# Integrale über Hyperflächen im Grundstudium

## Ein gemeinsamer didaktischer Weg zur Gram'schen Determinanten und dem Gauss'schen Integralsatz

**Thomas Lorenz**

**Zusammenfassung** Integrale über differenzierbare Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ und der Gauss'sche Integralsatz spielen im Grundstudium der Analysis eine wichtige Rolle, insbesondere weil sie später häufig benutzt werden. Dieser Artikel macht didaktische Vorschläge mit einer gemeinsamen Grundidee – erst für die Einführung des Integrals über Hyperflächen in $\mathbb{R}^n$ (ohne Rand) und dann für einen Beweis des Gauss'schen Integralsatzes bei glattem Rand.
Dabei soll insbesondere die Gram'sche Determinante als Resultat einer einfachen, aber rigorosen Rechnung auftreten, ohne zuvor mit geometrisch einfachen Spezialfällen (wie Parallelotopen) motiviert worden zu sein. Der Weg ist inspiriert durch den Minkowski-Inhalt, verwendet aber nur Mittel des Analysis-Grundstudiums. Der Beweis des Gauss'schen Integralsatzes beruht auf den beiden Integraldarstellungen in Reynolds' Transporttheorem, die üblicherweise (nur) als Folgerung erwähnt werden.

**Schlüsselwörter** Differenzierbare Hyperflächen im euklidischen Raum · Integral · Gram'sche Determinante · Fluss längs Vektorfelder · Erreichbare Menge

## 1 Einleitung

Genauer betrachtet ist die Einführung des Integrals über differenzierbare Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ eine didaktische Herausforderung. Für Studierende in den ersten Semestern ist es nämlich sehr empfehlenswert, dass die bewusste Wahl einer Definition früh und umfassend erläutert wird. Im speziellen Falle eines Integrals über Untermannigfaltigkeiten droht die sog. Gram'sche Determinante – auf den ersten Blick – als ein eher willkürlicher Faktor zu erscheinen.

Gebräuchliche Lehrbücher (wie z.B. [2], [9], [10], [16]) verweisen meist auf den Spezialfall des Parallelotops bzw. rechtfertigen diese Wahl durch ihre Vorteile bei Kartenwechseln: Sie macht das "Flächenintegral" unabhängig von der verwendeten Karte. Doch dieses Transformationsverhalten lässt die Gram'sche Determinante noch nicht unmittelbar als Notwendigkeit erkennen. Der gängige Weg über Differenzialformen ist zwar mathematisch sehr elegant, gibt allerdings jungen Studierenden wenig direkte Einsichten in dieser Frage. Ältere Studienwerke (wie z.B. [5],[15]) beschränken ihre Überlegungen häufig auf drei Raumdimensionen und profitieren dann von zusätzlichen rechnerischen Hilfsmitteln wie dem Vektorprodukt.

PD Dr. Thomas Lorenz
Universität Heidelberg,
Institut für Angewandte Mathematik
E-Mail: thomas.lorenz @ uni-hd.de
Erstmals Mai 2011, überarbeitet Jan. 2012

Dieser Artikel schlägt zunächst eine Antwort auf die zentrale Frage vor:

*Weshalb wird (ausgerechnet) die* GRAM*'sche Determinante in die übliche Definition des "Flächenintegrals" aufgenommen ?*

Dabei gehen wir davon aus, dass bereits ein Integralbegriff für Funktionen mehrerer Veränderlicher eingeführt und diskutiert worden ist. Konkret wird hier die LEBESGUE'sche Integrationstheorie zugrundegelegt und das zugehörige Integral von $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ als $\int_\Omega f(x)\, d\mathcal{L}^n x$ notiert.

Auf der Suche nach einem Pendant zur partiellen Integration (nämlich dem Integralsatz von GAUSS) besteht das nächste wichtige Ziel in einer entsprechenden Theorie für Hyperflächen des $\mathbb{R}^n$, die sich als $n$-dimensionale Nullmengen erwiesen haben. Anschaulich ausgedrückt steht dahinter das Interesse am "Flächeninhalt" anstelle des zuvor üblichen "Volumens".
Richten wir das Augenmerk auf $m$-dimensionale differenzierbare Untermannigfaltigkeiten des euklidischen Raumes (als Teilmengen), so ist die Definition des Integrals keineswegs neu:

**Definition 1** $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ sei offen, $0 < m < n$, und die stetig differenzierbare Abbildung $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sei eine Immersion, d.h. ihre JACOBI-Matrix $D\varphi(x) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ besitze den Rang $m$ in jedem Punkt $x \in \Omega$. Dann ist $M := \varphi(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$ eine sog. *$m$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ der Klasse $C^1$*, die sich durch eine Karte darstellen lässt (nämlich z.B. $\varphi$).
Das *Integral* einer Funktion $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ über $M$ wird definiert als

$$\int_M f \;\, d\sigma \;\; := \;\; \int_\Omega f\big(\varphi(x)\big) \;\cdot\; g_\varphi(x) \;\, d\mathcal{L}^m x$$

mit der sog. GRAM*'schen Determinanten* $g_\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \sqrt{\det\left(D\varphi(x)^t \cdot D\varphi(x)\right)}$, falls das LEBESGUE-Integral auf der rechten Seite existiert.

Das erste Ziel dieses Artikels ist es, die Wahl dieser GRAM'schen Determinanten zu motivieren, indem eine einfache konkrete Verbindung zum $n$-dimensionalen LEBESGUE-Integral aufgezeigt wird. Dabei soll die GRAM'sche Determinante als Ergebnis einer kurzen und rigorosen Rechnung auftreten – ohne zuvor durch Veranschaulichungen einfacher Körper "nahegelegt" worden zu sein.
Diese Rechnung wird hier für den Spezialfall von Hyperflächen ($m = n-1$) im Detail vorgestellt, denn später werden wir noch den GAUSS'schen Integralsatz genauer betrachten. Eine solche Einschränkung macht den vorgeschlagenen Zugang auch für Service-Veranstaltungen in anderen Fachbereichen (wie Physik) attraktiver. Es erscheint uns als eine Übungsaufgabe für Studierende der Mathematik, die hier ausgeführten Rechnungen auf differenzierbare Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ mit beliebiger Dimension $m < n$ zu übertragen.

Kurz gesagt wird sich das obige Integral über $M$ als Limes von skalierten $n$-dimensionalen LEBESGUE-Integralen über die sog. Tubularumgebung (mit verschwindender "Höhe") erweisen. Für Untermannigfaltigkeiten der Klasse $C^2$ verwendet die zugehörige Rechnung lediglich den Transformationssatz und ist eigentlich (auch) als Übungsaufgabe geeignet.

**Proposition 1**
*$M$ sei eine Hyperfläche (d.h. $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$) der Klasse $C^2$ und lasse sich durch eine einzige Karte $\varphi \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ darstellen: $\varphi(\Omega) = M$. $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ sei eine stetige Funktion mit kompaktem Träger, und $K \subset \mathbb{R}^{n-1}$ sei ein Kompaktum mit $K \subset \Omega$, $M \cap \operatorname{supp} f \subset \varphi(\mathring{K})$.*
*Ferner bezeichne $U_r \subset \mathbb{R}^n$ für $r > 0$ die folgende sog. Tubularumgebung*

$$U_r \overset{\text{Def.}}{=} \left\{ y + \eta \,\middle|\, y \in \varphi(\mathring{K}) \subset M,\ \eta \in N_y M \subset \mathbb{R}^n,\ |\eta| < r \right\} \subset \mathbb{R}^n.$$

*Dann existiert der folgende Grenzwert, und es gilt*

$$\lim_{r \downarrow 0} \left( \frac{1}{2\, r} \cdot \int_{U_r} f(y)\ d\mathcal{L}^n y \right) = \int_{\mathring{K}} f(\varphi(x)) \cdot g_\varphi(x)\ d\mathcal{L}^{n-1} x. \tag{1}$$

Eine direkte Konsequenz dieses Satzes betrifft die Unabhängigkeit von der Karte: Die rechte Seite der Gleichung (1) muss invariant bei Kartenwechseln sein, denn die linke Seite hängt nur von $f$ und den geometrischen Eigenschaften von $M$ (wie den Normalräumen), aber nicht von der Karte $\varphi$ ab. Für diese Schlussfolgerung bedarf es keiner weiterer Matrizenrechnungen, und das ist ein Vorteil dieses Zugangs.

Diese Hinführung zum Flächenintegral über Hyperflächen der Klasse $C^2$ besticht durch ihre Einfachheit. Mathematisch ist diese asymptotische Beziehung zum $n$-dimensionalen LEBESGUE-Integral einer offenen Umgebung streng genommen keine Neuheit, sondern lässt sich als eine Modifikation des sog. $m$-dimensionalen MINKOWSKI-Inhalts von $M$ mit $m := n-1$ verstehen (siehe z.B. [6, Definition 3.2.37]):

$$\mathcal{M}^m(M) := \lim_{r \downarrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(\{\xi \in \mathbb{R}^n \mid \operatorname{dist}(\xi, M) < r\})}{\kappa_{n-m} \cdot r^{n-m}}$$

mit dem LEBESGUE-Maß $\kappa_{n-m} := \mathcal{L}^{n-m}(\mathbb{B}_1)$ der Einheitskugel in $\mathbb{R}^{n-m}$. Im Falle hinreichend glatter Hyperflächen in $\mathbb{R}^n$ ist also der $(n-1)$-dimensionale MINKOWSKI-Inhalt gleich dem Flächenmaß.
Aus didaktischen Gründen werden in Proposition 1 Integrale einer stetigen Funktion mit kompaktem Träger und die Tubularumgebung $U_r$ (statt der “Kugelumgebung” $\{\operatorname{dist}(\cdot, M) < r\}$) betrachtet. Dann sind nämlich keine zusätzlichen Überlegungen erforderlich, wenn der Abschluss von $M$ eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ *mit* Rand sein sollte.

Im anschließenden Abschnitt 2 bildet Proposition 1 den Ausgangspunkt. Diese Grundidee, nämlich das “Flächenintegral” über $M$ als Limes von “Volumenintegralen” darzustellen, lässt sich auf Hyperflächen $M \subset \mathbb{R}^n$ der Klasse $C^1$ erweitern, indem das stetige Normenfeld glatt approximiert wird. Korollar 1 formuliert solch eine Darstellung als doppelten Limes – immer noch für den Fall, dass $M$ durch eine einzige Karte $\varphi \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ dargestellt werden kann. Die Unabhängigkeit des Integrals über $M$ von der Karte $\varphi$ resultiert dabei aus denselben Argumenten wie für die Klasse $C^2$.

Für die Definition von $\displaystyle\int_M f\, d\sigma$ wird letztlich aber das $(n-1)$-dimensionale LEBESGUE-Integral mit GRAM'scher Determinanten, d.h. die rechte Seite von Gleichung (1) in Proposition 1, herangezogen, denn sie verwendet nur Funktionsauswertungen auf $M$. Die linke Seite von Proposition 1 dient eben als “Motivation” im Falle stetiger Integranden, wie es anfangs zu einem Ziel dieses Artikels erklärt wurde.

Der weitere Weg zum Integral über differenzierbare Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ folgt den gewohnten Spuren mit Hilfe der lokal endlichen Zerlegung der Eins. Die Details werden in Abschnitt 2.5 formuliert, um die Darstellung in diesem Artikel vollständig zu machen.
Diesen Zugang in einer Vorlesung zu diskutieren, kostet freilich ein wenig mehr Zeit als nur die gebräuchliche Definition zu präsentieren. Doch der Mehraufwand hält sich in akzeptablen Grenzen und wurde schon in mehreren Vorlesungen vom Autor erprobt (z.B. in "Höherer Analysis", die sich an Bachelor-Studierende der Mathematik und Physik im dritten Fachsemester richtet).

Der zweite Schwerpunkt dieses Artikels liegt auf einem Beweis des Integralsatzes von GAUSS. In Abschnitt 3 wird ein Nachweis über REYNOLDS' Transporttheorem ausgeführt, das häufig als eine Folgerung des GAUSS'schen Integralsatzes in der Literatur zu finden ist. Seine analytische Herangehensweise ähnelt sehr dem vorherigen Zugang zum "Flächenintegral". An die Stelle der (approximierten) Normalkoordinaten tritt dabei ein lokales Koordinatensystem nahe $\partial\Omega$, dass durch den Fluss längs des gegebenen Vektorfeldes induziert wird.

**Proposition 2** *Die nichtleere Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei offen, beschränkt und der topologische Rand $\partial\Omega$ eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ der Klasse $C^1$ mit $\int_{\partial\Omega} d\sigma < \infty$. $\nu_\Omega \in C^0(\partial\Omega, \mathbb{R}^n)$ bezeichne das zugehörige äußere Einheitsnormalenfeld. $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sei ein beschränktes und stetig differenzierbares Vektorfeld.*
*Zu bel. Zeit $t \geq 0$ bezeichne $\vartheta_g(t, \Omega) \subset \mathbb{R}^n$ das Bild des Flusses längs $g$, d.h. die Menge der Punkte $x(t)$ aller Lösungen $x \in C^1([0,t], \mathbb{R}^n)$ von $x' = g(x)$ mit $x(0) \in \Omega$ (Definition 4 in § 3.1).*

*Dann gilt für das LEBESGUE-Maß $\mathcal{J}(t) := \mathcal{L}^n\big(\vartheta_g(t, \Omega)\big)$ :*

(i) *Der einseitige Limes $\frac{d^+}{dt^+}\,\mathcal{J}(0) \;:=\; \lim\limits_{t\downarrow 0} \frac{\mathcal{J}(t)-\mathcal{J}(0)}{t}$ existiert.*

(ii) $\frac{d^+}{dt^+}\,\mathcal{J}(0) \;=\; \displaystyle\int_\Omega \operatorname{div}\, g \; d\mathcal{L}^n y$

(iii) $\frac{d^+}{dt^+}\,\mathcal{J}(0) \;=\; \displaystyle\int_{\partial\Omega} \big\langle g,\, \nu_\Omega \big\rangle \; d\sigma_z$

Kurz gesagt werden also zwei Darstellungen für die rechtsseitige DINI-Ableitung des LEBESGUE-Maßes $\mathcal{J}(t) \stackrel{\text{Def.}}{=} \mathcal{L}^n\big(\vartheta_g(t,\Omega)\big)$ zur Zeit $t = 0$ unabhängig voneinander nachgewiesen. Ihre Übereinstimmung führt dann direkt zum GAUSS'schen Integralsatz in seiner vertrauten Form – zumindest unter der Annahme eines "glatten" Randes $\partial\Omega$ wie z.B. in [9, § 15]:

$$\int_\Omega \operatorname{div}\, g \; d\mathcal{L}^n y \;\;=\;\; \int_{\partial\Omega} \big\langle g,\, \nu_\Omega \big\rangle \; d\sigma\,.$$

Der hier ausgeführte Beweis von Proposition 2 beruht auf dem wohlgestellten Anfangswertproblem zu $x' = g(x)$ – einschließlich der a priori-Abschätzungen der Lösungen in Abhängigkeit von gegebenen Daten. Angesichts der lokalen LIPSCHITZ-Stetigkeit von $g$ resultieren diese Ungleichungen direkt aus dem bekannten Lemma von GRONWALL.
Doch der wachsende Zeitdruck im Rahmen des Bachelor-Studiengangs verführt im Grundstudium dazu, sie bei einem ersten Überblick über gewöhnliche Differenzialgleichungen (etwa in einer "Analysis II"-Vorlesung) kurzerhand zu übergehen.
Deshalb wird dieser Beweis in § 3 – zusammen mit gezielten Vertiefungen zu gewöhnliche Differenzialgleichungen – als Grundlage für (Pro-)Seminarvorträge im Mathematik-Studium vorgeschlagen.

Teilaussagen (i), (ii) resultieren recht einfach aus einer diffeomorphen Koordinatentransformation. Der Beweis von Teilaussage (iii) beruht auf einer lokalen Koordinatentransformation, welche der gleichen Grundidee wie der Wechsel von EULER- zu LAGRANGE-Koordinaten folgt. Dabei bieten die geometrischen Vorüberlegungen interessante Einblicke in die topologischen Eigenschaften der sog. erreichbaren Menge $\vartheta_g(t, \Omega)$ (vgl. Korollar 4 in § 3.2), und ihre detaillierten Nachweise bedürfen eigentlich nur der erwähnten Stetigkeitsabschätzung der Lösungen von $x' = g(x)$ bzgl. Anfangsdaten. Das bedeutet eine gute Gelegenheit zur Wiederholung topologischer Grundbegriffe in metrischen Räumen, wie sie üblicherweise in "Analysis II" eingeführt werden.

**Struktur**

Der anschließende Abschnitt 2 enthält einen ausführlichen Beweis von Proposition 1 und entwickelt den Gedanken weiter – bis hin zu einer Definition des Integrals über Hyperflächen in $\mathbb{R}^n$ der Klasse $C^1$.
Die Darstellung ist bewusst einfach und möglichst vollständig gehalten, so dass sie direkt für Vorlesungen herangezogen werden kann. Insbesondere sind dazu keine weiteren Nebenrechnungen erforderlich. Verzichtet wird hier nur auf die Beweis-Einzelheiten zur lokal endlichen Zerlegung der Eins (Proposition 4). Für die Einführung von differenzierbaren Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ und deren Normalräumen sei auf [8, § 9] oder [13, § 3.5] verwiesen.
Das dortige Korollar 3 hebt eine Besonderheit für Hyperflächen heraus. Dabei wird für ein Koordinatensystem einer Umgebung in $\mathbb{R}^n$ nicht wieder die stetige Einheitsnormale, sondern eine glatte Approximation herangezogen. Der dortige Limes ist das einzige Resultat aus § 2, das sich nicht einfach direkt auf Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ mit beliebiger Dimension übertragen lässt, aber die daraus resultierende Darstellung verdeutlicht die zentrale rechnerische Gemeinsamkeit mit dem späteren Beweis des GAUSS'schen Integralsatzes her.

In Abschnitt 3 folgen die Details zum Integraltheorem von GAUSS und insbesondere obiger Proposition 2. Konkret zum Nachweis ihrer Teilaussage (iii) tritt das gegebene Vektorfeld $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ an die Stelle der approximierten Normalen aus Korollar 3 – dank einer geeigneten Zusatzannahme, welche strikte Expansion der offenen Mengen $\vartheta_g(t, \Omega) \subset \mathbb{R}^n$ (in Abhängigkeit von $t$ nahe 0) impliziert. Alle Teilbehauptungen werden mit relativ einfachen analytischen Mitteln bewiesen, damit sich diese Darstellung in § 3 direkt als Vorlage für (Pro-)Seminarvorträge ab dem dritten Fachsemester verwendet werden kann.

## 2 Der Weg zum Integral stetiger Funktionen über Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$

### 2.1 Notation und Hilfsmittel

Zunächst fassen wir die Bezeichnungen und einige grundlegende Resultate über Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ zusammen, die anschließend als bekannt vorausgesetzt werden (siehe z.B. [8, § 9], [13, § 3.5]). $|\cdot|$ notiert jeweils die euklidische Norm in $\mathbb{R}^d$, und $\mathcal{L}^d$ steht für das LEBESGUE-Maß auf $\mathbb{R}^d$. $\mathbb{B}_r^d$ bezeichnet die offene Einheitskugel in $\mathbb{R}^d$ mit Mittelpunkt 0 und Radius $r > 0$: $\mathbb{B}_r^d := \{z \in \mathbb{R}^d \,\big|\, |z| < r\}$. Ferner benutzen wir die Abkürzung $\kappa_d := \mathcal{L}^d(\mathbb{B}_1)$.

$M$ bezeichne eine $m$-dimensionale *Untermannigfaltigkeit* von $\mathbb{R}^n$ der Klasse $C^k$ mit $k \geq 1$, $0 < m < n$. Nach Definition existiert zu jedem Punkt $y \in M$ eine Umgebung $V \subset \mathbb{R}^n$, so dass sich $M \cap V \subset \mathbb{R}^n$ mittels einer sog. *Karte* $\varphi \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$ darstellen lässt, d.h. $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ ist offen und nichtleer sowie $\varphi \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$ eine Immersion mit $\varphi(\Omega) = M \cap V$.
Als Immersion zeichnet sich $\varphi$ per definitionem durch die Eigenschaft aus, dass die JACOBI-Matrix $D\varphi(x) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ in jedem Punkt $x \in \Omega$ den Rang $m$ besitzt. Die partiellen Ableitungen $\partial_1\varphi(x), \ldots, \partial_m\varphi(x)$ spannen jeweils den $m$-dimensionalen *Tangenzialraum* $T_{\varphi(x)}M \subset \mathbb{R}^n$ an $M$ im Punkt $\varphi(x) \in M$ auf. Dabei ist $\partial_j\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ noch $(k-1)$-mal stetig differenzierbar, falls $k \geq 2$ ist, bzw. stetig für $k = 1$.
Der sog. *Normalraum* $N_{\varphi(x)}M \subset \mathbb{R}^n$ ist definiert als das orthogonale Komplement von $T_{\varphi(x)}M$ und somit ein $(n-m)$-dimensionaler Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$. Er besitzt eine Orthonormalbasis, deren Vektoren $(k-1)$-mal stetig differenzierbar von $x \in \Omega$ abhängen und sich z.B. mit dem GRAM-SCHMIDT'sche Orthogonalisierungsverfahren konstruieren lassen: $\widetilde{\nu}_M^{(1)}, \ldots \widetilde{\nu}_M^{(n-m)} \in C^{k-1}(\Omega, \mathbb{R}^n)$.

Die sog. (offene) *Tubularumgebung* einer Teilmenge $S \subset M$ mit Radius $r > 0$ ist definiert als

$$(S)_r \;:=\; \big\{\, y + \eta \,\big|\, y \in S,\ \eta \in N_y M,\ |\eta| < r \big\} \;\subset\; \mathbb{R}^n.$$

Im speziellen Fall einer Karte $\varphi \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$ von $M$ und $k \geq 2$ gibt es zu jeder kompakten Teilmenge $K \subset \Omega \subset \mathbb{R}^m$ einen hinreichend kleinen Radius $\rho = \rho(\varphi, K, M) > 0$, so dass sich jeder Punkt $z \in \big(\varphi(K)\big)_r$ eindeutig darstellen lässt als

$$z \;=\; \varphi(x) + \sum_{j=1}^{n-m} \gamma_j \cdot \widetilde{\nu}_M^{(j)}(x) \qquad \text{mit } \; \gamma := (\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-m}) \in \mathbb{R}^{n-m},\ |\gamma| < \rho. \tag{2}$$

Dabei ist die induzierte Abbildung $\mathring{K} \times \mathbb{B}_r^{n-m} \longrightarrow \big(\varphi(\mathring{K})\big)_r$, $(x, \gamma) \longmapsto z$ ein Diffeomorphismus der Klasse $C^{k-1}$. Diese einfache Beobachtung für $k \geq 2$ ist der Grund, weshalb wir anschließend in § 2.2 Untermannigfaltigkeiten der Klasse $C^2$ betrachten. Eine zusätzliche Approximation der Normalenvektoren $\widetilde{\nu}_M^{(1)}, \ldots, \widetilde{\nu}_M^{(n-m)}$ wird dann in § 2.3 den Weg zu einem ähnlichen Ergebnis für $k = 1$ ebnen.

$$g_\varphi : \;\; \Omega \;\longrightarrow\; ]0, \infty[, \quad x \;\longmapsto\; \sqrt{\det\big(D\varphi(x)^t \cdot D\varphi(x)\big)}.$$

heißt GRAM*'sche Determinante* der Karte $\varphi \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$ von $M$.

Die Resultate in den anschließenden Abschnitten 2.2 – 2.5 sind aus didaktischen Gründen nur für Hyperflächen, d.h. den Spezialfall $m = n - 1$, formuliert. Damit besteht ein engerer Bezug zum GAUSS'schen Integralsatz in Abschnitt 3. Außer Korollar 3 lassen sich alle Resultate in § 2 direkt auf differenzierbare Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ beliebiger Dimension $m < n$ erweitern.

### 2.2 Eine einfache Rechnung bei Hyperflächen der Klasse $C^2$

**Proposition 3**
*$M$ sei eine Hyperfläche (d.h. $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$) der Klasse $C^2$ und lasse sich durch eine einzige Karte $\varphi \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ darstellen: $\varphi(\Omega) = M$. $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ sei eine stetige Funktion mit kompaktem Träger, und $K \subset \mathbb{R}^{n-1}$ sei ein Kompaktum mit $K \subset \Omega$, $M \cap \operatorname{supp} f \subset \varphi(\mathring{K})$.*

*Dann existiert der folgende Grenzwert, und es gilt (mit $\kappa_1 = 2$)*

$$\lim_{r \downarrow 0} \left( \frac{1}{2\,r} \cdot \int_{(\varphi(\mathring{K}))_r} f(y)\ d\mathcal{L}^n y \right) \;=\; \int_{\mathring{K}} f(\varphi(x)) \cdot g_\varphi(x)\ d\mathcal{L}^{n-1}x. \tag{3}$$

Der Beweis von Proposition 3 beruht auf der schlichten Koordinatentransformation in Gl. (2), die dank der Voraussetzung $\varphi \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ stetig differenzierbar ist.
Bereits daraus geht die Existenz des behaupteten Grenzwerts für $r \downarrow 0$ hervor. Der anschließende Schritt dient einer Darstellung dieses Limes, in der nur die Karte $\varphi$, aber nicht die Normalenvektoren verwendet werden. Die partiellen Ableitungen der Karte spannen bekanntlich den Tangenzialraum auf, und so kann eine simple geometrische Überlegung mit Standard-Skalarprodukten und Determinantenregeln zum Ziel in Form der GRAM'schen Determinanten führen. Nun folgen die Details in der Ausführlichkeit, wie sie für Studierende im Grundstudium (d.h. insbesondere ohne Vorkenntnisse über Flächenintegrale) geeignet erscheint:

**Beweis von Proposition 3:** Mit einem hinreichend kleinen Radius $\rho = \rho(\varphi, K, M) > 0$ ist die Abbildung $\Psi : \mathring{K} \times \mathbb{B}_r \longrightarrow \big(\varphi(\mathring{K})\big)_r$, $(x, \gamma) \longmapsto z$ aus Gl. (2) ein Diffeomorphismus. Wegen $M \cap \operatorname{supp} f \subset \varphi(\mathring{K})$ ergeben der Transformationssatz für LEBESGUE-Integrale sowie der Satz von FUBINI für jedes $r \in \,]0, \rho[$

$$\begin{aligned} \int_{(\varphi(\mathring{K}))_r} f(y)\ d\mathcal{L}^n y \;&=\; \int_{\mathring{K} \times \mathbb{B}_r} f(\Psi(x,\gamma)) \cdot |\det\, D\Psi(x,\gamma)|\ d\mathcal{L}^n(x,\gamma) \\ &=\; \int_{\mathbb{B}_r} \int_{\mathring{K}} f(\Psi(x,\gamma)) \cdot |\det\, D\Psi(x,\gamma)|\ d\mathcal{L}^{n-1}x\ d\mathcal{L}^1\gamma. \end{aligned}$$

Dabei hat der rechte Integrand $\mathring{K} \times \mathbb{B}_r \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,\gamma) \longmapsto f(\Psi(x,\gamma)) \cdot |\det\, D\Psi(x,\gamma)|$ offensichtlich eine stetige Fortsetzung auf das Kompaktum $K \times \overline{\mathbb{B}_r} \subset \mathbb{R}^n$ und ist daher gleichmäßig stetig, d.h. insbesondere, zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es einen Radius $R = R(\varepsilon, K, \rho) \in \,]0, \rho[$:

$$\Big| f(\Psi(x,\gamma)) \cdot |\det\, D\Psi(x,\gamma)| \;-\; f(\Psi(x,0)) \cdot |\det\, D\Psi(x,0)| \Big| \;<\; \varepsilon$$

für alle $\gamma \in \mathbb{R}$, $|\gamma| \le R$ und $x \in K$. Die sog. Standardabschätzung (mittels Supremum des Integranden und LEBESGUE-Maß der Integrationsmenge) ergibt für jedes $r \in \,]0, R[$

$$\begin{aligned} &\left| \int_{(\varphi(\mathring{K}))_r} f(y)\ d\mathcal{L}^n y \;-\; \kappa_1\, r \cdot \int_{\mathring{K}} f(\Psi(x,0)) \cdot |\det\, D\Psi(x,0)|\ d\mathcal{L}^{n-1}x \right| \\ &\le\; \int_{\mathbb{B}_r} \int_{\mathring{K}} \Big| f \circ \Psi\ |\det\, D\Psi| \;-\; f \circ \Psi(\cdot, 0)\ |\det\, D\Psi(\cdot,0)| \Big|\ d\mathcal{L}^{n-1}x\ d\mathcal{L}^1\gamma \\ &\le\; \int_{]-r,r[} \int_{\mathring{K}} \varepsilon\ d\mathcal{L}^{n-1}x\ d\mathcal{L}^1\gamma \;\;\le\;\; 2\,r \cdot \mathcal{L}^n(K) \cdot \varepsilon. \end{aligned}$$

Also existiert der behauptete Grenzwert für $r \downarrow 0$:

$$\lim_{r \downarrow 0} \left( \frac{1}{2\,r} \cdot \int_{(\varphi(\mathring{K}))_r} f(y) \; d\mathcal{L}^n y \right) \;=\; \int_{\mathring{K}} f(\Psi(x,0)) \cdot |\det\, D\Psi(x,0)| \; d\mathcal{L}^{n-1} x.$$

Zu zeigen ist noch $|\det\, D\Psi(x,0)| = g_\varphi(x)$ für alle Punkte $x \in \mathring{K}$: Nach Definition von $\Psi$ besitzt die Jacobi-Matrix die Spaltenvektoren

$$D\Psi(x,0) \;=\; \begin{pmatrix} \partial_1 \varphi & \partial_2 \varphi & \ldots & \partial_j \varphi & \ldots & \partial_{n-1} \varphi & \widetilde{\nu}_M \end{pmatrix}(x).$$

Dabei ist $\widetilde{\nu}_M(x) \in \mathbb{R}^n$ ein Einheitsvektor, der auf jedem der Tangenzialvektoren $\partial_1 \varphi(x), \ldots,$ $\partial_{n-1}\varphi(x) \in \mathbb{R}^n$ senkrecht steht. Daraus ergibt sich eine Verbindung zur Gram'schen Determinaten – mittels gängiger Rechenregeln aus linearer Algebra

$$D\Psi(x,0)^t \cdot D\Psi(x,0) \;=\; \left( \begin{array}{c|c} D\varphi(x)^t \cdot D\varphi(x) & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right).$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \qquad \big|\det\, D\Psi(x,0)\big|^2 \;&=\; \big(\det\, D\Psi(x,0)\big)^2 \\ &=\; \det\, D\Psi(x,0)^t \;\cdot\; \det\, D\Psi(x,0) \\ &=\; \det\, \big(D\Psi(x,0)^t \cdot D\Psi(x,0)\big) \\ &=\; \det\, \big(D\varphi(x)^t \cdot D\varphi(x)\big) \cdot 1 \;\;\overset{\text{Def.}}{=}\;\; g_\varphi(x)^2\,. \end{aligned}$$

□

*Anmerkung 1 (Unabhängigkeit von der Karte)* In Gl. (3) hängt der Limes auf der linken Seite wohlgemerkt "nur" vom stetigen Integranden $f$ und der Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ einschl. deren Normalräumen ab, aber nicht von der Karte $\varphi \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$, durch welche ganz $M$ explizit dargestellt wird. Entsprechendes muss dann auch für das Integral auf der rechten Seite gelten. Wenn also dieselbe Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ durch eine andere Karte dargestellt ist, wird sich das entsprechende Integral mit der Gram'schen Determinante nicht ändern.
Diese sog. Invarianz bzgl. Kartenwechseln ist eine direkte Folgerung der Limesdarstellung und bedarf keiner weiteren Rechnungen mit Determinanten bei Transformationen, wie häufig in der Literatur angeführt (vgl. [9, § 14, Satz 6]). Das sehen wir als einen wichtigen didaktischen Vorteil dieses Zugangs zum Integral über Untermannigfaltigkeiten.

*Anmerkung 2 (Bezug zu Resultaten der geometrischen Maßtheorie)*
Die Verwendung der Tubularumgebungen erscheint auf den ersten Blick vielleicht willkürlich. Es besteht allerdings ein enger Bezug zum sog. *m-dimensionalen* Minkowski-*Inhalt* mit $m = n-1$, wie er z.B. in Federers Monographie *Geometric Measure Theory* [6, Definition 3.2.37] definiert wird:

$$\mathcal{M}^m(M) \;:=\; \lim_{r \downarrow 0} \; \frac{\mathcal{L}^n(\{\xi \in \mathbb{R}^n \mid \operatorname{dist}(\xi, M) < r\})}{\kappa_{n-m} \cdot r^{n-m}}\,.$$

Die Klasse der sog. *sets of positive reach*, wie sie von Federer eingeführt worden ist [7], gestattet sogar eine polynomiale Entwicklung von $\mathcal{L}^n(\{\xi \in \mathbb{R}^n \mid \operatorname{dist}(\xi, M) < r\})$ nach $r$ und führt dabei zu den sog. *verallgemeinerten Krümmungen.* Das bietet zweifellos interessante Anknüpfungspunkte, erscheint aber für Studierende im Grundstudium (d.h. ohne Vorerfahrung) kaum geeignet.

Die Verwendung der Tubularumgebung $(M)_r$ anstelle der "Kugelumgebung" $\{\mathrm{dist}(\cdot, M) < r\}$ erleichtert vor allem die Rechnung. Außerdem schließt die Annahme $M \cap \operatorname{supp} f \subset \varphi(\mathring{K})$ aus, dass die Punkte $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $\mathrm{dist}(\xi, M) < r$, aber außerhalb von $(M)_r$ für den Grenzwert in Gl. (3) relevant sind.

### 2.3 Ein ähnlicher Limes für Hyperflächen der Klasse $C^1$

Der großzügige Umgang mit Annahmen – insbesondere hinsichtlich der Regularität – kann sich bei Anwendungen in der Modellierung als sehr störend erweisen. Daher sollten Voraussetzungen so gering wie möglich gehalten werden. In Proposition 3 fällt auf, dass die Karte $\varphi$ als *zweimal* stetig differenzierbar angenommen wird, aber nur die JACOBI-Matrizen von $\varphi$ in Kernaussage (3) auftreten.
Das führt direkt zu der Frage, ob das gleiche Resultat nicht bereits für $\varphi \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ gilt. Wir werden hier zwar nicht genau denselben Grenzwert erhalten, aber eine zusätzliche Approximation (der Normalvektoren) führt zu einem ähnlichen Ergebnis – nun mit zwei Grenzübergängen. Der damit verbundene Zusatzaufwand ist vergleichsweise gering und ermöglicht Studierenden, ihr Verständnis des vorigen Schritts zu prüfen. Vorteilhaft ist außerdem, dass die Invarianz bzgl. Kartenwechsel genauso offensichtlich ist wie zuvor.

**Korollar 1**
*Die Hyperfläche $M \subset \mathbb{R}^n$ der Klasse $C^1$ lasse sich durch eine einzige Karte $\varphi \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ darstellen: $M = \varphi(\Omega)$. Wie in Proposition 3 seien $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig mit kompaktem Träger und $K \subset \mathbb{R}^{n-1}$ ein Kompaktum mit $K \subset \Omega$, $M \cap \operatorname{supp} f \subset \varphi(\mathring{K})$.*
*Zu jedem $\varepsilon \in ]0, \frac{1}{4}[$ lässt sich immer eine Funktion $\widehat{\nu}_{M,\varepsilon} \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ (etwa mittels Faltung) konstruieren, so dass für alle $x \in K$ die Einheitsnormale $\widetilde{\nu}_M(x)$ in $\varphi(x) \in M$ folgendermaßen approximiert wird*

$$\left|\widetilde{\nu}_M(x) - \widehat{\nu}_{M,\varepsilon}(x)\right| < \varepsilon, \qquad \left|\widehat{\nu}_{M,\varepsilon}(x)\right| = 1.$$

*Analog der Tubularumgebung bezeichne $\widehat{U}_{\varepsilon,r} := \left\{ \varphi(x) + \gamma \cdot \widetilde{\nu}_{M,\varepsilon}(x) \;\middle|\; x \in \mathring{K}, \gamma \in \mathbb{B}_r \subset \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^n$ für $r > 0$.*

*Dann existiert der folgende Grenzwert, und es gilt*

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left( \lim_{r \downarrow 0} \left( \frac{1}{2\,r} \cdot \int_{\widehat{U}_{\varepsilon,r}} f(y)\; d\mathcal{L}^n y \right) \right) = \int_{\mathring{K}} f(\varphi(x)) \cdot g_\varphi(x)\; d\mathcal{L}^{n-1} x\,. \tag{4}$$

**Beweisidee:** Für jedes hinreichend kleine $\varepsilon > 0$ geht aus der Stetigkeit der Determinanten

$$\det\left(D\varphi,\; \widehat{\nu}_{M,\varepsilon}\right) \neq 0 \qquad \text{in } K$$

hervor. Solch ein hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ werde fixiert. Dank der Kompaktheit von $K \subset \mathbb{R}^{n-1}$ führt das Theorems von der lokalen Inversen zu einem hinreichend kleinen Radius $\rho = \rho(K, \varepsilon) > 0$, so dass folgende Abbildung ein Diffeomorphismus ist:

$$\Psi_\varepsilon : \; \mathring{K} \times \mathbb{B}_r \longrightarrow \widehat{U}_{\varepsilon,r}, \qquad (x, \gamma) \longmapsto \varphi(x) + \gamma \cdot \widetilde{\nu}_{M,\varepsilon}(x)\,.$$

Wie zuvor resultiert aus dem Transformationssatz für LEBESGUE-Integrale

$$\lim_{r \downarrow 0} \left( \frac{1}{2\,r} \cdot \int_{\widehat{U}_{\varepsilon,r}} f(y)\; d\mathcal{L}^n y \right) = \int_{\mathring{K}} f(\varphi(x)) \cdot |\det D\Psi_\varepsilon(x, 0)|\; d\mathcal{L}^{n-1} x,$$

und daher genügt es zu zeigen

$$|\det D\Psi_\varepsilon(\cdot,0)| \longrightarrow g_\varphi \quad \text{gleichmäßig in } K \quad (\varepsilon \downarrow 0).$$

Im Unterschied zum Beweis von Proposition 3 steht der Einheitsvektor $\widehat{\nu}_{M,\varepsilon}(x)$ zwar nicht notwendigerweise senkrecht auf den Tangenzialvektoren $\partial_1\varphi(x), \ldots, \partial_{n-1}\varphi(x) \in \mathbb{R}^n$. Aber die CAUCHY-SCHWARZ-Ungleichung ergibt

$$\begin{aligned}
\left|\left\langle \partial_i\varphi(x),\ \widehat{\nu}_{M,\varepsilon}(x)\right\rangle\right| &= \left|\left\langle \partial_i\varphi(x),\ \widehat{\nu}_{M,\varepsilon}(x)\right\rangle - \overbrace{\left\langle \partial_j\varphi(x),\ \widetilde{\nu}_M(x)\right\rangle}^{=0}\right| \\
&\leq |\partial_i\varphi(x)|\ \left|\widehat{\nu}_{M,\varepsilon}(x) - \widetilde{\nu}_M(x)\right| \\
\Longrightarrow \quad \left|\left\langle \partial_i\varphi(x),\ \widehat{\nu}_{M,\varepsilon}(x)\right\rangle\right| &\leq \sup_K |D\varphi| \cdot \varepsilon
\end{aligned}$$

Dabei hängt die rechte Seite dieser Abschätzung weder vom Punkt $x \in K$ noch den Indices $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j, k \in \{1, \ldots, n-m\}$ ab. Also ist nunmehr

$$D\Psi_\varepsilon(x,0)^t \cdot D\Psi_\varepsilon(x,0) = \left(\begin{array}{c|c} D\varphi(x)^t \cdot D\varphi(x) & W_\varepsilon(x) \\ \hline V_\varepsilon(x) & 1 \end{array}\right).$$

mit Teilmatrizen $V_\varepsilon(x) \in \mathbb{R}^{1\times(n-1)}$, $W_\varepsilon(x) \in \mathbb{R}^{(n-1)\times 1}$, deren Normen jeweils durch $\operatorname{const}(\varphi, K)\cdot\varepsilon$ nach oben beschränkt sind. Unter Verwendung des LAPLACE'schen Entwicklungssatzes lässt sich daraus die fehlende gleichmäßige Konvergenz der Determinanten folgern. □

*Anmerkung 3* Die asymptotische Beziehung (4) gilt wohlgemerkt unabhängig von der Wahl der Normalenapproximationen $\widehat{\nu}_{M,\varepsilon}(\cdot)$. Außerdem stößt man hier auf ein Beispiel für zwei sukzessive Grenzprozesse. Bei Studierenden mit verstärktem Interesse in Analysis führt das zur Frage, unter welchen (möglicherweise zusätzlichen) Annahmen die Grenzübergänge $\varepsilon \downarrow 0$, $r \downarrow 0$ vertauscht werden dürfen.

In Bemerkung 1 wurde bereits darauf hingewiesen, dass unter den Voraussetzungen von Proposition 3 (d.h. insbesondere $\varphi \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$) das (Flächen-) Integral nicht von der Karte $\varphi$, sondern "nur" von den geometrischen Eigenschaften der Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ abhängt (wie ihren Normalräumen $N_yM$, $y \in M$). Diese Beobachtung gilt auch für die Erweiterung in Korollar 1, und wir erhalten somit direkt:

**Korollar 2 (Unabhängigkeit des Integrals von der Karte)**
*$\varphi \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ und $\psi \in C^1(\widetilde{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ seien zwei Karten ein und derselben $(n-1)$-dimensionalen Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ der Klasse $C^1$ mit $\varphi(\Omega) = M = \psi(\widetilde{\Omega})$. Ferner sei $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, so dass $\varphi^{-1}(M \cap \operatorname{supp} f) \subset \Omega$, $\psi^{-1}(M \cap \operatorname{supp} f) \subset \widetilde{\Omega}$ kompakt in $\mathbb{R}^{n-1}$ sind. Dann gilt*

$$\int_\Omega f(\varphi(x)) \cdot g_\varphi(x)\ d\mathcal{L}^{n-1}x = \int_{\widetilde{\Omega}} f(\psi(x)) \cdot g_\psi(x)\ d\mathcal{L}^{n-1}x.$$

□

Alle bisherigen Resultate lassen sich direkt auf Untermannigfaltigkeiten beliebiger Dimension $m < n$ übertragen, nachdem die Normalenvektoren auf $M$ mittels GRAM-SCHMIDT orthonormalisiert worden sind. Das eignet sich als Übungsaufgabe für Studierende in den ersten Semestern – zu Wiederholungszwecken für Methoden der linearen Algebra.

Der Spezialfall $m = n-1$ hat allerdings eine Besonderheit. Es lässt sich nämlich in Korollar 1 schon der "einfache" Limes aus Gl. (4) für $r \downarrow 0$ zu jedem $\varepsilon \in ]0, \frac{1}{4}[$ explizit angeben. Das beruht im Wesentlichen darauf, dass der Normalraum eindimensional ist. Dieses zusätzliche Ergebnis ist nicht relevant für die Einführung des Flächenintegrals, sondern soll hier nur die technischen Analogien zum späteren Beweis des GAUSS'schen Integralsatzes verdeutlichen – genauer gesagt zum Nachweis von Proposition 6 (iii).

**Korollar 3 (Spezialfall für $C^1$-Hyperfläche und approximiertes Normalfeld)**
*Unter den Voraussetzungen von Korollar 1 gilt für die Hyperfläche $M \subset \mathbb{R}^n$ der Klasse $C^1$ sogar: Der folgende Grenzwert existiert für jedes $\varepsilon \in ]0, \frac{1}{4}[$*

$$\lim_{r \downarrow 0} \left( \frac{1}{2\,r} \cdot \int_{\widehat{U}_{\varepsilon,r}} f(y) \;\, d\mathcal{L}^n y \right) \quad = \quad \int_{\mathring{K}} f \circ \varphi \;\; \langle \widetilde{\nu}_M, \, \widehat{\nu}_{M,\varepsilon} \rangle \, \cdot \, g_\varphi \;\; d\mathcal{L}^{n-1} x \, . \tag{5}$$

*Beweis* Im Beweis von Korollar 1 wurde bereits die Existenz der Grenzwertes nachgewiesen, und dabei gilt

$$\lim_{r \downarrow 0} \left( \frac{1}{2\,r} \cdot \int_{\widehat{U}_{\varepsilon,r}} f(y) \;\, d\mathcal{L}^n y \right) \quad = \quad \int_{\mathring{K}} f(\varphi(x)) \, \cdot \, |\det \, D\Psi_\varepsilon(x, 0)| \;\, d\mathcal{L}^{n-1} x.$$

Also bleibt noch für alle $x \in K$ zu zeigen

$$\big| \det \, D\Psi_\varepsilon(x, 0) \big| \;\; = \;\; \langle \widetilde{\nu}_M(x), \, \widehat{\nu}_{M,\varepsilon}(x) \rangle \, \cdot \, g_\varphi(x) \, .$$

Zur Berechnung der Determinanten von $D\Psi_\varepsilon(x, 0) = \big( D\varphi(x) \,\big|\, \widehat{\nu}_{M,\varepsilon}(x) \big)$ ziehen wir (wieder) eine geometrische Überlegung heran:
Die $n-1$ Spaltenvektoren von $D\varphi(x)$ spannen bekanntlich den Tangenzialraum von $M$ in $\varphi(x)$ auf, während $\widehat{\nu}_{M,\varepsilon}(x)$ eine Einheitsnormale $\widetilde{\nu}_M(x)$ in $\varphi(x) \in M$ approximiert. Die Determinante bleibt unverändert, wenn ein Vielfaches einer Spalte zu einem anderen Spaltenvektor addiert wird. Insbesondere die Spaltenoperationen des GRAM-SCHMIDT'schen Orthogonalisierungsverfahrens, angewendet nur auf den letzten Spaltenvektor, ändern also nichts an dieser Determinanten. Deshalb können wir den letzten Spaltenvektor durch seine Komponente in die entsprechende Normalrichtung ersetzen:

$$\begin{aligned} \big| \det \, D\Psi_\varepsilon(x, 0) \big| \;\; &= \;\; \left| \det \; \Big( D\varphi(x) \,\Big|\, \widehat{\nu}_{M,\varepsilon}(x) \Big) \right| \\ &= \;\; \left| \det \; \Big( D\varphi(x) \,\Big|\, \langle \widehat{\nu}_{M,\varepsilon}(x), \, \widetilde{\nu}_M(x) \rangle \cdot \widetilde{\nu}_M(x) \Big) \right| . \end{aligned}$$

Wie am Ende des Beweises zu Proposition 3 führt letztlich die Interpretation eines Matrixprodukts mittels Standard-Skalarprodukten zur behaupteten Darstellung:

$$\big| \det \, D\Psi_\varepsilon(x, 0) \big|^2 \;\; = \;\; \left| \det \begin{pmatrix} D\varphi^t \\ \hline \langle \widehat{\nu}_{M,\varepsilon}, \, \widetilde{\nu}_M \rangle \;\, \widetilde{\nu}_M^t \end{pmatrix} \, \cdot \, \det \; \Big( D\varphi \,\Big|\, \langle \widehat{\nu}_{M,\varepsilon}, \, \widetilde{\nu}_M \rangle \;\, \widetilde{\nu}_M \Big) \right|$$

$$\left|\det D\Psi_\varepsilon(x,0)\right|^2 = \left|\det \left(\begin{array}{c|c} D\varphi(x)^t \cdot D\varphi(x) & 0 \\ \hline 0 & |\langle \widehat{\nu}_{M,\varepsilon}(x),\ \widetilde{\nu}_M(x)\rangle|^2 \end{array}\right)\right|$$
$$= g_\varphi(x)^2 \cdot |\langle \widehat{\nu}_{M,\varepsilon}(x),\ \widetilde{\nu}_M(x)\rangle|^2$$
$$\stackrel{\varepsilon<\frac{1}{4}}{\Longrightarrow} \quad \left|\det D\Psi_\varepsilon(x,0)\right| = g_\varphi(x) \ \cdot\ \langle \widehat{\nu}_{M,\varepsilon}(x),\ \widetilde{\nu}_M(x)\rangle.$$

□

### 2.4 **Der Schritt zur Definition des Integrals bei einer Karte**

Das gemeinsame Integral auf den *rechten* Seiten der Gln. (3), (4) werden wir für die Definition des Integrals über eine differenzierbare $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ heranziehen. Dabei fällt die Wahl bewusst auf die rechte Seite (und nicht auf die Limiten der jeweiligen linken Seite), denn so werden nur Funktionsauswertungen von $f$ in Punkten der Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ berücksichtigt. Die Werte des Integranden in $\mathbb{R}^n \setminus M$ haben also keinen Einfluss auf dieses Integral.
Im Falle stetiger Integranden $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ erweist sich dieser Einfluss ohnehin als irrelevant, wie aus Proposition 3 bzw. Korollar 1 schon hervorgeht. Das könnte sich aber ändern, wenn das Integral auf eine größere Klasse von Funktionen $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ erweitert werden soll. Dann ist es wohl am einfachsten, die Existenz des entsprechenden $(n-1)$-dimensionalen Lebesgue-Integrals (mit Gram'scher Determinante) zu fordern – als Bestandteil der Definition:

**Definition 2 (Integrale über Hyperflächen mit einer Karte)**
Die $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ der Klasse $C^1$ werde durch eine einzige Karte $\varphi \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ dargestellt, d.h. $\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$ sei offen, $\varphi \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ eine Immersion mit $\varphi(\Omega) = M$.

Dann wird das *Integral von $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ über die Untermannigfaltigkeit $M$* definiert als

$$\int_M f(z)\ d\sigma_z \ := \ \int_\Omega f(\varphi(x)) \cdot g_\varphi(x)\ d\mathcal{L}^{n-1}x$$

mit der Gram'schen Determinanten $g_\varphi : \ \Omega \longrightarrow\ ]0,\infty[, \ \ x \longmapsto \sqrt{\det\,(D\varphi(x)^t \cdot D\varphi(x))}$, falls das Lebesgue-Integral von $(f \circ \varphi) \cdot g_\varphi$ auf der rechten Seite existiert.

Diese Definition bedeutet den Einstieg in die "gewohnten Bahnen" der Lehre, d.h. ab hier wird der Einstieg in die Integrationstheorie über Untermannigfaltigkeiten so weiterverfolgt, wie man ihn in Lehrbüchern findet (z.B. [13, § 11.5]).
Einzig zum Zwecke einer abgerundeten Darstellung werden diese Schritte hier formuliert und jeweils motiviert. Dabei erweist sich obiges Korollar 1 noch einmal als nützlich, wenn es um die Unabhängigkeit des Flächenintegrals von den Karten und der Zerlegung der Eins geht (siehe Anmerkung 5 nach Proposition 5).

### 2.5 Der Schritt zur Definition des Integrals bei mehreren Karten

Diese Idee lässt sich auf differenzierbare Untermannigfaltigkeiten $M$ des $\mathbb{R}^n$ erweitern, welche möglicherweise nicht durch eine einzige Karte dargestellt werden können. Eine glatte Zerlegung der Eins ermöglicht dabei, den stetige Integranden $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ (mit kompaktem Träger) so in eine endliche Summe zu zerlegen, dass die Träger der einzelnen Summanden jeweils $M$ nur im Bild einer einzigen Karte schneiden.
Das Integral über $M$ wird dann als Reihe der Integrale über die jeweiligen kompakten Träger der Zerlegungsfunktionen definiert. Genauer betrachtet, wird in der anschließenden Definition 3 sogar die absolute Konvergenz dieser Reihe gefordert. Das erscheint zwar auf den ersten Blick stärker als nötig, bringt aber vorteilhafte Eigenschaften für die spätere Anwendung dieses Integralbegriffs. Didaktisch bietet sich im Rahmen einer Grundvorlesung hier eine gute Gelegenheit, um Reihen in Erinnerung zu rufen.
Der folgende Satz wird als ein Standardresultat in der Literatur angesehen und daher hier nicht im Detail bewiesen:

**Proposition 4 (Lokal endliche Zerlegung der Eins nahe Untermannigfaltigkeit)**
*Für jede $m$-dimensionale Untermannigfaltigkeit $M$ des $\mathbb{R}^n$ und jeden Radius $R > 0$ existieren eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von $M$ und eine Folge $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $C^\infty(U)$ mit den anschließenden Eigenschaften:*

1. *Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist $0 \leq \alpha_k(\cdot) \leq 1$ in $U$, und der Träger von $\alpha_k(\cdot)$ ist eine kompakte Kugel vom Radius $\leq R$.*
2. *Zu jedem $z \in U$ gibt es eine offene Umgebung $V_z \subset U$, so dass $\alpha_k(\cdot) = 0$ in $V_z$ von höchstens endlich vielen Indices $k \in \mathbb{N}$ verletzt wird.*
3. *Für jedes $z \in U$ gilt $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(z) \;=\; 1.$*
4. *Für jeden Index $k \in \mathbb{N}$ kann eine in $M$ offene Umgebung der Teilmenge $M \cap \operatorname{supp} \alpha_k$ durch eine einzige Karte $\varphi_k \in C^1(\Omega_k, \mathbb{R}^n)$ von $M$ dargestellt werden.*

**Definition 3 (Integrale über Hyperflächen in $\mathbb{R}^n$)**
$M \subset \mathbb{R}^n$ sei eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ der Klasse $C^1$. Entsprechend Proposition 4 seien $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von $M$, $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine lokal endliche stetige Zerlegung der Eins in $C^0(U)$ und $\big(\varphi_k \in C^1(\Omega_k, \mathbb{R}^n)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ Karten von $M$.

Für $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ wird das *Integral von $f$ über $M$* definiert als

$$\begin{aligned} \int_M f(z)\; d\sigma_z \;&:=\; \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\varphi_k(\Omega_k)} \alpha_k(z)\; f(z)\; d\sigma_z \\ &=\; \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\Omega_k} \alpha_k(\varphi_k(x))\; f(\varphi_k(x)) \cdot g_{\varphi_k}(x)\; d\mathcal{L}^{n-1}x, \end{aligned} \tag{6}$$

wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

(1.) Für jedes $k \in \mathbb{N}$ existiert $\displaystyle\int_{\Omega_k} \alpha_k(\varphi_k(x))\; f(\varphi_k(x)) \cdot g_{\varphi_k}(x)\; d\mathcal{L}^{n-1}x,$

(2.) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \int_{\Omega_k} \alpha_k(\varphi_k(x))\; |f(\varphi_k(x))| \cdot g_{\varphi_k}(x)\; d\mathcal{L}^{n-1}x \;<\; \infty\,.$

*Anmerkung 4* Bedingung (1.) verlangt Lebesgue-Integrierbarkeit von

$$\Omega_k \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}, \qquad x \longmapsto \alpha_k(\varphi_k(x)) \;\; f(\varphi_k(x)) \cdot g_{\varphi_k}(x)$$

für jeden Index $k \in \mathbb{N}$. Dann ist auch die Betragsfunktion

$$\Omega_k \longrightarrow [0, \infty], \quad x \longmapsto \alpha_k(\varphi_k(x)) \;\; |f(\varphi_k(x))| \cdot g_{\varphi_k}(x)$$

Lebesgue-integrierbar, und das zugehörige Integral ist $\geq 0$. Bedingung (2.) stellt nun sicher, dass die Reihe mit den Integralen der *Betrags*funktionen konvergiert. Daraus folgt insbesondere für die endlichen Teilsummen

$$\sup_{l,\, m \geq K} \; \sum_{k=l}^{m} \int_{\Omega_k} \alpha_k(\varphi_k(x)) \;\; |f(\varphi_k(x))| \cdot g_{\varphi_k}(x) \;\; d\mathcal{L}^{n-1}x \;\longrightarrow\; 0 \quad (K \to \infty).$$

Also konvergiert die Reihe in Gl. (6) absolut. Das erlaubt z.B. die Umordnung der Reihenglieder. Dieser Zugang garantiert daher die gleiche Schlussfolgerung, wie sie bereits für $n$-dimensionale Lebesgue-Integrale bekannt ist: $f$ integrierbar über $M \Longrightarrow |f|$ integrierbar über $M$.

Definition 3 des Integrals macht streng genommen nur Sinn, wenn die jeweilige Wahl von $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ keinen relevanten Einfluss auf die Existenz und den reellen Wert des Integrals von $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ über $M$ hat. (Sonst müsste nämlich die gewählte Zerlegung der Eins immer explizit angegeben werden.)
Wir werden diese Unabhängigkeit hier für stetige Funktionen $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger formulieren. Der Beweis ist geeignet als Übungsaufgabe für Studierende der Mathematik, bei der zuvor behandelte Techniken wie die Zerlegung der Eins und die Grenzübergange aus Korollar 1 kombiniert werden.

**Proposition 5** *$M \subset \mathbb{R}^n$ sei eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse $C^1$. Des weiteren seien $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von $M$, $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine lokal endliche stetige Zerlegung der Eins in $C^0(U)$ und $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ Karten von $M$, wie in Proposition 4 beschrieben.*

*Ferner sei $f \in C^0_c(\mathbb{R}^n)$, so dass der Schnitt $M \cap \operatorname{supp} f$ eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist. Insbesondere ist dann $\overline{\mathbb{B}_{3\rho}}(M \cap \operatorname{supp} f) \subset U$ für ein hinreichend kleines $\rho > 0$, und wir setzen $C^{(j)} := \overline{\mathbb{B}_{j\,\rho}}(M \cap \operatorname{supp} f) \subset \mathbb{R}^n$ für $j = 0, 1, 2, 3$.*

*Wie in Korollar 1 lässt sich zu jedem $\varepsilon \in ]0, \frac{1}{4}[$ und jeder obigen Karte $\varphi_k \in C^1(\Omega_k, \mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{N}$, von $M$ eine Funktion $\widehat{\nu}_{M,\varepsilon,k} \in C^1(\Omega_k, \mathbb{R}^n)$ (etwa mittels Faltung) konstruieren, so dass für alle $x \in \varphi_k^{-1}\big(C^{(3)}\big) \subset \Omega_k$ die Einheitsnormale $\widetilde{\nu}_M(x)$ auf $M$ in $\varphi_k(x)$ approximiert wird mit*

$$\big|\widetilde{\nu}_M(x) - \widehat{\nu}_{M,\varepsilon,k}(x)\big| \;<\; \varepsilon, \qquad \big|\widehat{\nu}_{M,\varepsilon,k}(x)\big| \;=\; 1.$$

*Für $r \in ]0, \rho[$ bezeichne $\widehat{U}_{\varepsilon,r} := \Big\{ \varphi_k(x) + \gamma \cdot \widetilde{\nu}_{M,\varepsilon,k}(x) \;\Big|\; x \in \varphi_k^{-1}\big(\mathring{C}^{(1)}\big), \gamma \in \mathbb{B}_r \subset \mathbb{R}, k \in \mathbb{N} \Big\} \subset U.$*

*Dann existiert der folgende Grenzwert, und es gilt*

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \; \Big( \lim_{r \downarrow 0} \; \Big( \frac{1}{2\, r} \cdot \int_{\widehat{U}_{\varepsilon,r}} f(y) \;\, d\mathcal{L}^n y \Big) \Big) \;\;=\;\; \sum_{k=1}^{\infty} \int_{M \cap C^{(1)}} \alpha_k(z) \;\; f(z) \;\, d\sigma_z,$$

*wobei auf der rechten Seite höchstens endlich viele Summanden $\neq 0$ sind. Insbesondere ist also das Integral $\displaystyle\int_M f \, d\sigma_z$ wohldefiniert, und $f$ ist integrierbar über $M$.*

*Anmerkung 5 (Unabhängigkeit von der Zerlegung der Eins)*
Proposition 5 gewährleistet für alle Funktionen $f \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$, deren Einschränkung $f|_M$ einen in $M$ kompakten Träger hat, dass das Integral $\displaystyle\int_M f\, d\sigma_z$ nicht von der Zerlegung der Eins abhängt:

Für eine andere offene Umgebung $\widetilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ von $M$ und eine andere lokal endliche Zerlegung der Eins $(\widetilde{\alpha}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in $C^0(\widetilde{U})$ können wir nämlich die gleichen Überlegungen in der offenen Umgebung $U \cap \widetilde{U}$ von $M$ anstellen. Dabei wird der Radius $\rho > 0$ entsprechend mit $\overline{\mathbb{B}_{3\,\rho}}(M \cap \operatorname{supp} f) \subset U \cap \widetilde{U}$ gewählt. Die gleichen Argumente führen dann zwei Darstellungen ein und desselben Limes:

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left(\lim_{r\downarrow 0}\ \frac{1}{2\,r}\cdot\int_{\widehat{U}_{\varepsilon,r}} f(y)\ d\mathcal{L}^n y\right) &= \sum_{k=1}^{\infty}\int_{M\cap C^{(1)}} \alpha_k(z)\ f(z)\ d\sigma_z \\
&= \sum_{j=1}^{\infty}\int_{M\cap C^{(1)}} \widetilde{\alpha}_j(z)\ f(z)\ d\sigma_z\,.
\end{aligned}$$

*Anmerkung 6 (Erweiterung der Integrationstheorie mittels* DANIELL-LEBESGUE*)*
Damit steht also ein Integralbegriff zumindest für stetige Funktionen mehrerer Veränderlicher mit kompaktem Träger auf einer differenzierbaren Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ zur Verfügung. Nun kann er als Ausgangspunkt für eine Erweiterung dienen. Wenn jede kompakte Teilmenge von $M$ endlichen Inhalt besitzt, dann sind alle erforderlichen Eigenschaften für den DANIELL-LEBESGUE-Prozess gewährleistet.
Sollte das LEBESGUE-Integral bereits auf diese Weise eingeführt worden sein (wie z.B. in [11]), so bietet sich hier dem mathematisch interessierten Studierenden ein gutes Beispiel, um eine Verallgemeinerung eigenständig zu vollziehen: Genau dieselben Schritte können für Funktionen nachgeahmt werden, die nur auf einer vorgegebenen differenzierbaren Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ definiert sind, obwohl deren Definitionsbereich eine $n$-dimensionale LEBESGUE-Nullmenge ist. Das führt auch zu den tiefer liegenden Resultaten bis hin zum LEBESGUE'schen Theorem von der majorisierten Konvergenz.

## 3 Ein Beweis des GAUSS'schen Integraltheorems

Der Integraltheorem von GAUSS wird hier nicht in einer so allgemeinen Form diskutiert wie z.B. in [12],[14]. Statt dessen geht es um einen geometrisch anschaulichen Beweis, der für Studierende im Grundstudium geeignet ist und dabei erkennbar an die Ideen aus § 2 anlehnt.

**Theorem 1 (GAUSS'sche Integralsatz)** *$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei offen, beschränkt und der topologische Rand $\partial\Omega$ eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse $C^1$ mit $\int_{\partial\Omega} d\sigma < \infty$. $\nu_\Omega \in C^0(\partial\Omega, \mathbb{R}^n)$ bezeichne das zugehörige äußere Einheitsnormalenfeld. $f : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sei stetig und in $\Omega$ stetig differenzierbar mit $\operatorname{div} f \in L^1(\Omega)$.*

*Dann gilt* $$\int_\Omega \operatorname{div} f \; d\mathcal{L}^n y \;=\; \int_{\partial\Omega} \langle f,\, \nu_\Omega \rangle \; d\sigma_z \,.$$

Die Grundidee des Beweises ist motiviert durch das sog. Transporttheorem von REYNOLDS in der Strömungsmechanik. Es behandelt die zeitliche Änderung von $n$-dimensionalen LEBESGUE-Integralen, wenn die Punkte entlang eines vorgegebenen Geschwindigkeitsfeldes "fließen".
Mittels GAUSS'schen Integralsatzes lässt sich die damit verbundenen Ableitung sowohl als ein $n$-dimensionales LEBESGUE-Integral der Divergenz als auch $(n-1)$-dimensionales Integral der Normalgeschwindigkeit über den Rand darstellen.
Anschließende Proposition 6 fasst die Grundidee des Beweises zusammen: Diese beiden Integral-Darstellungen der zeitlichen Ableitung sollen separat nachgewiesen werden – allerdings unter etwas stärkeren Regularitätsannahmen an das Vektorfeld. Wir betrachten dort nämlich ein beschränktes, stetig differenzierbares Feld $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (statt $f \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n) \cap C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$). Eine abschließende Approximation einer stetigen Fortsetzung von $f$ (z.B. mittels Faltung) schließt die verbleibende Lücke und eignet sich als Übungsaufgabe im Grundstudium.

### 3.1 Einzelheiten zur Beweisstrategie

Gegeben seien ein "glattes" Vektorfeld $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, das uns als rechte Seite einer gewöhnlichen Differenzialgleichung dient, sowie eine nichtleere Anfangsmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ – letztere zunächst ohne Regularitätsbedingungen.
Die sog. erreichbare Menge $\vartheta_g(t, M) \subset \mathbb{R}^n$ besteht aus allen Punkten $x(t) \in \mathbb{R}^n$, die von einer Lösung $x(\cdot)$ der gewöhnlichen Differenzialgleichung $x' = g(x)$ mit Anfangswert in $M$ angenommen werden können. Sie verallgemeinert den sog. *Fluss längs g*, bei dem jeweils genau ein Anfangsvektor betrachtet wird. In der Formoptimierung verwendet die sog. *velocity method* (weniger präzise auch *speed method* genannt) diesen Ansatz zur Mengendeformation für Sensitivitätsanalysen (siehe z.B. [4]).

**Definition 4** Für ein stetig differenzierbares Vektorfeld $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ und eine nichtleere Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ wird die *erreichbare Menge* zur Zeit $t \geq 0$ definiert als

$$\vartheta_g(t, M) \;:=\; \big\{ x(t) \;\big|\; \exists\, x(\cdot) \in C^1([0,t], \mathbb{R}^n) : \; x' = g(x) \;\text{ in } [0,t],\; x(0) \in M \big\} \;\subset\; \mathbb{R}^n \,.$$

**Proposition 6** *Wie in Theorem 1 seien die Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nichtleer, offen, beschränkt sowie $\partial\Omega$ eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ der Klasse $C^1$ mit $\int_{\partial\Omega} d\sigma < \infty$. $\nu_\Omega \in C^0(\partial\Omega, \mathbb{R}^n)$ bezeichne das zugehörige äußere Einheitsnormalenfeld. Das Vektorfeld $g \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ sei beschränkt. Dann gilt für das* LEBESGUE*-Maß $\mathcal{J}(t) := \mathcal{L}^n\big(\vartheta_g(t, \Omega)\big)$ :*

(i) *Der einseitige Limes $\frac{d^+}{dt^+}\,\mathcal{J}(0) \;:=\; \lim\limits_{t\downarrow 0} \frac{\mathcal{J}(t)-\mathcal{J}(0)}{t}$ existiert.*

(ii) $\frac{d^+}{dt^+}\,\mathcal{J}(0) \;=\; \int_\Omega \operatorname{div}\, g \; d\mathcal{L}^n y$

(iii) $\frac{d^+}{dt^+}\,\mathcal{J}(0) \;=\; \int_{\partial\Omega} \big\langle g,\, \nu_\Omega \big\rangle \; d\sigma_z$

## 3.2 Hilfsmittel aus der Theorie gewöhnlicher Differenzialgleichungen

Für jedes beschränkte stetig differenzierbare Vektorfeld $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ist die Aufgabe

$$\begin{cases} x' = g(x) & \text{in } \mathbb{R} \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

bekanntlich eindeutig lösbar, und die Lösung hängt stetig von den Daten $x_0$, $g(\cdot)$ ab, wie sich aus der GRONWALL-Ungleichung folgern lässt [17, § 12.V]. In Analogie zu Definition 4 wird der sog. *Fluss längs $g$* im Sinne der einwertigen Funktion $\vartheta_g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $(t, x_0) \longmapsto x(t)$ definiert. Genauer betrachtet werden wir folgende Resultate aus der Theorie gewöhnlicher Differenzialgleichungen verwenden [17]:

**Lemma 1** *Für jede beschränkte Funktion $g \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und $t \in \mathbb{R}$ ist $\vartheta_g(t, \cdot) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ein $C^1$-Diffeomorphismus, und seine* JACOBI*-Matrix $D_x\vartheta_g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$ ist stetig mit*

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial}{\partial t}\; \det\, D_x\vartheta_g(t, x) \;&=\; (\operatorname{div}\, g)\,(\vartheta_g(t, x)) \,\cdot\, \det\, D_x\vartheta_g(t, x), \\ D_x\vartheta_g(0, x) \;&=\; \mathbb{I}_n\,. \end{aligned}$$

*Ferner impliziert die Eindeutigkeit der Lösung zum autonomen Anfangswertproblem:*

$$\vartheta_g(t,\,\cdot\,)^{-1} \;=\; \vartheta_{-g}(t,\,\cdot\,) \;=\; \vartheta_g(-t,\,\cdot\,).$$

Daraus lassen sich einige Eigenschaften erreichbarer Mengen folgern, die durch die üblichen Stetigkeitsabschätzungen für Lösungen bzgl. gegebener Daten recht einfach erweitert werden können. Das erscheint insgesamt als eine geometrisch anschauliche Übungsaufgabe zu gewöhnlichen Differenzialgleichungen:

**Korollar 4** *$g \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ sei beschränkt, $s, t \in \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nichtleer, offen sowie $M \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige nichtleere Menge. Dann gilt:*

1. *Halbgruppeneigenschaft:* $\vartheta_g(s+t, M) \;=\; \vartheta_g\,(t,\, \vartheta_g(s, M)) \;\subset\; \mathbb{R}^n$.
2. *Die Menge $\vartheta_g(t, \Omega) \subset \mathbb{R}^n$ ist offen.*
3. *Der Abschluss $\overline{\vartheta_g(t, \Omega)} \subset \mathbb{R}^n$ ist gleich der erreichbaren Menge $\vartheta_g(t, \overline{\Omega})$ des Abschlusses $\overline{\Omega}$.*
4. *Der topologische Rand $\partial\,\vartheta_g(t, \Omega) \subset \mathbb{R}^n$ ist $\vartheta_g(t, \partial\Omega)$, d.h. die erreichbare Menge des Randes.*
5. *Die Graphen $\bigcup\limits_{t\in\mathbb{R}} \Big(\{t\} \times \overline{\vartheta_g(t, \Omega)}\Big)$ und $\bigcup\limits_{t\in\mathbb{R}} (\{t\} \times \partial\,\vartheta_g(t, \Omega)) \;\subset\; \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ sind abgeschlossen.*
6. *Der topologische Rand des Graphen $\bigcup\limits_{t\in\mathbb{R}} \Big(\{t\} \times \overline{\vartheta_g(t, \Omega)}\Big)$ ist identisch mit dem Graphen des Randes $\bigcup\limits_{t\in\mathbb{R}} (\{t\} \times \partial\,\vartheta_g(t, \Omega))$.*

### 3.3 **Beweis von Proposition 6 (i) und (ii)**

Dank Lemma 1 ergibt die Transformationsformel für LEBESGUE-Integrale zu jeder Zeit $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(t) - \mathcal{J}(0) \;&=\; \mathcal{L}^n\big(\vartheta_g(t,\Omega)\big) \;-\; \mathcal{L}^n(\Omega) \;=\; \int_\Omega \big|\det\, D_x\vartheta_g(t,x)\big| \; d\mathcal{L}^n x \;-\; \mathcal{L}^n(\Omega) \\ &=\; \int_\Omega \big(\big|\det\, D_x\vartheta_g(t,x)\big| \;-\; 1\big) \;\; d\mathcal{L}^n x\,, \end{aligned}$$

und dabei gewährleistet Lemma 1, dass die Determinante der JACOBI-Matrix immer positiv ist. Aus dem LEBESGUE'schen Theorem von der majorisierten Konvergenz schließen wir

$$\begin{aligned} \lim_{t\downarrow 0} \frac{\mathcal{J}(t) \,-\, \mathcal{J}(0)}{t} \;&=\; \lim_{t\downarrow 0} \int_\Omega \frac{\det\, D_x\vartheta_g(t,x) \;-\; 1}{t} \;\; d\mathcal{L}^n x \\ &=\; \int_\Omega \partial_t \,\det\, D_x\vartheta_g(t,x)\Big|_{t=0} \;\; d\mathcal{L}^n x \;\;=\;\; \int_\Omega \mathrm{div}\; g(x) \;\; d\mathcal{L}^n x. \end{aligned}$$

Insbesondere existiert also der behauptete einseitige Limes für $t \downarrow 0$.

### 3.4 **Beweis von Proposition 6 (iii)**

Im wesentlichen passen wir die Beweisargumente von Korollar 3 (über Hyperflächen der Klasse $C^1$) an die neue Situation an. Die dabei verwendete Koordinatentransformation lässt sich als ein lokaler Wechsel von EULER- zu LAGRANGE-Koordinaten verstehen.

Aus Eigenschaft (ii) geht bereits hervor, dass der einseitige Limes in $\frac{d^+}{dt^+}\,\mathcal{J}(0)$ *linear* bzgl. des Vektorfeldes $g \in C^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ ist. Daher können wir uns bei den weiteren Überlegungen auf die zusätzliche Annahme

$$\langle g,\; \nu_\Omega\rangle \;\geq\; 1 \qquad \text{auf ganz } \partial\Omega \subset \mathbb{R}^n \tag{7}$$

beschränken, denn: Zum äußeren Einheitsnormalenfeld $\nu_\Omega \in C^0(\partial\Omega,\mathbb{R}^n)$ gibt es eine approximierende Funktion $\widehat{\nu} \in C^1_c(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ mit $|\nu_\Omega - \widehat{\nu}| < \frac14$ auf $\partial\Omega$, und dann erfüllt das Hilfsvektorfeld $g + \alpha\cdot\widehat{\nu} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit einem hinreichend großen Skalierungsparameter $\alpha > 0$ die Voraussetzungen von Proposition 6 ebenso wie Zusatzannahme (7).
Anschaulich ausgedrückt, weist das Vektorfeld $g$ nun am Rand $\partial\Omega$ jeweils "nach außen". Es ist geometrisch zu erwarten, dass die erreichbaren Mengen $\Omega(t) \overset{\text{Def.}}{=} \vartheta_g(t,\Omega) \subset \mathbb{R}^n$ (mit zunehmender Zeit $t$ nahe 0) strikt expandieren.

Genauer betrachtet lässt sich aus den geometrischen Eigenschaften erreichbarer Mengen in Korollar 4 und Zusatzannahme (7) folgern: Mit einem hinreichend kleinen $\tau > 0$ sind folgende Bedingungen für alle $t, T \in ]-\tau,\tau[$ mit $t < T$ erfüllt

$$\begin{cases} (a) \quad \langle g,\; \nu_{\Omega(t)}\rangle \;\geq\; \frac12 \quad \text{auf ganz } \partial\Omega(t) \\ (b) \quad \Omega(T) \;=\; \Omega(t) \,\cup \displaystyle\bigcup_{s\in[t,T[} \partial\Omega(s), \end{cases} \tag{8}$$

wobei die Mengen auf der rechten Seite von Bedingung (b) sogar paarweise disjunkt sind. (Die technischen Zwischenschritte zu dieser Schlussfolgerung werden später in Lemma 3 formuliert und bewiesen.)
Für die angestrebte Limesbetrachtung steht uns nun eine Parametrisierung von $\Omega(T) \setminus \Omega(0)$ mittels (sog. minimaler) Zeit zur Verfügung. Im Vergleich mit der Beweisidee zu Proposition 3 wird sie gewissermaßen die Rolle der Normalkomponenten übernehmen:

**Lemma 2** *Neben den Voraussetzungen von Proposition 6 gelte Zusatzannahme (7) für die offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, ihren topologischen Rand $\partial\Omega$, ihre Einheitsnormalen $\nu_\Omega \in C^0(\partial\Omega, \mathbb{R}^n)$ und das beschränkte Vektorfeld $g \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Zu einer beliebigen Karte $\varphi \in C^1(O, \mathbb{R}^n)$ von $\partial\Omega$ bezeichne $V \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge mit $\varphi(O) = \partial\Omega \cap V$.*

*Dann gilt für jede stetige Funktion $\alpha : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger in $V$:*

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t} \cdot \Big( \int_{\vartheta_g(t,\Omega)} \alpha(y)\ d\mathcal{L}^n y \ - \int_\Omega \alpha(y)\ d\mathcal{L}^n y \Big) \ = \ \int_{\partial\Omega} \alpha\ \langle g,\ \nu_\Omega \rangle\ d\sigma_z\,.$$

Angewendet auf die Funktionen einer Zerlegung der Eins (bzgl. einer hinreichend feinen Überdeckung von $\overline{\Omega}$), führt dieses Lemma direkt zur behaupteten Teilaussage (iii) von Proposition 6 und schließt damit den Beweis des GAUSS'schen Integraltheorems 1.

*Beweis (von Lemma 2)* Wieder bezeichne $\Omega(t) := \vartheta_g(t, \Omega)$ für $t \in \mathbb{R}$. Zeitparameter $\tau > 0$ werde so klein gewählt, dass

– Bedingungen (8) (mit paarweise disjunkten Mengen auf der rechten Seite) erfüllt sind und
– die Inklusion $\vartheta_g(t, \text{supp } \alpha) \subset V$ für alle $t \in [-\tau, \tau]$ gilt, z.B. $\tau < \frac{\text{dist}(\text{supp } \alpha,\ \mathbb{R}^n\setminus V)}{\|g\|_{\sup} + 1}$.

Der Fluss längs $g$, d.h. die einwertige Funktion $\vartheta_g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, ist stetig partiell differenzierbar, wie aus $g \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und Lemma 1 folgt.
Außerdem ist $\vartheta_g(t, \cdot) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ein $C^1$-Diffeomorphismus für jede Zeit $t \in \mathbb{R}$. Also ist $\partial\Omega(t) = \vartheta_g(t, \partial\Omega)$ eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ der Klasse $C^1$. Insbesondere ist die Komposition $O \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $x \longmapsto \vartheta_g\big(t,\ \varphi(x)\big)$ eine Karte von $\partial\Omega(t)$. Ähnlich den Normalkoordinaten definieren wir nun

$$\Phi : \ \ O \times ]-\tau,\ \tau[ \longrightarrow \mathbb{R}^n, \qquad (x, t) \ \longmapsto\ \vartheta_g\big(t,\ \varphi(x)\big)$$

und stoßen sukzessive auf folgende Eigenschaften:

- $\Phi$ ist injektiv, denn $\varphi$ ist eine Karte von $\partial\Omega$, und nach Wahl von $\tau$ (hinsichtl. Gleichung (8.b)) gilt $\Phi(O, t_1) \cap \Phi(O, t_2) = \emptyset$ für alle $t_1 \neq t_2$ in $]-\tau, \tau[$.

- $\Phi$ ist stetig differenzierbar mit der Matrix $D\Phi(x, t) = \big(\partial_x \Phi(x, t) \bigm| \partial_t \Phi(x, t)\big) \in \mathbb{R}^{n \times ((n-1)+1)}$.

- $D\Phi(x, t)$ ist invertierbar für jedes $(x, t) \in O\times ]-\tau,\ \tau[$, denn: $\Phi(\cdot, t) : O \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ist eine Karte von $\partial\Omega(t)$, und somit spannt $\partial_x\Phi(x, t)$ jeweils den $(n-1)$-dimensionalen Tangenzialraum von $\partial\Omega(t)$ in $\Phi(x, t)$ auf. Der letzte Spaltenvektor von $D\Phi(x, t)$ ist $\partial_t\Phi(x, t) = g\big(\Phi(x, t)\big)$ und besitzt eine positive Normalkomponente dank Bedingung (8.a). Also sind er und die anderen Spaltenvektoren linear unabhängig.

- $\Phi : O\times ]-\tau,\ \tau[ \longrightarrow \Phi\big(O\times ]-\tau,\ \tau[\big) \subset \mathbb{R}^n$ ist ein Diffeomorphismus, denn es ist bijektiv und – laut Theorem von der lokalen Inversen – ein lokaler Diffeomorphismus.

- Des weiteren ist für alle $t \in [0, \tau[$

$$\partial\Omega(t) \cap \text{supp } \alpha \ = \ \Phi(O, t) \cap \text{supp } \alpha, \tag{9}$$

  denn: Jedes $z \in \partial\Omega(t) \cap \text{supp } \alpha$ erfüllt $z \in \partial\Omega(t) = \vartheta_g(t, \partial\Omega)$ und $\vartheta_g(-t, z) \in V$ (nach Wahl von $\tau$). Daraus folgt $\vartheta_g(-t, z) \in \partial\Omega \cap V = \varphi(O)$, d.h. $z \in \vartheta_g\big(t,\ \varphi(O)\big) \stackrel{\text{Def.}}{=} \Phi(O, t)$. Umgekehrt gibt es zu jedem $z \in \Phi(O, t) \cap \text{supp } \alpha$ nach Def. ein $x \in O$ mit $z = \vartheta_g(t,\ \varphi(x))$, und Korollar 4 (4.) führt zu $z \in \vartheta_g(t, \partial\Omega) = \partial\Omega(t)$.

Für die Integraldifferenz in der Behauptung schließen wir aus der Mengendarstellung (8.b) für jedes $t \in ]0,\tau[$

$$\begin{aligned}\int_{\Omega(t)} \alpha \; d\mathcal{L}^n y - \int_{\Omega(0)} \alpha \; d\mathcal{L}^n y &= \int_{\Omega(t)\setminus\Omega(0)} \alpha \; d\mathcal{L}^n y \\ &= \int_{\bigcup_{0\le s<t} \partial\Omega(s)} \alpha \; d\mathcal{L}^n y \overset{(9)}{=} \int_{\bigcup_{0\le s<t} \Phi(O,s)} \alpha \; d\mathcal{L}^n y.\end{aligned}$$

Der Transformationssatz für LEBESGUE-Integrale ergibt

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega(t)} \alpha \; d\mathcal{L}^n y - \int_{\Omega(0)} \alpha \; d\mathcal{L}^n y &= \int_0^t \int_O \alpha(\Phi(x,s)) \cdot |\det D\Phi(x,s)| \; d\mathcal{L}^{n-1}x \; ds \\ \Longrightarrow \quad & \frac{1}{t} \cdot \Big( \int_{\Omega(t)} \alpha \; d\mathcal{L}^n y - \int_{\Omega(0)} \alpha \; d\mathcal{L}^n y \Big) \longrightarrow & \int_O \alpha(\Phi(x,0)) \cdot |\det D\Phi(x,0)| \; d\mathcal{L}^{n-1}x \end{aligned}$$

beim Grenzübergang $t \downarrow 0$ aufgrund der Stetigkeit der Funktionen im Integranden. Die Kettenregel und Lemma 1 führen zur JACOBI-Matrix von $\Phi$ bei $t = 0$

$$\begin{aligned} D\Phi(x,t) &= \Big( D_x \vartheta_g(t,\,\cdot\,)|_{\varphi(x)} \circ D\varphi(x) \;\Big|\; g\big(\vartheta_g(t,\,\varphi(x))\big) \Big) \\ \Longrightarrow \quad D\Phi(x,0) &= \big( D\varphi(x) \;\big|\; g(\varphi(x)) \big)\,. \end{aligned}$$

Die zugehörige Determinante lässt sich nun durch dieselben Argumente bestimmen wie bei Gl. (5) in Korollar 3: Die Spaltenoperationen des GRAM-SCHMIDT'schen Orthogonalisierungsverfahrens, nur auf den letzten Spaltenvektor angewendet, ändern nichts an der Determinanten, und wir erhalten mittels Normalkomponente

$$\big|\det D\Phi(x,0)\big| = \big|\det \big( D\varphi(x) \,\big|\, g(\varphi(x)) \big)\big| = \big|\det \big( D\varphi(x) \,\big|\, \langle g(\varphi(x)),\, \nu_\Omega(x) \rangle \; \nu_\Omega(x) \big)\big|.$$

Entsprechend ist nun

$$\begin{aligned} \big|\det D\Phi(x,0)\big|^2 &= \left| \det \begin{pmatrix} D\varphi^t \\ \hline \langle g(\varphi),\, \nu_\Omega \rangle \;\, \nu_\Omega^t \end{pmatrix} \cdot \det \Big( D\varphi \,\Big|\, \langle g(\varphi),\, \nu_\Omega \rangle \;\, \nu_\Omega \Big) \right| \\ &= \left| \det \left( \begin{array}{c|c} D\varphi(x)^t \cdot D\varphi(x) & 0 \\ \hline 0 & |\langle g(\varphi(x)),\, \nu_\Omega(x) \rangle|^2 \end{array} \right) \right| \\ &= g_\varphi(x)^2 \cdot |\langle g(\varphi(x)),\, \nu_\Omega(x) \rangle|^2 \\ \overset{(7)}{\Longrightarrow} \quad \big|\det D\Phi(x,0)\big| &= g_\varphi(x) \;\cdot\; \langle g(\varphi(x)),\, \nu_\Omega(x) \rangle. \end{aligned}$$

Damit ist bewiesen: $\displaystyle \lim_{t\downarrow 0} \; \frac{1}{t} \cdot \Big( \int_{\Omega(t)} \alpha \; d\mathcal{L}^n y - \int_{\Omega(0)} \alpha \; d\mathcal{L}^n y \Big) = \int_{\partial\Omega} \alpha \; \langle g, \nu_\Omega \rangle \; d\sigma_z.$

□

Den Abschluss bilden die technischen Einzelheiten, welche die Existenz eines hinreichend kleinen Zeitparameters $\tau > 0$ mit den Forderungen (8) gewährleisten. Sie basieren auf den geometrischen Eigenschaften erreichbarer Mengen, die in Korollar 4 zusammengefasst wurden.

**Lemma 3** *Neben den Annahmen von Proposition 6 erfülle $g \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ Forderung (7). Dann gibt es ein hinreichend kleines $\tau > 0$ mit folgenden Eigenschaften:*

1. *Für jedes $t \in [-\tau, \tau]$ ist $\partial\Omega(t) = \vartheta_g(t, \partial\Omega)$ eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ der Klasse $C^1$, und das äußere Einheitsnormalenfeld $\nu_{\Omega(t)} : \partial\Omega(t) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ von $\Omega(t) \overset{\text{Def.}}{=} \vartheta_g(t, \Omega)$ erfüllt die Ungleichung $\langle g,\ \nu_{\Omega(t)}\rangle \geq \frac{1}{2}$ auf ganz $\partial\Omega(t)$.*

2. *Zu jedem $t \in ]-\tau, \tau[$ und $y \in \partial\Omega(t)$ gibt es ein $\sigma = \sigma(t, y) > 0$ mit $y \in \Omega(t + \delta)$ für alle $\delta \in ]0,\ \sigma[$.*

3. *Für alle $t_1, t_2 \in ]-\tau,\ \tau[$ mit $t_1 < t_2$ gilt $\overline{\Omega(t_1)} \subset \Omega(t_2)$.*

4. *Für alle $t_1, t_2 \in ]-\tau,\ \tau[$ mit $t_1 < t_2$ ist $\Omega(t_2) \setminus \Omega(t_1) \subset \mathbb{R}^n$ die paarweise disjunkte Vereinigung der topologischen Ränder $\partial\Omega(s) = \vartheta_g(s,\ \partial\Omega)$ für $s \in [t_1, t_2[$.*

*Beweis (von Lemma 3)* (1.) Wenn $\varphi \in C^1(O, \mathbb{R}^n)$ eine Karte von $\partial\Omega$ (mit offenem Definitionsbereich $O \subset \mathbb{R}^{n-1}$) ist, dann induziert die Komposition $O \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $x \longmapsto \vartheta_g(t, \varphi(x))$ eine $C^1$-Karte des Randes $\partial\Omega(t) = \vartheta_g(t,\ \partial\Omega)$, und die Abbildung $\mathbb{R} \times O \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $(t, x) \longmapsto \vartheta_g\,(t,\ \varphi(x))$ ist stetig differenzierbar. Durch die Darstellungen der Untermannigfaltigkeiten als Nullstellenmenge resultiert daraus, dass die äußeren Einheitsnormalen von $\Omega(t)$ stetig bzgl. Raum und Zeit sind:

$$\bigcup_{t \in \mathbb{R}} (\{t\} \times \partial\Omega(t)) \longrightarrow \mathbb{R}^n, \qquad (t, y) \longmapsto \nu_{\Omega(t)}(y) \qquad \text{stetig.}$$

Zusatzannahme (7), die $t = 0$ betrifft, und die Kompaktheit von $\overline{\mathbb{B}_1(\Omega)} \subset \mathbb{R}^n$ ermöglichen schließlich die Wahl eines hinreichend kleinen Zeitparameters $\tau > 0$, so dass zunächst $\partial\Omega(t) \subset \overline{\mathbb{B}_1(\Omega)}$ für alle $t \in [-\tau, \tau]$ ist und darüber hinaus die geforderte Ungleichung $\langle g,\ \nu_{\Omega(t)}\rangle \geq \frac{1}{2}$ erfüllt wird.

(2.) Als *äußeres* Einheitsnormalenfeld von $\Omega(t)$ besitzt $\nu_{\Omega(t)}$ in jedem Punkt $y \in \partial\Omega(t)$ die Eigenschaft: ein Vektor $\zeta \in \mathbb{R}^n$ erfüllt $\big\langle \zeta,\ \nu_{\Omega(t)}(y)\big\rangle < 0$ genau dann, wenn es ein hinreichend kleines $\varepsilon = \varepsilon(y, \zeta) > 0$ gibt mit $y + ]0, \varepsilon] \cdot \mathbb{B}_\varepsilon(\zeta) \subset \Omega(t)$. (Letzteres Kriterium charakterisiert einen Tangenzialvektor an $\Omega(t)$ in $y$ im Sinne von DUBOVITSKIJ-MILJUTIN [1, § 4.1.2].)
Auf (lediglich) dieser Eigenschaft, angewendet auf $\zeta := -g(y)$, beruht nun der indirekte Beweis:

Wenn Teilaussage (2.) falsch wäre, dann gäbe es eine positive Nullfolge $(\delta_j)_{j \in \mathbb{N}}$ mit $y \notin \Omega(t + \delta_j)$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Also ist jeweils $y \in \partial\Omega(t + \delta_j)$ oder $y \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega(t + \delta_j)}$. In beiden Fällen können wir zu jedem Index $j \in \mathbb{N}$ eine Folge $(x_{j,k})_{k \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^n \setminus \Omega(t + \delta_j)$ finden mit $x_{j,k} \longrightarrow y$ $(k \longrightarrow \infty)$. Wir "verfolgen" jeden Punkt $x_{j,k}$ längs $g$ zurück von der Zeit $t + \delta_j$ bis zur Zeit $t$ und stoßen auf

$$z_{j,k} := \vartheta_g(-\delta_j,\ x_{j,k}) = \vartheta_{-g}(\delta_j,\ x_{j,k}) \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega(t) \qquad (j, k \in \mathbb{N}).$$

Die Stetigkeit des Flusses längs $-g$ gewährleistet folgenden Limes

$$z_j := \lim_{k \to \infty} \vartheta_{-g}(\delta_j,\ x_{j,k}) = \vartheta_{-g}\Big(\delta_j,\ \lim_{k \to \infty} x_{j,k}\Big) = \vartheta_{-g}(\delta_j,\ y) \quad (j \in \mathbb{N}),$$

der ebenfalls in der abgeschlossenen Menge $\mathbb{R}^n \setminus \Omega(t)$ liegen muss. Insbesondere gibt es jeweils eine eindeutig bestimmte Lösung $y_j(\cdot)$ der Differenzialgleichung $y_j' = -g(y_j)$ mit $y_j(t) = y \in \partial\Omega(t)$, $y_j(t + \delta_j) = z_j \notin \Omega(t)$. Dabei ist allerdings $-g(y) = y_j'(t) = \lim\limits_{j \to \infty} \frac{y_j(t+\delta_j) - y_j(t)}{\delta_j} = \lim\limits_{j \to \infty} \frac{z_j - y}{\delta_j}$.

Zu jedem vorgegebenem $\varepsilon > 0$ erhalten wir somit $z_j \in y + \delta_j \cdot \mathbb{B}_\varepsilon(-g(y))$ für alle hinreichend großen Indices $j \in \mathbb{N}$. Für ein hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ resultiert also aus $\langle -g(y), \nu_{\Omega(t)}(y) \rangle < 0$

$$z_j \;\in\; y + \;]0, \varepsilon] \cdot \mathbb{B}_\varepsilon(-g(y)) \;\subset\; \Omega(t)$$

für alle hinreichend großen $j \in \mathbb{N}$ – ein Widerspruch zu $z_j \notin \Omega(t)$.

(Ein entsprechendes allgemeineres Resultat in der Theorie gewöhnlicher Differenzialgleichungen ist für sog. strikt invariante Mengen bekannt und lässt sich ähnlich dem Theorem von Nagumo beweisen [17, § 10.XV]. Hier wird bewusst auf jene tiefer liegenden Mittel verzichtet.)

(3.) Ein indirekter Beweis besitzt den konkreten Vorteil, dass wir auf "lokale" Aussagen stoßen:
Angenommen, es gäbe $t_1, t_3 \in [-\tau, \tau]$ mit $t_1 < t_3$ und $\overline{\Omega(t_1)} \not\subset \Omega(t_3)$, d.h. es gäbe mindestens einen Punkt $y \in \overline{\Omega(t_1)} \setminus \Omega(t_3)$. Dazu lässt sich $t_2 := \sup \big\{ t \in [t_1, t_3] \;\big|\; y \in \overline{\Omega(s)} = \vartheta_g(s, \overline{\Omega})$ für alle $s \in [t_1, t] \big\}$ wählen.
Wir werden gleich folgern, dass $y \in \partial\Omega(t_2)$ ist und es eine Folge $s_k \downarrow t_2$ gibt mit $y \notin \overline{\Omega(s_j)}$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Aber das steht im Widerspruch zu Teilaussage (2.).
Als Konsequenz von Korollar 4 (5.) ist erstens $y \in \vartheta_g(t_2, \overline{\Omega}) = \overline{\Omega(t_2)}$ und somit $t_2 < t_3$. Die Definition von $t_2$ mittels Supremum gewährleistet daher eine Folge $s_k \downarrow t_2$ in $]t_2, t_3]$ mit $y \notin \overline{\Omega(s_k)}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Anders formuliert gehört kein Tupel $(s_k, y)$, $k \in \mathbb{N}$, zum Graphen $\bigcup_{t \in \mathbb{R}} \Big( \{t\} \times \overline{\Omega(t)} \Big)$. Deshalb liegt der Limes $(t_2, y)$ in dessen topologischen Rand, und schließlich ergibt Korollar 4 (6.) $y \in \vartheta(t_2, \partial\Omega) = \partial\Omega(t_2)$.

(4.) Teilaussage (3.) impliziert, dass die topologischen Ränder $\partial\Omega(s_1)$, $\partial\Omega(s_2)$ für verschiedene $s_1, s_2 \in ]-\tau, \tau[$ disjunkt sind und dass gilt:

$$\bigcup_{s \in [t_1, t_2[} \partial\Omega(s) \;\;\subset\;\; \Omega(t_2) \setminus \Omega(t_1)\,.$$

Für die umgekehrte Inklusion lässt sich zu jedem Punkt $y \in \Omega(t_2) \setminus \Omega(t_1)$ eine Zeit $s \in [t_1, t_2[$ mit $y \in \partial\Omega(s)$ angeben, nämlich durch die sog. *minimale Zeit*

$$T : \Omega(t_2) \setminus \Omega(t_1) \;\longrightarrow\; [t_1, t_2], \quad y \;\longmapsto\; \inf \big\{ t \geq t_1 \;\big|\; y \in \overline{\Omega(t)} \,\big\}$$

Analog zum Beweis von Teilaussage (3.) resultiert aus Korollar 4 (5.), (6.): $y \in \partial\Omega\big(T(y)\big)$ für alle Punkte $y \in \Omega(t_2) \setminus \Omega(t_1)$. □

**Danksagung** Der Autor dankt Tobias Weth, Johann Baumeister und Peter Kloeden für interessante Diskussionen über aktuelle didaktische Trends bei der Integrationstheorie.
Nach Einreichen der Erstfassung bei einer Fachzeitschrift im Mai 2011 erfuhr der Autor, dass Theo de Jong seinen stark geometrisch orientierten Zugang zur Maßtheorie aus [3] auf Untermannigfaltigkeiten erweitert und in seinen Vorlesungen behandelt hatte. Dabei sind Gemeinsamkeiten mit dem Beweis von Proposition 3 zutage getreten – aber unter dem Aspekt einer völlig anderen Zielsetzung. Bei Theo de Jong möchte sich der Verfasser für den Hinweis bedanken, dass ein geometrisch motivierter Beweis des Gauss'schen Integralsatzes weiterhin von didaktischem Interesse sei.

## Literatur

1. Aubin, J.-P. und Frankowska, H., Set-Valued Analysis. Birkhäuser, Boston (1990)
2. Barner, M. und Flohr, F., Analysis II, 3. Auflage. de Gruyter, Berlin (1996)
3. de Jong, Th., Die geometrische Definition des Lebesgueschen Integrals. *Math. Semesterber.* **55**, No. 2, pp.203-211 (2008)
4. Delfour, M.C.und Zolésio, J.-P., Shapes and geometries, second edition. SIAM, Philadelphia (2011)

5. Duschek, A., Vorlesungen über höhere Mathematik, Band II, 3. Auflage. Springer, Wien (1963)
6. Federer, H., Geometric Measure Theory. Springer, Heidelberg (1969)
7. Federer, H., Curvature measures. *Trans. Amer. Math. Soc.* **93**, pp.418-491 (1959)
8. Forster, O., Analysis 2, 8. Auflage. Vieweg & Teubner, Wiesbaden (2008)
9. Forster, O., Analysis 3, 6. Auflage. Vieweg & Teubner, Wiesbaden (2011)
10. Goldhorn, K.-H. und Heinz, H.-P., Mathematik für Physiker 2. Springer, Heidelberg (2007)
11. Jost, J., Postmodern analysis, 3. Auflage. Universitext. Springer, Berlin (2005)
12. König, H., Ein einfacher Beweis des Integralsatzes von Gauß, *Jber. Deutsch. Math.-Verein.* **66** Abt. 1, 119-138 (1963/1964)
13. Königsberger, K., Analysis 2, 5. Auflage. Springer, Heidelberg (2004)
14. Krickeberg, K., Über den Gaußschen und den Stokesschen Integralsatz I – III, *Math. Nachr.* **10**, 261-314 (1953). *Math. Nachr.* **11**, 35-60 (1954). *Math. Nachr.* **12**, 341-365 (1954).
15. von Mangoldt, H. und Knopp, K., Einführung in die höhere Mathematik, 3. Band, 11. Auflage. Hirzel Verlag, Leipzig (1959)
16. Walter, W., Analysis 2, 5. Auflage. Springer, Heidelberg (2002)
17. Walter, W., Gewöhnliche Differentialgleichungen, 7. Auflage. Springer, Heidelberg (2000)