



Universitätsbibliothek  
Heidelberg

# Ueber den Ursprung und Sinn der geometrischen Sätze; Antwort gegen Herrn Professor Land.

Originaltext für die in „Mind“ April 1878 No. X. p. 212-224  
veröffentlichte englische Uebersetzung.

von **Hermann von Helmholtz**

S. 640–660 aus  
Helmholtz, Herrmann: Wissenschaftliche Abhandlungen. - Leipzig : Barth  
Bd. 2. 1883  
UB-Signatur: O 416-10

Neu herausgegeben von **Gabriele Dörfinger**.  
Universitätsbibliothek Heidelberg, 2007.

Der Text wurde durch ein Texterkennungsprogramm wiedergewonnen; die Seiten-  
zählung des Originals ist am Seitenrand angegeben.

**Heidelberger Texte zur Mathematikgeschichte**

Herr Professor LAND hat in Nr. V. des „Mind“ meine Abhandlung „Ueber den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome“<sup>1</sup> einer Kritik unterzogen, auf welche ich hier zu antworten versuchen werde. (640)

Es sind wesentlich zwei Punkte, über welche wir verschiedener Meinung sind.

Ich halte dafür, dass durch die neueren Untersuchungen über die erweiterten Formen der Geometrie, oder durch die sogenannten *metamathematischen*<sup>2</sup> Untersuchungen folgende Sätze festgestellt sind:

1) KANT's Beweis für den Ursprung a priori der geometrischen Axiome, welcher darauf basirt ist, dass keine von denselben abweichenden Raumverhältnisse in der Anschauung auch nur vorgestellt werden können, ist unzureichend, da die als Grund angeführte Behauptung thatsächlich unrichtig ist.

2) Wenn trotz der Mangelhaftigkeit des Beweises die Annahme festgehalten wird, dass die Axiome als Gesetze unserer Raumanschauungen wirklich a priori gegeben wären, so würden zweierlei Arten der Gleichwerthigkeit von Raumgrößen unterschieden werden müssen, nämlich: (641)

1) Die *subjective Gleichheit* in der hypothetischen transcendenten Anschauung.

2) Die *objective Gleichwerthigkeit* der reellen Substrate solcher Raumgrößen, welche sich im Ablauf physischer Verhältnisse und Vorgänge bewährt.

Dass die letztere mit der ersteren zusammenfiele, könnte nur durch Erfahrung bewiesen werden. Nur auf die letztere käme es an bei unserem wissenschaftlichen und praktischen Verhalten der objectiven Welt gegenüber. Wenn beide nicht übereinstimmten, würde die erstere nur den Werth eines *falschen Scheines* haben.

Uebrigens ist es ein Missverständniss von Herrn Professor LAND, wenn er glaubt, ich hätte gegen die Auffassung des Raumes als einer uns Menschen a priori gegebenen, für uns nothwendigen, also in KANT's Sinne transcendenten Form der Anschauung Widerspruch erheben wollen. Das war durchaus nicht meine Absicht. Freilich werden meine Ansichten über die Beziehungen zwischen dieser transcendenten Form und dem Reellen, wie ich sie im dritten Abschnitte dieser Abhandlung auseinandergesetzt habe, wohl nicht ganz nach dem Sinne vieler Anhänger KANT's oder SCHOPENHAUER's sein. Aber der Raum kann eine solche Form der Anschauung im KANT'schen Sinne sein, ohne dass diese Form der Anschauung nothwendig die Axiome einschliesst.

Um an ein ganz ähnliches Verhältniss zu erinnern, so liegt es unzweifelhaft in der Organisation unseres Sehapparates, dass Alles, was gesehen wird, nur als eine räumliche Vertheilung von Farben gesehen werden kann. Das ist die uns angeborene Form der Gesichtswahrnehmungen. Aber durch diese Form ist in keiner Weise präjudicirt, wie die Farben, welche wir sehen, sich räumlich neben ein-

<sup>1</sup>S. meine Populäre wissensch. Vorträge. Heft III. S. 21-54.

<sup>2</sup>Der Namen ist allerdings in ironischem Sinne von Gegnern gegeben, nachgebildet der *Metaphysik*. Da aber die Bearbeiter der *Nicht-Euklidischen Geometrie* deren objective Wahrheit nie behauptet haben, so können sie den Namen sehr wohl acceptiren.

ander ordnen und zeitlich auf einander folgen sollen. In demselben Sinne, meine ich, könnte das Vorstellen aller äusseren Objecte in Raumverhältnissen die einzig mögliche und a priori gegebene Form sein, in der wir Objecte überhaupt vorstellen können, ohne dass dadurch irgend eine Nöthigung gesetzt zu sein braucht, dass nach oder neben gewissen bestimmten Raumwahrnehmungen eine andere bestimmte eintreten müsse, dass also zum Beispiel jedes geradlinige gleichseitige Dreieck Winkel von  $60^\circ$  habe, wie gross auch die Seiten sein mögen. Bei KANT allerdings ist der Beweis, dass der Raum eine a priori gegebene Form der Anschauung sei, wesentlich gestützt auf die Meinung, die Axiome seien synthetische Sätze, gegeben a priori. Wenn man aber auch diesen Satz und den darauf gestützten Beweis fallen lässt, so könnte immerhin doch noch die Form der Raumvorstellung, als die nothwendige Form der Anschauung des Nebeneinanderstehens von Verschiedenem, a priori gegeben sein. Es würde dabei kein wesentlicher Zug des KANT'schen Systems verloren gehen, im Gegentheil würde dieses System an Consequenz und Verständlichkeit gewinnen, weil damit auch der wesentlich auf die überzeugende Kraft der geometrischen Axiome gebaute Beweis für die Möglichkeit einer Metaphysik fortfiel, von welcher Wissenschaft KANT selbst doch weiter nichts zu entdecken wusste, als die geometrischen und naturwissenschaftlichen Axiome. Was die letzteren betrifft, so sind sie theils von bestrittener Richtigkeit, theils einfache Folgerungen aus dem Principe der Causalität, das heisst aus dem Triebe unseres Verstandes, alles Geschehende als gesetzmässig, d. h. als begreiflich zu betrachten. Da nun KANT's Kritik sonst überall gegen die Zulässigkeit metaphysischer Folgerungen gerichtet ist, so scheint mir sein System von einer Inconsequenz befreit und ein klarerer Begriff von dem Wesen der Anschauung gewonnen zu werden, wenn man den apriorischen Ursprung der Axiome aufgibt, und die Geometrie als die erste und vollendetste der Naturwissenschaften ansieht. (642)

Ich gehe jetzt zum Beweise der beiden oben hingestellten Thesen über.

## I.

*Der Ursprung der geometrischen Axiome a priori ist nicht erwiesen.* KANT's Beweis dafür stützt sich auf die Behauptung, man könne keine von der Geometrie des EUKLIDES abweichenden Raumverhältnisse sich anschaulich vorstellen. Nun haben aber die von mir in meinem früheren Aufsätze besprochenen *metamathematischen* Untersuchungen, d. h. die Untersuchungen über logisch consequente Systeme der Geometrie, die in Bezug auf die Zahl der Dimensionen oder in Bezug auf die Axiome abweichen von *Euklid's* Geometrie, gezeigt, dass man in der That solche Systeme aufstellen und vollkommen consequent durchführen kann, ebenso wie die dazu gehörigen Systeme der Mechanik. Ich selbst habe mich bemüht nachzuweisen, wie die Objecte in einem sphärischen oder pseudosphärischen Räume uns in der sinnlichen Wahrnehmung erscheinen (643)

würden. Ueber die Richtigkeit jener hauptsächlich im Wege der analytischen Geometrie ausgeführten geometrischen Deductionen, soweit sie mathematisch sind, ist, so viel ich sehe, keine Frage, ebenso wenig über die vollständige Durchführbarkeit der entsprechenden Systeme der Mechanik, welche denselben Grad freier Beweglichkeit fester Körper und dieselbe Unabhängigkeit des Verlaufes aller mechanischen und physikalischen Processe vom Ort, wo sie vorgehen, ergeben, wie die *Euklidische* Geometrie diese voraussetzt. Dann ergibt sich auch leicht und unzweideutig, wie die entsprechenden zur Raumunterscheidung brauchbaren Sinnesempfindungen menschlicher Wesen in solchen metamathematischen Räumen ausfallen müssten. Namentlich ergibt die von Herrn BELTRAMI gefundene Darstellungsweise des pseudosphärischen Raumes in einer Kugel des *Euklidischen* Raumes unmittelbar, welche Gesichtsbilder der pseudosphärische oder sphärische Raum ergeben würde. In der That würde jedes Gesichtsbild ruhender Objecte für den ruhenden Beobachter genau dasselbe<sup>3</sup> sein, wie das des entsprechenden Abbildes in BELTRAMI's Kugel vom Mittelpunkte aus gesehen. Unterscheiden würde sich nur die Folge der Gesichtsbilder, welche eintreten, wenn der Beobachter oder wenn feste Objecte sich bewegen. Also die Regel, nach welcher aus einem oder mehreren zuerst gegebenen Gesichtsbildern bei der Bewegung sich andere folgende herleiten, würde verändert sein. Ich habe dabei noch hervorgehoben, dass diese Abweichungen durchaus nicht erheblich und auffallend zu sein brauchten. Die Menschen haben lange Zeit auf dem, wie sie meinten, ebenen Erdboden gewohnt, ehe sie merkten, dass derselbe sphärisch sei, und haben sich lange genug gegen diese Wahrheit ebenso heftig gesträubt, wie unsere KANTIANER sich jetzt gegen die Vorstellbarkeit des pseudosphärischen Raumes sträuben. Die Abweichungen im pseudosphärischen Räume würden etwa ähnlicher Art und bei entsprechender Grosse des Krümmungsmaasses nicht nothwendig auffallender sein müssen, als die', welche die Kugelgestalt der Erde einem Manne verrathen können, der sich im Umkreise einiger Meilen hin und her bewegt. (644)

Wenn nun die Frage discutirt werden soll, ob die Raumverhältnisse in metamathematischen Räumen anschaulich vorstellbar seien, so werden wir zunächst feststellen müssen, nach welcher Norm wir die Anschaubarkeit eines Objectes zu beurtheilen haben, welches wir nie angeschaut haben.

Ich habe zu dem Ende eine Definition dessen aufgestellt, was wir als anschaulich verstellbar anerkennen müssten, die dahin lautet, dass dazu erforderlich sei die vollständige Vorstellbarkeit derjenigen Sinneseindrücke, welche das betreffende Object in uns nach den bekannten Gesetzen unserer Sinnesorgane unter allen denkbaren Bedingungen der Beobachtung erregen, und wodurch es sich von anderen ähnlichen Objecten unterscheiden würde. Ich bin der Meinung, dass diese Definition strengere und bestimmtere Anforderungen für die Möglichkeit der An-

---

<sup>3</sup>Vorausgesetzt, dass die Distanz der beiden Augen gegen den imaginären Krümmungsradius des Raumes vernachlässigt werden kann.

schauung stellt als irgend eine bisher aufgestellte, und so weit ich sehe, bestreitet nicht einmal Herr Professor LAND, dass für die Objecte der sphärischen und pseudosphärischen Räume dies hier Verlangte geleistet werden könne.

In einer anderen Beziehung dagegen wird nothwendig die Vorstellung von Objecten, die wir oft wahrgenommen haben oder die im Ganzen oder in ihren einzelnen Theilen häufig wahrgenommenen Dingen sehr ähnlich sind, jeder Vorstellung eines Objectes, auf welches diese Prädicate nicht passen, überlegen sein, nämlich in der Schnelligkeit und Leichtigkeit, mit der wir uns die verschiedenen Erscheinungsweisen der betreffenden Objecte unter verschiedenen Bedingungen der Beobachtung im Voraus vorstellen oder auch in der Erinnerung würden durchlaufen können. Diese Leichtigkeit und Schnelligkeit wird der Vorstellung eines nie gesehenen Objectes um so mehr fehlen müssen, je seltener und je weniger genau der betreffende Beobachter Aehnliches jemals wahrgenommen und beobachtet hat. Nun haben wir sphärische und pseudosphärische Raumgebilde von drei Dimensionen absolut niemals vor uns gehabt. Der Geometer, welcher die Anschauung von den ohne Dehnung und ohne Aenderung des Krümmungsmaasses biegsamen Flächen und auf ihnen ausgeführten Zeichnungen in sich ausgebildet hat, findet darin nahe liegende analoge Verhältnisse, und der Physiologe, welcher die Combinationen der Sinneseindrücke unter möglichst mannigfaltigen Bedingungen studirt hat, wie sie im alltäglichen Leben gewöhnlich nicht vorkommen, ist mehr daran gewöhnt sich ungewohnte aber doch streng gesetzmässige Reihen folgen von Sinneseindrücken vorzustellen, als wer dergleichen Studien nie getrieben hat. Ich bitte daher um Verzeihung, wenn ich nicht einsehe, warum der Umstand, dass ich „fresh from physiology of the senses“ zu erkenntnistheoretischen Untersuchungen gekommen bin, für mich gar ein Hinderniss in der Entscheidung solcher Fragen, wie die vorliegende ist, sein sollte. (645)

Da nun die metamathematischen Raumverhältnisse von uns nie gesehen worden sind, so kann die Schnelligkeit und Leichtigkeit der Vorstellung wechselnder Ansichten der Gegenstände in denselben, welche durch alltägliche Erfahrung und Uebung erworben wird, von dieser Anschauung nicht verlangt werden, sondern nur, dass überhaupt, wenn auch langsam und durch Ueberlegung die ihnen entsprechende Reihe der Sinneseindrücke vollständig und widerspruchlos zu finden sei. Wir stossen übrigens auf ganz ebenso grosse und ähnliche Schwierigkeiten des Vorstellens, wenn wir uns die Führung eines in einen verwickelten Knoten geschlungenen Fadens, oder ein vielfächiges Krystallmodell oder ein Gebäude von verwickeltem Bauplan vorstellen wollen, ohne es gesehen zu haben, obgleich die Anschaubarkeit dieser letzteren Gebilde durch thatsächliche Anschauung erwiesen werden kann.

Leider hat Herr Professor LAND nicht erklärt, ob er gegen meine Definition des Vorstellbaren etwas einzuwenden habe, hat auch selbst keine Definition dafür aufgestellt, obgleich er mehrere Male andeutet, dass er sich etwas Anderes unter Anschaubarkeit denke. So S. 41: „*We do not find that they* (non-Euclidean) *succeed on this* (making metamathema-

(646)

tal spaces imaginable) *unless the notion* of imaginability be stretched far beyond what Kantians and others understand by the word.“ Ebenda-selbst behauptet er, nur das, was zusammenhängend in unserem Räume construirt werden könne, dürfe als „imagined“ betrachtet werden. Dann S. 45: „...*non-Euclidean*s try to make imaginable that which is not so in the sense required for argumentation in this case.“ Wenn unter Argumentation hier verstanden werden soll die Erörterung der Frage, ob unsere Ueberzeugung von der thatsächlichen Richtigkeit der Axiome des Euklides in unserer objectiven Welt einen Schluss auf ihren Ursprung a priori berechtige, meine ich, dass gerade die von mir oben aufgestellte Definition der Anschaubarkeit die einzig entscheidende sei. Wenn man von vornherein definirt: „als räumlich anschaulich gilt nur, wovon ich ein Modell thatsächlich mit wirklichen Körpern ausführen lassen kann“, dann ist jede Erörterung über unsere Streitfrage allerdings abgeschnitten; dann giebt aber die durch eine solche Definition gesetzte alleinige Anschaulichkeit des Euklidischen Raumes auch nicht die geringste Entscheidung dafür, ob ihr Ursprung in einem Gesetz der objectiven Welt zu suchen sei oder ob sie in der Organisation unseres Geistes begründet sei. Auch glaube ich nicht, dass Hr. Professor LAND die Forderung in diesem Sinne, den seine Worte allerdings ausdrücken, verstanden wissen will. Ich kann nur nicht erkennen, dass er etwas Anderes vermisst, als die durch millionenfach wiederholte Anschauung ähnlicher Verhältnisse bedingte Leichtigkeit und Bereitwilligkeit, mit der die verschiedenen Ansichten des verlangten Objectes in der Phantasie auftauchen.

Die Thatsache übrigens, dass LOBATSCHESKY auf rein synthetischem Wege, also mit Hülfe vorgestellter geometrischer Constructionen ein vollständiges und mit den Ergebnissen der analytischen Untersuchung genau übereinstimmendes System der pseudosphärischen Geometrie ausgearbeitet hat, zeigt, dass diese letztere auch in allen ihren Einzelheiten durch Anschauung aufgefasst werden kann.

(647)

Was die Anwendung der analytischen Methoden bei den metamathematischen Untersuchungen betrifft, so ist diese vollkommen gerechtfertigt, da es sich hier um die Vorstellung eines nur wahrgenommenen Objectes; handelt, dessen Begriff, gleichsam dessen architektonischer Plan zunächst festgestellt, als widerspruchslos nachgewiesen und so weit nach seinen Einzelheiten erörtert werden muss, dass für jeden einzelnen Fall sich ergibt, welche Anschauungsbilder dasselbe, unter den entsprechenden Bedingungen hervorrufen würde. Diese begriffsmässige Entwicklung des Grundplänes geschieht nun am zweckmässigsten und vollständigsten mittels der Methoden der analytischen Geometrie, weil sie die Vollständigkeit und Allgemeingiltigkeit des Beweises am meisten sichern. Der Zweck des ganzen Verfahrens ist schliesslich nur, die Lagenverhältnisse der einzeln beobachtbaren Punkte zu den wechselnden Stellungen des Beobachters auffindbar zu machen, soweit diese Lagenverhältnisse auf die Sinnesempfindungen Einfluss haben. Dies geschieht am einfachsten durch BELTRAMI's Modell.

Da die Raumverhältnisse der metamathematischen Räume von drei Dimen-

sionen den Bedingungen der Anschaulichkeit entsprechen, welche die von mir gegebene Definition festsetzt, und mehreres von der Anschauung nie angeschauter Objecte nicht verlangt werden kann, so ist KANT's Beweisgrund für die transcendente Natur der Axiome und ihren Ursprung a priori nicht als ausreichend anzuerkennen.<sup>4</sup>

## II.

Ich will hier die Folgerungen entwickeln, zu denen wir gedrängt würden, wenn KANT's Hypothese von dem transcendenten Ursprünge der geometrischen Axiome richtig wäre, und erörtern, welchen Werth alsdann diese unmittelbare Kenntniss der Axiome für unsere Beurtheilung der Verhältnisse der objectiven Welt haben würde.<sup>5</sup>

(648)

Ich werde in diesem ersten Abschnitte zunächst in der realistischen Hypothese stehen bleiben und deren Sprache reden, also annehmen, dass die Dinge, welche wir objectiv wahrnehmen, reell bestehen und auf unsere Sinne wirken. Ich thue dies zunächst nur, um die einfache und verständliche Sprache des gewöhnlichen Lebens und der Naturwissenschaft reden zu können und dadurch den Sinn dessen, was ich meine, auch für Nichtmathematiker verständlich auszudrücken. Ich behalte mir vor im folgenden Paragraphen die realistische Hypothese fallen zu lassen und die entsprechende Auseinandersetzung in abstracter Sprache und ohne jede besondere Voraussetzung über die Natur des Realen zu wiederholen.

Zunächst müssen wir von derjenigen Gleichheit oder Congruenz der Raumgrössen, wie sie der gemachten Annahme nach aus transcendenten Anschauung fließen könnte, diejenige Gleichwerthigkeit derselben unterscheiden, welche durch Messung mit physischen Hilfsmitteln zu constatiren ist.

*Physisch gleichwerthig* nenne ich Raumgrössen, in denen unter gleichen Bedingungen und in gleichen Zeitabschnitten die gleichen physikalischen Vorgänge bestehen und ablaufen können. Der unter geeigneten Vorsichtsmaassregeln am häufigsten zur Bestimmung physisch gleichwertiger Raumgrössen gebrauchte Process ist die Uebertragung starrer Körper, wie der Cirkel und Maassstäbe, von einem Ort zum anderen. Uebrigens ist es ein ganz allgemeines Ergebniss aller unserer Erfahrungen, dass, wenn die Gleichwerthigkeit zweier Raumgrössen durch irgend welche dazu ausreichende Methode physikalischer Messung erwiesen worden ist, dieselben sich auch allen anderen bekannten physi-

---

<sup>4</sup>Dieser erste Abschnitt ist später in meiner Rectoratsrede „Ueber die Thatsachen in der Wahrnehmung“ Berlin 1879 weiter ausgeführt worden.

<sup>5</sup>Also, um neue Missverständnisse zu verhüten, wie sie bei Hrn. A. KRAUSE l. c. S. 84 vorkommen: nicht ich bin es, „der einen transcendenten Raum mit ihm eigenen Gesetzen kennt“, sondern ich suche hier die Consequenzen aus der von mir für unerwiesen und unrichtig betrachteten Hypothese KANT's zu ziehen, wonach die Axiome durch transcendentale Anschauung gegebene Sätze sein sollen, um nachzuweisen, dass eine auf solcher Anschauung beruhende Geometrie unnütz und unanwendbar sein würde.

kalischen Vorgängen gegenüber als gleichwerthig erweisen. Physikalische Gleichwerthigkeit ist also eine vollkommen bestimmte eindeutige objective Eigenschaft der Raumgrößen, und offenbar hindert uns nichts durch Versuche und Beobachtung zu ermitteln, wie physikalische Gleichwerthigkeit eines bestimmten Paares von Raumgrößen abhängt von der physikalischen Gleichwerthigkeit anderer Paare solcher Größen. Dies würde uns eine Art von Geometrie geben, die ich einmal für den Zweck der gegenwärtigen Untersuchung *physische Geometrie* nennen will, um sie zu unterscheiden von der Geometrie, die auf die hypothetisch angenommene transcendentale Anschauung des Raumes gegründet wäre. Eine solche rein und absichtlich durchgeführte physische Geometrie würde offenbar möglich sein und vollständig den Charakter einer Naturwissenschaft haben. (649)

Schon deren erste Schritte würden uns auf Sätze führen, welche den Axiomen entsprächen, wenn nur statt der transcendentalen Gleichheit der Raumgrößen ihre physische Gleichwerthigkeit gesetzt wird.

Sobald wir nämlich eine passende Methode gefunden hätten, um zu bestimmen, ob die Entfernungen je zweier Punktpaare einander gleich (d. h. physisch gleichwertig) sind, würden wir auch den besonderen Fall unterscheiden können, wo drei Punkte  $a, b, c$  so liegen, dass ausser  $\mathfrak{C}$  kein zweiter Punkt zu finden ist, der dieselben Entfernungen von  $a$  und  $b$  hätte wie  $\mathfrak{C}$ . Wir sagen in diesem Falle, dass die drei Punkte in gerader Linie liegen. Wir würden dann im Stande sein, drei Punkte  $A, B, C$  suchen, die alle drei gleiche Entfernungen von einander haben, also die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks darstellen. Dann könnten wir zwei neue Punkte suchen  $b$  und  $c$ , beide gleichweit von  $A$  entfernt, und  $b$  mit  $A$  und  $B$ ,  $c$  mit  $A$  und  $C$  in gerader Linie liegend. Alsdann entstünde die Frage: Ist das neue Dreieck  $Abc$  auch gleichseitig wie  $ABC$ ; ist also  $bc = Ab = Ac$ ? Die *Euklidische* Geometrie antwortet ja; die *sphärische* behauptet  $bc > Ab$ , wenn  $Ab < AB$ , und die *pseudosphärische*  $bc < Ab$  unter derselben Bedingung. Schon hier kämen die Axiome zur thatsächlichen Entscheidung.

Ich habe dieses einfache Beispiel gewählt, weil wir dabei nur mit der Messung von Gleichheit oder Ungleichheit der Entfernungen von Punkten, beziehlich mit der Bestimmtheit oder Unbestimmtheit der Lage gewisser Punkte zu thun haben, und weil gar keine zusammengesetztere Raumgrößen, gerade Linien oder Ebenen construirt zu werden brauchen. Das Beispiel zeigt, dass diese physische Geometrie ihre die Stelle der Axiome einnehmenden Sätze haben würde. (650)

So weit ich sehe, kann es auch für den Anhänger der KANT'schen Theorie nicht zweifelhaft sein, dass es möglich wäre, in der beschriebenen Weise eine rein erfahrungsmässige Geometrie zu gründen, wenn wir noch keine hätten. In dieser würden wir es nur mit beobachtbaren empirischen Thatsachen und deren Gesetzen zu thun haben. Die Wissenschaft, die auf solche Weise gewonnen würde, würde nur insofern eine von der Beschaffenheit der im Raum enthaltenen physischen Körper unabhängige Raumlehre sein, als die Voraussetzung zuträfe, dass physische Gleichwerthigkeit immer für alle Arten physischer Vorgänge gleichzeitig einträfe.

AberKANT's Anhänger behaupten, dass es neben einer solchen physischen auch eine *reine Geometrie* gebe, die allein auf transcendente Anschauung gegründet sei, und dass diese in der That diejenige Geometrie sei, die bisher wissenschaftlich entwickelt wurde. Bei dieser hätten wir es gar nicht mit physischen Körpern und deren Verhalten bei Bewegungen zu thun, sondern wir könnten, ohne durch Erfahrung von solchen irgend etwas zu wissen, durch innere Anschauung uns Vorstellungen bilden von absolut unveränderlichen und unbeweglichen Raumgrössen, Körpern, Flächen, Linien, die, ohne dass sie jemals durch Bewegung, die nur physischen Körpern zukommt, zur Deckung gebracht würden, doch im Verhältniss der Gleichheit und Congruenz zu einander ständen.<sup>6</sup>

Ich erlaube mir hervorzuheben, dass diese innere Anschauung von Geradheit der Linien, Gleichheit von Entfernungen oder von Winkeln absolute Genauigkeit haben müsste; sonst würden wir durchaus nicht berechtigt sein, darüber zu entscheiden, ob zwei gerade Linien, unendlich verlängert, sich nur einmal, oder auch vielleicht wie grösste Kreise auf der Kugel zweimal schneiden, oder zu behaupten, dass jede gerade Linie, welche eine von zwei Parallellinien, mit denen sie in derselben Ebene Hegt, schneidet, auch die andere schneiden müsse. Man muss nicht das so unvollkommene Augenmaass für die transcendente Anschauung unterschieben wollen., welche letztere absolute Genauigkeit fordert.

(651)

Gesetzten Falls, wir hätten nun eine solche transcendente Anschauung von Raumgebilden, ihrer Gleichheit und ihrer Congruenz, und könnten uns durch wirklich genügende Gründe überzeugen, dass wir sie haben, so würde sich allerdings daraus ein System der Geometrie herleiten lassen, welches unabhängig von allen Eigenschaften physischer Körper wäre, eine reine, transcendente Geometrie. Auch diese Geometrie würde ihre Axiome haben. Es ist aber klar, auch nach KANT'schen Principien, dass die Sätze dieser hypothetischen reinen Geometrie nicht nothwendig mit denen der physischen übereinzustimmen brauchten, denn die eine redet von Gleichheit der Raumgrössen in innerer Anschauung, die andere von physischer Gleichwerthigkeit. Diese letztere hängt offenbar ab von empirischen Eigenschaften der Naturkörper, und nicht blos von der Organisation unseres Geistes.

Dann wäre also zu untersuchen, ob die beiden besprochenen Arten der Gleichheit nothwendig immer zusammenfallen. Durch Erfahrung ist darüber nicht zu entscheiden. Hat es einen Sinn zu fragen, ob zwei Paare Cirkelspitzen nach transcendentaler Anschauung gleiche oder ungleiche Längen umfassten? Ich weiss damit keinen Sinn zu verbinden, und soweit ich die neueren Anhänger KANT's verstanden habe, glaube ich annehmen zu dürfen, dass auch sie mit Nein antworten würden. Das Augenmaass dürfen wir uns, wie gesagt, hierbei nicht unterschieben lassen.

Könnte nun etwa aus Sätzen der reinen Geometrie gefolgert werden, dass die Entfernungen der beiden Cirkelspitzenpaare gleich gross seien? Dazu müssten

---

<sup>6</sup>LAND in Mind V. pag. 41. - A. KRAUSE l. c. S. 62.

geometrische Beziehungen zwischen diesen Entfernungen und anderen Raumgrößen bekannt sein, von welchen letzteren man direct wissen müsste, dass sie im Sinne der transcendentalen Anschauung gleich seien. Da man dies nun direct nie wissen kann, so kann man es auch durch geometrische Schlüsse niemals folgern. Wenn der Satz, dass, beide Arten räumlicher Gleichheit identisch sind, nicht durch Erfahrungen gefunden werden kann, so müsste er ein metaphysischer Satz sein und einer Denknothwendigkeit entsprechen. Dann würde eine solche aber nicht nur die Form empirischer Erkenntnisse, sondern auch ihren Inhalt bestimmen — wie zum Beispiel bei der oben angeführten Construction zweier gleichseitiger Dreiecke — eine Folgerung, welche KANT's Principien geradezu widersprechen würde. Dann würde das reine Anschauen und Denken mehr leisten, als KANT zuzugeben geneigt ist. (652)

Gesetzten Falls endlich, dass die physische Geometrie eine Reihe allgemeiner Erfahrungssätze gefunden hätte, die mit den Axiomen der reinen Geometrie gleichlautend wären, so würde daraus höchstens folgen, dass die Uebereinstimmung zwischen physischer Gleichwertigkeit der Raumgrößen und ihrer Gleichheit in reiner Raumanschauung eine zulässige Hypothese sei, die zu keinem Widerspruche führt. Sie würde aber nicht die einzig mögliche Hypothese sein. Der physische Raum und der Raum der Anschauung könnten sich zu einander auch verhalten wie der wirkliche Raum zu seinem Abbild in einem Convexspiegel<sup>7</sup>

Dass die physische Geometrie und die transcendentale nicht nothwendig übereinzustimmen brauchen, geht daraus hervor, dass wir sie uns thatsächlich als nicht übereinstimmend vorstellen können. Die Art, wie eine solche Incongruenz zur Erscheinung kommen würde, ergiebt sich schon aus dem, was ich in meinem früheren Aufsatz<sup>8</sup> auseinandergesetzt habe. Nehmen wir an, dass die physikalischen Messungen einem pseudosphärischen Räume entsprächen. Der sinnliche Eindruck von einem solchen bei Ruhe des Beobachters und der beobachteten Objecte würde derselbe sein, als wenn wir BELTRAMI's kugeliges Modell im Euklidischen Raume vor uns hätten, wobei der Beobachter sich im Mittelpunkt befände. Sowie aber der Beobachter seinen Platz wechselte, würde das Centrum der Projectionskugel mit dem Beobachter wandern müssen und die ganze Projection sich verschieben. Für einen Beobachter, dessen Raumanschauungen und Schätzungen von Raumgrößen entweder aus transcendentaler Anschauung oder als Resultat der bisherigen Erfahrung im Sinne der Euklidischen Geometrie gebildet wären, würde also der Eindruck entstehen, dass, sowie er selbst sich bewegt, auch alle von ihm gesehenen Objecte sich in einer bestimmten Weise verschieben und nach verschiedenen Richtungen verschieden sich dehnen und zusammenziehen. In ähnlicher Weise, nur nach qualitativ abweichenden Verhältnissen sehen wir auch in unserer objectiven Welt die perspectivische relative Lage und die scheinbare Grösse der Objecte von verschiedener Entfernung wechseln, sowie der Beobachter (653)

<sup>7</sup>S. meine Populären Vorträge Heft III.

<sup>8</sup>Populäre Vorträge Heft III.

sich bewegt. Wie wir nun thatsächlich im Stande sind, aus diesen wechselnden Gesichtsbildern zu erkennen, dass die Objecte um uns ihre relative gegenseitige Lage und Grösse nicht verändern, so lange die perspectivischen Verschiebungen genau dem in der bisherigen Erfahrung bewährten Gesetze entsprechen, welchem sie bei ruhenden Objecten unterworfen sind, wie wir dagegen bei jeder Abweichung von diesem Gesetze auf Bewegung der Objecte schliessen, so würde, wie ich selbst, als Anhänger der empiristischen Theorie der Wahrnehmung, glaube voraussetzen zu dürfen, auch Jemand, der aus dem Euklidischen Raum in den pseudosphärischen überträte, anfangs zwar Scheinbewegungen der Objecte zu sehen glauben, aber sehr bald lernen, seine Schätzung der Raumverhältnisse den neuen Bedingungen anzupassen.

Dies letztere ist aber eine Voraussetzung, die nur nach der Analogie dessen, was wir sonst von den Sinneswahrnehmungen wissen, gebildet ist und durch den Versuch nicht geprüft werden kann. Nehmen wir also an, die Beurtheilung der Raumverhältnisse bei einem solchen Beobachter könnte nicht mehr geändert werden, weil sie mit angeborenen Formen der Raumanschauung zusammenhinge, so würde derselbe doch schnell ermitteln,; dass die Bewegungen, die er zu sehen glaubt, nur Scheinbewegungen sind, da sie immer wieder zurückgehen, wenn er selbst sich auf seinen ersten Standpunkt zurückbeiebt; oder ein zweiter Beobachter würde constatiren können, dass Alles in Ruhe bleibt, während der erste den Ort wechselt. Wenn also vielleicht auch nicht vor der unreflectirten Anschauung, würde doch bald vor der wissenschaftlichen Untersuchung sich herausstellen können, welches die physikalisch constanten Raumverhältnisse sind, etwa so wie wir selbst durch wissenschaftliche Untersuchungen wissen, dass die Sonne feststeht und die Erde rotirt, trotzdem der sinnliche Schein fortbesteht, dass die Erde stillsteht und die Sonne in 24 Stunden einmal um sie herumläuft. (654)

Dann aber würde diese ganze vorausgesetzte transcendente Anschauung a priori in den Rang einer *Sinnestäuschung*, eines *objectiv falschen Scheines* herabgesetzt werden, von der wir uns zu befreien und die wir zu vergessen suchen müssten, wie es bei der scheinbaren Bewegung der Sonne der Fall ist. Es würde dann ein Widerspruch sein zwischen dem, was nach der angeborenen Anschauung als räumlich gleichwertig erscheint, und dem, was in den objectiven Phänomenen sich als solches erweist. Unser ganzes wissenschaftliches und praktisches Interesse würde an das letztere geknüpft sein. Die transcendente Anschauungsform würde die physikalisch gleichwertigen Raumverhältnisse nur so darstellen, wie eine ebene Landkarte die Oberfläche der Erde, sehr kleine Stücke und Streifen richtig, grössere dagegen nothwendig falsch. Es würde sich dann nicht blos um die *Erscheinungsweise* handeln, die ja nothwendig eine Modification des darzustellenden Inhalts bedingt, sondern darum, dass die Beziehungen zwischen Erscheinung und Inhalt, die für engere Grenzen Uebereinstimmung zwischen beiden herstellen, auf weitere Grenzen ausgedehnt einen *falschen Schein* geben würden.

Die Folgerung, welche ich aus diesen Betrachtungen ziehe, ist diese: Wenn es

wirklich eine uns angeborne und unvertilgbare Anschauungsform des Raumes mit Einschluss der Axiome gäbe, so würden wir zu ihrer objectiven wissenschaftlichen Anwendung auf die Erfahrungswelt erst berechtigt sein, wenn durch Beobachtung und Versuch constatirt wäre, dass die nach der vorausgesetzten transcendentalen Anschauung gleichwerthigen Raumtheile auch physikalisch gleichwerthig seien. Diese Bedingung trifft zusammen mit RIEMANN's Forderung, dass das Krümmungsmaass des Raumes, in dem wir leben, empirisch durch Messung bestimmt werden müsse. (655)

Die bisher ausgeführten Messungen dieser Art haben keine merkliche Abweichung des Werthes dieses Krümmungsmaasses von Null ergeben. Als *thatsächlich* richtig innerhalb der bis jetzt erreichten Grenzen der Genauigkeit des Messens können wir die *Euklidische* Geometrie also allerdings ansehen.

### III.

Die Erörterungen des zweiten Abschnitts blieben ganz im Gebiete des objectiven und des realistischen Standpunktes des Naturforschers, wobei die begriffliche Fassung der Naturgesetze der Endzweck ist, und die Kenntniss durch Anschauung nur eine erleichternde Hülfe, beziehlich ein zu beseitigender falscher Schein.

Herr Professor LAND glaubt nun, dass ich bei meinen Auseinandersetzungen die Begriffe des *Objectiven* und des *Reellen* verwechselt hätte, dass bei meiner Behauptung, die geometrischen Sätze könnten an der Erfahrung geprüft und durch sie bestätigt werden, unbegründeter Weise vorausgesetzt sei (Mind. V. pag. 47): „that empirical knowledge is acquired simple importation or by counterfeit, and not by peculiar operations of the mind, sollicitated by varied impulses from an unknown reality.“ Wenn Herr Professor LAND meine Arbeiten über Sinnesempfindungen gekannt hätte, würde er gewusst haben, dass ich selbst mein Leben lang gegen eine solche Voraussetzung, wie er mir unterschiebt, gekämpft habe. Ich habe von dem Unterschiede des Objectiven und Reellen in meinem Aufsätze nicht gesprochen, weil mir in der vorliegenden Untersuchung gar kein Gewicht auf diesen Unterschied zu fallen schien. Um diese meine Meinung zu begründen, wollen wir jetzt, was in der realistischen Ansicht hypothetisch ist, fallen lassen und nachweisen, dass die bisher aufgestellten Sätze und Beweise auch dann noch einen vollkommen richtigen Sinn haben, dass man auch dann noch nach der physischen Gleichwerthigkeit von Raumgrössen zu fragen und darüber durch Erfahrung zu entscheiden berechtigt ist.

Die einzige Voraussetzung, welche wir festhalten, ist die des Causalgesetzes, dass nämlich die mit dem Charakter der Wahrnehmung in uns zu Stande kommenden Vorstellungen nach festen Gesetzen zu Stande kommen, sodass wenn verschiedene Wahrnehmungen sich uns aufdrängen, wir berechtigt sind, daraus auf Verschiedenheit der reellen Bedingungen zu schliessen, unter denen sie sich gebildet haben. Uebrigens wissen wir über diese Bedingungen selbst, über das (656)

eigentlich Reelle, was den Erscheinungen zu Grunde liegt, nichts; alle Meinungen, die wir sonst darüber hegen mögen, sind nur als mehr oder minder wahrscheinliche Hypothesen zu betrachten. Die vorangestellte Voraussetzung dagegen ist das Grundgesetz unseres Denkens; wenn wir sie aufgeben wollten, so würden wir damit überhaupt darauf Verzicht leisten, diese Verhältnisse denkend begreifen zu können.

Ich hebe hervor, dass über die Natur der Bedingungen, unter denen Vorstellungen entstehen, hier gar keine Voraussetzungen gemacht werden. Ebenso gut, wie die realistische Ansicht, deren Sprache wir bisher gebraucht haben, wäre zulässig die Hypothese des subjectiven Idealismus. Wir könnten annehmen, dass all unser Wahrnehmen nur ein Traum sei, wenn auch ein in sich höchst consequenter Traum, in dem sich Vorstellung aus Vorstellung nach festen Gesetzen entwickelte. In diesem Falle würde der Grund, dass eine neue scheinbare Wahrnehmung eintritt, nur darin zu suchen sein, dass in der Seele des Träumers die Vorstellung bestimmter anderer Wahrnehmungen und etwa auch die Vorstellung von eigenen Willensimpulsen bestimmter Art vorausgegangen sind. Was wir in der realistischen Hypothese Naturgesetze nennen, würden in der idealistischen Gesetze sein, welche die Folge der mit dem Charakter der Wahrnehmung auf einander folgenden Vorstellungen regeln.

Nun finden wir als Thatsache des Bewusstseins, dass wir wahrzunehmen glauben Objecte, die sich an bestimmten Orten im Räume befinden; dass ein Object an einem bestimmten besonderen Orte erscheint und nicht an einem anderen, wird abhängen müssen von der Art der realen Bedingungen, welche die Vorstellung hervorrufen. Wir müssen schliessen, dass andere reale Bedingungen hätten vorhanden sein müssen, um zu bewirken, dass die Wahrnehmung eines anderen Ortes des gleichen Objectes eintrete. Es müssen also in dem Realen, irgend welche Verhältnisse oder Complexe von Verhältnissen bestehen, welche bestimmen, an welchem Ort im Raume uns ein Object erscheint. Ich will diese, um sie kurz zu bezeichnen, *topogene Momente* nennen. Von ihrer Natur wissen nichts; wir wissen nur, dass das Zustandekommen räumlich verschiedener Wahrnehmungen eine Verschiedenheit der topogenen Momente voraussetzt. (657)

Daneben muss es im Gebiete des Realen andere Ursachen geben, welche bewirken, dass wir zu verschiedener Zeit am gleichen Ort verschiedene stoffliche Dinge von verschiedenen Eigenschaften wahrzunehmen glauben. Ich will, mir erlauben, diese mit dem Namen der *hylogenen Momente* zu bezeichnen. Ich wähle diese neuen Namen, um alle Einmischung von Nebenbedeutungen abzuschneiden, die sich an gebräuchliche Worte knüpfen könnten.

Wenn wir nun irgend Etwas wahrnehmen und behaupten, was eine gegenseitige Abhängigkeit von Raumgrössen aussagt, so ist zweifelsohne der thatsächliche Sinn einer solchen Aussage nur der, dass zwischen gewissen topogenen Momenten, deren eigentliches Wesen uns aber unbekannt bleibt, eine gewisse gesetzmässige Verbindung stattfindet, deren Art uns ebenfalls unbekannt ist. Eben deshalb sind SCHOPENHAUER und viele Anhänger von KANT zu der unrichtigen Fol-

gerung gekommen, dass in unseren Wahrnehmungen räumlicher Verhältnisse überhaupt kein realer Inhalt ist, dass der Raum seine Verhältnisse nur transcendentaler Schein seien, ohne dass irgend etwas Wirkliches ihnen entspricht. Wir sind aber jedenfalls berechtigt, auf unsere räumlichen Wahrnehmungen dieselben Betrachtungen anzuwenden wie auf andere sinnliche Zeichen, z. B. die Farben. Blau ist nur eine Empfindungsweise; dass wir aber zu einer gewissen Zeit in einer bestimmten Richtung Blau sehen, muss einen realen Grund haben. Sehen wir zu anderer Zeit dort Roth, so muss dieser reale Grund verändert sein.

Wenn wir beobachten, dass verschiedenartige physikalische Processe in congruenten Räumen während gleicher Zeitperioden verlaufen können, so heisst dies, (658) dass im Gebiete des Realen gleiche Aggregate und Folgen gewisser hylogener Momente zu Stande kommen und ablaufen können in Verbindung mit gewissen bestimmten Gruppen verschiedener topogener Momente, solcher nämlich, die uns die Wahrnehmung physisch gleichwerthiger Raumtheile geben. Und wenn uns dann die Erfahrung belehrt, dass jede Verbindung oder jede Folge hylogener Momente, die in Verbindung mit der einen Gruppe topogener Momente bestehen oder ablaufen kann, auch mit jeder physikalisch äquivalenten Gruppe anderer topogener Momente möglich ist, so ist dies jedenfalls ein Satz, der einen realen Inhalt hat, und die topogenen Momente beeinflussen unzweifelhaft den Ablauf realer Processe.

In dem oben gegebenen Beispiel mit den zwei gleichseitigen Dreiecken handelt es sich nur 1) um Gleichheit oder Ungleichheit, d. h. physische Gleichwerthigkeit oder Nicht-Gleichwerthigkeit von Punktabständen, 2) um Bestimmtheit oder Nicht-Bestimmtheit der topogenen Momente gewisser Punkte. Diese Begriffe von Bestimmtheit und von Gleichwerthigkeit in Beziehung auf gewisse Folgen können aber auch auf Objecte von übrigens ganz unbekanntem Wesen angewendet werden. Ich schliesse daraus, dass die Wissenschaft, welche ich physische Geometrie genannt habe, Sätze von realem Inhalt enthält, und dass ihre Axiome bestimmt werden nicht von blossen Formen des Vorstellens, sondern von Verhältnissen der realen Welt.

Dies berechtigt uns noch nicht, die Annahme einer Geometrie, die auf transcendente Anschauung gegründet ist, für unmöglich zu erklären. Man könnte z. B. annehmen, dass eine Anschauung von der Gleichheit zweier Raumgrössen ohne physische Messung unmittelbar durch die Einwirkung der topogenen Momente auf unser Bewusstsein hervorgebracht werde, dass also gewisse Aggregate topogener Momente auch in Bezug auf eine psychische, unmittelbar wahrnehmbare Wirkung äquivalent sein. Die ganze *Euklidische* Geometrie lässt sich herleiten aus der Formel, welche die Entfernung zweier Punkte als Function ihrer rechtwinkligen Coordinaten giebt. Nehmen wir an, dass die Intensität dieser psychischen Wirkung, deren Gleichheit, als Gleichheit der Entfernung zweier Punkte im Vorstellen erscheint, in derselben Weise von irgend welchen drei Functionen der topogenen Momente jedes Punkts abhängt, wie die Entfernung im *Euklidischen* Raum von den drei Coordinaten eines jeden, so müsste das Sy- (659)

stem der reinen Geometrie eines solchen Bewusstseins die Axiome des EUKLID erfüllen, wie auch übrigens die topogenen Momente der reellen Welt und Ihre physische Aequivalenz sich verhielten. Es ist klar, dass in diesem Falle die Frage der Uebereinstimmung zwischen psychischer und physischer Gleichwerthigkeit der Raumgrößen nicht allein aus der Form der Anschauung entschieden werden könnte, und wenn sich Uebereinstimmung herausstellen sollte, so wäre diese als ein Naturgesetz oder wie ich es in meinem populären Vortrag bezeichnet habe, als eine prästabilirte Harmonie zwischen der Vorstellungswelt und der reellen Welt aufzufassen, ebenso gut, wie es auf Naturgesetzen beruht, dass die von einem Lichtstrahl beschriebene gerade Linie mit der von einem gespannten Faden gebildeten zusammenfällt.

Ich meine damit gezeigt zu haben, dass die Beweisführung, die ich in §1 in der Sprache der realistischen Hypothese gegeben habe, sich auch ohne deren Voraussetzungen gültig erweist.

Wenn wir die Geometrie auf Thatsachen der Erfahrung anwenden wollen, wo es sich immer nur um physische Gleichwerthigkeit handelt, können nur die Sätze derjenigen Wissenschaft angewendet werden, die ich als physische Geometrie bezeichnet habe. Wer die Axiome aus der Erfahrung herleitet, dem ist unsere bisherige Geometrie in der That physische Geometrie, die sich nur auf eine grosse Menge planlos gesammelter, statt auf ein System methodisch durchgeführter Erfahrungen stützt. Zu erwähnen ist übrigens, dass dies schon die Ansicht von NEWTON war, der in der Einleitung zu den „*Principia*“ erklärt: „Geometrie selbst hat ihre Begründung in mechanischer Praxis und ist in der That nichts Anderes als derjenige Theil der gesammten Mechanik, welcher die Kunst des Messens genau feststellt und begründet.“

Dagegen ist die Annahme einer Kenntniss der Axiome aus transcendentaler Anschauung:

- 1) eine unerwiesene Hypothese;
- 2) eine unnöthige Hypothese, da sie nichts in unserer thatsächlichen Vorstellungswelt zu erklären vorgiebt, was nicht auch ohne ihre Hilfe erklärt werden könnte;
- 3) eine für die Erklärung unserer Kenntniss der wirklichen Welt *gänzlich unbrauchbare* Hypothese, da die von ihr aufgestellten Sätze auf die Verhältnisse der wirklichen Welt immer erst angewendet werden dürfen, nachdem ihre objective Gültigkeit erfahrungsmässig geprüft und festgestellt worden ist.

KANT's Lehre von den a priori gegebenen Formen der Anschauung ist ein sehr glücklicher und klarer Ausdruck des Sachverhältnisses; aber diese Formen müssen wirklich inhaltsleer und frei genug sein, um jeden Inhalt, der überhaupt in die betreffende Form der Wahrnehmung eintreten kann, aufzunehmen. Die Axiome der Geometrie aber beschränken die Anschauungsform des Raumes so, dass nicht mehr jeder denkbare Inhalt darin aufgenommen werden kann, wenn überhaupt Geometrie auf die wirkliche Welt anwendbar sein soll. Lassen wir sie fallen, so ist die Lehre von der Transcendentalität der Anschauungsform des Raumes ohne

allen Anstoss. Hier ist KANT in seiner Kritik nicht kritisch genug gewesen; aber freilich handelte es sich dabei um Lehrsätze aus der Mathematik, und dies Stück kritischer Arbeit musste durch die Mathematiker erledigt werden.