Universitätsbibliothek
Heidelberg

Versammlung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 1894 in Wien

Riemann und seine Bedeutung für die Entwickelung der modernen Mathematik.

Vortrag gehalten in der öffentlichen Sitzung
am Mittwoch, den 26. September 1894

von

Felix Klein

Neu herausgegegeben von **Gabriele Dörflinger**,
Universitätsbibliothek Heidelberg, 2010.

Heidelberger Texte zur Mathematikgeschichte

Georg Friedrich **Bernhard Riemann**
geb. 17. September 1826 in Breselenz
gest. 20. Juli 1866 in Selasca

Felix Christian **Klein**
geb. 25. April 1849 in Düsseldorf
gest. 22. Juni 1925 in Göttingen

Der Aufsatz erschien in
Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung. – 4.1894/95 (1897), S. 71–87

Hochgeehrte Anwesende!

Es hat gewiss seine ganz besondere Schwierigkeit, über mathematische Dinge, oder auch nur über allgemeine Verhältnisse und Beziehungen innerhalb der Mathematik vor einem grösseren Publicum zu sprechen. Diese Schwierigkeit resultirt daraus, dass die Begriffe, mit denen wir uns beschäftigen und deren inneren Zusammenhang wir erforschen, selbst erst das Product fortgesetzter mathematischer Gedankenarbeit sind, dass sie dem gewöhnlichen Leben fern liegen.

Trotzdem habe ich nicht angestanden, der ehrenvollen Aufforderung zu entsprechen, welche der Vorstand Ihrer Gesellschaft neuerdings an mich richtete, und den heutigen ersten Vortrag zu übernehmen.

Ich hatte das Beispiel des nun vollendeten grossen Forschers vor Augen, welcher ursprünglich als Redner in Aussicht genommen war. Es ist zweifellos ein grosses Verdienst von *Hermann v. Helmholtz*, dass er von Beginn seiner Laufbahn bemüht gewesen ist, die Probleme und Resultate der wissenschaftlichen Arbeit auf allen den vielen von ihm berührten Gebieten in allgemein verständlichen Vorträgen dem Kreise der weiteren Fachgenossen vorzulegen; er hat dadurch jeden einzelnen von uns auf dessen eigenem Gebiete gefördert. Wenn es von vorn herein unmöglich scheint, ein Gleiches im Hinblick auf reine Mathematik zu leisten, so drängen dafür die inneren Verhältnisse meines Faches immer zwingender daraufhin, zu versuchen, was sich erreichen lassen möchte. Ich spreche hier nicht als einzelner, ich spreche im Namen der sämtlichen Mitglieder der *mathematischen Vereinigung*, welche sich im Anschlusse an die Gesellschaft der Naturforscher und Aerzte vor einigen Jahren gebildet hat, und die, wenn nicht formal, so doch thatsächlich mit ihrer ersten Section identisch ist. Wir empfinden, dass unter dem Einflusse der modernen Entwickelung unsere fortschreitende Wissenschaft je länger je mehr Gefahr läuft, sich zu isoliren. Die enge Beziehung zwischen Mathematik und theoretischer Naturwissenschaft, wie sie zum Segen beider Gebiete seit dem Emporkommen der modernen Analysis bestand, droht zu zerreissen. Hier liegt eine grosse, täglich wachsende Gefahr. Dem wollen wir Mitglieder der mathematischen Vereinigung nach Kräften entgegenwirken. In diesem Sinne war es, dass wir uns an die Naturforscherversammlung angeschlossen haben. Wir wünschen von Ihnen im persönlichen Verkehre zu lernen, wie sich der wissenschaftliche Gedanke in Ihren Disciplinen entwickelt, und wo dem entsprechend der Ansatzpunkt für das Eingreifen des Mathematikers gegeben sein mag. Wir wünschen umgekehrt, von Ihrer Seite für unsere Auffassungen und Bestrebungen einiges Interesse und Verständnis zu finden. In diesem Sinne stehe ich vor Ihnen und versuche, von der Bedeutung desjenigen Forschers ein Bild zu entwerfen, der wie kein anderer für die Entwickelung der modernen Mathematik bestimmend gewesen ist, von *Bernhard Riemann*. Dabei hoffe ich, jedenfalls denjenigen unter Ihnen einiges bieten zu können, denen die Ideengänge der Mechanik und theoretischen Physik geläufig sind. Sie Alle aber müssen fühlen, dass hier Verbindungspunkte mit dem naturwissenschaftlichen Denken vorliegen.

Der äussere Lebensgang von *Riemann* wird vielleicht Ihre Teilnahme, aber kaum ihr besonderes Interesse erregen. *Riemann* ist einer der stillen Gelehrten gewesen, welche ihre tiefen Gedanken langsam in sich ausreifen lassen. Als er 1851 in Göttingen mit einer allerdings sehr hervorragenden Dissertation promovirte, war er 25 Jahre alt; es dauerte weitere drei Jahre, bis er sich ebenda habilitirte. Um diese Zeit entstehen in rascher Aufeinanderfolge alle die bedeutenden Arbeiten, von denen ich zu berichten habe. *Riemann* ist 1859 nach dem Tode von *Dirichlet* dessen Nachfolger an der Göttinger Universität geworden, aber schon 1863 begann die unheilvolle Krankheit, der er 1866 zum Opfer gefallen ist, im Alter von nur 40 Jahren. Seine gesammelten Werke, welche zuerst 1876 von *Heinrich Weber* und *Dedekind* herausgegeben sind (und die bereits in zweiter Auflage vorliegen), sind nicht etwa besonders umfangreich; sie füllen einen Octavband von ca. 550 Seiten, darunter nur etwa die Hälfte Arbeiten, die zu *Riemann*'s Lebzeiten veröffentlicht worden sind. Die grosse Wirkung, welche von *Riemann* ausgegangen ist und fortwährend ausgeht, ist einzig eine Folge der *Eigenartigkeit* und selbstverständlich der *eindringenden Kraft* seiner mathematischen Betrachtungen.

Entzieht sich die letztere der heutigen Darlegung, so meine ich die Eigenart der *Riemann*'schen Mathematik Ihnen allerdings vorweg erklären zu können, indem ich den einheitlichen Grundgedanken bezeichne, von dem aus alle seine Entwickelungen entspringen. Ich darf vorweg erwähnen, dass *Riemann* sich viel und eingehend mit physikalischen Betrachtungen beschäftigt hat. Aufgewachsen in der grossen Tradition, die durch die Vereinigung der Namen *Gauss* und *Wilhelm Weber* bezeichnet ist, beeinflusst andererseits von der *Herbart*'schen Philosophie, hat er immer wieder daran gearbeitet, in mathematischer Form eine einheitliche Formulirung der sämtlichen Naturerscheinungen zu Grunde liegenden Gesetze zu finden. Diese Untersuchungen sind, wie es scheint, niemals zu einem bestimmten Abschlusse gekommen und liegen uns in *Riemann*'s Nachlass nur ganz bruchstückweise vor. Es handelt sich um verschiedene Ansätze, denen nur dies eine gemeinsam ist, was heute unter der Herrschaft von *Maxwell*'s elektro-magnetischer Lichttheorie die allgemeine Grundanschauung wenigstens der jüngeren Physiker sein dürfte, die Annahme nämlich, dass der Raum von einer continuirlich ausgebreiteten Flüssigkeit erfüllt ist, welche gleichzeitig der Träger der optischen, wie der elektrischen und der Gravitationserscheinungen ist. Ich verweile nicht bei den Einzelheiten, umsomehr, als dieselben heute nur noch historisches Interesse besitzen dürften. Was ich betonen will, ist dies, *dass eben hier die Quelle von* Riemann*'s rein mathematischen Entwickelungen liegt.* Was in der Physik die Verbannung der Fernwirkungen, die Erklärung der Erscheinungen durch die inneren Kräfte eines raumerfüllenden Aethers ist, das ist in der Mathematik das Verständnis der Functionen *aus ihrem Verhalten im Unendlich-Kleinen*, insbesondere also *aus den Differentialgleichungen*, denen sie genügen. Und wie im übrigen die einzelne Erscheinung im Gebiete der Physik von der allgemeinen Anordnung der Versuchsbedingungen abhängt, so individualisirt *Riemann* seine Functionen durch die *besonderen Grenzbedingungen*, die er ihnen auferlegt. Die Formel, deren man zur rechnerischen Beherrschung der Function bedarf, erscheint hier als Schlussresultat der Betrachtungen, nicht als Ausgangspunkt. Wenn ich wagen darf, die Analogie so scharf zu betonen, so werde ich sagen, *dass* Riemann *im Gebiete der Mathematik* *und* Faraday *im Gebiete der Physik parallel stehen.* — Diese Bemerkung bezieht sich zunächst auf den *qualitativen Inhalt* der beiderseitigen Gedankengänge; ich meine aber, dass auch die *Wichtigkeit* der von den beiden Forschern erreichten Resultate, gemessen an den Bedingungen der einzelnen Wissenschaft, vergleichbar sei.

Indem ich mich jetzt dazu wende, an der Hand der hiermit gegebenen Auffassung mit Ihnen die einzelnen Hauptgebiete von *Riemann*'s mathematischen Untersuchungen zu durchwandern, habe ich selbstverständlich mit derjenigen Disciplin zu beginnen, welche am innigsten mit seinem Namen verbunden erscheint, wenn er sie selbst auch nur als einen Beleg für sehr viel weiter ausgreifende, umfassende Tendenzen betrachten mochte: — mit der *Functionentheorie complexer Variabler.*

Der fundamentale Ansatz dieser Theorie ist wohlbekannt; bei Untersuchung der Functionen einer Variablen z substituirt man für diese Variable eine zweiteilige Grosse $x + iy$, mit der so gerechnet wird, dass man für i^2 allemal -1 einträgt. Der Erfolg ist, dass die Eigenschaften der Functionen einfacher Variabler, die wir gewöhnlich betrachten, in sehr viel höherem Maasse verständlich werden, als ohne eine solche Maassnahme. Um die eigenen Worte *Riemann*'s aus seiner Dissertation von 1851 zu gebrauchen (in welcher er die Grundlinien für die ihm eigentümliche Behandlungsweise unserer Theorie gezogen hat): *es tritt beim Uebergange zu complexen Werten eine sonst versteckt bleibende Harmonie und Regelmässigkeit hervor.*

Der Begründer dieser Theorie ist der grosse französische Mathematiker Cauchy[1]; aber erst in Deutschland hat dieselbe ihr modernes Gepräge erhalten, durch welches sie, so zu sagen, in den Mittelpunkt unserer mathematischen Ueberzeugungen gerückt wird. Das ist der Erfolg der gleichzeitigen Bestrebungen der beiden Forscher, die wir noch wiederholt neben einander zu nennen haben, nämlich von *Riemann* und andererseits von *Weierstrass.*

Auf dasselbe Ziel gerichtet, sind die Methoden dieser beiden Mathematiker im einzelnen so verschieden wie möglich; sie scheinen sich fast zu widerstreiten, was, von einem höherem Standpunkte gesehen, selbstverständlich dahin führt, dass sie einander ergänzen.

Weierstrass definirt die Functionen einer complexen Veränderlichen analytisch durch eine gemeinsame Formel, nämlich die unendlichen Potenzreihen; er vermeidet auch weiterhin nach Möglichkeit geometrische Hülfsmittel und sucht seine specifische Leistung in der durchgebildeten Schärfe der Beweisführung.

Riemann dagegen beginnt — dem allgemeinen Ansätze entsprechend, den ich vorhin bezeichnete, — mit gewissen Differentialgleichungen, denen die Functionen von $x + iy$ genügen. Es nimmt das hier unmittelbar physikalische Form an. Man setze $f(x+iy) = u+iv$. Dann erscheint vermöge der genannten Differentialgleichungen der einzelne Bestandteil, u wie v, als ein *Potential* in dem Raume der zwei Veränder-

[1] Ich sehe bei der Darstellung des Textes von *Gauss* ab, der, hier wie in anderen Gebieten seiner Zeit vorauseilend, zahlreiche Entdeckungen anticipirt hat, ohne hierüber irgend etwas an die Oeffentlichkeit zu bringen. Es ist besonders merkwürdig, dass man bei *Gauss* functionentheoretische Ansätze findet, die ganz in der Richtung der späteren *Riemann*'schen Methoden liegen, als habe in unbewusster Form von dem älteren Forscher auf den jüngeren eine Uebertragung leitender Ideen stattgefunden.

lichen x und y, und man kann *Riemann*'s Entwickelungen kurzweg dahin bezeichnen, *dass er auf diese einzelnen Bestandteile die Grundsätze der Potentialtheorie zur Geltung bringt.* Sein Ausgangspunkt liegt hiernach auf dem Gebiete der mathematischen Physik. Sie sehen, dass auch innerhalb der Mathematik der Individualität ein breiter Spielraum bleibt.

Wollen Sie übrigens bemerken, dass die Potentialtheorie, welche nach ihrer Unentbehrlichkeit in der Elektricitätslehre und anderen Capiteln der Physik heutzutage ein allgemein gekanntes und benutztes Instrument ist, damals noch jung war. Allerdings hat *Green* bereits 1828 seine grundlegende Abhandlung geschrieben, aber diese ist lange unbeachtet geblieben. Dann folgt *Gauss* 1839. Die Weiterverbreitung und Entwickelung der hier gegebenen Grundsätze ist, soweit Deutschland in Betracht kommt, wesentlich das Verdienst der Vorlesungen von *Dirichlet*, und an diese knüpft *Riemann* unmittelbar an.

Als specifische Leistung von *Riemann* erscheint in diesem Zusammenhange zunächst selbstverständlich die Tendenz, der Potentialtheorie eine grundlegende Bedeutung für die ganze Mathematik zu geben, weiter aber eine Reihe *geometrischer Constructionen*, oder, wie ich lieber sage, *geometrischer Erfindungen*, über die Sie mir ein paar Worte gestatten wollen.

Ein erster Schritt ist, dass *Riemann* die Gleichung $u+iv = f(x+iy)$ durchweg als eine Abbildung der Ebene x, y auf eine Ebene u, v auffasst. Diese Abbildung erweist sich als conform, das heisst winkeltreu, und kann geradezu durch diese Eigenschaft charakterisirt werden. Wir haben so ein neues Hülfsmittel zur Definition der Functionen von $x + iy$. *Riemann* entwickelt in dieser Hinsicht den glänzenden Satz, dass es immer eine Function f giebt, welche ein beliebiges, einfach zusammenhängendes Gebiet der xy-Ebene auf ein beliebig gegebenes, einfach zusammenhängendes Gebiet der uv-Ebene überträgt; diese Function ist bis auf drei Constante, die willkürlich bleiben, völlig bestimmt.

Hierüber hinaus aber begründet er die Vorstellung der *Riemann*'schen *Fläche* (wie wir es heute ausdrücken), das heisst einer Fläche, welche sich mehrblättrig über der Ebene ausbreitet, und deren Blätter in sogenannten Windungspunkten zusammenhängen. Dies ist ohne Zweifel der schwierigste, aber auch der erfolgreichste Schritt gewesen. Wir sehen noch täglich, wie hart es dem Neuling ankommt, das Wesen der *Riemann*'schen Fläche zu begreifen, und wie er auf einmal die ganze Theorie besitzt, wenn er diese fundamentale Vorstellungsweise erfasst hat. Die *Riemann*'sche Fläche bietet das Mittel, um die mehrwertigen Functionen von $x+iy$ in ihrem Verlaufe zu verstehen. Denn auf ihr existiren ebensolche Potentiale, wie auf der schlichten Ebene, deren Gesetzmässigkeiten mit denselben Mitteln erforscht werden können; nicht minder bleibt die Methode der conformen Abbildung hier in Geltung. Einen ersten Haupteinteilungsgrund giebt dabei die Zusammenhangszahl der Flächen, das heisst die Zahl der Querschnitte, die man ausführen kann, ohne die Fläche in getrennte Teile zu zerlegen. Auch dies ist eine geometrisch ganz neue Fragestellung, die vor *Riemann* trotz ihres elementaren Charakters von niemand berührt worden war.

Vielleicht bin ich mit diesen Ausführungen bereits zu sehr ins einzelne gegangen. Um so lieber will ich gleich hinzufügen, dass alle diese Hülfsmittel, welche *Riemann* von der physikalischen Anschauung aus für die Zwecke der reinen Mathematik geschaffen hat, rückwärts für die mathematische Physik die grösste Bedeutung gewonnen haben. Ueberall zum Beispiel, wo es sich um *stationäre Strömungen* von Flüssigkeiten in Gebieten von zwei Dimensionen handelt, kommen die *Riemann*'schen Ansätze jetzt allgemein zur Verwendung. Hierdurch ist eine Reihe der interessantesten Aufgaben, die früher unlösbar schienen, erledigt worden. Sehr bekannt ist in dieser Hinsicht *Helmholtz*'s Bestimmung der Gestalt eines freien Flüssigkeitsstrahls. Vielleicht weniger beachtet ist eine andere Art der physikalischen Anwendung, bei welcher die *Riemann*'schen Vorstellungsweisen in besonders reizvoller Combination zur Geltung kommen. Ich meine die Theorie der *Minimalflächen*. *Riemann*'s eigene Untersuchungen hierüber sind erst 1867 nach seinem Tode publicirt worden, ziemlich gleichzeitig mit parallellaufenden Untersuchungen von *Weierstrass* über denselben Gegenstand. Seitdem ist die Fragestellung durch *Schwarz* und andere sehr viel weiter verfolgt worden. Es handelt sich darum, die Gestalt der kleinsten Fläche zu bestimmen, die in einen festen Rahmen eingespannt werden kann, — sagen .wir die Gleichgewichtsfigur einer Flüssigkeitslamelle, die in eine gegebene Contour passt. Da ist das Merkwürdige, dass auf Grund der *Riemann*'schen Ansätze die in der Analysis bekannten Functionen gerade ausreichen, um die einfachsten Fälle zu erledigen.

Diese Anwendungen, die ich heute voranstelle, sind selbstverständlich nur die eine Seite der Sache. Die Hauptbedeutung der functionentheoretischen Methoden, um die es sich handelt, liegt zweifellos nach Seiten der *reinen Mathematik*. Ich muss versuchen, dies genauer zu entwickeln, wie es der Wichtigkeit des Gegenstandes entspricht, ohne doch dabei besondere Vorkenntnisse vorauszusetzen.

Lassen sie mich mit der ganz allgemeinen Frage beginnen, wie es überhaupt mit dem Fortschritt im Gebiete der reinen Mathematik bestellt ist. Die Weiterbildung der reinen Mathematik erscheint dem Fernerstehenden vielleicht als etwas ganz Willkürliches, weil, die Concentration auf einen von Haus aus gegebenen bestimmten Gegenstand wegfällt. Und dennoch giebt es einen Regulator, der in beschränkterem Sinne innerhalb aller anderen Disciplinen wohlbekannt ist — *die historische Continuität: Die reine Mathematik wächst, indem man alte Probleme mit neuen Methoden durchdenkt. In dem Maasse, wie wir die früheren Aufgaben besser verstehen, bieten sich neue von selbst.*

Von dieser Auffassung geleitet, müssen wir zunächst einen Blick auf das functionentheoretische Material werfen, welches *Riemann* zu Beginn seiner Laufbahn entgegentrat. Man hatte gefunden, dass unter den analytischen Functionen einer Variablen, das heisst eben unter den Functionen von $x+iy$, drei Klassen der Beachtung ganz besonders wert sind. Es sind dies zunächst die *algebraischen* Functionen, die durch eine endliche Zahl von Elementaroperationen, das heisst von Additionen, Multiplicationen und Divisionen definirt werden — im Gegensatze zu den transcendenten Functionen, bei deren Festlegung unendliche Reihen der genannten Operationen benötigt werden. Unter den transcendenten Functionen stehen natürlich die Logarithmen und andererseits die trigonometrichen Functionen, also Sinus und Cosinus etc., als die einfachsten voran. Aber die Forschung war über diese bereits fortgeschritten, einerseits zu den *elliptischen* Functionen, die aus der Umkehr der elliptischen Integrale erwachsen, dann zu den anderen Functionen, welche mit der *Gauss'*schen *hypergeometrischen Reihe* zusammenhängen, den Kugelfunctionen, *Bessel'*schen Functionen, Gammafunctionen etc.

Die *Riemann'*sche Leistung kann nun am kürzesten dahin bezeichnet werden, dass er für eine jede dieser drei Functionsklassen ganz neue Resultate und neue Auffassungen gefunden hat, welche bis heute fortschreitend die Quelle nachhaltigster Anregung geblieben sind. Einige wenige Bemerkungen mögen dies mehr im einzelnen vorführen.

Das Studium der *algebraischen Functionen* fällt dem Wesen nach zusammen mit dem Studium der algebraischen *Curven*, deren Eigenschaften die Geometer studiren, mögen sie sich zu den „Analytikern" zählen, welche die Formel voranstellen, oder zu den „synthetischen Geometern" im Sinne *Steiner'*s und *v. Staudt'*s, die mit der Erzeugung der Curven durch Strahlbüschel operiren. Der wesentliche neue Gesichtspunkt, den *Riemann* hier eingeführt hat, ist der Gesichtspunkt der allgemeinen eindeutigen Transformation. Von hier aus erscheinen die vielgestaltigen algebraischen Curven in grosse Kategorien zusammengefasst, und es entsteht, indem man von den Eigentümlichkeiten der einzelnen Curvenform absieht, eine Lehre von den allgemeinen Eigenschaften, die allen zusammengehörigen Curven gemeinsam sind. Die Geometer haben nicht gezögert, die solcherweise entspringenden Resultate von ihrem Standpunkte aus abzuleiten und weiter zu verfolgen, — allen voran *Clebsch*, der gleich auch begann, die entsprechenden Untersuchungen bei mehrdimensionalen algebraischen Gebilden in Angriff zu nehmen. Aber es wird darauf ankommen, dass die Curvengeometrie auch die *Methoden Riemann'*s nach ihrem inneren Gehalte zu assimiliren sucht. Ein erster Schritt dazu ist, dass man an der Curve selbst das Gegenbild für die zweifach ausgedehnte *Riemann'*sche Fläche construirt, was in mannigfacher Weise gelingt. Der weitere Fortschritt müsste sein, dass man auf dem so definirten Gebilde functionentheoretisch operiren lernt.

Die Theorie der *elliptischen Integrale* findet ihre Weiterbildung in der Betrachtung der allgemeinen Integrale algebraischer Functionen, über welche der Norwege *Abel* in den zwanziger Jahren dieses Jahrhunderts die ersten grundlegenden Untersuchungen publicirt hat. Man wird es immer als eine der grössten Leistungen *Jacobi'*s ansehen müssen, dass er durch eine Art von Divination für diese Integrale ein Umkehrproblem aufstellte, welches, ebenso wie im Falle der elliptischen Integrale die directe Umkehr, eindeutige Functionen ergiebt. Die wirkliche Durchführung dieses Umkehrproblems ist die centrale Aufgabe, welche auf verschiedenen Wegen gleichzeitig von *Weierstrass* und *Riemann* gelöst worden ist. Man hat die grosse Abhandlung über die *Abel'*schen Functionen, in welcher *Riemann* 1857 seine Theorie veröffentlichte, unter allen Leistungen seines Genius immer als die glänzendste betrachtet. Denn das Resultat kommt nicht auf mühsamem Wege, sondern durch unmittelbare Betrachtungen hervor, einfach indem *Riemann* in geeigneter Ideenverbindung die geometrischen Hülfsmittel heranzieht, von denen soeben andeutungsweise die Rede war. Ich habe bei einer früheren Gelegenheit gezeigt, dass man seine Resultate, betreffend die Integrale, sowie die daraus folgenden Ergebnisse, betreffend die algebraischen Functionen, in übersichtlichster Weise erhält, indem man stationäre Flüssigkeitsströmungen, sagen wir Strömungen der Elektricität, auf beliebig im Räume gelegenen geschlossenen Flächen betrachtet. Doch betrifft das nur die erste Hälfte der *Riemann*'schen Abhandlung. Die zweite Hälfte, welche sich auf die Thetareihen bezieht, ist vielleicht noch bemerkenswerter. Es ergiebt sich da das merkwürdige Resultat, dass die Thetareihen, deren man zur Erledigung des *Jacobi'*schen Umkehrproblems bedarf, nicht die allgemeinen sind, womit die neue Aufgabe gegeben ist, die Stellung der allgemeinen Theta in dieser Theorie zu bestimmen. Nach einer Notiz von *Hermite* hat *Riemann* bereits den Satz gekannt, der später von *Weierstrass* publicirt und neuerdings von *Picard* und *Poincaré* behandelt wurde, nämlich dass die Thetareihen ausreichen, um die allgemeinsten periodischen Functionen mehrerer Variablen aufzustellen.

Doch ich darf auf diese Einzelfragen nicht zu weit eingehen. Eine zusammenhängende Darstellung der Entwickelung zu geben, welche an *Riemann*'s *Abel'*sche Functionen anschliesst, ist darum misslich, weil die weitgehenden Untersuchungen von *Weierstrass* über denselben Gegenstand immer nur erst aus Vorlesungsheften bekannt sind. Ich werde also auf die Bemerkung beschränken, dass das wichtige Buch von *Clebsch* und *Gordan*, das 1866 erschien, im wesentlichen bezweckte, die *Riemann*'schen Resultate an der algebraischen Curve mit den Hülfsmitteln der analytischen Geometrie zur Ableitung zu bringen. Die *Riemann*'schen Methoden waren damals noch eine Art Arcanum seiner directen Schüler und wurden von den übrigen Mathematikern fast mit Misstrauen betrachtet. Ich kann dem gegenüber nur wiederholen, was soeben bei den Curven bemerkte, dass nämlich die fortschreitende Entwickelung ersichtlich mit Notwendigkeit dahin führt, auch die *Riemann*'schen Methoden dem Allgemeinbesitz der Mathematiker einzufügen. Es ist interessant, in dieser Hinsicht die neusten französischen Lehrbücher zu vergleichen. [2].

Die dritte Functionsklasse, die wir nannten, sollte diejenigen Abhängigkeitsgesetze umfassen, welche sich an die *Gauss'*sche *hypergeometrische Reihe* anschliessen. Es sind dies im weiteren Sinne diejenigen Functionen, die durch lineare Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten definirt werden können. *Riemann* hat hierüber bei seinen Lebzeiten nur eine erste einleitende Arbeit veröffentlicht (1856), welche sich ausschliesslich mit dem hypergeometrischen Falle selbst beschäftigt und in überraschender Weise zeigt, wie alle die früher bekannten merkwürdigen Eigenschaften der hypergeometrischen Function ohne alle Rechnung aus dem Verhalten der Function bei Umkreisung der singulären Punkte abgeleitet werden können. Wir wissen jetzt aus seinem Nachlasse, in welcher Form er sich die entsprechende allgemeine Theorie der linearen Differentialgleichungen $n$ter Ordnung ausgeführt dachte: auch hier sollte die Gruppe der linearen Substitutionen, welche die Lösungen bei Umkreisung der singulären Punkte erleiden, voranstehen und das oberste Merkmal

[2] Vergleiche *Picard*, Traité d'analyse, *Appel* et *Goursat*, Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales.

der Klassification abgeben.

Dieser Ansatz, welcher gewissermaassen der von *Riemann* gegebenen Behandlung der *Abel'*schen Integrale entspricht, ist in der umfassenden von *Riemann* beabsichtigten Weise noch nicht durchgeführt worden; die zahlreichen Untersuchungen über lineare Differentialgleichungen, welche in den letzten Jahrzehnten anderweitig publicirt worden sind, haben im wesentlichen nur erst einzelne Teile der Theorie geordnet. Es sind in dieser Hinsicht insbesondere die Untersuchungen von *Fuchs* zu nennen. Uebrigens ist die Theorie, sofern man sich auf lineare Differentialgleichungen der *zweiten* Ordnung beschränkt, einer einfachen geometrischen Interpretation fähig. Man hat die conforme Abbildung zu betrachten, welche der Quotient zweier Particularlösungen der Differentialgleichung von dem Gebiet der unabhängigen Veränderlichen entwirft. Im einfachsten Falle der hypergeometrischen Function erhält man hier die Abbildung einer Halbebene auf ein Kreisbogendreieck und damit einen merkwürdigen Uebergang zur sphärischen Trigonometrie. Allgemein giebt es Fälle, welche eindeutige Umkehr gestatten und damit zu jenen bemerkenswerten Functionen einer Variablen Anlass geben, die gleich den periodischen Functionen durch unendlich viele lineare Transformationen in sich übergehen, und die ich dem entsprechend als *automorphe Functionen* bezeichne. Alle diese Entwickelungen, welche die Functionentheoretiker der Neuzeit beschäftigen; treten mehr oder minder explicite bereits in den hinterlassenen Papieren *Riemann*'s auf, insbesondere in der Arbeit über die Minimalflächen, von welcher oben die Rede war. Ich verweise übrigens auf *Schwarz'* Abhandlung über die hypergeometrische Reihe und auf die bahnbrechenden Untersuchungen von *Poincaré* zur Theorie der automorphen Functionen. Hier rubriciren auch die Untersuchungen über die elliptischen Modulfunctionen und die Functionen der regulären Körper.

Ich darf die Besprechung von *Riemann*'s functionentheoretischen Arbeiten nicht schliessen, ohne einer isolirt stehenden Abhandlung zu gedenken, in welcher derselbe interessante Beiträge zur Theorie der bestimmten Integrale giebt, die aber zumal durch die Anwendung, welche *Riemann* auf ein zahlentheoretisches Problem macht, berühmt geworden ist. Es handelt sich um das *Gesetz der Verteilung der Primzahlen* innerhalb der natürlichen Zahlenreihe. *Riemann* giebt für dasselbe Annäherungsausdrücke, welche sich wesentlich näher an die Ergebnisse der empirischen Abzählungen anschliessen, als die bis dahin aus diesen Abzählungen inductiv abgeleiteten Regeln. Zwei Bemerkungen sind es, die sich hier aufdrängen. Erstlich wollen Sie beachten, wie merkwürdig die einzelnen Teile der höheren Mathematik zusammenhängen, indem hier ein Problem, welches in die Elemente der Zahlenlehre zu gehören scheint, aus den Entwickelungen der feinsten functionentheoretischen Fragen eine ungeahnte Förderung erfährt. Zweitens aber habe ich hervorzuheben, dass die Beweise der *Riemann*'schen Abhandlung, wie er übrigens selbst bemerkt, nicht ganz vollständig sind, und dass dieselben trotz zahlreicher Bemühungen der neusten Zeit noch nicht lückenlos haben hergestellt werden können. *Riemann* muss vielfach mit der Intuition gearbeitet haben. Es gilt dies auch, wie ich nicht verfehlen darf, nachträglich anzugeben, für seine Grundlegung der Functionentheorie selbst. *Riemann* verwendet dort eine in der mathematischen Physik oft gebrauchte Schlussweise, die er seinem Lehrer *Dirichlet* zu Ehren als *Dirichlet'*sches *Princip* bezeichnet. Es handelt sich darum, eine stetige Function zu bestimmen, welche ein gewisses Doppelintegral zu einem Minimum macht, und hier behauptet nun das genannte Princip, dass die *Existenz* einer solchen Function aus der Fragestellung selbst evident sei[3]. *Weierstrass* hat gezeigt, dass hier ein Fehlschluss vorliegt; es könnte sein, dass das Minimum, welches wir suchen, nur eine Grenze bezeichnet, welche man innerhalb des Gebietes der stetigen Functionen nicht erreichen kann. Hiermit wird ein grosser Teil der *Riemann'*schen Entwickelungen hinfällig. Trotzdem aber sind die weitreichenden Resultate, welche *Riemann* auf das genannte Princip stützt, alle richtig, wie dies *Carl Neumann* und *Schwarz* durch strenge Methoden später ausführlich gezeigt haben. Man muss sich wohl die Idee bilden, dass *Riemann* die Theoreme selbst ursprünglich der physikalischen Anschauung entnommen hat, die sich hier wieder einmal als heuristisches Princip bewährte, und nur hinterher auf die genannte Schlussweise bezog, um einen in sich geschlossenen mathematischen Gedankengang zu haben. Hierbei hat er, wie längere Entwickelungen seiner Dissertation zeigen, gewisse Schwierigkeiten sehr wohl gefühlt, aber im Hinblicke darauf, dass er die Schlussweise in analogen Fällen von seiner Umgebung, selbst von *Gauss*, anstandslos angenommen sah, nicht so weit verfolgt, als erforderlich gewesen wäre.

So viel über die Functionen complexer Variabler. Sie repräsentiren das einzige Gebiet, welches *Riemann* im Zusammenhange bearbeitet hat; alles andere sind Einzeluntersuchungen. Aber man würde doch ein sehr unzureichendes Bild von dem Mathematiker *Riemann* erhalten, wenn man darum diese anderen Arbeiten zur Seite schieben wollte. Denn abgesehen von den sehr bemerkenswerten Resultaten, welche er in denselben gewinnt, lassen sie erst die allgemeine Auffassung hervortreten, die ihn beherrschte, und das Arbeitsprogramm, welches er auszuführen dachte. Auch hat eine jede dieser Untersuchungen in hervorragendem Maasse anregend und bestimmend auf die Weiterentwickelung der Wissenschaft eingewirkt, wie ich sofort des näheren ausführen werde.

Sagen wir es vor allen Dingen, was wir schon oben andeuteten, dass die von *Riemann* gegebene Behandlung der Functionentheorie complexer Variabler, welche von der partiellen Differentialgleichung des Potentials beginnt, nach seiner Auffassung nur ein *Beispiel* für eine analoge Behandlung aller anderen physikalischen Probleme sein sollte, die auf partielle Differentialgleichungen — oder überhaupt auf Differentialgleichungen — führen; allemal soll gefragt werden, welches die mit den Differentialgleichungen verträglichen Unstetigkeiten sind, und wie weit die Lösungen durch die bei ihnen hervortretenden Unstetigkeiten und zutretende Nebenbedingungen bestimmt sein mögen. Die Durchführung dieses Programms, welches seitdem von verschiedenen Seiten wesentlich gefördert ist und in den letzten Jahren mit beson-

[3]Ich verstehe hier also unter dem „Princip“ entgegen einem vielfach verbreiteten Sprachgebrauche die Schlussweise, nicht die daraus abgeleiteten Resultate. Bei der Gelegenheit möchte ich auf einen Aufsatz von *W. Thomson* aufmerksam machen, der in *Liouville'*s Journal, Bd. XII, 1847 abgedruckt ist und von den deutschen Mathematikern zu wenig beachtet zu sein scheint. Das fragliche Princip ist dort in grosser Allgemeinheit ausgesprochen.

derem Erfolge von den französischen Geometern aufgenommen wurde, kommt auf nichts Geringeres als eine *systematische Neubegründung der Integrationsmethoden der Mechanik und mathematischen Physik* hinaus. *Riemann* hat selbst in dieser Hinsicht nur ein einzelnes Problem eingehender behandelt. Es geschieht dies in der Abhandlung über die *Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite*, 1860. Man muss bei den linearen partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik zwei Haupttypen unterscheiden: den elliptischen und den hyperbolischen Typus, für welche beziehungsweise die Differentialgleichung des Potentials und die Differentialgleichung der schwingenden Saite die einfachsten Beispiele bilden; ihnen tritt als ein Uebergangsfall der parabolische Typus zur Seite, unter den die Differentialgleichung der Wärmeleitung rubricirt. Neuere Untersuchungen von *Picard* haben gezeigt, dass man die Integrationsmethoden der Potentialtheorie ziemlich ungeändert auf die elliptischen Differentialgleichungen überhaupt übertragen kann. Aber wie ist es bei den anderen Typen? In dieser Hinsicht giebt *Riemann*'s Arbeit einen ersten wichtigen Beitrag. *Riemann* zeigt, welche merkwürdigen Modifikationen an der aus der Potentialtheorie bekannten Randwertaufgabe und ihrer Lösung durch die *Green*'sche Function angebracht werden müssen, damit die Entwickelung für die hyperbolischen Differentialgleichungen gültig bleibe. Aber auch nach anderer Seite ist die *Riemann*'sche Abhandlung besonders bemerkenswert. Schon die Reduction des in der Ueberschrift genannten Problems auf eine lineare Differentialgleichung ist eine besondere Leistung. Und daneben zieht sich durch die Abhandlung eine Betrachtungsweise, die dem Physiker allerdings kaum überraschend sein wird: *die graphische Behandung des Problems*. Ich möchte hierauf ganz besonders aufmerksam machen. Denn die in Rede stehende Methode wird seitens der an abstractere Ueberlegungen gewöhnten Mathematiker heutzutage vielfach erschätzt. Um so erfreulicher ist es, dass eine mathematische Autorität wie *Riemann* deren Gebrauch an geeigneter Stelle vertritt und aus ihr die merkwürdigsten Folgerungen zu ziehen weiss.

Es bleiben nun noch die beiden grossen Entwürfe zu besprechen, welche *Riemann* 1854, im Alter von 28 Jahren, bei seiner Habilitation vorgelegt hat: der Aufsatz *über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*, und die Schrift *über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe*. Es ist merkwürdig, wie verschieden diese beiden Arbeiten bisher von dem allgemeineren wissenschaftlichen Publicum gewertet worden sind: Die Hypothesen der Geometrie haben seit lange die ihnen gebührende allgemeine Beachtung gefunden, hauptsächlich jedenfalls durch das Eintreten von *Helmholtz*, wie viele von Ihnen wissen; die Untersuchung über die trigonometrische Reihe aber ist bislang nur im engeren Kreise der Mathematiker bekannt. Dies hindert nicht, dass die Resultate, welche sie enthält, oder, ich will lieber sagen, die Betrachtungen, zu denen sie Anlass gegeben hat, oder mit denen sie im Zusammenhange steht, vom allgemeinen erkenntnistheoretischen Standpunkte aus das höchste Interesse beanspruchen.

Was die *Hypothesen der Geometrie* angeht, so werde ich hier mich nicht weiter über die philosophische Bedeutung der Sache verbreiten, über die ich nichts Neues zu sagen habe. Es handelt sich bei dieser Discussion für den Mathematiker weniger um den Ursprung der geometrischen Axiome, als um deren gegenseitige logische Abhängigkeit. Die berühmteste Frage ist jedenfalls die nach der Stellung des Parallelenaxioms. Die Untersuchungen von *Gauss*, *Lobatschefskij* und *Bolyai* (um nur die hervorragendsten Namen zu nennen) haben bekanntlich gezeigt, dass das Parallelenaxiom gewiss keine Folge der übrigen Axiome ist, dass man eine allgemeine, in sich consequente Geometrie aufbauen kann, welche die gewöhnliche Geometrie als Specialfall enthält, indem man vom Parallelenaxiom absieht. Diesen wichtigen Betrachtungen hat *Riemann* dadurch eine neue und specifische Wendung gegeben, dass er die Ideenbildungen der *analytischen* Geometrie voranstellt: der Raum erscheint ihm als ein besonderer Fall einer dreifach ausgedehnten Zahlenmannigfaltigkeit, in welcher sich das Quadrat des Bogenelementes durch eine quadratische Form der Differentiale der Coordinaten ausdrückt. Die speciellen geometrischen Resultate, welche er von hier aus gewinnt, werde ich nicht weiter besprechen und noch weniger auf die Weiterentwickelung eingehen, welche die Theorie in der Zwischenzeit von anderer Seite gefunden hat. Das Wesentliche in dem vorliegenden Zusammenhange ist, dass *Riemann* auch hier seinem Grundgedanken treu geblieben ist: *die Eigenschaften der Dinge aus ihrem Verhalten im Unendlichkleinen zu verstehen.* Er hat dabei den Grund zu einem neuen Capitel der Differentialrechnung gelegt: *zur Lehre von den quadratischen Differentialausdrücken beliebiger Variabler*, beziehungsweise von den *Invarianten*, welche diese Differentialausdrücke gegenüber beliebigen Transformationen der Variabeln besitzen. Ich will hier, in Ergänzung der sonstigen Betrachtungen meines Vertrages, einmal diese abstracte Seite der Sache hervorheben. Gewiss ist es bei der *Auffindung* mathematischer Beziehungen nicht gleichgültig, ob man den Symbolen, mit welchen man operirt, eine bestimmte Bedeutung beilegt oder nicht, indem sich gerade aus der concreten Auffassung diejenigen Gedankenverbindungen ergeben, welche weiterführen. Beleg hierfür ist so ziemlich alles, was wir bisher über die innere Verwandtschaft der *Riemann*'schen Mathematik und der mathematischen Physik sagten. Aber unabhängig davon steht das schliessliche Resultat der mathematischen Untersuchungen oberhalb aller derartiger specieller Ansätze; es ist ein allgemeines logisches Schema, dessen besonderer Inhalt gleichgültig bleibt und je nachdem in verschiedener Weise gewählt werden kann. Von diesem Standpunkte aus hat es nichts Ueberraschendes, dass *Riemann* später (1861) in einer der Pariser Akademie eingereichten Preisaufgabe von seiner Untersuchung über die Differentialausdrücke eine Anwendung auf ein Problem der Wärmeleitung macht, also auf einen Gegenstand, der mit den Hypothesen der Geometrie gewiss nichts zu thun hat. In demselben Sinne schliessen sich hier moderne Untersuchungen über die Aequivalenz und Klassification der allgemeinen mechanischen Probleme an. In der That kann man die Differentialgleichungen der Mechanik nach *Lagrange* und *Jacobi* in der Weise darstellen, dass sie von einer einzigen quadratischen Form der Differentiale der Coordinaten abhängen.

Ich komme nun zu der Arbeit *über die trigonometrische Reihe*, die ich mit Vorbedacht an das Ende gesetzt habe, weil sie einen letzten wesentlichen Charakter der *Riemann*'schen Auffassung hervortreten lässt. Bei meiner bisherigen Darstellung konnte ich allemal kurzweg an die geläufigen Vorstellungsweisen der Physik oder doch der Geometrie anknüpfen. Aber der eindringende Geist *Riemann*'s hat sich nicht damit begnügt, die geometrisch-physikalische Anschauung zu benutzen; er ist dazu übergegangen, dieselbe zu kritisiren und nach der Notwendigkeit der aus ihr fliessenden mathematischen Beziehungen zu fragen. Es handelt sich, kurz gesagt, um die *Principien der Infinitesimalrechnung. Riemann* hat in seinen sonstigen Arbeiten zu den in dieser Richtung vorliegenden Problemen immer nur beiläufig oder versteckt Stellung genommen. Anders in der Arbeit über die trigonometrische Reihe. Er behandelt ja da leider nur einzelne Probleme: die Frage, ob eine Function in jedem Punkte unstetig sein könne, und ob bei Functionen von so allgemeiner Beschaffenheit unter Umständen noch von einer Integration möchte gesprochen werden können. Aber diese Probleme behandelt er in so überzeugender Weise, dass von hier aus die Untersuchungen anderer über die Grundlagen der Analysis den mächtigsten Impuls erhalten haben. Die Tradition berichtet, dass *Riemann* in späteren Jahren seinen Schülern denjenigen Punkt bezeichnete, der als das merkwürdigste Ergebnis der modernen Kritik dasteht: die Existenz stetiger Functionen, die an keiner Stelle differentiirbar sind. Ausführlicheres über derartige „unvernünftige“ Functionen (wie man lange sagte) ist dann freilich erst durch *Weierstrass* bekannt geworden, der überhaupt wohl das Meiste dazu beigetragen hat, um die *Theorie reeller Functionen reeller Variabler* (wie man das ganze hier vorliegende Gebiet zu nennen pflegt) in seine heutige strenge Gestalt zu bringen. Ich verstehe die *Riemann*'schen Entwickelungen über die trigonometrische Reihe so, dass er mit der *Weierstrass*'schen Darlegungsweise, welche in den hier vorliegenden Fragen die räumliche Anschauung verbannt und ausschliesslich mit arithmetischen Definitionen operirt, was die Grundlegung angeht, einverstanden sein würde. Aber ich kann mir nicht denken, dass *Riemann* darum in seinem Herzen die räumliche Anschauung, wie es jetzt wohl von übereifrigen Vertretern der modernen Richtung geschieht, als etwas der Mathematik Widerstreitendes, welches notwendig zu Fehlschlüssen verleiten müsste, angesehen hat. Er muss daran festgehalten haben, dass in der Schwierigkeit, welche hier vorliegt, ein Ausgleich möglich ist.

Wir berühren hier eine Frage, welche für die Weiterentwickelung der Mathematik gerade in der Gegenwart von entscheidender Wichtigkeit sein dürfte: Unsere Studirenden wachsen zur Zeit heran, indem sie gleich anfangs alle die intricaten Verhältnisse kennen lernen, welche die moderne Analysis als möglich aufgedeckt hat. Das ist gewiss gut, aber es hat eine bedenkliche Folgeerscheinung, dass nämlich die jungen Mathematiker sich vielfach scheuen, überhaupt bestimmte Sätze zu formuliren, dass ihnen die Frische fehlt, ohne welche auch in der Wissenschaft kein Erfolg errungen werden kann. Auf der anderen Seite glaubt die Mehrzahl der Praktiker sich den angedeuteten schwierigen Untersuchungen einfach entziehen zu dürfen. Sie lösen sich dadurch von der strengen Wissenschaft ab und entwickeln für ihren Hausgebrauch eine besondere Mathematik, die wie ein Wurzelschössling neben der veredelten Pflanze emporschiesst. Wir werden alles einsetzen wollen, dass die hier vorliegende gefährliche Spaltung überwunden wird. Sei es dem entsprechend gestattet, mit zwei Sätzen meine eigene Stellung in dieser Sache zu präcisiren:

Erstlich glaube ich, dass die von mathematischer Seite gerügten Mängel der räumlichen Anschauung nur temporäre sind, dass man die Anschauung üben kann, so dass man mit ihrer Hülfe die abstracten Entwickelungen der Analytiker jedenfalls in ihrer *Tendenz* versteht.

Ich glaube ferner, dass bei der so geforderten Ausbildung der Anschauuung die Anwendungen der Mathematik auf Gegenstände der Aussenwelt in der Hauptsache ungeändert bestehen bleiben, sofern man sich nur entschliesst, dieselben durchweg als eine Art von *Interpolation* gelten zu lassen, welche die Verhältnisse mit einer den praktischen Anforderungen genügenden, aber doch nur begrenzten Genauigkeit darstellt.

Mit diesen Bemerkungen darf ich meinen Vortrag, der Ihre Geduld schon zu lange in Anspruch genommen hat, schliessen. Sie mögen erkannt haben, dass auch innerhalb der Mathematik kein Stillstand ist, dass eine ähnliche Bewegung herrscht, wie in den Naturwissenschaften. Und auch dieses ist ein allgemeines Gesetz, dass zwar viele zur Entwickelung der Wissenschaft beitragen, dass aber die wirklich neuen Anregungen nur auf wenige hervorragende Forscher zurückgehen. Deren Wirksamkeit ist dann nicht auf die kurze Spanne ihres Lebens beschränkt; sie wirken nach, indem sie allmählich in immer vollerem Maasse verstanden werden. So ist es zweifellos mit *Riemann*. Ich möchte, dass Sie meine heutigen Ausführungen nicht als die Schilderung einer zurückliegenden Zeit ansehen, der wir die Empfindungen der Pietät widmen, sondern als eine Wiedergabe lebendiger Momente, welche die Mathematik der Gegenwart erfüllen.