Otto Hesse

geb. in Königsberg am 22. April 1811,
gest. in München am 4. August 1874.

von

Max Noether

(1844 – 1921)

S. 77 – 88 aus

Zeitschrift für Mathematik und Physik : historisch-literarische Abteilung
20. Jahrgang. - Leipzig, 1875

In moderner Rechtschreibung neu herausgegeben von
Gabriele Dörflinger
Universitätsbibliothek Heidelberg, 2010.

Heidelberger Texte zur Mathematikgeschichte

Innerhalb zweier Jahre hat die deutsche algebraisch-geometrische Wissenschaft ihre beiden größten Vertreter verloren: seinem so früh dahingeschiedenen Schüler *Alfred Clebsch* ist der Altmeister *Otto Hesse* jetzt nachgefolgt. Wir können in dieser Reihe noch den dritten analytischen Geometer anführen, der in Deutschland mit den Synthetikern *Möbius* und *Steiner* schon an der Spitze der aufstrebenden Wissenschaft stand und mit ihnen vereint der Geometrie einen wesentlichen Gehalt gab, den vor sechs Jahren einer wieder neu aufgenommenen geometrischen Tätigkeit entrissenen *Julius Plücker* (1801-1868).

Dem Verdienste dieses Letzteren hat *Clebsch* eine ausführliche Darstellung gewidmet[1], welche auch die Entwicklung der die Geometrie beherrschenden Prinzipien eingehend verfolgt. Auf *Hesse*, der, wie nach ihm *Clebsch* selbst, vor allem Algebraiker war, wird dabei mehr nur wie im Gegensatz zu *Plücker* hingewiesen. Aber die wissenschaftliche Tätigkeit *Hesse*s weist in ihrer wichtigsten Seite zunächst auf *Jacobi* (1804-1851) hin, dessen Schüler im eminenten Sinne des Wortes *Hesse* war. Und während die späteren Entwicklungen gerade dieser Richtung durch die Darlegung der Arbeiten *Clebsch*s bereits eine eingehende Behandlung erfahren haben[2], erscheint es auch notwendig, diese Richtung noch weiter zurück zu verfolgen. Ans diesem Bedürfnis ist der vorliegende Versuch einer Würdigung der Arbeiten *Hesse*s hervorgegangen.

In der Tat muss aber bei diesem sukzessiven Zurückverfolgen des historischen Zusammenhanges eine neue Lücke fühlbar werden. Wir können die Beziehungen der *Hesse*schen Arbeiten zu denen *Jacobi*s nicht erledigen, ohne eine Darlegung dieser letzteren auch von *algebraischer* Seite her vorauszusetzen, wie es für die funktionentheoretischen Arbeiten dieses Meisters in der *Dirichlet*schen Gedächtnisrede[3] geschehen ist. Wenn wir also auch jene Beziehungen hier nur unvollkommen anführen können, so bleibt doch unsere eigentliche Aufgabe die Würdigung der Arbeiten *Hesse*s an sich; und diese wird durch deren ausgesprochene Eigenart und durch den Umstand, dass deren tiefgreifende Einwirkung auf die Entwicklung der Wissenschaft sich rasch vollzogen hat und im Ganzen beendet ist, eine verhältnismäßig einfache.

Diesem Umstande gemäß ist auch die Stellung *Hesse*s selbst eine anerkannte; und so mögen wir hier schon genauer bezeichnen, worin die Bedeutung desselben beruht. Es ist *Hesse*, der zuerst erkannt hat, dass die *Theorie der homogenen Formen* das von aller Geometrie losgelöste Untersuchungsfeld für den Algebraiker bildet, wobei dann die Resultate der Forschung ihre *Interpretation* in denjenigen geometrischen Eigenschaften der algebraischen Kurven und Flächen finden, welche wir die projektivischen nennen. Er hat

[1] *A. Clebsch*: „Zum Gedächtnis an Julius Plücker." Bd. 16 der Abh. der Gött. Akad. d. Wiss.

[2] Alfred Clebsch. Versuch einer Darlegung und Würdigung seiner wissenschaftlichen Leistungen. Von einigen seiner Freunde. (Leipzig, Teubner 1873, aus Math. Ann. VII.)

[3] Journal Crelle, 52.

weiterhin jene Theorie auch wirklich eingeleitet, indem er wenigstens die nächste der von einer Grundform abhängigen Formen, *die Determinante, welche jetzt Hesses Namen trägt*, aufstellte und ihre Bedeutung in wichtigen Problemen der *Elimination* und Geometrie systematisch verfolgte. So knüpfen die ersten Begriffe und die erste Entwicklung der Invariantentheorie an *Hesse* an. — Sehen wir zunächst, wie dessen Arbeiten selbst auf *Jacobi* zurückführen.

Die Arbeiten *Jacobi*s, die nach so vielen Seiten hin bahnbrechend gewirkt haben, sind für diejenigen *Hesse*s in zwei Richtungen von unmittelbarem Einfluss geworden: zunächst durch ihren gedanklichen *Inhalt* in den algebraischen Problemen, die sie behandeln, sodann durch die analytischen *Methoden*, die teils als Hilfsmittel bei Untersuchungen mannigfaltiger Art, teils auch als selbstständige Darstellungen, wie jene der Theorie der Determinanten (1841, Journal Crelle 22), auftreten. Es ist übrigens unmöglich, diese beiden Richtungen in ihrem Einflusse getrennt zu verfolgen. Denn überall zeigt sich bei *Jacobi* die originale Kraft, die zur Behandlung neuer Probleme neue Hilfsmittel ersinnt oder vorhandene verallgemeinert; und es zeigt sich auf der andern Seite, wie im Anschlusse an die Entwicklung selbst sich auch der Gedankenkreis nach und nach erweitert und auseinanderliegende Gebiete Zusammenhang gewinnen. Wir brauchen in diesem Sinne nur an die Vereinfachungen zu erinnern, welche *Jacobi* z. B. dem *Pfaff* schen Probleme und dem der zweiten Variation zu Teil werden liess, um die Quelle genau bezeichnen zu können, aus der er einen wesentlichen Teil seiner folgenreichen Resultate schöpfte: die Macht einer methodisch gebildeten und der Verallgemeinerung fähigen Analyse.

Obwohl diese Art der Ideenerweiterung in keiner der umfassenden Arbeiten *Jacobi*s zu verkennen ist, so muss eine solche Behandlung doch vor allem in den algebraischen Untersuchungen hervortreten. Wir denken hier zunächst an diejenigen über die *lineare Transformation quadratischer Formen*, an die sich die erste Entwicklung der Ideen *Hesse*s und auch vorzüglich die späteren systematischen Darstellungen der analytischen Geometrie in dessen Lehrbüchern anschlossen. Bei *Jacobi* erscheint das Problem im Gefolge von Fragen über Transformation vielfacher Integrale (1832, 1833, J. Cr. 8, 10, 12); und wir sehen dabei neben einer fortlaufenden Ausbildung des Determinantenkalküls andere weitreichende Hilfsmittel entstehen, wie die elliptischen Koordinaten, die *Jacobi* über den von *Cauchy* eingenommenen Standpunkt (Exerc. de Mathém. t. IV) hinausführen.

Aus diesen formell vollendeten Arbeiten *Jacobi*s leiten wir vor allem den in *Hesse*s Darstellungen überall hervortretenden Zug ab, die wirkliche *algebraische Ausführung* an Stelle blosser Deduktionen zu setzen, und weiterhin insbesondere die Methode der Zurückführung allgemeiner Formen auf spezielle, *kanonische*, aus denen die Eigenschaften der allgemeinen Formen sich ablesen lassen.

Zu dieser Anregung hat sich für *Hesse* noch als zweite der Einfluss der neuen geometrischen Grundideen, soweit sie in den Werken von *Poncelet* und *Steiner* sich enthüllten, gesellt, und ihre Vereinigung erst hat ihm die individuelle Richtung gegeben. Die ersten Arbeiten *Hesse*s behandeln, abwechselnd auf dem Wege geometrischer Konstruktion und auf analytischem Wege durch Transformation homogener Formen, die Theorie der *Flächen zweiter Ordnung*. An *Poncelet*sche Entwicklungen über konjugierte Linien dieser Flächen anknüpfend, wird eine Konstruktion ihrer Hauptachsen geliefert (1837, J. Cr. 18); und dann entstehen die Begriffe der Polardreiecke und der Polartetraeder, der „Systeme konjugierter Punkte" (1840, J. Cr. 20), und die Beziehungen zwischen zweien solcher Systeme, als Interpretation analytischer Relationen. Aus diesen Betrachtungen ist die lineare Konstruktion des achten Schnittpunktes dreier Oberflächen zweiter Ordnung aus sieben gegebenen Schnittpunkten (J. Cr. 20,26) hervorgegangen, und ferner, in Anlehnung an *Steiner*sche Sätze, die lineare Konstruktion einer Fläche zweiter Ordnung aus neun gegebenen Punkten (1842, J. Cr. 24). — *Hesse* ist erst später und nur gelegentlich, wie bei Ausarbeitung des Lehrbuches über Raumgeometrie, auf die quadratischen Formen zurückgekommen. Aber wenn er auch ihre Theorie nicht eigentlich weitergeführt hat, was erst durch *Weiserstrass* (1858) und in Arbeiten, die sich an diesen anschließen, geschah, so hat er doch noch eine wichtige Anwendung derselben, die auf die Transformation der zweiten Variation eines einfachen Integrals mit einer zu bestimmenden Funktion, wesentlich gefördert (1857, J. Cr.-Borch. 54). Dem Vorgange *Jacobi*s folgend, und unter umfassender Anwendung der algebraischen Hilfsmittel, gelang ihm der Beweis der schon oben erwähnten, von diesem gegebenen Reduktion des Problems, was dann weiter zur Inangriffnahme und zur Lösung des allgemeinen Problems der Variationsrechnung die Anregung lieferte[4].

Von dem tiefsten Einflusse auf den Fortschritt der Wissenschaft ist eine andere Anregung geworden, die *Hesse* aus den *Jacobi*schen Arbeiten empfing. Um die algebraische Operation fähig zu machen, den Gedankengehalt der Geometrie in sich aufzunehmen und die Probleme in eigener freier Gestaltung auszuführen, war vor allem eine weiterere Ausbildung der *Theorie der Elimination* der Variablen aus mehreren Gleichungen notwendig. Im 15. Bande von Crelle's Journal (1835) hatte *Jacobi* die Eliminationsmethode von *Euler* und *Bézont*, welche die Aufgabe für zwei Gleichungen n. Grades auf die Elimination aus einem System linearer Gleichungen zurückgeführt hatten (der erstere durch sukzessive Eliminationen, der zweite auf direkterem Wege), neu dargestellt und die Resultante als n-reihige Determinante gegeben. Aber diese Abhandlung diskutiert auch ausführlich die Beziehungen zwischen den in die Formeln eingehenden Koeffizientenaggregaten und insbesondere die Gleichungen, welche die Resultante selbst, und ihr Produkt mit einer bis zu einem gewissen Grade willkürlichen Funktion, als Funktionen der gegebenen

[4]Vergl. die oben zitierte Schrift über *Clebsch*, S. 7.

beiden Formen darstellen.

Es lässt sich nun verfolgen, wie sich an diesen letzteren Gedankengang die Entwicklung der Eliminationstheorie anschließt. Dem Charakter des analytischen Verfahrens entsprechend, strebt diese Ausbildung auch hier größere Allgemeinheit dadurch an, dass sie nach und nach das von der zufälligen Gestalt der einzelnen Aufgabe Abhängige abstreift. Wenn die Schöpfung solcher Methoden auch einen tiefen Einblick in das Wesen des Problems voraussetzt, so zeigt sich doch, wie sich derselbe erst später, bei fortgesetzter Anwendung, zu völligem Verständnis erhebt.

Nachdem *Hesse* 1843 selbstständig auf die schon früher von *Sylvester* erhaltene, von diesem als „dialytische" bezeichnete Methode der Elimination aus zwei Gleichungen, eine Modifikation des obengenannten Verfahrens, gekommen war, tritt nun in seiner wichtigsten Arbeit „Über die Elimination der Variablen aus drei algebraischen Gleichungen zweiten Grades mit zwei Variablen" (Jan. 1844, J. Cr. 28) und in der unmittelbar folgenden Abhandlung über die Wendepunkte der Kurven, der Gedanke klar hervor: nicht die Darstellung der Endgleichung an sich, sondern der Einblick in die Natur der Funktionen, aus denen sie sich zusammensetzt, muss das Ziel sein. So wird denn die einfachste der von den drei quadratischen Grundformen abhängigen Formen, ihre *Funktionaldeterminante*, gebildet und eine beliebige weitere Funktion dritten Grades linear durch diese vier Formen ausgedrückt, wodurch das Problem zunächst auf ein System linearer Gleichungen zurückgebracht wird. Indem aber weiter die quadratischen Formen sich als Polaren einer neuen Form dritten Grades ergeben, zeigt sich das Problem als zur Theorie einer kubischen ternären Form gehörig, und nun sehen wir, wie sich aus der frühern Eliminationsaufgabe die Theorie einer solchen Form, d. h. der Kurven dritter Ordnung, entwickelt. Die bezeichnete Funktionaldeterminante geht in die hier zum ersten Male auftretende *Determinante der zweiten partiellen Differentialquotienten* der kubischen Form, in die *Hesse'sche Determinante* derselben, über. Und es folgt der Fundamentalsatz der ganzen Theorie: dass die Determinante irgend einer Form $kf + \lambda\Delta$ der linearen Schar, welche aus der kubischen ternären Form f und ihrer Determinante Δ gebildet ist, ebenfalls eine dieser Schar angehörige Form ist.

Von dieser Kovariante Δ der Form f wird sogleich auch ihre wesentliche Eigenschaft, bei linearer Transformation invariant zu sein, zur Überführung von f in eine kanonische Form benutzt, welche die zweiten Potenzen der Variablen nicht mehr enthält, eine auf vier Arten mögliche Reduktion. Wenn sich so für die Theorie der homogenen Formen eine erste Grundlegung ergibt, so geht *Hesse* auch auf die Interpretation des Zusammenhangs der gefundenen Formen für die Geometrie ein, und er findet das wichtige Resultat, dass die Wendepunkte einer Kurve n. Ordnung allgemein als vollständiger Schnitt derselben mit einer Kurve der Ordnung $3(n-2)$, der durch die Determinante gegebenen *Hesse*schen Kurve der erstern, bestimmt werden, ein Resultat, das vorher nur für Kurven dritter Ordnung von *Plücker* erhalten worden war. Für diese Kurven dritter Ordnung selbst ergibt sich durch die oben erwähnte Reduktion die interessante Gruppierung der Wendepunkte.

Hesse hatte den Ausgangspunkt für die Ableitung des allgemeinen, auf die Wendepunkte bezüglichen Satzes in der gewöhnlichen Theorie der Krümmung der Kurven genommen, die für die gesuchte Funktion einen Ausdruck liefert, der in den Koordinaten der Schnittpunkte um zwei Einheiten zu hoch ist. So entstand das erste größere Beispiel der Reduktion der Resultanten mit Hilfe der Gleichung der gegebenen Kurve, der *Herausschaffung von Faktoren*, die zu der eigentlichen Frage nicht in Beziehung stehen, vielmehr von der speziellen Eliminationsmethode herrühren. Man kann wohl sagen, dass mit dieser bei Eliminationsfragen immer wiederkehrenden Aufgabe eine ganze Richtung weiterer Untersuchungen angedeutet ist und dass in ihrem Gefolge sich die Invariantentheorie erst entwickelt hat.

Der einfachste Fall einer solchen Aufgabe tritt schon bei der Gleichung der Tangente einer gegebenen Kurve auf, wenn die Gleichung der letzteren in nicht homogener Gestalt vorliegt. Auch jene Gleichung wird in den Koordinaten des Berührungspunktes um eine Ordnung zu hoch, aber die Einführung der homogenen Form allein genügt schon, mit Hilfe der Gleichung der Kurve den linearen Faktor heraustreten zu lassen. Dieses Beispiel weist also auch schon auf die Notwendigkeit der Einführung der homogenen Formen in die algebraische Theorie der geometrischen Gebilde hin.

Ein wesentliches Mittel zur Erreichung der Reduktion der Resultanten bat die von *Joachimsthal* J. Cr. 33 angegebene Methode, nach der man die Bestimmung der Schnittpunkte einer Kurve mit einer Geraden auf zwei in dieser letztern befindliche feste Punkte bezieht, geliefert. Wir finden diese Methode, welche Kurvenprobleme teilweise auf solche binärer Formen zurückführt, zuerst in einer Abhandlung von *Cayley* (1846, J. Cr. 34) benutzt, in der die durch *Hesse* angeregten Eliminationsfragen nach mehreren Richtungen fortgeführt werden. Indem hier das Problem der Wendepunkte mehr in projektivischem Sinne gefasst wird, gelangt *Cayley* bereits hier zur Anwendung seiner schon früher aufgestellten symbolischen Methode, und er zeigt wenigstens, dass die weiteren analogen, aber komplizierteren Probleme, wie das der Doppeltangenten einer Kurve, von einer Ausbildung des Invariantenkalküls abhängen.[5]

[5]Wir haben hier übrigens zu erwähnen, dass diese *Cayley*sche Arbeit verschiedene später erhaltene Resultate schon vorweg genommen hat; so das Verhalten der *Hesse*schen Determinante einer Kurve in einem Doppel- oder Rückkehrpunkte der letztern (s. *Hesse*, Brief an *Jacobi* v, 27. Nov. 1849, J. Cr. 40, und *Jacobi*s Erwiderung); so ferner das sogenannte „Übertragungsprinzip“, das später *Clebsch* entwickelt hat (das man nicht mit dem von *Hesse* ebenso genannten, noch unten S. 11 zu besprechenden Prinzip verwechseln wird). Dasselbe findet sich aber für einen spezielleren Fall angewandt, und es ist in der Tat ja auch nichts Anderes, als eine besondere Form der Anwendung der *Joachimsthal*schen Methode.

An dem Problem der Doppeltangenten vor allem, insbesondere derjenigen der Kurven vierter Ordnung, schreitet nun die Eliminationstheorie weiter. Im 36. Bande von Crelle's Journal (1847) schlägt *Hesse* denselben Weg ein, den nach dem Obigen *Cayley* genommen hatte, führt ihn aber in der eleganten und durchsichtigen Darstellung, die allen seinen Arbeiten eigen ist, bis zur Erledigung der Reduktion für die Reihe der nächstliegenden Formen durch. Er gelangt so auch zu einer Erniedrigung der von *Cayley* gegebenen Gleichung, welche die Berührungspunkte der Doppeltangenten einer Kurve vierter Ordnung bestimmt, ohne jedoch damals den letzten noch übrigen quadratischen Faktor beseitigen zu können.

Wie sehr diese Fragen alle Kräfte zur Begründung des Problems selbst und zur Schaffung neuer Hilfsmittel anregten, wird durch einen Brief von *Hesse* an *Jacobi* (27. Nov. 1849, J. Cr. 40) gezeigt. *Jacobi* war ein Beweis für die Möglichkeit der Reduktion der zuletzt genannten Gleichung gelungen, ein Beweis, der später in seiner einfachsten Form von *Clebsch* (J. Cr.-Borch. 63) dargestellt worden ist. *Hesse*, dem ein solcher Beweis zur „Lebensfrage" geworden war, sah sogleich den „unberechenbaren Nutzen desselben für seine eigenen Bemühungen" voraus. Aus dem nächsten Briefe vom 7. Dezember erhellt, wie die neue Anwendung der Determinantentheorie durch Ränderung, die in den späteren Arbeiten *Hesse*s eine hervorragende Rolle spielt, im Entstehen begriffen ist; und noch in demselben Monat (Brief vom 30. Dec. 1849, J. Cr. 40) gelingt es endlich *Hesse*, die langgesuchte Gleichung 14. Grades für die Doppeltangenten der Kurve vierter Ordnung in reiner Form hinzustellen.

Später hat *Salmon* eine zweite Methode für dieses spezielle Problem angegeben (1858). Die weitere Entwicklung des allgemeinen Problems, die unabhängig von *Hesse* verlaufen ist, haben wir hier nicht zu verfolgen, um so weniger, als schon in der oben zitierten Schrift über *Clebsch* die Weiterführung der Ideen der Invariantentheorie, zunächst von Seiten der englischen, dann der deutschen Algebraiker, ausführlich betrachtet worden ist. Es möge nur erwähnt werden, dass die wirkliche Ausführung der Reduktion um Potenzen linearer Faktoren erst in neueren Arbeiten (vergl. *Gordan*: Über Combinanten, Math. Ann. V), in denen die Betrachtung von Formen mit mehreren Systemen von Variablen, der *Joachimsthal*schen Methode analog, wesentlich ist, zu einem gewissen Abschlusse gebracht ist, der aber für das einzelne Problem noch ein weites Feld der Untersuchung übrig lässt.

Dagegen hat *Hesse* die Reduktion für ein weiteres spezielles Problem gegeben. Er hat die Aufgabe für die Wendepunkte nochmals direkt, und zwar algebraisch von einer neuen Seite her, angefasst, die seitdem auch für höhere Probleme mehrfach angewandt worden ist, nämlich durch Umformung des Determinantenausdrucks, welcher in Differentialform die Bedingung ausdrückt, dass eine Gerade drei aufeinanderfolgende Punkte mit der Kurve gemein hat (1849, J. Cr. 4l). Und auf dieselbe Weise wird auch das erweiterte Problem behandelt und gelöst: die Gleichung der Schmiegungsebene eines Punktes einer Raumkurve, die der vollständige Schnitt zweier Flächen ist, aufzustellen. Es sind diese Darstellungen aber geeignet, noch in anderem Sinne unser Interesse in Anspruch zu nehmen. Denn die Umformungen erhalten durch die Einführung von geränderten Determinanten eine besondere Leichtigkeit, und die Darstellung wäre sogar durch konsequentere Anwendung auch der mehrreihig geränderten Determinanten noch zu vereinfachen gewesen (wie später *Clebsch*, J. Cr.-Borch. 63, gethan). Auch ist bemerkenswert, dass nun, was früher bei *Hesse* nicht der Fall ist, das Problem in durchaus projektivischem Sinne aufgefasst wird, so dass die homogenen Koordinaten ohne Rücksicht auf metrische Bedeutung auftreten, ganz in der Weise, die später *Clebsch* nach diesem Vorgange allgemein angenommen hat[6].

Wir haben schon angedeutet, dass der Gedankenkreis, in welchem sich die zur Invariantentheorie zu rechnenden Arbeiten *Hesse*s, bewegen, der der *Untersuchung von kanonischen Formen* ist; eine Art der Betrachtung, die, von so wichtigen Resultaten sie für speziellere Probleme begleitet sein kann, für die allgemeine Theorie in den Hintergrund treten muss, wie das denn in der Tat, besonders seit den Arbeiten *Aronhold*s, geschehen ist. Die geometrischen Resultate für die Kurven dritter und vierter Ordnung, die *Hesse* in einer Reihe reicher und schöner Abhandlungen niedergelegt hat, sind an solche besondere Formen von Kurvengleichungen geknüpft, insbesondere an die Darstellung derselben in Form von symmetrischen Determinanten, deren Elemente lineare Funktionen der Koordinaten sind. Aus der Tatsache allein, die aus der ersten der Abhandlungen (J. Cr. 28) sich ergab, dass für die Kurven dritter Ordnung diese Darstellung auf dreierlei Weise möglich ist, resultierte sofort eine Menge auf die Systeme von Paaren konjugierter Punkte dieser Kurven bezüglicher Sätze (1847, J. Cr. 36), sowie Sätze über die mit diesen Systemen zusammenhängenden linearen Systeme von Berührungskegelschnitten, die vielfach über die von *Maclaurin*, *Poncelet*, *Plücker* und *Steiner* gegebenen Sätze hinausgehen.

Die Behandlung solcher *symmetrischen Determinanten*, besonders bezüglich ihres Verhaltens bei linearer Transformation der Variablen und ihrer Beziehungen zu solchen Determinanten, die durch Ränderung, freilich auch hier nur durch eine einzige Ränderung, aus ihnen hervorgehen, bildet von jetzt an den Kern der algebraischen Betrachtungen *Hesse*s. Wir mögen hierbei an den Unterschied dieses Verfahrens von demjenigen *Plücker*s erinnern, der vielmehr mit algebraischen Symbolen den geometrischen Konstruktionen nachfolgte. Dieser Gang und die daraus fließenden Resultate für die Gruppierung der Doppeltangenten der Kurven vierter Ordnung waren von *Hesse* jedenfalls spätestens 1851 gewonnen (vergl. J. Cr. 45, S. 101), aber die systematische Darstellung ist von ihm erst 1853 (J. Cr. 49) gegeben worden.

Wenn schon diese Methode auch für sich zur Aufstellung von Systemen von Berührungskurven führte und zu Sätzen, die gleichzeitig auch von *Stei-*

[6]Hieraus folgte eine Modifikation der bezüglichen Stelle der *Clebsch*-Schrift, S.14.

ner (J. Cr. 49) veröffentlicht worden sind (wie auch wenige einzelne derselben vorher schon von *Salmon*), so wurde jene Gruppierung doch erst durch eine elegante Kombination der analytischen Behandlung mit der geometrischen Anschauung völlig übersichtlich. Vermöge derselben wird das ebene Problem mit einem Problem im Raume in Verbindung gesetzt und die Beziehungen der 28 Doppeltangenten der Kurve vierter Ordnung an dem Bilde der 28 Verbindungslinien von acht Punkten im Raume erläutert. Und dieses Bild ist auch für alle übrigen Verhältnise der Kurve vierter Ordnung von Bedeutung: es geht direkt aus der Darstellung ihrer Gleichung in Form einer vierreihigen symmetrischen Determinante hervor. Denn betrachtet man eine zweifach unendliche Schar von Flächen zweiter Ordnung mit acht festen Grundpunkten, so genügen die Parameter der Kegelflächen dieser Schar einer Bedingung, welche eben als jene Gleichung einer Kurve vierter Ordnung aufgefasst werden kann.

Dieser Zusammenhang führte vor allem zu dem Nachweise, dass die besondere Gleichungsform der Kurve noch auf 35 weitere, von der ersteren wesentlich verschiedene Arten hergestellt werden kann, wobei man nur eine strengere explizite Begründung des Satzes vermissen mag, dass die allgemeine Kurve vierter Ordnung überhaupt die gewählte kanonische Gleichungsform erhalten kann. Damit waren denn auch die zweierlei Arten von Systemen von Berührungskurven dritter Ordnung gefunden und die Einordnung der Systeme von Berührungskegelschnitten und Doppeltangenten in jene Systeme klargelegt. Einer spätem Zeit (*Clebsch* in J. Cr. - Borch. 63) gehört die Erkenntnis der Identität dieser Probleme mit der Teilung der zugehörigen *Abel*schen Funktionen an.

Es hat sich getroffen, dass einem, gerade aus diesen geometrischen Spekulationen abgeleiteten Ansprüche *Steiner*s auf die Überlegenheit der synthetischen Methode durch die algebraischen Resultate *Hesse*s zur selben Zeit, in der er erfolgte (J. Cr. 49) auch begegnet worden ist. In der Tat ist auch die Grundlage der *Steiner*schen Auffassung überhaupt, die projektivische Zuordnung der Gebilde, völlig identisch mit der von *Plücker* und *Hesse* angenommenen, bei welcher die Zuordnung dieser Gebilde durch lineare Beziehungen zwischen ihren variabeln Parametern vermittelt wird. Über die weiteren Beziehungen *Hesse*s zu *Steiner* hat sich *Hesse* selbst in einem Nachruf an *Steiner* (J. Cr.-Borch. 62, 1863) ausgesprochen: es waren für ihn die *Steiner*schen Entwicklungen von unmittelbarer Anregung geworden, als „ein Wegweiser zur Bildung und Erforschung von Funktionen, die in der höhern Algebra von großer Bedeutung sind".

In diesem Sinne hat *Hesse* die von ihm eingeführte Determinante einer Funktion besonders eingehend weiter zu erforschen gesucht. So hat er die Bedeutung ihres identischen Verschwindens, dass die gegebene Form durch lineare Transformation in eine solche von weniger Variablen übergeführt werden kann, zwar angegeben (J. Cr.-Borch. 42 und 56); indessen existiert bis jetzt meines Wissens kein genügender und vollständiger Beweis dieses wichtigen Satzes. Weiterhin hat er auch die Determinante für die algebraische Auflösung der Gleichungen dritten und vierten Grades verwertet (J. Cr. 38, 41), wobei besonders in der Behandlung der binären biquadratischen Form durch den Umstand, dass ihre Determinante mit ihr vom gleichen Grade wird, die Analogie derselben mit der ternären kubischen Form hervortritt.

Indem wir die *algebraischen Gleichungen* erwähnen, berühren wir ein neues Gebiet, welches von den Arbeiten *Hesse*s bereichert worden ist. Durch *Abel* kannte man eine ganze Klasse von algebraisch auflösbaren Gleichungen, die irreduziblen von der Eigenschaft, dass eine Wurzel von einer zweiten durch einen rationalen Ausdruck abhängt, welcher, wiederholt, alle Wurzeln liefert. Bei der Untersuchung der Wendepunkte der Kurve dritter Ordnung aber, für welche vorher nur die zwölf Geraden, welche dieselben zu je drei enthalten, bekannt waren, ergab sich durch den Nachweis der vier Dreiseite, in die sich die Geraden gruppieren, ein Einblick in die besondere Natur der Gleichung neunten Grades, welche die neun Punkte bestimmt. Hiermit war nun (J. Cr. 34) eine neue Klasse algebraisch lösbarer Gleichungen aufgestellt: die Gleichungen neunten Grades, für welche zwischen irgend zweien der Wurzeln und einer dadurch bestimmten dritten eine rationale Relation vorliegt, von der besondern Art, wie sie durch die Existenz der zwölf Geraden des geometrischen Problems angedeutet ist. Und es war nicht nur ihre, schon durch diese Relationen allein bedingte Zurückführbarkeit auf eine biquadratische und reine kubische Gleichungen nachgewiesen; es war auch ein geometrisches Bild für alle auf die Gruppierungen der Wurzeln bezüglichen Verhältnise gewonnen. Solche anschauliche speziellere Beispiele haben wesentlich auf die leichtere Auffassung und auch auf die Ausbildung der an sich so abstrusen Substitutionstheorie gewirkt, deren von *Galois* schon bald nach den *Abel*schen Untersuchungen geschaffene Grundlagen auch erst nach dieser Arbeit *Hesse*s veröffentlicht worden sind. — Die Aufstellung der Resolventen seiner Gleichung in expliziter Form findet sich bei *Hesse* nicht; sie ist auch erst durch die Fortschritte der neuern Algebra möglich geworden.

Von hier an hat *Hesse* nicht nur noch weitere spezielle, algebraisch auflösbare Gleichungen verfolgt, insbesondere zwei Arten von Gleichungen sechsten Grades, von denen die eine die in der Theorie der Gleichungen vierten Grades auftretende Resolvente ist, die andere drei Punktpaare einer Involution vorstellt; auch eine Reihe seiner geometrischen Untersuchungen lassen sich leicht unter den Gesichtspunkt bringen, die Theorie der algebraischen Gleichungen von geometrischer Seite her zu fördern. Dahin zählen die ausführlichen Darlegungen der Gruppierungen unter den Doppeltangenten der Kurven vierter Ordnung; und von demselben Gesichtspunkte aus ist auch die wiederholte Beschäftigung mit der interessanten Figur aufzufassen, die aus dem *Pascalschen Sechseck* vermittelst der 15 zugehörigen *Steiner*schen Linien und der 20 Punkte, in denen dieselben sich zu je dreien schneiden, sich entwickelt. Es tritt in diesen Arbeiten (J. Cr.-Borch. 66, 68) die doppelte Absicht hervor, einmal für die Gleichungen und ihre Resolventen ein anschauliches Bild in der Ebene zu gewinnen, sodann auch umgekehrt die bekannten Beziehungen bei den algebraischen Gleichungen für die Geometrie der Gebilde von mehreren Dimensionen zu verwerten. Indess liegen von Seiten *Hesse*s nur ganz wenige Ausführungen in dieser Richtung vor, ja wir können eigentlich nur auf das „Übertragungsprincip" (J. Cr. -Borch. 66, Zeitschr. f. Math. u. Phys. XI) hinweisen, dem eine Gleichung zu Grunde liegt, die linear und homogen in einem System von drei Variablen, quadratisch und homogen in einem zweiten System von zwei Variablen ist. Indem vermöge dieser Gleichung die Punktpaare der Geraden den Punkten der Ebene entsprechend gesetzt werden, hat man Koordinaten eingeführt, durch welche wohl noch manches Problem der Ebene, insbesondere wenn ein Kegelschnitt der Ebene ausgezeichnet ist, auf ein binäres Problem zurückgebracht und einer einfachem Behandlung zugänglich wird.

Das *Pascalsche Sechseck* hat *Hesse* auch Gelegenheit gegeben, in ausgedehntem Maße von den durch *Bobillier* und *Plücker* eingeführten symbolischen analytischen Darstellungen Gebrauch zu machen. Später (J. Cr.-Borch. 75) erfolgte sogar noch eine zweite analoge Darstellung, in der nur die Symbole geränderte Determinanten sind und die ganze Figur durch einen Zyklus von Identitäten zwischen denselben repräsentiert wird. Es scheint übrigens, dass *Hesse* sowohl eine genügende Kenntnis des Zusammenhangs der einzelnen auf die Figur bezüglichen Sätze, als auch ein anschauliches Bild der Figur noch vermisste.[7]

Wir haben uns im Vorhergehenden wesentlich auf die rein wissenschaftliche Tätigkeit *Hesse*s, die wir mit der Mitte der fünfziger Jahre als abgeschlossen betrachten können, beschränkt. Nur mit den zuletzt genannten Arbeiten haben wir schon ein Gebiet betreten, das mit der seit dieser Zeit entfalteten *pädagogischen* Wirksamkeit *Hesse*s zusammenhängt. Denn es war seine Absicht, an der Schwelle der analytischen Geometrie solch einfaches Material zu geben, an dem eine Reihe von Fragen, die später für wichtigere und kompliziertere Probleme auftreten, bereits aufgeworfen und mittels analytisch ganz durchgearbeiteter Methoden auch völlig erledigt werden können. In diesem Sinne haben sich die Lehrvorträge *Hesse*s bewegt und in diesem Sinne sind die beiden geometrischen Lehrbücher, die Geometrie des Raumes (1. Auflage 1861) und die noch mehr elementare Geometrie der Geraden und des Kreises, sowie die später in der Zeitschr. f. Math. u. Phys. zuerst veröffentlichten Vorlesungen abgefasst. Der Inhalt dieser Schriften ist denn auch vor allem die Darstellung der erwähnten symbolischen Gleichungsformen, die in einer unübertrefflich klaren Form geschieht und von Anfang an sowohl die Macht der Analysis, als den Vorteil einer geometrischen Veranschaulichung fühlen

[7]Vergl. übrigens hierzu *Bauer* in den Berichten der Münchener Akademie vom Dezember 1874.

lässt. Der weitere Inhalt der Raumgeometrie ist die an die Polarentheorie anknüpfende Theorie der Formen zweiten Grades, wie sie nach dem Frühern aus *Jacobi*s und den eigenen Arbeiten *Hesse*s hervorgegangen ist; und hier tritt besonders die Untersuchung über die beiden Gleichungen hervor, welche die Hauptachsen und die Achsen eines ebenen Schnittes der Fläche zweiter Ordnung bestimmen, eine Untersuchung, die nach dem Vorgange *Kummer*s durch Zerlegung der Diskriminante der Gleichungen in eine Summe von Quadraten geführt wird. Obwohl diese Bücher also nicht, wie die *Salmon*schen, eine Vielseitigkeit in den Ausführungen und eine umfassende Einführung in alle Methoden der analytischen Geometrie angestrebt haben, so ist ihre Wirksamkeit doch eine bedeutende. Es ist hauptsächlich die durchsichtige Klarheit in der Auseinanderlegung bekannter und neuer Begriffe einfacherer Art und deren Einführung in ganz expliziter Weise, was diesen *Hesse*schen Darstellungen ihren Wert verleiht und was wohl als ein Erbteil der *Jacobi*schen analytischen Technik anzusehen ist. Wir haben in diesen Schriften, wie in den klassisch gewordenen Abhandlungen Methoden vor uns, die dem oberflächlichen Anblick nur ihre formal vollendete Seite zuwenden mögen, die aber bei näherem Eindringen die neuen Ideen, als deren Ausdruck sie sich nach und nach gebildet haben, und die in ihnen angesammelte Triebkraft zu weiteren Fortschritten der Wissenschaft erkennen lassen.

Heidelberg, im Dezember 1874.