Universitätsbibliothek
Heidelberg

Jakob Lüroth

von

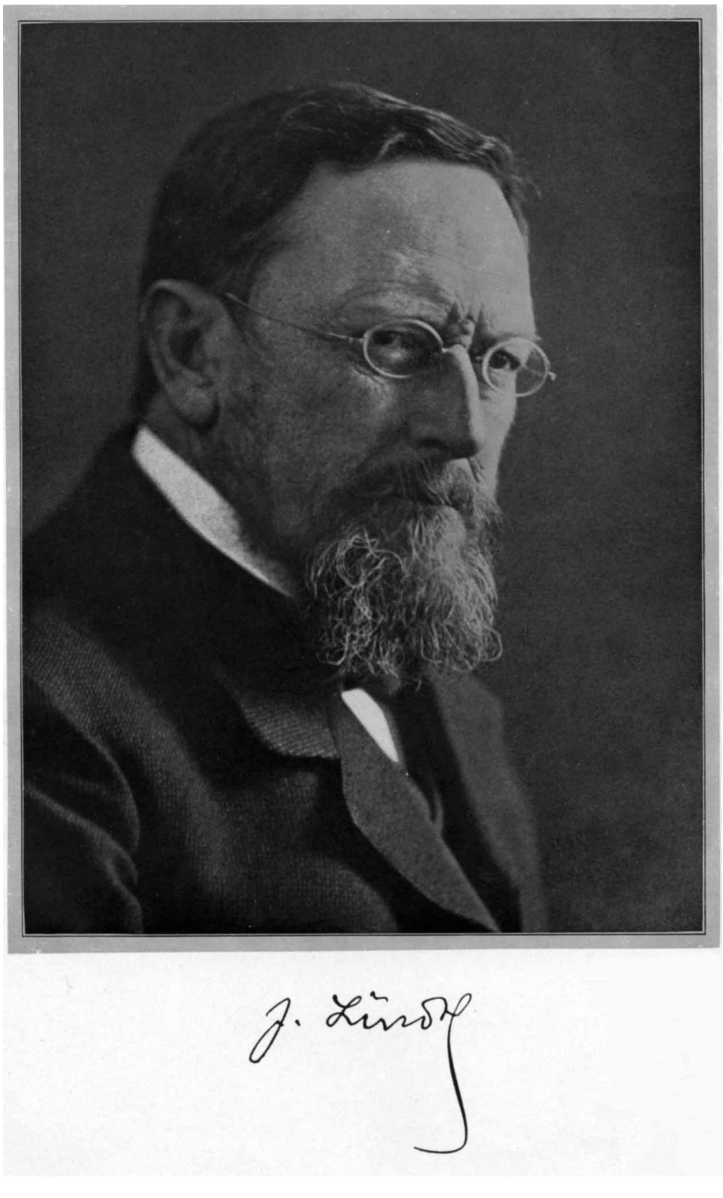
A. Brill und **M. Noether**

Neu herausgegeben von **Gabriele Dörflinger**,
Universitätabibliothek Heidelberg
2008

Heidelberger Texte zur Mathematikgeschichte

Alexander von Brill
∗ 20. September 1842 in Darmstadt
† 8. Juni 1935 in Tübingen

Max Noether
∗ 24. September 1844 in Mannheim
† 13. Dezember 1921 in Erlangen



Der Nachruf von A. Brill und M. Noether erschien 1911 im Band 20 des Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, S. 279–299.

Die Photographie ist dem gleichen Werk entnommen.

Am 14. September 1910 ist in München der Professor der Mathematik an der Universität Freiburg Geheimer Rat Dr. J. LÜROTH einem Herzschlag erlegen. Unter dem frischen Eindruck des plötzlichen Todes unseres alten Freundes, mit dem wir noch einige Tage vor seinem Ende eine frohe Begegnung hatten, haben wir diesen Nachruf niedergeschrieben, um uns das Bild seiner edlen Persönlichkeit noch einmal in den Farben des Lebens vor Augen zu führen, ehe die Zeit es verblassen läßt, und ihn dann durch den Versuch einer Würdigung seines Lebenswerkes vervollständigt.

Jakob LÜROTH ist am 18. Februar 1844 in Mannheim als das einzige Kind eines dortigen Bürgers und Mitgliedes der Stadtvertretung geboren. Nach dem frühen Tode seines Vaters schloß er sich um so enger an die Mutter an, die dem Sohne das Leben behaglich zu gestalten besorgt und in der Lage war. Sprachlich hervorragend begabt genügte er im Lyzeum (Gymnasium) der Vaterstadt seinen Schülerpflichten ohne Mühe, so daß ihm Muße blieb, seinen Neigungen zu mathematischen Studien nachzugehen, die er unter Leitung des Lyzealprofessors CARL RAPP, eines ehemaligen Offiziers, betrieb. Als 1859 der ausgezeichnete Astronom EDUARD SCHÖNFELD an die Sternwarte in Mannheim berufen wurde, empfingen von ihm beide, Lehrer und Schüler, Anleitung zu astronomischer Tätigkeit mit dem Erfolg, daß schon im 57. Band der astronomischen Nachrichten (1862) von den Rechnungsergebnissen des Siebzehnjährigen berichtet werden konnte. — Ob freilich die frühzeitige Anstrengung seiner Augen nicht zu jener Schwächung seines Sehvermögens beigetragen hat, unter der er später so viel gelitten hat, muß dahingestellt bleiben. Die herzliche Aufnahme, die LÜROTH im Hause SCHÖNFELD gefunden hat, war für seine ganze Zukunft entscheidend. Mit dankbarer Verehrung hat er jederzeit seines Gönners und späteren Freundes gedacht.

Als LÜROTH im Herbst 1862 nach bestandener Reifeprüfung die Universität Bonn bezog, um bei ARGELANDER Astronomie zu studieren, erwies sich dies bald seiner Augen wegen als unmöglich. Deshalb auf sein Lieblingsstudium verzichten zu müssen, hat zu den schmerzlichsten Enttäuschungen seines Lebens gehört. Seine ganze Kraft wandte nun LÜROTH der Mathematik zu, deren Studium er in Heidelberg 1863–65 unter HESSE und KIRCHHOFF fortsetzte. Nachdem er daselbst 1865 promoviert hatte, begab er sich nach Berlin, wo er u. a. bei WEIERSTRASS hörte, 1866 nach Gießen, um CLEBSCH kennen zu lernen. Von diesem, dessen faszinierende Persönlichkeit den Betätigungstrieb von so manchem Schüler fruchtbar entwickelt hat, empfing LÜROTH weitreichende Anregung zu Arbeiten auf dem Gebiet der Geometrie und der Funktionentheorie.

Im Sommer 1867 habilitierte er sich in Heidelberg, folgte aber schon 1868 einem Ruf an die Technische Hochschule in Karlsruhe, zunächst zur Aushilfe für DIENGER, als dessen Nachfolger er bereits im Januar 1869, kaum 25 Jahre alt, zum ordentlichen Professor ernannt wurde. Der Gedanke, daß diese frühzeitige Beförderung seinen wissenschaftlichen Verdiensten zugeschrieben werden könne, erschien ihm in seiner Bescheidenheit fast peinlich. Er verdankte sie wesentlich seiner ausgesprochenen Lehrbegabung und seiner frühe in sich gefesteten Persönlichkeit. Nach zwölfjähriger Tätigkeit in Karlsruhe wurde LÜROTH 1880 an die Technische Hochschule in München, 1883 an die Universität in Freiburg i. B., berufen. Diese Stellung hat er bis zuletzt bekleidet. Auf einer mit Frau und Tochter nach München unternommenen Erholungsreise hat ihn der Tod ereilt, ohne daß unmittelbar bedrohliche Anzeichen vorausgegangen waren.

Zwar hatte schon vor Jahren ein Herzleiden ihn und die Seinigen mit Besorgnis erfüllt und dem früher so rüstigen Manne manche Beschränkung auferlegt. Aber beweglich und von zäher Konstitution ließ er solche Stimmungen nicht über sich Herr werden, zumal da Perioden des Wohlseins immer wieder die alte Lebensfreudigkeit entfachten und auch Nahestehende über sein Befinden täuschen konnten. „Es war ein Heldentum“, so sagte am Grab des Entschlafenen der Prodekan der philosophischen Fakultät, Professor NEUMANN, „daß LÜROTH trotz des hemmenden Augenübels, das ihm seit langen Jahren das Dasein so sehr erschwerte, das geleistet hat, was er unverdrossen tat und wirkte; ein Heldentum, das noch größer erscheint, wenn wir an das quälende Herzleiden denken, über dessen Tragweite er sich keiner Täuschung hingegeben hat.“

Mit LÜROTH ist eine jener feinen, selbstlosen Gelehrtennaturen aus dem Leben geschieden, denen der Augenblickserfolg nichts, die Sache alles ist. Von Jugend auf durch die Fähigkeit ausgezeichnet, fremde Gedankengänge rasch und klar zu erfassen und das Wesentliche daran zu erkennen, mit einem glänzenden Gedächtnis ausgestattet, hatte LÜROTH sich mühelos fast alle Gebiete der Mathematik, auch der angewandten, viele Zweige der Astronomie, der Geodäsie und weiter abgelegener Wissensgebiete zu eigen gemacht. KRONECKER hat einmal als zwei Anlässe, um in ein fremdes mathematisches Wissensgebiet einzudringen, die bezeichnet: entweder man arbeite darin, oder man halte eine Vorlesung darüber. Für LÜROTH genügte der Vorsatz, es kennen zu lernen. Gerade die am schwierigsten zugänglichen Abhandlungen zogen ihn am meisten an. Aus dieser Aufnahmefähigkeit heraus, die ihm bis zu seinem Ende erhalten geblieben ist, hat sich eigentlich auch seine produktive Tätigkeit entwickelt, die, von seltener Vielseitigkeit, sich auf Geometrie und Mechanik, auf Astronomie und Geodäsie, auf Wahrscheinlichkeitsrechnung, Mengenlehre und Begriffsschrift, auf Funktionentheorie und Algebra erstreckt hat. Man kann sagen, daß viele von LÜROTHs wissenschaftlichen Arbeiten geradezu herausgewachsen sind aus dem Studium von Abhandlungen, die ihn angesprochen haben, aus dem Bedürfnis des denkenden Lesers, Dunkles aufzuklären und Unzusammenhängendes zu vereinigen. Dabei haben ihn die von der Heerstraße weitabliegenden Stoffe besonders angezogen. Seine Vorliebe für GRASSMANNs and HAMILTONs Algorithmen, für PEIRCEs, SCHRÖDERs, PEANOs Begriffsschrift haben auch mehrere eigene Arbeiten ausgelöst. Von den intellektuellen Eigenschaften LÜROTHs, in denen dieser Zug gewurzelt haben mag, wird bei der Besprechung dieser Arbeiten die Rede sein. Er entsprach aber wohl auch seiner in sich gewandten Denkweise, vielleicht auch einem gewissen Gerechtigkeitsgefühl und seiner Abneigung gegen alles Laute, Moderne.

Diejenigen Erfolge seiner wissenschaftlichen Arbeit, deren der Lebende sich noch zu erfreuen hatte, liegen auf dem Gebiete der algebraischen Geometrie und der Analysis situs, zu deren Besprechung wir uns jetzt wenden wollen. — Wir ordnen den Bericht über LÜROTHs wissenschaftliche Tätigkeit nach Gegenständen an, halten aber innerhalb dieses Rahmens im wesentlichen die geschichtliche Reihenfolge ein.

Ausgangspunkt von LÜROTHs mathematischem Arbeiten[1] waren die *analytisch-geometrischen* Vorlesungen seines Lehrers OTTO HESSE 1863 bis 1865. Schon 1865 erschien eine Arbeit über das PASCALsche Sechseck (5), die er der Heidelberger Fakultät zur Doktorprüfung vorgelegt hatte. Sie beruht, nach dem Vorbild von HESSEs Raumgeometrie, ganz auf dem Rechnen mit linearen Identitäten; sie fördert die Theorie, indem sie zwei Gruppen von je drei PASCALschen Sechsecken, abgeleitet aus irgendeinem von ihnen, aufstellt, und insbesondere ein spezielles solches Sechseck, das zugleich ein BRIANSCHONsches ist, betrachtet. Auf einer Schweizer Sommerreise (1866; nach einem in Berlin verbrachten Wintersemester) wendet LÜROTH (7) die bei SALMON entwickelte Theorie der projektiven Verallgemeinerung auf das Problem der kürzesten Linie auf einer beliebigen Fläche an, indem er den Kugelkreis durch eine Fläche 2-ter Ordnung ersetzt, und dann, wenn auch die gegebene Fläche von der 2-ten Ordnung ist, zur Integration der bezüglichen Differentialgleichung zum ersten Male die elliptischen Koordinaten auf eine homogene Form erweitert. Dies hat auch in CLEBSCH-LINDEMANNs Raumgeometrie Aufnahme gefunden. Die Note (9) ist ein Niederschlag aus der ersten und einzigen Vorlesung LÜROTHs an der Heidelberger Universität[2], die nach den Methoden JOACHIMSTHALs und ARONHOLDs die Flächen 2-ter Ordnung und die Polarentheorie der Flächen n-ter Ordnung eingehend behandelt hat. Diese Note stellt in neuer Weise, von der Bevorzugung einer der Flächen ausgehend, die rationalen Invariantenkriterien für die verschie-

[1]Die in Klammern beigefügten Zahlen sind die Nummern des unten folgenden Verzeichnisses der Abhandlungen von LÜROTH.

[2]Von dieser Vorlesung, W.-S. 1867/68, besitzt einer der beiden Berichterstatter (N.), auf dessen Ersuchen sie gewählt worden war, noch eine Nachschrift.

denen Fälle der Schnittkurve zweier Flächen 2-ter Ordnung auf, zwar ohne Kenntnis von einschlägigen frühen Untersuchungen SYLVESTERs (1851), aber gleichzeitig mit WEIERSTRASS' vollständigerer Behandlung der Frage durch irrationale Invarianten: die Elementarteiler.

Mit der Habilitationsschrift (6) schließt LÜROTH unmittelbar an die von PLÜCKER kurz zuvor gegebene Einführung der sechs homogenen Koordinaten einer Raumgeraden an, und zwar in einer Richtung, an die zur selben Zeit auch PLÜCKER selbst herangetreten ist: nach der Theorie der windschiefen Flächen hin. Kennzeichnend ist hier die Anwendung und Beherrschung der algebraisch- geometrischen Eliminationsmethoden im Sinne der Schule von CLEBSCH, die ja selbst aus der HESSEs und der Engländer hervorgegangen ist; so bei der Bestimmung des Komplexes, der — in einem allgemeinen Fall — die singulären Erzeugenden aus der Fläche ausschneidet. Aber auch eine zweite Behandlung derselben Aufgabe ist durch Zuordnung der Erzeugenden der Fläche zu einem einparametrigen Gebilde für diese Schulung charakteristisch.

Die bedeutendste Leistung im algebraisch-geometrischen Gebiet hat LÜROTH 1868 in seiner Arbeit über Kurven 4-ter Ordnung (10) erreicht. Nach CLEBSCH (J. f. Math. 59) war es, trotz der scheinbar genügenden Konstantenzahl, unmöglich, die Gleichung einer beliebigen Kurve 4-ter Ordnung in die Gestalt einer Summe von fünf vierten Potenzen linearer Ausdrücke zu setzen, vielmehr gehörte dazu notwendig eine Bedingung welche LÜROTH zunächst auch als hinreichende nachweist; wie er denn auch später (29) auf eine direkte Untersuchung solcher Konstantenzählungen zurückkommt. Wichtiger ist in (10) die Heranziehung der Invariantentheorie zur Erledigung der Frage, und die Vollständigkeit der Behandlung, bis zu den Ausartungen hin. Vor allem aber tritt hier, als Kovariante S der Kurve, eine Kurve 4-ter Ordnung auf, welcher ein vollständiges Fünfseit einbeschrieben ist, und welcher in der Literatur der Name der *Lürothschen Kurve* zuerkannt worden ist (s. auch (29)). Endlich hängt mit dieser Arbeit auch die Frage der kanonischen Darstellung eines Netzes von Flächen 2-ter Ordnung zusammen (FRAHM, Math. Ann. 7).

Auch von einem *Lürothschen Satze* spricht man in demselben Gebiet: von dem algebraischen Nachweis (22), daß für eine Kurve, deren Koordinaten rationale Funktionen eines Parameters sind, immer ein solcher Parameter eingeführt werden kann, daß die Darstellung auch rational umkehrbar wird. Bei dem späteren Versuch (43), den Satz auf rationale Flächen auszudehnen, ist LÜROTH 1889 algebraisch nur bis zu den von BERTINI geometrisch behandelten Involutionen der Ebene vorgedrungen, während der vollständige Beweis der Gültigkeit erst von CASTELNUOVO (Math. Ann. 44, 1893) mit neueren und höheren Hilfsmitteln erbracht worden ist.

LÜROTH hat sich in diesem ganzen weiten Gebiet auch nach der historischen Seite betätigt, indem er (17) in der gemeinsamen Würdigung der Leistungen CLEBSCHs die projektiv-algebraischen Arbeiten charakterisierte und in die allgemeine Entwicklung einreihte; und indem er weiter in der Herausgabe der Abhandlungen HESSE s (1897) (s. A. V) die über Gebilde 2-ten Grads und die über Determinanten übernahm und aus dem Nachlaß noch zwei Aufsätze herauszog.

Von rein algebraischen Betrachtungen erwähnen wir die einfache und strenge Ableitung (49) der Bedingungen für die Existenz eines gemeinsamen Faktors gegebenen Grades zweier binären Formen mit Hilfe des kleinsten gemeinsamen Vielfachen. Endlich gehören hierher zwei in mehrfacher Hinsicht merkwürdige algebraische Arbeiten, die dem vielbenutzten Satz von E. BERTINI über lineare Kurvensysteme gelten, daß, wenn in einem ∞^{q+1}-fach linearen System von Kurven, die nicht einen allen gemeinsamen Bestandteil besitzen, alle Kurven zerfallen, dies nur in der Weise geschehen kann, daß die Teilkurven alle einem und demselben Büschel angehören. (Die auf der Hand liegende Verallgemeinerung auf Gebilde in höheren Räumen übergehen wir.) BERTINI hat seinen Satz mit einem kurzen und durchsichtigen Beweise versehen, in den aber Stetigkeitsbetrachtungen eingehen. In der Abhandlung (47) unternimmt es LÜROTH, ihn auf algebraische Grundlage zu stellen, indem er, geometrisch gesprochen, eine der Teilkurven durch einen festen Punkt der Ebene legt, und aus einer Eigenschaft des größten gemeinsamen Bestandteils, den die Kurven des nunmehr nur noch ∞-Systems besitzen, schließt, daß jene Teilkurve durch den einen Punkt vollständig bestimmt ist, Eine solche Kurve muß aber einem Büschel angehören. — In einem Nachtrag zu (47) bezweifelt LÜROTH selbst die Bündigkeit dieses Schlusses und stützt eine strengere Begründung auf eine von GORDAN formulierte Erweiterung des LÜROTHschen Satzes. Aber auch diese Grundlage ersetzt er weiterhin in (48) durch einen eleganten Satz, nach welchem der größte gemeinsame Teiler einer Anzahl von Ausdrücken der Form $f(x)g(\xi) - g(x)f(\xi)$, wo die f, g ganze Funktionen je von n Variabeln x, bzw. ξ sind, selbst von dieser Form ist, und stützt darauf umgekehrt einen neuen Beweis jener Erweiterung.

Beide Abhandlungen arbeiten ausschließlich mit arithmetisch-algebraischen Mitteln und bedienen sich vielfach der reductio ad absurdum als Beweismittel. Sie sind darum nicht leicht zu lesen, auch ermangelt die Darstellung der Übersichtlichkeit. Aber sie liegen in derjenigen Richtung, in der sich die Theorie der algebraischen Funktionen zu bewegen haben wird, wenn die „Arithmetisierung“ der Geometrie ein erstrebenswertes Ziel ist.

Einen zum algebraisch-geometrischen Weg parallelen Gang hat LÜROTH im Gebiet der *synthetischen Geometrie* genommen. Die Frage, wieviel Kegelschnitte des Raumes durch acht Bedingungen, insbesondere durch diejenigen, acht Gerade des Raumes zu schneiden, bestimmt sind, war LÜROTH zwar zunächst von Seiten der algebraischen Liniengeometrie entgegengetreten, aber die Lösung bewirkt er (8) durch geometrische Konstruktion von Örtern und durch das Korrespondenzprinzip, während sich eine einfache algebraische Fassung dieses Ganges erst bei HIERHOLZER (Ann. 2) findet. Eine Erweiterung der Fragestellung war durch eine Anwendung von CLEBSCH veranlaßt (13).

Von 1873 an interessieren LÜROTH die *prinzipiellen* Fragen der projektiven Geometrie, die an. v. STAUDTs System anschließen. In (18) und (20) setzt sich LÜROTH das Ziel, die STAUDTschen Betrachtungen, welche für Begriffe wie „imaginärer Punkt“, „imaginärer Wurf“ reelle, geometrische Substrate einführten, in demselben Maße rechnend weiter zu entwickeln, als es die Algebra an ihren Zahlen und deren Beziehungen bis zu Gleichungen hin tut; und zwar sollen die Hauptsätze über algebraische Kurven — unter Heranziehung der GRASSMANNschen Definition einer solchen — ihr vollständiges Äquivalent und ihre volle geometrische Begründung in den STAUDTschen Substraten und Operationen finden. Was LÜROTHs Begründung dabei charakterisiert, ist: daß die Einführung von Maß und Zahl selbst (mit Ausnahme der positiven ganzen Zahlen und $1/2$ als Koeffizienten und Exponenten eines Wurfs) formal ausgeschlossen wird; und daß das System sich dabei in strenger und klarer Weise darstellt, sogar in manchen Einzelheiten vollständiger als bei STAUDT. Nicht nur werden Würfe, wie dort, addiert und multipliziert, sondern auch Gleichungen zwischen solchen gebildet, deren Lösungen nachgewiesen und Eliminationen vorgenommen, alles ohne explizite Zuordnung zu einem arithmetischen System. Und dieselbe Behandlung erfährt auch (26) die KLEINsche Interpretation (Gött. Nachr. 1872) imaginärer Punkte durch spezielle (zyklische) Involutionen von je n Punkten einer Geraden, während (28) konstruierende Untersuchungen über zyklische Punktgruppen in Ebene und Raum anreiht.

In diesen geometrischen Arbeiten tritt eine LÜROTH eigentümliche Richtung deutlich hervor: die auf das *Begrifflich-Logische*, und sogleich mit einem vollen Erfolg. Sie zeigt sich auch in einer kleinen Note (25) über das Parallelenaxiom: die Rechenregeln können an sich nicht auf das Rechnen mit geometrischen Gebilden ausgedehnt werden, ohne daß zuvor die Voraussetzungen dieser Regeln als erfüllt nachgewiesen sind. Sein Interesse an diesen prinzipiellen Fragen betätigt sich ferner in einer Korrespondenz mit KLEIN (19) über die Notwendigkeit des geometrischen Stetigkeitsaxioms, wenn man wirklich durch bloß harmonische Konstruktionen in jedes Segment eines geraden Gebildes eindringen will.

Noch in einem dritten Gebiete der Geometrie, in der Analysis situs, hat sich LÜROTH während vieler Schaffensjahre bewegt, aber doch nur im Dienste *analytischer Forschung*, erst *funktionentheoretischer*, dann *mengentheoretischer*.

In *ersterer* Beziehung hat ihn früh das Problem beschäftigt: ein Verfahren anzugeben, um ein kanonisches System von p Querschnittspaaren, wie es Riemann zur Zerschneidung seiner mehrblättrigen Fläche vom Zusammenhange $2p+1$ verwendet, wirklich zu erhalten. Im engen Anschluß an die Clebsch-Gordansche Schleifentheorie, aber auf dem Wege der Analysis situs, konstruiert er schon 1871 (14) eine typische Art von mehrblättriger Riemannscher Fläche, im Falle nur einfacher Verzweigungspunkte: durch geeignete Abänderung der Anordnung der Verzweigungspunkte sowohl, als des Laufs der sie verbindenden Polygonseiten stellt er eine Fläche her, deren Blätter in Gruppen von Blätterpaaren zerfallen — eine Anordnung, die Clebsch alsdann dem hyperelliptischen Typus noch weiter annäherte. In einer solchen Fläche aber läßt sich die kanonische Zerschneidung fast unmittelbar aus dem bekannten Fall der zweiblättrigen Fläche entnehmen. Angeregt durch die Kleinschen Zerschneidungen und Verzerrungen der Blätter zu sich aneinander schließenden Polygonen, bewirkt Lüroth 1883 (37) auch für den Fall beliebiger Verzweigungspunkte, und zwar direkt durch Zerschneidung in eine einfachzusammenhängende Fläche längs eines Teils der Polygonseiten und ohne zuvor, wie früher, die Verzweigungen abzuändern, die gewünschte kanonische Zerschneidung. In der Ausführung dieser Methode (39) erhält er ein anschauliches Verfahren, indem er auch noch die Riemannschen Zusammenhangsbegriffe wegläßt und dafür die Wegänderungen selbst, welche die Integrale 1-ter und 2-ter Gattung eindeutig lassen, heranzieht. Und ein in jeder, auch praktischer Beziehung vollendetes Verfahren gibt Lüroth in (41) an, indem er, wie Clebsch-Gordan, wieder von der geometrischen Umgestaltung und Zerschneidung der Fläche ganz absieht, vielmehr die Fläche zunächst durch eine bloße Tabelle der Übergänge der Blätter an den ursprünglichen Polygonseiten ersetzt und nur mehr rechnerisch diese Tabelle umwandelt. So lassen sich also nun, ohne die früheren Hilfsmittel der Geometria situs und ohne die funktionentheoretischen und algebraischen Hilfsmittel der Weierstraßschen Theorie, durch einfache Rechnung an der Verzweigungstafel alle noch so speziellen Fälle von gegebenen algebraischen Funktionen bis. zur Aufstellung der kanonischen Periodensysteme der Integrale hin behandeln: ein bedeutender Erfolg.

In seinen *mengentheoretischen* Untersuchungen kommt wieder, wie in der Geometrie, Lüroths auf die prinzipiellen Fragen eingestellte Geistesrichtung zur Geltung. Das Problem, das ihn hier von 1878 an bis an sein Lebensende beschäftigt hat, war, als eine Grundfrage der Mengenlehre, schon von G. Cantor angeregt: ob zwischen zwei Mannigfaltigkeiten *verschiedener* Dimensionen — m-ter und $(m+h)$-ter, $h>0$ — eine gegenseitig eindeutige und zugleich stetige Abbildung möglich sei. Der Beweis dafür, daß dem nicht so ist, gelingt Lüroth sukzessiv für $m=1$ und 2 ((30), 1878) und $m=3$

((57), 1899), zusammenfassend dargestellt in (67), 1906. Er beruht auf Erweiterung des für $m = 1$ einfachen Gedankens: es wird der Peripherie eines in der M_{1+h} angenommenen. Kreises eine M_1 zugeordnet, den Punkten A, B des Kreises die Werte a, b von M_1; dann muß wegen der Stetigkeit jeder Wert zwischen a und b auf beiden Bögen AB erreicht werden, also mehr als einmal. Der Ausdehnung des an sich durchgreifenden Gedankens auf die Fälle $m > 3$ widersetzten sich nur die Schwierigkeiten der geometrischen Anschauung der Verschlingungen von Gebilden in Räumen höherer Dimensionen, nicht das Prinzip; und so kann es als tragisches Geschick bezeichnet werden, daß LÜROTH nicht mehr erlebt hat, wie das so lang von ihm erstrebte Ziel doch und zwar auf dem von ihm zuerst eingeschlagenen Weg der Analysis situs erreicht worden ist (s. BROUWERs und LEBESQUEs Noten vom Herbst 1910 im 2-ten Heft des 70-ten Bandes der Math. Ann., ausgeg. im Februar 1911; insbesondere die eng an LÜROTHs Weg anschließende Note von LEBESQUE in C. R. vom 27. März 1911). LÜROTHs Forscherarbeit auf diesem Gebiete war noch 1908 durch eine Übersetzung (67') seiner Arbeit (67) ins Italienische anerkannt worden, und wenn er selbst, der das Problem *vor* völliger Ausbildung der Mengenlehre und namentlich der Analysis situs angegriffen, nicht voll zum Ziele gelangte, so steht auch fest, daß außer ihm bis zuletzt kein andrer in der Frage abschließend vorzudringen vermocht hat.[3]

Vom selben Problem angeregt ist auch LÜROTHs Arbeit (36), in der eine eindeutige Entwicklung der Zahlen in eine unendliche Reihe von Brüchen mit Zählern 1 gegeben und zu einem Beispiel einer eindeutigen und unstetigen Abbildung eines Quadrats auf eine Geradenstrecke (oder der Ebene auf eine Gerade) benutzt wird.

Von *analytischen* Arbeiten sei noch die Note (65) erwähnt; sie stützt die schwierige Untersuchung der Extreme einer Funktion von mehreren veränderlichen Größen unter Benutzung des WEIERSTRASSschen Vorbereitungssatzes möglichst auf algebraische Kriterien. Ferner die einem Satze von BELTRAMI gewidmete Note (66), die, wie auch die mancherlei geodätischen Arbeiten, von LÜROTHs Interesse an Differentialgeometrie zeugt. Eine Förderung der strengen Grundlagen der Analysis haben wir LÜROTH dadurch zu verdanken, daß er DINIs „Grundlagen für eine Theorie der Funktionen einer [einzigen] veränderlichen reellen Größe“ (A. IV) in Verbindung mit seinem Schwager, Oberleutnant a. D. A. SCHEPP deutsch bearbeitete und durch Zusätze bis auf den Stand von 1892 hob, so daß auch heute noch in diesem Buche nur die neuesten Errungenschaften fehlen.

Dem Interesse LÜROTHs an logisch-abstraktem Einordnen und Denken

[3]Ohne den Satz 1. § 2 der o. z. Arbeit von BROUWER waren die früheren, scheinbar evidenten Schlüsse unzutreffend.

kam sein langjähriger enger Verkehr mit Ernst Schröder, seinem Landsmann, Freund und zeitweisen Kollegen, anregend und fördernd entgegen. Die wenigen Veröffentlichungen Lüroths in diesem Felde (16), (45), (55), (61) hängen alle mit Schröder oder Grassmann zusammen. So ist (61) im wesentlichen die Darstellung einer Untersuchungsreihe des ersteren, als Studie zu dem in (60) gegebenen herzlichen, zugleich die Leistungen Schröders tief und klar heraushebenden Nachruf, hat aber auch Wert durch Darlegung des Zusammenhangs mit Dedekinds Untersuchungen über die Zahlen. Für Lüroth war die ganze Mathematik, nicht nur in ihrem Aufbau, sondern auch in ihren Objekten ein einziges logisches System, wie er das auch einmal — in seiner nicht gedruckten Freiburger Antrittsrede — ausdrücklich betont hat. Selbst in der Mechanik kommt diese, zugleich auf das prinzipiell Arithmetisierende und auf den Operationenkalkul gerichtete Auffassung zum Ausdruck, so in der frühen Einführung der Vektorrechnung. Aber es ist nicht etwa die Freude des bloßen Algorithmikers an der Sprache seiner Formeln, sondern das tiefere Interesse an dem Begrifflichen der formalen Operation, als Mittel, den Gedankengehalt möglichst scharf zu fassen und hervortreten zu lassen. Und so mag man in dieser begrifflichen Denkweise das Zusammenfassende und Einheitliche in Lüroths rein wissenschaftlichen Bestrebungen erkennen.

Dem widerspricht nun durchaus nicht, daß Lüroth sich noch nach einer ganz anderen Seite betätigt hat, und zwar von Anfang seines Arbeiten an bis zu dessen Abschluß: nach der Seite der *angewandten Mathematik*.

Die astronomische Beschäftigung vor den eigentlichen mathematischen Studienjahren hatte nicht nur damals schon einige Resultate, teils rechnerischer Art, teils an Beobachtungen, gezeitigt (s. (1) – (4) der Abh.), auch Lüroths Interesse an geodätischen Untersuchungen und das an der Wahrscheinlichkeitstheorie ist ihr zuzuschreiben. In letzterer Beziehung wäre auf manche ausführliche Rezension in der Vierteljahrsschr. der Astr. Ges. hinzuweisen, vor allem aber auf einige theoretische Untersuchungen (12), (34), (24) über Probleme der Fehlertheorie. (12) ist nur Verallgemeinerung einer Betrachtung von Peters, in (34) aber wird eine Untersuchung vorgenommen, die im Falle einer stetigen Mannigfaltigkeit von Fällen für die Begründung des Bernoullischen Satzes von Wert ist; und in (24) wird die gewöhnliche Methode für die Berechnung des wahrscheinlichen Fehlers einer der Unbekannten, die aus einer großen Reihe von Beobachtungen zu bestimmen sind, mit einer exakteren Methode verglichen, welche in das Präzisionsmaß der Gewichtseinheit eines Beobachtungsfehlers keine Willkürlichkeit einführt; dabei wird durch eine verwickeltere analytische Rechnung das einfache Resultat gefunden, daß auf letzterem Wege der wahrscheinliche Fehler nur sehr wenig kleiner wird als auf ersterem, nämlich um höchstens so viel, als ob man bei jener Methode eine einzige weitere Beobachtung zur Verfügung hätte.

Zugleich hat LÜROTH diese Richtung schon sehr früh in seinen Vorlesungen zum Ausdruck gebracht, am frühesten, und zwar seit 1875, in solchen über numerisches Rechnen, während populäre astronomische Vorlesungen erst der Münchener und Freiburger Zeit angehören, einzelne populäre Vorträge (21), (52) aber verschiedenen Zeiten. Die akademischen Vorlesungen über *numerisches Rechnen* sind ganz aus der astronomischen Schulung bei SCHÖNFELD hervorgegangen, sie stellen unter anderm zum erstenmal zusammen, was sich bisher nur in der Tradition der wissenschaftlichen Rechner entwickelt hatte. Gerade diese Teile der Vorlesungen sind auch in dem 1900 erschienenen Buche „Vorl. über num. Rechnen“ (A. II) wiedergegeben; es liefert nicht die Approximationsmethoden, nicht die Interpolationstheorie oder überhaupt Theorien; es liefert Betrachtungen darüber, wie der Rechner, etwa beim abgekürzten Multiplizieren oder bei der Benutzung von Tafelwerken, den Grad der *Genauigkeit* abzuschätzen hat; wie er dabei den höchstmöglichen Grad erreichen kann, bei einem möglichst geringen Aufwand von Arbeit. Von Anwendungen werden nur das Wurzelausziehen und die Auflösung der trinomischen Gleichungen behandelt, letztere auch im Aufsatz (68). Seinen eigentümlichen Wert wird das Buch behalten.

LÜROTHs „Grundriß der Mechanik“ (München, 1881) (A. 1) ist wohl das erste Werk über Mechanik, das sich grundsätzlich der Vektorrechnung bedient: merkwürdigerweise in jener zwischen GRASSMANNs Ausdehnungslehre und HAMILTONs Quaternionen die Mitte haltenden Gestalt, wie sie 20 Jahre später im V. Bande der Enzyklopädie der math. Wissenschaften (übrigens, ohne daß LÜROTHs Erwähnung geschieht) vorgeschlagen worden ist. Zwar hatte schon H. GRASSMANN in einer Programmschrift des Stettiner Gymnasiums einige Teile der Dynamik in jene Form gebracht, und in einem Aufsatz im 12. Band der Math. Annalen (1877) eine Anwendung davon auf eine besondere Auffassung der Theorie von Ebbe und Flut gemacht. Aber diese Skizzen sind nichts weniger als ein „Grundriß der Mechanik“ im Sinne des LÜROTHschen Entwurfs. Trotz des minimalen Umfanges stellt sich LÜROTHs Werk als eine wesentlich vollständige streng wissenschaftliche Einführung in die Mechanik des materiellen Punktes und der starren Systeme dar, das, in bemerkenswertem Zuge nach Allgemeinheit — mit dem Hinweis auf die von der Natur gelieferten stufenweise sich dem Zustand der Ruhe nähernden Koordinatensysteme — den Begriff der Relativbewegung an die Spitze stellt. Eben beim Wechsel räumlicher Bezugssysteme treten ja — was bei GRASSMANN nicht zum Ausdruck kommt — die Vorzüge der Vektorrechnung ins Licht, was denn auch LÜROTH an dem Beispiel der Planetenbewegung um die selbst bewegte Sonne und an der Lehre vom freien Fall auf der sich drehenden Erde zeigt.

Auf die guten Dienste, die bei der Herleitung der Integralsätze der Mechanik das skalare und das vektorielle Produkt (das bei LÜROTH an Stelle des GRASSMANNschen Bivektors tritt) leisten, hatte schon GRASSMANN hingewiesen; indessen wie einfach sich in die Kinematik des starren Körpers der Begriff der Momentanachse und im Fall des Gleichgewichts der Kräfte der des Kräftepaares einfügen läßt, zeigt erst LÜROTHs Behandlung. Eigentümlich sind dem Buch auch die Beweise des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten und des *d'Alembert*schen Prinzips aus der Annahme, daß die Kräfte stetige Funktionen der Zeit sind.

Daß auf dem knapp bemessenen Raum die Theorie der unfreien Bewegung zu kurz kommt, daß Beispiele fast fehlen, kann dem Büchlein nicht zum Vorwurf gereichen. Für Anfänger ist es eben nicht geschrieben. Aber was die Vektorrechnung an Prägnanz der Fassung und an Beweglichkeit vor der Koordinatenmethode voraus hat, kommt in dem fein durchdachten und anspruchslos abgefaßten (leider auch ausgestatteten!) kleinen Werk zu beredtem Ausdruck. Welchen Anteil LÜROTH auch später noch an der Einführung der Grundbegriffe der Mechanik genommen hat, zeigt der Bericht, den er über MAGGIs Principia del movimento (Zeitschr. f. Math. u. Phys. 42. (1897)) erstattet hat. Auch das in Verbindung mit A. SCHEPP deutsch bearbeitete Werk Theory of friction von J. H. Jellett (A. III) gehört hierher. Immer aber wieder beschäftigt ihn die Anwendung der GRASSMANNschen Ausdehnungslehre auf Probleme der Mechanik, an der sich ja, nach des Erfinders eigenem Bekenntnis, dieses Verfahren wesentlich entfaltet hat. In dem Aufsatz (55) über die Bewegung eines starren Körpers, den LÜROTH selbst eine „Übung in der Ausdehnungslehre“ nennt, wendet er die „Punktrechnung“ auf das Studium der Lagenänderungen eines starren Tetraeders im Raum an. Die wesentlichen, Ergebnisse lassen sich jedoch, wie er selbst zeigt, bequem auch auf anderem Wege beweisen.

Bei der Kenntnis, die LÜROTH von H. GRASSMANNs Ausdehnungslehre hatte, verstand es sich von selbst, daß er an der Herausgabe von dessen Werken (s. A. VI.) beteiligt war. In dem von LÜROTH redigierten Abschnitt befinden sich außer den zwei erwähnten Abhandlungen von GRASSMANN zwölf weitere Aufsätze über Anwendungen der Ausdehnungslehre auf Mechanik, die LÜROTH mit zum Teil erheblichen Änderungen und Zusätzen aus hinterlassenen Papieren von GRASSMANN (schon 1893) zusammengestellt hat.

Noch einmal im letzten Jahre seines Lebens hat sich LÜROTH mit Mechanik beschäftigt, in der Note: Eine Bemerkung zum MICHELSONschen Versuch (69). Es handelt sich um die Vergleichung, die MICHELSON angestellt hat zwischen der Geschwindigkeit von Lichtstrahlen in Richtung der Erdbahn und der senkrecht zu ihr, deren negatives Ergebnis den Anlaß zur Aufstellung des „Relativitätsprinzips“ gegeben hat. LÜROTH glaubte, daß von MICHEL-

SON der Einfluß der von der Erdbewegung herrührenden Zentrifugalkräfte auf die Länge des elastischen Stabes vernachlässigt worden sei, und wurde erst nachträglich darauf aufmerksam gemacht, daß durch die Art der Montierung des Stabes dieser Einfluß ausgeschaltet war: ein Übersehen, das sich LÜROTH schwer zu Herzen genommen hat.

Auch in der Geometrie verwendet LÜROTH die Methoden der GRASSMANNschen Ausdehnungslehre, indem er in der Festschrift (58) zeigt, wie man aus den Umrissen unter Umständen auf die Körpergestalt selbst schließen kann. Da er die räumlich völlig freie Beweglichkeit des Auges (der Spitze des projezierenden Kegels) annahm, sah er sich auf die Hilfsmittel der Vektorrechnung angewiesen, die alsdann die Rechnung wesentlich vereinfacht. Dieser Umstand vielleicht war es, der ihn davon abhielt, die Frage zu erörtern, ob nicht eine beschränkte Bewegungsfreiheit der Kegelspitze für die Beurteilung der Körpergestalt bereits ausgereicht hätte; und in der Tat läßt sich eine eindimensionale Bewegung angeben, die hierfür genügt.

Zu seinen Untersuchungen auf dem Gebiete der Geodäsie ist LÜROTH in der Karlsruher Zeit durch den Verkehr mit seinem Kollegen W. JORDAN und weiterhin wohl durch das Studium von HELMERTs Werk über Geodäsie angeregt worden, dessen Besprechung für die Zeitschrift für Math, und Physik (Bde 28, 31) er übernommen hatte. Nachdem er in einem ersten Aufsatz (40) die zwischen den Längen, Breiten und Azimuten von drei Erdorten bestehende Beziehung formuliert und als eine dem PASCALschen Satze verwandte Beziehung gekennzeichnet hatte, wendet er sich zu der im Mittelpunkt des Interesses stehenden Frage: welche Daten sind zur Bestimmung der Gestalt der Erdoberfläche erforderlich, und welche genügen? Die Antwort lautet verschieden, je nachdem man sich auf geodätische Messungen beschränkt oder auch astronomische heranzieht. Der letzteren Annahme sind die Aufsätze (44), (54), (56) gewidmet, der ersteren die Abhandlung (46); wobei noch die Normalen der zu bestimmenden Oberfläche durch beliebig (übrigens in stetiger Folge) gerichtete „Lotlinien“ ersetzt werden, wie ja tatsächlich die „Lotlinien“ der Erdpunkte nicht senkrecht zur Erdoberfläche stehen. Zwar ist es nicht die Gestalt der Erde, die der Geodät zu wissen wünscht, sondern die des Geoids, der Meeresfläche, die man sich unter dem Kontinent fortgesetzt denkt. Aber jene Annahme ist für die Denkweise des Mathematikers bezeichnend, der, bald synthetisch bald mit Formeln arbeitend, von der allgemeineren Annahme ausgeht und, indem er ein Hindernis nach dem anderen wegräumt — wobei LÜROTH nie versäumt, aufrichtig auch die von ihm nicht bewältigten Fälle anzugeben — , so lange neue Forderungen zufügt; bis die Zuordnung eine Ähnlichkeitstransformation ist. Dies tritt u. a. dann ein, wenn die „Lotlinien“ Normalen der Fläche sind, und die Azimute der Ebenen durch alle Lotlinien nach allen Flächenpunkten bekannt sind. Theoretisch gesprochen, genügen also rein geodätische Messungen, nämlich die der Horizontalwinkel, um die Gestalt des Geoids zu ermitteln. Weil sich aber entfernte Erdorte nicht anvisieren lassen, müssen astronomische Messungen hinzutreten. So kommt LÜROTH in (56) noch einmal auf die Verbindung der beiden zurück und zeigt, daß selbst bei der verallgemeinerten Definition der „Lotlinie“ die Vergleichung der Längen und Breiten von nur vier Lotlinien auf zwei punktweise einander zugeordneten Flächen genügen, um zu erkennen, ob sie einander ähnlich sind.

Von historisch-biographischen Arbeiten sind, außerdem oben erwähnten Nachruf auf E. SCHRÖDER (60) und seinem Anteil an demjenigen auf A. CLEBSCH, noch ein Nachruf auf einen Führer im Gebiete der Mechanik, seinen Karlsruher Kollegen WILHELM SCHELL (63), und seine Grabrede auf WEINGARTEN (70) zu nennen. Ganz kurze Lebensläufe von einer Anzahl von früher in Baden tätigen Mathematikern hat LÜROTH in WEECHs „Badischen Biographien“, Bd. l, 1875 gegeben; einen ausführlicheren von GAUSS (27) aus Anlaß von dessen 100. Geburtstag. Von Äußerungen auf dem Gebiet der Geschichte der Mathematik sind nur die in einer Rede über die Ursprünge der Infinitesimalrechnung (42) hervorzuheben. —

Seinem Lehrberuf hat LÜROTH große Sorgfalt gewidmet. Mannigfaltig wie seine Veröffentlichungen waren seine Vorlesungen, klar, ausgezeichnet durch Strenge der Beweisführung und nicht bloß höheren, sondern mit Vorliebe elementaren Gebieten gewidmet. Über einige Spezialvorlesungen aus der Münchener Zeit schreibt uns einer seiner damaligen Zuhörer, Professor S. FINSTERWALDER: „Diese Vorlesungen (über Astronomie, Variationsrechnung, Funktionentheorie) waren, wie übrigens noch mehr die Hauptvorlesung, äußerst sauber gearbeitet und konnten glatt nachgeschrieben werden. LÜROTH versprach oder verrechnete sich kaum je, und diese unbedingte Korrektheit war für uns damals das Hauptkennzeichen seiner Vorlesungen. Der Vortrag selbst war schlicht und eindringlich, nicht eben besonders plastisch oder gar rhetorisch. Der hervorstechende Zug in LÜROTHs wissenschaftlicher Arbeit, daß er gerne Probleme ausschöpfte, kam in seinen Vorlesungen kaum .... dagegen seine Kunst im Zahlenrechnen und seine Freude daran allenthalben zur Geltung und hat sich mir tief eingeprägt ..... “ Eine anziehende Vorlesung muß namentlich die über numerisches Rechnen gewesen sein, wie das gleichnamige Buch bezeugt, von dem oben berichtet worden ist.

War diese eigenartige Vorlesung LÜROTHs Jugendneigung für astronomische Berechnungen entsprungen, so läßt sich seine sonstige Vielseitigkeit teilweise durch die wechselnden Lehrstellungen erklären, die er bekleidet hat. Als Studierender und als Dozent in den Anschauungen der Universität erzogen, verwies ihn die Wirksamkeit an zwei technischen Hochschulen auf eine Lehrtätigkeit, die eine elementare Gestaltung der Vorträge und reichliche

Gelegenheit zu Übungen erheischte. Aber sie brachte ihn auch in Berührung mit den technischen Wissenschaften, deren Vertreter sich wie in Karlsruhe so in München mit den Mathematikern in einem Kranz zu wissenschaftlichem Austausch zusammenfanden. In Freiburg wiederum war LÜROTH Mitglied des physikalischen Kolloquiums und während vieler Jahre Vorsitzender der naturforschenden Gesellschaft. Durch seine Ernennung zum a. o. Mitglied der Gr. Badischen Oberschulbehörde 1901 wurde ihm Gelegenheit, seine reichen Erfahrungen auch im Interesse der Schule zu verwenden.

Auch sonst sind ihm Ehrungen, Vertrauensstellungen und mannigfache Anlässe zur Mitarbeit bei wissenschaftlichen Körperschaften zuteil geworden. Schon von Karlsruhe aus hat er Berufungen an die Technischen Hochschulen in Darmstadt und Hannover sowie an die Universität Freiburg abgelehnt. 1876/7 wurde der damals 32-jährige zum Direktor des Gr. Polytechnikums erwählt; 1889/90 war er Rektor der Universität Freiburg, 1905 wurde er durch die Ernennung zum Gr. Bad. Geheimen Rat II. Klasse ausgezeichnet. — Der K. bayerischen Akademie der Wissenschaften gehörte er seit 1884 als korrespondierendes Mitglied an. Unmittelbar bei Errichtung der Heidelberger Akademie wurde er als deren Mitglied aufgenommen. Viele Jahre hat er als Vorstandsmitglied der mathematischen Sektion der Leopoldina gewirkt.

Der wissenschaftliche Verkehr mit LÜROTH war wegen seiner Vielseitigkeit und Fähigkeit, sich rasch in fremde Gedankengänge einzufinden, in hohem Maße genuß- und lehrreich. Aber auch den Nichtmathematiker zog die Unterhaltung mit dem keineswegs weltfremden, auf vielen Gebieten menschlichen Wissens heimischen feinsinnigen Gelehrten an. LÜROTH konnte mit einem Wort, einer humoristischen Wendung, die niemals verletzend war, eine Person oder eine Sachlage treffend kennzeichnen; und freudig erkannte er jedes fremde Verdienst an. Er hatte in der Welt sich umgesehen und im Umgang mit Ausländern fremde Denkweise verstehen gelernt. In dem gastlichen Heim, dem seine Gattin, eine geborene SCHEPP, eine besondere Anziehung verlieh, begegneten sich die verschiedensten Berufskreise.

Den Verkehr mit seinen Freunden hat LÜROTH jederzeit aufs sorgfältigste gepflegt und ihnen unverbrüchliche Treue bewahrt. Unbedingt zuverlässig konnte er für sie eine Opferwilligkeit betätigen, die weit über das erwartete Maß hinausging. Um von den Überlebenden zu schweigen: welche Mühe hat LÜROTH darauf verwandt, die Wertschätzung der Arbeiten seines verstorbenen Freundes ERNST SCHRÖDER durchzusetzen, der mit seinen Bestrebungen zur Einführung einer Begriffsschrift in Deutschland lange Zeit allein stand. Und daß JULIUS WEINGARTEN, der noch in vorgerücktem Alter nach Freiburg i. B. gezogen war, dort an der Universität eine Stellung als Honorarprofessor zuteil wurde, die dem vereinsamten Gelehrten in seinen letzten Lebensjahren einen erwünschten Wirkungskreis verschaffte, war im wesentlichen LÜROTHs Werk. Auch seiner Fakultät gegenüber hat, wie dies an seinem Grabe zum Ausdruck kam, LÜROTH noch im letzten Jahr seines Lebens, schon hart bedrängt durch ein Augen- und Herzleiden, eine ungewöhnliche Selbstverleugnung gezeigt. Nachdem die Abspaltung einer naturwissenschaftlich-mathematischen Fakultät von der philosophischen trotz seines Widerspruches beschlossene Sache war, ließ er, den Vielseitigkeit und Geschäftskenntnis dazu vor anderen befähigten, sich zur Übernahme des Dekanates der neuen Fakultät, gegen die er sich so energisch gewehrt, an deren Einrichtung er jedoch den tätigsten Anteil genommen hatte, bestimmen. Der Tod hat ihn vor dem Antritt dieses Amtes überrascht.

A. Bücher.

Eigene Bücher:

I. *Grundriß der Mechanik.* Von Dr. Jacob Lüroth, o. Professor der k. Technischen Hochschule München. München, Th. Ackermann, 1881. VI, 50 S.

II. *Vorlesungen über numerisches* Rechnen. Von Dr. J. Lüroth, Professor an der Universität Freiburg i. Br. Mit 14 Figuren im Text. Leipzig, B. G. Teubner, 1900. VI, 194 S.

Herausgegebene Werke:

III. John H. Jellett, *Die Theorie der Reibung.* Deutsch bearbeitet von J. Lüroth und A. Schepp. Leipzig, B. G. Teubner, 1890. X, 238 S.

IV. Ulisse Dini, *Grundlagen für eine Theorie der Functionen einer veränderlichen reellen Größe.* Deutsch bearbeitet von J. Lüroth und A. Schepp. Leipzig, B. G. Teubner, 1892. XVIII, 554 S.

V. Von Ludwig Otto Hesses *Gesammelten Werken* (Verlag der k. bayer. Akad. der Wiss., München 1897): die Abhandlungen über *Gebilde zweiten Grads* und über *Determinanten.*

VI. Von Hermann Grassmanns *Gesammelten Mathematischen und Physikalischen Werken* (Leipzig, B. G. Teubner), aus des zweiten Bandes zweitem Teil 1902: die Abhandlungen zur *Mechanik.* Bearbeitet: Freiburg, Frühjahr 1893.

B. Abhandlungen.

1. [Elemente der Melete (zusammen mit Prof. C. Rapp): Bahnberechnung aus drei Beobachtungen; enthalten in einer Mitteilung von Prof. Schönfeld, Mannheim, vom 4. Jan. 1862.] Astronom. Nachrichten, Bd. 57, No. 1345 (1862), S. 4.

2. Ephemeride der Calypso. Mannheim, 1862 März 1. Ibid., Bd. 57, No. 1353 (1862), S. 135.

3. [Drei Ringmikrometer-Beobachtungen der Urania am 5-füßigen Fraunhofer, Bonn 1862 Dez. 3–16; enthalten in einer Mitteilung von Prof. Argelander, Bonn.] Ibid., Bd. 59, No, 1407 (1863), S. 231.

4. [Fünf ebensolche Beobachtungen der Asträa, Bonn 1863 Febr. 5.–26.; enth. in einer Mitt. von Prof. ARGELANDER, Bonn.] Ibid., Bd. 59, No. 1408 (1863), S. 254.

5. Zur Theorie des Pascalschen Sechsecks. Von Dr. LÜROTH in Berlin. [Doktordissertation, aber nicht als solche gedruckt.] Zeitschr. f. Math. u. Phys. Bd. 10 (1865), S. 390–401.

6. Zur Theorie der windschiefen Flächen. Mannheim, im November 1866. [Habilitationsschrift, Heidelberg 1867.] Journal f. d. reine u. angew. Mathematik, Bd. 67 (1867), S. 130–152.

7. Verallgemeinerung des Problems der kürzesten Linie. [1866 auf einer Reise in Zürich bearbeitet.] Zeitschr. f. M. u. Ph. Bd. 13 (1868), S. 156–160.

8. Über die Anzahl der Kegelschnitte, welche acht Gerade im Räume schneiden. Heidelberg, 12. Nov. 1867. Journal f. d. r. u. a. M., Bd. 68 (1868), S. 185–190.

9. Über Polartetraeder und die Schnittcurve zweier Flächen zweiter Ordnung. Von Dr. LÜROTH, Docent an der Universität Heidelberg. Heidelberg, Dec. 1867. Zeitschr. f. M. u. Ph. Bd. 13 (1868), S. 404–413.

10. Einige Eigenschaften einer gewissen Gattung von Curven vierter Ordnung. Von J. LÜROTH in Karlsruhe. Heidelberg, 27. Juni 1868. Mathem. Annalen, Bd. 1 (1869), S. 37–53.

11. [Ein Satz über Flächen dritter Ordnung; zu Abhdlg. 8 gehörig; enthalten in einer Abhandlung von A. Clebsch.] Math. Ann., Bd. 1 (18.69), S. 258–259.

12. Bemerkung über die Bestimmung des wahrscheinlichen Fehlers. Carlsruhe, 7. Jan. 1869. Astron. Nachr. Bd 73, No. 1740 (1869), S. 187–190.

13. Eine Aufgabe über Kegelschnitte im Raume. Carlsruhe, Nov. 1869. Math. Ann., Bd. 3 (1871), S. 124–133.

14. Note über Verzweigungsschnitte und Querschnitte in einer Riemann'schen Fläche. Carlsruhe, Apr. 1871. Ibid., Bd. 4 (1871), S. 181–184.

15. Bemerkung über gleichmäßige Stetigkeit; Carlsruhe, Apr: 1872. Ibid., Bd. 6 (1873), S, 319–320.

16. [Beweis für die Eindeutigkeit des Zählprozesses; enthalten in E. SCHRÖDERs Lehrbuch der Arithmetik und Algebra, erster Band, S. 18–20. Leipzig, B. G. Teubner, 1873.

17. [In „Rudolf Friedrich Alfred Clebsch, Versuch einer Darlegung und Würdigung seiner wissenschaftlichen Leistungen, von einigen seiner Freunde“, im Juli 1873, Math. Ann., Bd. 7 (1874), S. 1–55: die Darlegung der geometrisch-algebraischen Arbeiten, S, 13–19.]

18. Über das Rechnen mit Würfen. Carlsruhe. 15. Sept. 1873, Nachrichten v. d. k. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, No. 27 vom 26. Nov. 1873.

19. [Über den Hauptsatz der projektiven Geometrie; enthalten in F. Klein, Nachtrag ff.], Math. Ann., Bd. 7 (1874), S. 531–537 [Jan. 1874].

20. Das Imaginäre in der Geometrie und das Rechnen mit Würfen. Darstellung und Erweiterung der v. Staudt'schen Theorie. Carlsruhe, Juli 1874, Math. Ann., Bd. 8 (1875), S. 145–214.

21. Die Entfernung der Erde von der Sonne und der Venusdurchgang, [Vortrag Carlsruhe, im Juli 1874.] Deutsche Warte, Bd. 7, Carlsruhe 1874, S. 484–494.

22. Beweis eines Satzes über rationale Curven. Carlsruhe, Febr.-1875. Math. Ann., Bd, 9 (1876), S. 163–165.

23. [Abänderungsvorschlag bez. eines Kegelschnittszirkels von DRZEWIECKI; enthalten in einer Rezension von WIENER.] Zeitschr. f. Vermessungswesen, Bd. 5 (1875), S. 87.

24. Vergleichung von zwei Werthen des wahrscheinlichen Fehlers. Carlsruhe, 27. Dec. 1875. Astr. Nachr., Bd. 87, No. 2078 (1876), S. 209–220.

25. Über Bertrands Beweis des Parallelenaxioms. Carlsruhe, Jan. 1876. Ztschr. f. M. u. Ph. - Bd. 21 (1876), S. 294–297.

26. Das Imaginäre in der Geometrie und das Rechnen mit Würfen. (Zweite Abhandlung.) Carlsruhe, Juni 1876. Math. Ann., Bd. 11 (1877), S. 84–110.

27. Zur Erinnerung an Karl Friedrich Gauß. Beilage zur Allgemeinen Zeitung, No. 55, vom 24. Febr. 1877. Abgedruckt in: Ztschr. f. Vermessungswesen, Bd. 6 (1877); S. 201–210; und in: Ztschr. des Rhein.-Westf. Landmesservereins, Jahrg. 19 (1899), S. 220–227.

28. Über cyklisch-projectivische Punktgruppen in der Ebene und im Raume. Carlsruhe, 10. December 1877. Math. Ann., Bd. 13 (1878), S. 305–319.

29. Neuer Beweis des Satzes, daß nicht jeder Curve vierter Ordnung ein Fünfseit eingeschrieben werden kann. Carlsruhe, 27. März 1878, Ibid., Bd. 1.8 (1878), S. 548–554.

30. Über gegenseitig eindeutige und stetige Abbildung von Mannigfaltigkeiten verschiedener Dimensionen aufeinander. Karlsruhe, 8. Juli 1878. Sitzungsber. der physik.-medic. Societät zu Erlangen. 10. Heft (1878), S. 190–195.

31. [Bemerkungen zu dem Beweis von Thomae über den Gegenstand der Note 30.] Berichte über die Versammlung Deutscher Naturforscher u. Ärzte, Cassel 1879.

32. [Bestimmung des infinittären Wertes eines bestimmten Integrals; in § 6, S. 115 bis 117 einer Arbeit von E. Schröder (1879), Zeitschr. f. M. u. Ph., Bd. 25 (1880), S. 106ff.]

33. [Lösung einer algebraischen Aufgabe.] Ztschr. f. Vermessungswesen, Bd. 10 (1880),, S. 132.

34. Ein Problem der Fehlertheorie. München, Okt. 1880. Ibid., Bd. 10 (1880), S. 432–438.

35. Notiz über die Rectification eines Ellipsenbogens. München, 12. Jan. 1881. Ibid., Bd. 11 (1881), S. 225–226.

36. Über eine eindeutige Entwickelung von Zahlen in eine unendliche Reihe. München, Oct. 1882. Math. Ann., Bd. 21 (1883), S. 411–423.

37. Über die kanonischen Querschnitte einer Riemann'schen Fläche. München, 12. Febr. 1883. Sitzungsber. d. phys.-med. Soc. zu Erlangen, Heft 15 (1883), S. 24–30. [Ohne Tafeln; den Separatabzügen sind 6 Täfeln beigegeben.]

38. On measuring the height of clouds. Symons Monthly Meteorolog. Magazine, Bd. 18 (1883), S. 149–150.

39. Über die kanonischen Perioden der Abel'schen Integrale. Freiburg i. Br., Nov. 1884. Abhandlungen der k. bayer. Akad. der Wiss., II. Classe, Bd. 15, II. Abtheilung (1885), S. 329–366.

40. Eine Gleichung zwischen den Längen, Breiten und Azimuten dreier Erdorte. Freiburg i. Br., Sept. 1886. Ztschr. f. Vermessungswesen, Bd. 15 (1886), S. 529–535.

41. Über die kanonischen Perioden der Abel'schen Integrale. (Zweite Abhandlung.) Abhandl. der k. bayer. Akad. der Wiss., H. CL, Bd. 16, I. Abth. (1887), S. 197 – 241.

42. Rede des antretenden Prorektors Hofrat Professor Dr. LÜROTH. [Über die Geschichte der Infinitesimalrechnung.] Universitätsschrift Freiburg i. Br.: „Reden, gehalten in der Aula am 9. Mai 1889 bei der öffentlichen Feier der Übergabe des Prorectorats der Universität Freiburg"- Freiburg i. Br., 1889, S. 23–51.

43. Rationale Flächen und involutorische Transformationen. [Enthalten in der Universitätsschrift Freiburg i. B.] „Programm, wodurch zur Feier des Geburtsfestes Seiner Königlichen Hoheit unseres durchlauchtigsten Großherzogs Friedrich im Namen des Akademischen Senats die Angehörigen der Albert-Ludwigs-Universität einladet der gegenwärtige Prorektor Dr. JACOB LÜROTH." Freiburg [9. Sept.] 1889. S. 1–25.

44. Über die Bestimmung der Erdgestalt durch Verbindung von astronomischen und geodätischen Messungen. Ztschr. f. Vermessungswesen, Bd. 19 (1890). S. 353–362.

45. [Beweis, daß aus den Schröderschen Prämissen der 2. Teil des Distributionsgesetzes nicht folgt; enthalten in einer Anzeige von E. SCHRÖDERs „Vorlesungen über die Algebra der Logik (Exacte Logik). Erster Band."] Ztschr. f. M. u. Ph., Hist.-lit. Abt. Bd. 36 (1891), insb. S. 165–166.

46. Über die Bestimmung einer Fläche durch, geodätische Messungen. Freiburg i. Br., 5. März 1892. Sitzungsber. der math.-physik. Kl. der k. bayer. Akad. der Wiss., Bd. 22 (1892), S. 27–52.

47. Beweis eines Satzes von BERTINI über lineare Systeme ganzer Functionen. Freiburg i. Br., Nov. 1892. Math. Ann. Bd. 42 (1893), S. 457–470.

48. Beweis eines Satzes von BERTINI über lineare Systeme ganzer Functionen. II. . Freiburg,i. Br., Jan. 1894. Ibid. Bd. 44 (1894), S. 539–552.

49. Kurze Ableitung der Bedingungen, daß zwei algebraische Gleichungen mehrere Wurzeln gemein haben. Freiburg i. Br., Jan. 1895. Ztschr. f. M. u, Ph. Bd,40 (1895), S. 247–251.

50. Solution de la question 455. Intermédiaire des Mathématiciens, Bd. 2 (1895), S. 308.

51. Zur Note: „M. NOETHER, Über den gemeinsamen Factor zweier binärer Formen“. (Auszug aus einem Schreiben an Herrn NOETHER.) Von Prof. Dr. J. LÜROTH in Freiburg i. B., corresp. Mitglied der Societät. Freiburg i. Br., 24. Jan. 1896. Sitzungsber. d. phys.-med. Societät zu Erlangen, Heft 27 (1895), S. 119.

52. Das Schicksal des Tages. (Ein in der Festsitzung der Naturforschenden Gesellschaft zu Freiburg i. Br. 1896 gehaltener Vortrag.) Beilage z. Allgem. Ztg., Nr. 64, vom 20. März 1897. S. 1–4.

53. Ein Instrument zur Messung von Potentialdifferenzen. Ztschr. f. Vermessungswesen, Bd. 26 (1897), S. 15–17.

54. Über die Bestimmung der Erdgestalt durch Verbindung von astronomischen und geodätischen Messungen. (Zweite Note.) Ztschr. f. Vermessungswesen, Bd. 26 (1897), S. 607–614.

55. Die Bewegung eines starren Körpers. (Eine Übung in der Ausdehnungslehre.) Ztschr. f. M. u. Ph; Bd. 43 (1898), S. 243–268.

56. Studien über die geodätische Abbildung. Math. Ann. Bd. 51 (1899), S. 161 bis 180.

57. Über gegenseitig eindeutige und stetige Abbildung von Mannigfaltigkeiten verschiedener Dimensionen aufeinander. (Zweite Note.) Von Geh. Hofrat LÜROTH in Freiburg i. Br., 8. Mai 1899. Sitzungsber. der phys.-med. Societät zu Erlangen. Heft 31 (1899), S. 87–91.

58. Zwei Beispiele für die Ableitung der wahren aus der scheinbaren Gestalt eines Körpers. Aus der „Festschrift der Universität Freiburg zum fünfzigjährigen Regierungsjubiläum Seiner Königlichen Hoheit des Großherzogs Friedrich von Baden“ [24. April 1902], S. 179–205.

59. [Einige Beweise bez. unendlicher Reihen; enthalten in dem zweiten Aufsatz von A. PRINGSHEIM, „Zur Theorie der ganzen transcendenten Functionen“.] Sitzungsber. der math.-physik. Kl. der k. bayer. Akad. d. Wiss., Bd. 32 (1902), S. 295 ff.

60. ERNST SCHRÖDER. Jahresber. der Deutschen Math.-Ver. Bd. 12 (1903), S. 249 bis 265.

61. Aus der Algebra der Relative. (Nach dem dritten Bande von E. Schröders Vorlesungen über die Algebra der Logik.) Ibid. Bd. 13 (1904), S. 73–111.

62. Eine historische Bemerkung zur Funktionentheorie. Freiburg i. Br., Sommer 1904. Math. Ann. Bd. 60 (1905), S. 398–401.

62'. [Dazu gehörig:] Berichtigung zu meinem Aufsatz: „Historische Bemerkung ff.“, ibid. Bd. 63 (1907), S. 238.

63. Wilhelm Schell. Jahresber. der D. Math.-Ver. Bd. 14 (1905), S. 113–121.

64. Eine neue Formel für den Rest der Taylorschen Reihe. Nov. 1905. Archiv der Math. u. Phys. (3), Bd. 11 (1907), S. 159–161.

65. Über die Extreme einer Funktion von zwei oder drei veränderlichen Größen. 9. Juni 1906. Sitzungsber. der mathem.-phys. Kl. der k. bayer. Akad. der Wiss., Bd. 36, H. 2 (1906), S. 405–412.

66. Zur Transformation der Koordinaten in Räumen konstanter Krümmung. Freiburg i. Br., Januar 1907. Rendiconti del Circ. Mat. di Palermo, Bd. 23 (1907), S. 163–168. (Sitzung v. 27. Jan. 1907.)

67. Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten. (Mit 2 Figuren im Text.) [Jan. 1906.] Math. Ann. Bd. 63 (1907), S. 222–238.

67'. Sulla corrispondenza biunivoca fra due multiplicità (traduzione dal tedesco di A. Capelli). [Übersetzung von Nr. 67.] Giornale di Matem. di Battaglini, Bd. 45 ((3), Bd. 14) (1908). 19 S..

68. Bemerkungen über die Auflösung der trinomischen Gleichungen. 1. Dez. 1908. Rendic. del Circ. Mat. di Palermo, Bd. 27 (1909), S. 393–401. (Sitz. v. 13. Dez. 1908.)

69. Eine Bemerkung zum Michelsonschen Versuch., 12. Juni 1909. Sitzungs-Ber. der math.-phys. Kl. der k. bayer. Akad. der Wiss., Jahrg. 1909, 7. Abhandlung. 10 S.

69'. Nachtrag zu meiner Note: „Eine Bemerkung zum Michelsonschen Versuch“. Ibid. 1909, 1 S.

70. Julius Weingarten. (Traduzione di un discorso pronunciato ai suoi funerali.) [Mit einem Verzeichnis der Schriften Weingartens,] Friburgo i. B., 18 Giugno 1910. Bollettino di bibl. e storia delle se. mat., t.-12, fasc. 3 (1910), S. 65–70.

Dazu treten: Lebensläufe von 17 im Großherzogtum Baden tätig gewesenen Mathematikern und Physikern, kompilatorisch und meist ganz kurz gehalten, etwas längere von A. Clebsch, O. Hesse, L. Oettinger, F. Schweins, K. A. Holtzmann usw., in Badische Biographien, herausg. von F. v. Weech, Bd. 1 (Heidelberg 1875). Ferner *Besprechungen* von eigenen Arbeiten (Nr. 24, 26, 28 dieses Verzeichnisses): im Repertorium der lit. Arbeiten aus dem Gebiete der r. u. a. Math. Bde. 1 und 2 (1876–1879); von fremden Arbeiten: in dem Jahrb. f. die Fortschritte der Math., Bde. 6–9 (für die Jahrg. 1874–1877); in der Hist.-Lit. Abt. der Ztschr. für Math. u. Phys., Bde. 28 ff.; in der Vierteljahrsschrift der Astron. Gesellschaft, und 23; in der Zeitschr. für Vermessungswesen.