ihn bei den Kurven dritter Ordnung beschäftigt hatte, die Darstellung der Kurvengleichung in Gestalt einer symmetrischen Determinante. Aber es gelingt ihm nur auf einem Umwege, zu schließen, dass eine solche Darstellung auf 36 wesentlich verschiedene Weisen möglich ist; algebraisch wird bloß gezeigt, wie man die 35 anderen Arten finden kann, wenn eine bekannt ist. — Aus der so gewonnenen Gleichungsform fließt dann unmittelbar eine Menge der merkwürdigsten Sätze, namentlich über *Berührungskurven dritter Ordnung*, weiterhin auch über berührende Kegelschnitte. Dabei macht *Hesse* von einem Hilfsmittel Gebrauch, welches seitdem, in verallgemeinerter Form, eines der fruchtbarsten der modernen Geometrie geworden ist: er bezieht die Kurve vierter Ordnung eindeutig auf eine Raumkurve der sechsten Ordnung und untersucht die für erstere geltenden Verhältnisse an der letzteren, bei der sie zum großen Teile übersichtlicher werden. Die 28 Doppeltangenten z. B. erscheinen dabei als die Verbindungsgeraden von acht Punkten im Raume.

Mit diesen Untersuchungen über Kurven vierter Ordnung, die wir freilich nur andeutungsweise haben wiedergeben können, hat *Hesse*s eigentliche produktive Tätigkeit ihr Ende erreicht. Denn die späteren Abhandlungen, in denen er bestimmte Probleme erledigt, z B. die große Untersuchung über die zweite Variation, enthalten nicht eigentlich neue Methoden, sondern verwerten nur die algebraische Geschicklichkeit, die er sich durch seine früheren Arbeiten erworben hatte. In anderen Aufsätzen wieder macht *Hesse* auf Problemstellungen aufmerksam, deren Verfolgung ihm interessant erscheint, die er aber nicht selbst zum Abschlusse führt.

Dagegen begann er nun, die von ihm ausgebildete Behandlungsweise der analytischen Geometrie einem größeren Leserkreise zugänglich zu machen. Die „Vorlesungen über Geometrie des Raumes“ erschienen zuerst 1861. In gefälliger Form, mit vollendeter Durchsichtigkeit und Symmetrie der Behandlung, sind diejenigen Probleme der Raumgeometrie vorgetragen, welche sich auf Gleichungen des ersten und zweiten Grades beziehen. Der Leser, welcher das Buch zum ersten Male studiert, wird durch Gegenstand und Methode in gleicher Weise gefesselt. Aber es sei damit zugleich die Beschränkung bezeichnet, die dem Buche anhaftet: die geometrische Anschauung tritt zu Gunsten der algebraischen Behandlung wohl zu sehr zurück, und die abgeschlossene Form lässt nicht leicht das Bedürfnis nach selbstständiger Weiterforschung entstehen.

Hesse hat später Vorlesungen aus der Geometrie der Ebene folgen lassen, er hat endlich Darstellungen auch elementarerer Gegenstände gegeben (Die Determinanten, 1871, die 4 Spezies, 1872.) Wenn er bei letzteren auch wieder das Hauptgewicht mehr auf elegante Darstellung als auf Konsequenz der Begründung gelegt hat, so wird doch der Mathematiker diese Schriften nicht ohne Interesse durchlesen, insofern in ihnen an vielen Stellen eine höhere Gesamtauffassung zum Ausdrucke kommt. —

Was *Hesse* an neuen mathematischen Gedanken gefunden, hat rasch in die Weiterentwicklung der Wissenschaft eingegriffen. Auf *Hesse* weiterarbeitend haben die englischen Mathematiker *Cayley* und *Sylvester* und von den deutschen Geometern *Aronhold* die wichtige algebraische Theorie geschaffen, die man als *Invariantentheorie* bezeichnet. Es hat *Hesse*s Schüler *Clebsch* vermocht, die Geometrie mit den elliptischen und *Abel*'schen Funktionen in Zusammenhang zu bringen, und die Sätze, welche sich dabei in erster Linie von neuem ergaben, sind eben diejenigen, die *Hesse* bei den Kurven dritter und vierter Ordnung gefunden. Die Mathematik strebt in neuerer Zeit wieder dahin, die verschiedenen Gebiete, welche lange als besondere Disziplinen behandelt wurden, zu vereinen; es ist kein Zweifel, dass *Hesse*s algebraische Methoden in demselben Maße, als dies gelingt, noch allgemeinere Wichtigkeit und ausgedehntere Verwendung gewinnen werden.

Klein.