



Heidelberger Texte zur Mathematikgeschichte

Autor: **Kovalevskaja, Sof'ja V.** (1850–1891)
Titel: **Zur Theorie der partiellen Differential-
gleichungen**
Diss.-
Vermerk: Göttingen, Univ., Diss., 1874
Signatur UB Heidelberg: 35,535

Auf meinen Rat wird sie [S. Kovalevskaja] der Fakultät drei Abhandlungen vorlegen, um den Beweis zu liefern, daß sie auf verschiedenen Gebieten der Mathematik heimisch genug geworden ist, um im Anschluß an Vorhandenes selbständige und für die Wissenschaft ersprißliche Untersuchungen anzustellen. Eine dieser Abhandlungen beschäftigt sich mit der Frage, ob und wie weit sich die Sätze über die Integration eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen durch Potenzreihen, welche ich zuerst in meiner Abhandlung über die analytischen Fakultäten aufgestellt habe und die bald darauf von den Herren Briot und Bouquet bewiesen worden sind, auf den Fall ausdehnen lassen, wo zur Bestimmung von Funktionen mehrerer Veränderlichen die erforderliche Anzahl von partiellen Differentialgleichungen gegeben ist. Die Frage mußte unbedingt einmal gründlich erörtert werden; ich selbst habe, offen gestanden, Scheu gehabt, mich darauf einzulassen, und es freut mich umso mehr, daß sie in der in Rede stehenden Arbeit, die in ihrer letzten Redaktion nur von mäßigem Umfange ist, auf die gründlichste Weise erledigt worden ist. Schwierigkeiten, die sich zunächst darboten, z. B. die unerwartete und Bedenken erregende Bemerkung, daß schon eine so einfache Differentialgleichung, wie die so oft behandelte

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2},$$

wenn man festsetzt, daß $\varphi(x, t)$ für $t = 0$ in eine gegebene, durch eine konvergierende Potenzreihe von x darstellbare Funktion $\varphi_0(x)$ übergehen soll, im allgemeinen, d. h. wenn $\varphi_0(x)$ nicht ganz besondere Bedingungen erfüllt, zu einer *stets* divergierenden Entwicklung von $\varphi_0(x, t)$ nach Potenzen von t führt, sind durch den Scharfsinn der Verfasserin auf die einfachste und befriedigendste Weise beseitigt worden. Ich bin überzeugt, diese Arbeit wird auch Ihr Interesse erregen.

Quelle:

Brief von Carl Weierstraß an Lazarus Fuchs bezgl. der Dissertation S. Kovalevskajas vom 27. Juni 1874

ZUR THEORIE
DER
PARTIELLEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN.

INAUGURAL-DISSERTATION
ZUR ERLANGUNG DER DOCTORWÜRDE
BEI DER PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT ZU GÖTTINGEN

VON

SOPHIE v. KOWALEVSKY
GEB. v. CORVIN-KRUKOVSKOY.

BERLIN.
DRUCK VON GEORG REIMER.
1874.

35,535

MEINEM THEUEREN LEHRER
HERRN PROFESSOR DR. WEIERSTRASS

IN DANKBARER VEREHRUNG

GEWIDMET.

E i n l e i t u n g.

Es sei eine algebraische Differentialgleichung

$$(1.) \quad G\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0$$

vorgelegt, wo G eine ganze rationale Function der unabhängigen Veränderlichen x , der als Function derselben zu bestimmenden Grösse y und der Ableitungen derselben nach x bis zur n^{ten} Ordnung hin bedeutet.

Eine analytische Function ist vollständig bestimmt, sobald irgend ein regulärer Zweig derselben gegeben ist. Es kommt also darauf an, auf die allgemeinste Weise eine Potenzreihe

$$\sum_0^{\infty} b_r \frac{(x-a)^r}{r!},$$

wo a, b_0, b_1, \dots Constanten bedeuten, so zu bestimmen, dass dieselbe, für y gesetzt, der gegebenen Differentialgleichung genügt, und innerhalb eines gewissen, die Stelle a umgebenden Bezirks convergirt.

Es muss also, wenn man diese Reihe für y in den Ausdruck $G\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right)$ einsetzt und denselben nach Potenzen von $x-a$ entwickelt, jeder einzelne Coefficient dieser Entwicklung gleich Null werden.

So erhält man zunächst zwischen a, b_0, b_1, \dots, b_n die Gleichung

$$(2.) \quad G(a, b_0, b_1, \dots, b_n) = 0.$$

Nun hat aber, wenn y irgend eine reguläre Function von x ist, die λ^{te} Ableitung von

$$G\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right)$$

die Form

$$G'\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) \frac{d^{n+\lambda} y}{dx^{n+\lambda}} + H_\lambda\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{n+\lambda-1} y}{dx^{n+\lambda-1}}\right),$$

wo G' die partielle Ableitung von G in Beziehung auf $\frac{d^n y}{dx^n}$, und H_λ eine

ganze rationale Function von $x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{n+\lambda-1}y}{dx^{n+\lambda-1}}$ bezeichnet. Es muss also (für $\lambda = 1, 2, \dots, \infty$)

(3.) $G'(a, b_0, b_1, \dots, b_n) b_{n+\lambda} + H_\lambda(a, b_0, b_1, \dots, b_{n+\lambda-1}) = 0$
sein, wenn der Coefficient von $(x-a)^\lambda$ in der genannten Entwicklung von

$$G\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right)$$

verschwinden soll. Umgekehrt genügt die für y angenommene Reihe der Gleichung (1.) formell, wenn die Gleichung (2.) und sämtliche Gleichungen (3.) erfüllt werden.

Durch die Gleichungen (3.) werden aber sämtliche Coefficienten b_v , deren Index $> n$ ist, eindeutig bestimmt, sobald a, b_0, b_1, \dots, b_n gegeben sind und zugleich $G'(a, b_0, b_1, \dots, b_n)$ einen von Null verschiedenen Werth hat.

So ergibt sich der Satz:

„Nimmt man die Constanten

$$a, b_0, b_1, \dots, b_n$$

willkürlich, jedoch so an, dass die Gleichung

$$G(a, b_0, b_1, \dots, b_n) = 0$$

eine einfache Wurzel b_n hat, so lassen sich die Grössen

$$b_{n+1}, b_{n+2}, \dots$$

stets in eindeutiger Weise so bestimmen, dass

$$\sum_0^\infty b_v \frac{(x-a)^v}{v!},$$

für y gesetzt, der Gleichung (1.) formell genügt.“

Diese Reihe ist aber auch stets innerhalb eines bestimmten Bezirks convergent und stellt, wenn man x innerhalb desselben annimmt, eine die vorgelegte Differentialgleichung befriedigende Function dar. Aus jeder solchen Reihe entspringt dann ferner eine bestimmte (eindeutige oder mehrdeutige) analytische Function, von der jeder reguläre Zweig die vorgelegte Differentialgleichung ebenfalls befriedigt).*

*) Dieser Satz findet sich zuerst in der Weierstrassschen Abhandlung „Zur Theorie der analytischen Facultäten“ (Crelles Journal, Bd. 51, S. 43) ausgesprochen, und ist bald darauf auch von den Herren Briot und Bouquet bewiesen worden (Journal de l'Ecole polytechnique cah. 36). Derselbe bleibt bestehen, wenn der Ausdruck auf der linken Seite der Gleichung (1.) eine eindeutige und in eine beständig convergirende Potenzreihe der Grössen $x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}$ entwickelbare Function ist.

nach $b_{0,0}$ aufgelöst eine endliche, einfache Wurzel hat, und nimmt diese für $b_{0,0}$, so lassen sich, wenn man die Ausdrücke auf der Linken der Gleichungen (5.), (6.) nach Potenzen von $x-a$ entwickelt, die Coefficienten der einzelnen Potenzen gleich Null setzt, die Grössen

$$\begin{array}{cccc} b_{0,1}, & b_{0,2}, & \dots & \\ b_{1,1}, & b_{1,2}, & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \\ b_{n,1}, & b_{n,2}, & \dots & \end{array}$$

in eindeutiger Weise so bestimmen, dass den Gleichungen (5.), (6.) *formell* genügt wird.

Dann sind aber auch die so sich ergebenden $n+1$ Reihen (7.) stets innerhalb eines bestimmten Bezirks convergent und stellen, wenn man x auf diesen Bezirk beschränkt, ein System von $n+1$ Functionen dar, welche die in Rede stehenden Gleichungen wirklich befriedigen.

Aus demselben entspringt dann ein System (eindeutiger oder mehrdeutiger) analytischer Functionen von der Beschaffenheit, dass je $n+1$ zusammengehörige reguläre Zweige derselben die Gleichungen (5.), (6.) ebenfalls befriedigen.

Umgekehrt, wenn ein System von $n+1$ analytischen Functionen die Gleichungen (5.), (6.), nicht aber zugleich die Gleichung

$$\frac{\partial G(x, y_0, y_1, \dots, y_n)}{\partial y_0}$$

befriedigt (d. h. wenn dasselbe nicht eine singuläre Lösung des Systems von partiellen Differentialgleichungen bildet), so lässt sich, wofern man specielle Werthe von a ausnimmt, jedes System zusammengehöriger Elemente *) dieser Functionen durch Reihen, welche in der beschriebenen Weise gebildet sind, ausdrücken.

Die singulären Lösungen erhält man aber, indem man die vorgelegten Gleichungen (5.), (6.) mit der Gleichung

$$\frac{\partial G(x, y_0, y_1, \dots, y_n)}{\partial y_0}$$

combinirt.

Diese Sätze, in der gegebenen Fassung, entnehme ich den Vorlesungen des Herrn *Weierstrass*, meines verehrten Lehrers. In der vor-

*) Vgl. §. III. im Anfang.

und der Coefficienten der

$$G_{\alpha,\beta}^{(\gamma)}(\varphi_1, \dots, \varphi_n),$$

und es werden dann die gegebenen Differentialgleichungen formell befriedigt, wenn man

$$(4.) \quad \begin{cases} \varphi_\alpha = \sum (\varphi(x_1, \dots, x_r)_{\alpha,\mu} \frac{x^\mu}{\mu!}), \\ \mu = 0 \dots \infty \\ = \sum (\varphi_{\mu,\mu_1,\dots,\mu_r}^{(\alpha)} \frac{x^\mu}{\mu!} \frac{x_1^{\mu_1}}{\mu_1!} \dots \frac{x_r^{\mu_r}}{\mu_r!}), \\ \mu = 0 \dots \infty, \mu_1 = 0 \dots \infty, \dots, \mu_r = 0 \dots \infty \end{cases} \quad (\alpha = 1, \dots, n)$$

setzt.

Um nun zu beweisen, dass diese Reihen sämtlich innerhalb eines bestimmten Bezirks unbedingt convergent sind, ersetze ich das vorgelegte System von Differentialgleichungen durch ein anderes von derselben Form:

$$(5.) \quad \begin{cases} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} = \sum_{\beta} \bar{G}_{1,\beta}^{(n)}(\psi_1, \dots, \psi_n) \frac{\partial \psi_\beta}{\partial x_1} + \dots + \sum_{\beta} \bar{G}_{r,\beta}^{(1)}(\psi_1, \dots, \psi_n) \frac{\partial \psi_\beta}{\partial x_r}, \\ \dots \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial x} = \sum_{\beta} \bar{G}_{1,\beta}^{(n)}(\psi_1, \dots, \psi_n) \frac{\partial \psi_\beta}{\partial x_1} + \dots + \sum_{\beta} \bar{G}_{r,\beta}^{(n)}(\psi_1, \dots, \psi_n) \frac{\partial \psi_\beta}{\partial x_r}, \end{cases}$$

in welchem in jeder der Reihen $\bar{G}_{\alpha,\beta}^{(\gamma)}(\psi_1, \dots, \psi_n)$ jeder einzelne Coefficient positiv und nicht kleiner als der absolute Betrag des entsprechenden Coefficienten in $G_{\alpha,\beta}^{(\gamma)}(\psi_1, \dots, \psi_n)$ ist. Zugleich nehme ich an Stelle jeder der Reihen $\varphi(x_1, \dots, x_r)_{\alpha,0}$ ($\alpha = 1, \dots, n$) eine andere $\psi(x_1, \dots, x_r)_{\alpha,0}$ an, in der ebenfalls jeder einzelne Coefficient positiv und nicht kleiner als der absolute Betrag des entsprechenden Coefficienten in $\varphi(x_1, \dots, x_r)_{\alpha,0}$ ist. Wenn alsdann

$$\psi_{\mu,\mu_1,\dots,\mu_r}^{(\alpha)}$$

den Ausdruck bezeichnet, der jetzt an die Stelle von

$$\varphi_{\mu,\mu_1,\dots,\mu_r}^{(\alpha)}$$

tritt, so erhellt aus dem, was über die Zusammensetzung des letzteren aus den Coefficienten der Reihen $G_{\alpha,\beta}^{(\gamma)}$ und $\psi_{\alpha,0}$ gesagt ist, dass der erstere positiv und nicht kleiner als der absolute Betrag des anderen sein wird. Kann man also von den Reihen ψ_1, \dots, ψ_n , wo

$$\psi_\alpha = \sum (\psi_{\mu,\mu_1,\dots,\mu_r}^{(\alpha)} \frac{x^\mu}{\mu!} \frac{x_1^{\mu_1}}{\mu_1!} \dots \frac{x_r^{\mu_r}}{\mu_r!}) \quad (\alpha = 1, \dots, n)$$

$$\mu = 0 \dots \infty, \mu_1 = 0 \dots \infty, \dots, \mu_r = 0 \dots \infty$$

ist, beweisen, dass sie sämtlich innerhalb eines bestimmten Bezirkes convergent sind, so steht dasselbe für die Reihen $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ fest.

Dieses vorausgesetzt, werde, wie es immer möglich ist, eine positive Grösse g so angenommen, dass sämtliche Reihen $G_{\alpha, \beta}^{(g)}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ convergiren, wenn

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi = g.$$

gesetzt wird; dann kann man eine zweite, ebenfalls positive Grösse G so annehmen, dass aus dem Bruche

$$\frac{G}{1 - \frac{\psi_1 + \psi_2 + \dots + \psi_n}{g}}$$

wenn derselbe nach steigenden Potenzen von ψ_1, \dots, ψ_n entwickelt wird, eine Reihe $\bar{G}(\psi_1, \dots, \psi_n)$ entspringt, in welcher jeder einzelne Coefficient positiv und grösser als der absolute Betrag des entsprechenden Coefficienten in jeder der Reihen $G_{\alpha, \beta}^{(g)}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ ist.

Ebenso kann man zwei positive Grössen g' und ϱ so wählen, dass in der Reihe, welche aus der Entwicklung des Bruches

$$\frac{g'(x_1 + x_2 + \dots + x_r)}{1 - \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_r}{\varrho}}$$

nach steigenden Potenzen von x_1, \dots, x_r hervorgeht und die mit $\psi(x_1, \dots, x_r)_0$ bezeichnet werden möge, jeder Coefficient positiv und grösser als der absolute Betrag des entsprechenden Coefficienten in jeder der Reihen.

$$\varphi(x_1, \dots, x_r)_{1,0}, \dots, \varphi(x_1, \dots, x_r)_{n,0}$$

wird.

Werden dann in dem System (5.) sämtliche Reihen

$$\bar{G}_{\alpha, \beta}^{(g)}(\psi_1, \dots, \psi_n) = \bar{G}(\psi_1, \dots, \psi_n)$$

angenommen, und wird zugleich festgesetzt, dass für $x=0$ jede der Functionen ψ_α in

$$\psi(x_1, \dots, x_r)_0$$

übergehen soll, so sind die eben angegebenen Bedingungen erfüllt, und es braucht also nur bewiesen zu werden, dass die so definirten Reihen ψ_1, \dots, ψ_n innerhalb eines gewissen Bezirkes convergent sind.

Unter den gemachten Voraussetzungen werden aber die sämtlichen Reihen ψ_1, \dots, ψ_n einander gleich und Functionen bloss von x und von

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_r}{\varrho} \right).$$

Das System (5.) reducirt sich also, wenn man

$$\psi = \frac{\psi_1 + \dots + \psi_n}{g}, \quad y = \frac{x_1 + \dots + x_r}{e}$$

setzt, so dass $\psi_\alpha = \frac{g}{n} \psi$ wird (für $\alpha = 1 \dots n$), auf die einzige partielle Differentialgleichung

$$(6.) \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{a}{1-\psi} \frac{\partial \psi}{\partial y},$$

wo a eine positive Constante bedeutet.

Dabei ist noch die Bedingung hinzuzufügen, dass für $x = 0$

$$\psi \text{ in } \frac{by}{1-y}$$

übergehen soll, wo b ebenfalls eine Constante bezeichnet.

Die Gleichung (6.) besagt nichts weiter, als dass zwischen den Grössen ψ und $(1-\psi)y + ax$ eine Relation besteht. Diese wird aber durch die Feststellung, dass ψ für $x = 0$ in $\frac{by}{1-y}$ übergehen soll, eine völlig bestimmte; und es ergibt sich zwischen ψ , x , y die Gleichung

$$(1-\psi)y + ax = \frac{1-\psi}{b+\psi} \psi,$$

woraus man

$$\psi = \frac{1 - (1-b)y - ax - \sqrt{(1 - (1+b)y - ax)^2 - 4abx}}{2(1-y)}$$

erhält, mit der Bedingung, dass bei der Entwicklung dieses Ausdruckes nach Potenzen von x , y das Anfangsglied in der Entwicklung der Quadratwurzel 1 sei.

Die so sich ergebende Potenzreihe von x , y hat nun einen bestimmten Convergenzbezirk, und es sind zugleich ihre Coefficienten durchweg positiv, wie man sofort sieht, wenn man die Entwicklung von ψ nach der im Vorstehenden auseinandergesetzten Methode vornimmt. Es wird daher auch die Potenzreihe von (x, x_1, \dots, x_r) ; in welche ψ durch die Substitution

$$y = \frac{x_1 + \dots + x_r}{e}$$

übergeht, einen bestimmten Convergenzbezirk besitzen. Für jedes innerhalb dieses Bezirkes enthaltene Werthsystem (x, x_1, \dots, x_r) sind dann sicher auch die Reihen $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ sämmtlich unbedingt convergent. Dieselben besitzen also jedenfalls einen gemeinschaftlichen Convergenzbezirk und stellen, wenn

hergestellt, welche für $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ gesetzt den Differentialgleichungen formell genügen, so dass in jeder dieser Gleichungen die Ausdrücke auf der linken und rechten Seite, wenn man sie nach Potenzen von x, x_1, \dots, x_r entwickelt, in den Coefficienten der gleichstelligen Glieder übereinstimmen; so werden jene Reihen stets innerhalb eines bestimmten Bezirks convergiren und analytische Functionen, welche die Differentialgleichungen wirklich befriedigen, darstellen, sobald nur folgende Bedingungen erfüllt sind:

a) Es müssen die Reihen

$$\varphi(0, x_1, \dots, x_r)_1, \dots, \varphi(0, x_1, \dots, x_r)_n$$

einen gemeinschaftlichen Convergencebezirk besitzen;

b) es muss das Werthsystem

$$\varphi(0, 0, \dots, 0)_1, \dots, \varphi(0, 0, \dots, 0)_n$$

innerhalb des gemeinschaftlichen Convergencebezirks der Functionen

$$G_{\alpha, \beta}^{(\gamma)}(\varphi_1, \dots, \varphi_n), \quad G^{(\gamma)}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$$

enthalten sein;

c) es darf keine der Functionen $G^{(\gamma)}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ an der Stelle

$$(\varphi_1 = \varphi(0 \dots 0)_1, \dots, \varphi_n = \varphi(0 \dots 0)_n)$$

verschwinden.

Wenn insbesondere die $G_{\alpha, \beta}^{(\gamma)}$, $G^{(\gamma)}$ sämmtlich ganze Functionen oder beständig convergirende Reihen von $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ sind, so ist die Bedingung b) von selbst erfüllt.

§. II.

Ich nehme jetzt an, es sei zur Bestimmung einer Function φ von $r+1$ Veränderlichen (x, x_1, \dots, x_r) irgend eine algebraische partielle Differentialgleichung n^{ter} Ordnung gegeben, und auf die Form

$$(1.) \quad G\left(x, x_1, \dots, x_r, \varphi \dots \frac{\partial^{\alpha+\alpha_1+\dots+\alpha_r} \varphi}{\partial x^\alpha \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_r^{\alpha_r}} \dots\right) = 0$$

gebracht, wo G eine ganze rationale Function von $x, x_1, \dots, x_r, \varphi$ und denjenigen Ableitungen

$$\frac{\partial^{\alpha+\alpha_1+\dots+\alpha_r} \varphi}{\partial x^\alpha \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_r^{\alpha_r}},$$

in denen

$$\alpha + \alpha_1 + \dots + \alpha_r \leq n$$

ist, bedeutet. Dabei darf man voraussetzen, es sei diese Gleichung in dem

Sinne irreductibel, dass G nicht das Product zweier Ausdrücke von derselben Form ist.

Es handelt sich darum, auf die allgemeinste Weise ein diese Differentialgleichung befriedigendes *Functionenelement* (in dem Sinne, wie Herr *Weierstrass* dies Wort gebraucht)

$$\varphi(x, x_1, \dots, x_r | a, a_1, \dots, a_r)$$

zu bestimmen, d. h. eine innerhalb eines bestimmten Bezirks convergente und der Differentialgleichung genügende Potenzreihe von $x-a, x_1-a_1, \dots, x_r-a_r$, wo a, a_1, \dots, a_r Constanten bezeichnen.

Ich betrachte nun zunächst den Fall, den ich den *normalen* nennen will, wo von den Ableitungen

$$\frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n}, \quad \frac{\partial^n \varphi}{\partial x_1^n}, \quad \dots \quad \frac{\partial^n \varphi}{\partial x_r^n}$$

wenigstens eine, — ich will annehmen $\frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n}$ — in G wirklich vorkommt. Dieses vorausgesetzt lässt sich zeigen, dass man eine der Differentialgleichung genügende Reihe

$$\varphi(x, x_1, \dots, x_r | a, a_1, \dots, a_r) = \sum (b_{\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_r} \frac{(x-a)^\alpha}{\alpha!} \frac{(x_1-a_1)^{\alpha_1}}{\alpha_1!} \dots \frac{(x_r-a_r)^{\alpha_r}}{\alpha_r!})$$

($\alpha = 0 \dots \infty, \alpha_1 = 0 \dots \infty, \dots, \alpha_r = 0 \dots \infty$)

erhalten kann, in der, wenn man sie auf die Form

$$\sum_0^\infty \varphi^{(v)}(x_1, \dots, x_r | a_1, \dots, a_r) \frac{(x-a)^v}{v!}$$

bringt, von den Functionen $\varphi^{(v)}(x_1, \dots, x_r | a_1, \dots, a_r)$ die n ersten

$$\varphi^{(0)}(x_1, \dots, x_r | a_1, \dots, a_r), \quad \dots \quad \varphi^{(n-1)}(x_1, \dots, x_r | a_1, \dots, a_r)$$

im Allgemeinen willkürlich angenommen werden können, die übrigen dann aber durch die Differentialgleichung bestimmt werden.

Setzt man die für φ angenommene Reihe in den Ausdruck auf der Linken der Gleichung (1.) ein, und entwickelt denselben nach Potenzen von $x-a, x_1-a_1, \dots, x_r-a_r$, so muss zunächst das constante Glied verschwinden, d. h. es muss

$$(2.) \quad G(a, a_1, \dots, a_r, b_{0,0, \dots, 0} \dots b_{\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_r} \dots) = 0$$

sein.

Ich bezeichne ferner zur Abkürzung

$$\frac{\partial^{\alpha+\alpha_1+\dots+\alpha_r} \varphi(x, x_1, \dots, x_r | a, a_1, \dots, a_r)}{\partial x^\alpha \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_r^{\alpha_r}}$$

mit $\varphi_{\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_r}$ und

$$\varphi^{(\nu)}(x_1, \dots, x_r | a_1, \dots, a_r)$$

bloss mit $\varphi^{(\nu)}$. Dann wird für $x = a$

$$\varphi_{\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_r} \text{ gleich } \frac{\partial^{\alpha+\alpha_1+\dots+\alpha_r} \varphi^{(\alpha)}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_r^{\alpha_r}}$$

Entwickelt man nun

$$G(x, x_1, \dots, x_r, \varphi, \dots, \varphi_{\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_r}, \dots)$$

nach Potenzen von $x-a$, so wird der Coefficient von $(x-a)^0$ eine ganze Function von $\varphi^{(n)}$, deren Coefficienten ausser den Veränderlichen x_1, \dots, x_r nur die Functionen $\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(n-1)}$ und deren Ableitungen nach (x_1, \dots, x_r) enthalten, und es muss $\varphi^{(n)}$ so bestimmt werden, dass diese Function, welche mit $G_0^{(n)}(\varphi)$ bezeichnet werde, verschwindet, und zugleich $\varphi^{(n)}$ eine Potenzreihe von x_1-a_1, \dots, x_r-a_r wird. Dies ist aber immer, und zwar nur auf eine einzige Weise, möglich, wenn man a, a_1, \dots, a_r und diejenigen Grössen

$$b_{\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_r},$$

in denen

$$\alpha + \alpha_1 + \dots + \alpha_r \leq n, \quad \alpha < n$$

ist, so annimmt, dass sich aus der Gleichung (2.) für $b_{n,0,\dots,0}$ wenigstens ein endlicher Werth, der eine einfache Wurzel der Gleichung ist, ergibt. Diese Bedingung als erfüllt vorausgesetzt, sind die Reihen

$$\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(n-1)}$$

im Uebrigen willkürlich, jedoch so, dass jede von ihnen einen Convergencebezirk besitzt, anzunehmen. Die Coefficienten der Reihe

$$\varphi^{(n)}$$

die dann stets auch einen gewissen Convergencebezirk besitzt, werden rational aus den Coefficienten der vorstehenden und aus $b_{n,0,\dots,0}$ zusammengesetzt; es

giebt also so viel verschiedene Functionen $\varphi^{(n)}$, als verschiedene Werthe von $b_{n,0,\dots,0}$, die einfache Wurzeln der Gleichung (2.) sind, existiren.

Differentiirt man ferner den Ausdruck G , als Function von x betrachtet, so hat die λ^{te} Ableitung desselben die Form

$$G'(\varphi_{n,0,\dots,0}) \frac{\partial^{n+\lambda} \varphi}{\partial x^{n+\lambda}} + H_\lambda(x, x_1, \dots, x_r, \varphi_2 \dots \varphi_{a_1, \dots, a_r} \dots),$$

wo $G'(\varphi_{n,0,\dots,0})$ die partielle Ableitung von G nach $\varphi_{n,0,\dots,0}$ ist und H_λ eine ganze Function von x, x_1, \dots, x_r und denjenigen Grössen $\varphi_{a_1, \dots, a_r}$ bezeichnet, in welchen

$$\alpha + \alpha_1 + \dots + \alpha_r \leq n + \lambda, \quad \alpha < n + \lambda$$

ist. Der Coefficient von $\frac{(x-a)^\lambda}{\lambda!}$ in der erwähnten Entwicklung von G hat also die Form

$$G_0^{(n)}(\varphi) \varphi + H_{\lambda,0}^{(n+\lambda)},$$

wo $G_0^{(n)}$ und $H_{\lambda,0}^{(n+\lambda)}$ diejenigen Functionen von x_1, \dots, x_r bezeichnen, in welche G' und H_λ dadurch übergehen, dass man $x = a$ und

$$\varphi_{a_1, \dots, a_r} = \frac{\partial^{a_1 + \dots + a_r} \varphi}{\partial x_1^{a_1} \dots \partial x_r^{a_r}}$$

setzt.

Dieser Coefficient muss nun gleich Null sein, und da sich, weil $G_0^{(n)}(\varphi)$ an der Stelle $(x_1 = a_1, \dots, x_r = a_r)$ nicht verschwindet,

$$\frac{1}{G_0^{(n)}(\varphi)}$$

in eine Potenzreihe von $x_1 - a_1, \dots, x_r - a_r$ entwickeln lässt, so ergibt sich φ als Potenzreihe von $x_1 - a_1, \dots, x_r - a_r$, welche völlig bestimmt ist, sobald

$$\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(n+\lambda-1)}$$

es sind. Daraus folgt, dass sich, wenn man $a, a_1, \dots, a_r, \varphi, \varphi_2, \dots, \varphi$ den obigen Bedingungen gemäss annimmt, darauf nach Fixirung des Coefficienten $b_{n,0,\dots,0}$ zunächst φ und dann

$$\varphi_2, \varphi_3, \dots$$

so bestimmen lassen, und zwar nur auf eine einzige Weise, wie es erforderlich ist, wenn der Ausdruck

$$\varphi = \sum^{(v)} \varphi(x_1, \dots, x_r | a_1, \dots, a_r) \frac{(x-a)^v}{v!}$$

der vorgelegten Differentialgleichung formell genügen soll.

Um nun zu beweisen, dass φ ein Element einer diese Gleichung befriedigenden analytischen Function von x, x_1, \dots, x_r darstellt, hat man zu zeigen, dass sie innerhalb eines gewissen Bezirks convergirt.

Dies geschieht in folgender Weise:

Ich setze

$$(3.) \quad x = a + u, \quad x_1 = a_1 + u_1, \quad \dots \quad x_r = a_r + u_r$$

und bezeichne, unter φ jetzt die Potenzreihe von u, u_1, \dots, u_r verstehend, in welche $\varphi(x, x_1, \dots, x_r | a, a_1, \dots, a_r)$ durch diese Substitution übergeht,

$$\varphi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \quad \dots \quad \frac{\partial^n \varphi}{\partial u^n}$$

beziehlich mit

$$\varphi_0, \quad \varphi_1, \quad \dots \quad \varphi_n,$$

sowie die übrigen Ableitungen

$$\frac{\partial^{\alpha + \alpha_1 + \dots + \alpha_r} \varphi}{\partial x^\alpha \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_r^{\alpha_r}},$$

in denen $\alpha + \alpha_1 + \dots + \alpha_r \leq n$ ist, in irgend einer Ordnung genommen mit $\varphi_{n+1}, \dots, \varphi_s$.

Dann hat man

$$(4.) \quad \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial u} = \varphi_1, \\ \dots \\ \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial u} = \varphi_n. \end{cases}$$

Ferner kann man, wenn $\lambda > 0$,

$$(5.) \quad \frac{\partial \varphi_{n+\lambda}}{\partial u} = \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial u_\nu}$$

setzen, wo μ eine der Zahlen $1 \dots s$, und ν eine der Zahlen $1 \dots r$ ist. (Ist nämlich $\varphi_{n+\lambda} = \varphi_{\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_r}$, so ist mindestens eine der Zahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_r$, z. B. α_ν von Null verschieden, und man hat dann

$$\frac{\partial \varphi_{n+\lambda}}{\partial u} = \frac{\partial \varphi_{\alpha+1, \alpha_1, \dots, \alpha_\nu-1, \dots, \alpha_r}}{\partial u_\nu},$$

und es ist $\varphi_{\alpha+1, \alpha_1, \dots, \alpha_\nu-1, \dots, \alpha_r}$ eine der Grössen $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_s$.

Bezeichnet man ferner, unter G wie vorhin den Ausdruck auf der

linken Seite der Gleichung (1.) verstehend, dessen partielle Ableitungen in Beziehung auf $x, \varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_s$ respective mit

$$G'(x), G'(\varphi_0), G'(\varphi_1), \dots, G'(\varphi_s),$$

so hat man

$$G'(\varphi_n) \frac{\partial \varphi_n}{\partial u} = - \left\{ G'(x) + G'(\varphi_0) \frac{\partial \varphi_0}{\partial u} + \dots + G'(\varphi_{n-1}) \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial u} + G'(\varphi_{n+1}) \frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial u} + \dots + G'(\varphi_s) \frac{\partial \varphi_s}{\partial u} \right\},$$

also

$$(6.) \quad G'(\varphi_n) \frac{\partial \varphi_n}{\partial u} = - \sum_1^{s-n} \left(G'(\varphi_{n+\lambda}) \frac{\partial \varphi_{n+\lambda}}{\partial u} \right) - \sum_0^{n-1} \left(G'(\varphi_\lambda) \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial u} \right) - G(x).$$

Endlich ist

$$(7.) \quad \frac{\partial x}{\partial u} = 1, \quad \frac{\partial x_1}{\partial u} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial x_r}{\partial u} = 0.$$

Die Gleichungen (4.), (5.), (6.), (7.) bilden nun für die Grössen $x, x_1, \dots, x_r, \varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_s$, welche sämtlich Potenzreihen von u, u_1, \dots, u_r sind, ein System partieller Differentialgleichungen von der in §. I, Zusatz D) betrachteten Form. Da sie nun überdies den dort unter a) und c) angegebenen Bedingungen genügen, so ist damit festgestellt, dass sie sämtlich innerhalb eines bestimmten Bezirks convergiren.

Jede auf die angegebene Weise hergestellte Potenzreihe

$$\varphi(x, x_1, \dots, x_r | a, a_1, \dots, a_r)$$

ist also wirklich ein Element einer die vorgelegte Differentialgleichung befriedigenden analytischen Function.

Es ist jetzt noch zu untersuchen, ob man umgekehrt auch für jede der vorgelegten Differentialgleichung genügende analytische Function φ ein sie definirendes Element durch das auseinandergesetzte Verfahren erhalten kann.

Es sei

$$\varphi(x, x_1, \dots, x_r) = \sum_{\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_r} b_{\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_r} \frac{(x-a)^\alpha}{\alpha!} \frac{(x_1-a_1)^{\alpha_1}}{\alpha_1!} \dots \frac{(x_r-a_r)^{\alpha_r}}{\alpha_r!}$$

ein beliebiges Element einer solchen Function, so bestehen für dasselbe, wenn die obigen Bezeichnungen beibehalten werden, die Gleichungen:

$$G_0^{(n)}(\varphi) = 0,$$

$$G_0^{(n)}(\varphi) \cdot \varphi + H_{l,0} = 0.$$

Wenn nun $b_{n,0,\dots,0}$ nicht eine mehrfache Wurzel der Gleichung

$$G(a, a_1, \dots, a_r, b_{0,\dots,0}, \dots, b_{a,a_1,\dots,a_r}, \dots, b_{n,0,\dots,0}) = 0$$

ist, so sind durch diese Gleichungen und die Bedingung, dass φ an der Stelle $(x_1 = a_1, \dots, x_r = a_r)$ den Werth $b_{n,0,\dots,0}$ haben soll,

$$\begin{matrix} (n) & (n+1) & (n+2) & \dots \\ \varphi, & \varphi, & \varphi, & \dots \end{matrix}$$

vollständig bestimmt.

Nun besitzt aber die Function stets unendlich viele Elemente, für welche $b_{n,0,\dots,0}$ eine einfache Wurzel der ebengenannten Gleichung ist, wofern die Function nicht eine sogenannte singuläre Lösung der Differentialgleichung ist, d. h. ausser dieser auch der Gleichung

$$G' \left(\frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n} \right) = 0$$

genügt. Damit ist bewiesen:

Ist φ irgend eine der vorgelegten Differentialgleichung, aber nicht auch der Gleichung

$$G' \left(\frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n} \right) = 0$$

genügende analytische Function, so lässt sich jedes Element

$$\varphi(x, x_1, \dots, x_r, a, a_1, \dots, a_r)$$

derselben, für welches $G' \left(\frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n} \right)$ an der Stelle $(x = a, x_1 = a_1, \dots, x_r = a_r)$ einen von Null verschiedenen Werth hat, durch das im Vorstehenden entwickelte Verfahren bestimmen.

In dem Falle aber, wo φ eine singuläre Lösung der Differentialgleichung ist, erhält man für sie durch die Combination der beiden Gleichungen

$$G = 0, \quad G' \left(\frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n} \right) = 0$$

entweder eine algebraische Gleichung oder eine partielle Differentialgleichung, der sie als nicht singuläre Lösung genügt.

§. III.

Wenn die vorgelegte Differentialgleichung nicht die normale Form hat, so kann man ihr dieselbe doch stets dadurch geben, dass man an Stelle der Grössen x, x_1, \dots, x_r ebenso viele lineare Functionen derselben (y, y_1, \dots, y_r) als Argumente von φ einführt.

$$\begin{aligned} \varphi_{a'+1, a'_1, \dots, a'_r} &= c^{a'+1} c_1^{a'_1} \dots c_r^{a'_r} \frac{\partial^{n+1} \varphi}{\partial y^{n+1}} + \dots, \\ \varphi_{a''+1, a''_1, \dots, a''_r} &= c^{a''+1} c_1^{a''_1} \dots c_r^{a''_r} \frac{\partial^{n+1} \varphi}{\partial y^{n+1}} + \dots, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

wo die weggelassenen Glieder nur solche Ableitungen

$$\frac{\partial^{\beta+\beta_1+\dots+\beta_r} \varphi}{\partial y^\beta \partial y_1^{\beta_1} \dots \partial y_r^{\beta_r}}$$

enthalten, in denen $\beta + \beta_1 + \dots + \beta_r = n+1$, aber $\beta < n+1$ ist. Man hat also

$$\frac{\partial G}{\partial x} = (G_1 c^{a'+1} c_1^{a'_1} \dots c_r^{a'_r} + G_2 c^{a''+1} c_1^{a''_1} \dots c_r^{a''_r} + \dots) \frac{\partial^{n+1} \varphi}{\partial y^{n+1}} + \dots \text{ etc.},$$

wo in den weggelassenen Gliedern, nachdem die in ihnen enthaltenen Ableitungen von φ nach x, x_1, \dots, x_r in Ableitungen nach y, y_1, \dots, y_r verwandelt worden, $\frac{\partial^{n+1} \varphi}{\partial y^{n+1}}$ nicht vorkommt.

Wählt man nun die Constanten c, c_1, \dots, c_r so, dass der Coefficient von $\frac{\partial^{n+1} \varphi}{\partial y^{n+1}}$ in der vorstehenden Gleichung, als Function von $x, x_1, \dots, x_r, \dots, \varphi_{a, a_1, \dots, a_r}, \dots$ betrachtet, nicht identisch verschwindet — was nur für specielle Werthsysteme der c, c_1, \dots, c_r eintreten kann — so wird derselbe auch nicht identisch gleich Null, wenn man in ihm an Stelle der Veränderlichen x, x_1, \dots, x_r die y, y_1, \dots, y_r einführt und die Ableitungen $\varphi_{a, a_1, \dots, a_r}$ in Ableitungen von φ nach y, y_1, \dots, y_r verwandelt; und es kommt also die Ableitung $\frac{\partial^{n+1} \varphi}{\partial y^{n+1}}$ wirklich vor. Es ist aber

$$\frac{\partial G}{\partial x} = c \frac{\partial G}{\partial y} + c_1 \frac{\partial G}{\partial y_1} + \dots + c_r \frac{\partial G}{\partial y_r},$$

und es kann daher $\frac{\partial G}{\partial x}$, auf die angegebene Weise transformirt, die Ableitung $\frac{\partial^{n+1} \varphi}{\partial y^{n+1}}$ nur dann enthalten, wenn in G die Ableitung $\frac{\partial^n \varphi}{\partial y^n}$ vorkommt.

Nimmt man insbesondere

$$\begin{aligned} y &= x - a - c_1(x_1 - a_1) - \dots - c_r(x_r - a_r) \\ y_1 &= x_1 - a_1 \\ &\dots \\ y_r &= x_r - a_r, \end{aligned}$$

so sieht man, dass bei gehöriger Wahl von c_1, \dots, c_r sich φ stets nach

Potenzen von

$$x - a - c_1(x_1 - a_1) - \dots - c_r(x_r - a_r), \quad x_1 - a_1, \quad \dots \quad x_r - a_r$$

entwickeln lässt, und dass man diejenigen Functionen, in welche

$$\varphi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \dots \quad \frac{\partial^{n-1} \varphi}{\partial x^{n-1}}$$

für

$$x = a + c_1(x_1 - a_1) + \dots + c_r(x_r - a_r)$$

übergehen, als Potenzreihen von $x_1 - a_1, \dots, x_r - a_r$ im Allgemeinen willkürlich nehmen kann.

Die im Vorstehenden beschriebene Umformung der vorgelegten Differentialgleichung könnte in dem Falle unnötig erscheinen, wenn in dieser Gleichung zwar nicht die n^{te} Ableitung von φ nach x , aber doch eine andere $\frac{\partial^m \varphi}{\partial x^m}$ (wo $m < n$, aber > 0) vorkommt, und überdies in den übrigen Ableitungen

$$\frac{\partial^{\alpha + \alpha_1 + \dots + \alpha_r} \varphi}{\partial x^\alpha \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_r^{\alpha_r}}$$

$\alpha < m$ ist.

Dem nimmt man wie oben

$$\varphi = \sum^{(v)} \varphi(x_1, \dots, x_r | a_1, \dots, a_r) \frac{(x-a)^v}{v!}$$

an, und entwickelt den Ausdruck auf der linken Seite der Gleichung nach Potenzen von $x - a$, so erhält man zunächst eine Gleichung zwischen

$$\varphi, \quad \varphi^{(1)}, \quad \dots \quad \varphi^{(m)}$$

und einer gewissen Anzahl der Ableitungen der m ersten dieser Functionen nach x_1, \dots, x_r . Nimmt man dann die Reihen $\varphi, \varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(m-1)}$ willkürlich an, doch so, dass die Gleichung, in welche die ebengenannte übergeht, wenn man $x_1 = a_1, \dots, x_r = a_r$ setzt, nach $\varphi^{(m)}$ aufgelöst, eine endliche, einfache Wurzel hat, so kann man φ als Potenzreihe von $x_1 - a_1, \dots, x_r - a_r$ so bestimmen, dass sie die erstere Gleichung befriedigt und für $x_1 = a_1, \dots, x_r = a_r$ in jene Wurzel übergeht.

Die übrigen Coefficienten der genannten Entwicklung liefern sodann zur Berechnung der übrigen Functionen

$$\varphi^{(m+v)}(x_1, \dots, x_r | a_1, \dots, a_r)$$

die erforderlichen Gleichungen, durch welche sie sämmtlich, und zwar eindeutig, bestimmt werden.

Man erhält so, ganz in der oben auseinandergesetzten Weise, eine Potenzreihe

$$\varphi(x, x_1, \dots, x_r | a, a_1, \dots, a_r),$$

welche für φ gesetzt die gegebene Differentialgleichung formell befriedigt.

Aber ich habe bemerkt, dass wenn diese Reihe convergent sein soll, die Functionen $\varphi, \dots, \varphi^{(n-1)}$ nicht willkürlich angenommen werden können, sondern solchen Beschränkungen unterworfen sind, dass man im Allgemeinen sagen kann, die Reihe

$$\varphi(x, x_1, \dots, x_r | a, a_1, \dots, a_r)$$

convergiere an *keiner* Stelle (x, x_1, \dots, x_r) , wie nahe man dieselbe auch der Stelle (a, a_1, \dots, a_r) annehmen kann.

Ich begnüge mich aber hier dies an einem Beispiel nachzuweisen.

Es sei die Differentialgleichung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$$

gegeben. Wenn $\varphi_0(y|b)$ irgend eine Potenzreihe von $y-b$ ist, so genügt die Reihe

$$\sum_{\nu} \frac{d^{2\nu} \varphi_0(y|b)}{dy^{2\nu}} \cdot \frac{(x-a)^\nu}{\nu!}$$

dieser Differentialgleichung formell, und geht für $x=a$ in $\varphi_0(y|b)$ über; sie besitzt aber nur bei einer ganz besonderen Wahl von $\varphi_0(y|b)$ einen Convergenzbezirk, während im Allgemeinen sie für kein Werthsystem (x, y) eine bestimmte, endliche Summe hat.

Es sei z. B. $a=0, b=0$,

$$\varphi_0(y|b) = \frac{1}{1-y}.$$

Dann ist

$$\frac{d^n \varphi}{dy^n} = \frac{n!}{(1-y)^{n+1}},$$

und die obige Reihe geht in

$$\sum_{\nu} \frac{2\nu!}{\nu!} \frac{x^\nu}{(1-y)^{2\nu+1}}$$

über, von der es leicht zu sehen ist, dass sie divergent ist, wie klein auch x, y angenommen werden.

Um allgemein zu zeigen, welche Bedingung die Function $\varphi_0(y|b)$ erfüllen muss, damit ein die gegebene Differentialgleichung befriedigendes Element $\varphi(x, y|a, b)$, das für $x = a$ in $\varphi_0(y|b)$ übergeht, existire, bemerke ich, dass die Differentialgleichung in Beziehung auf die Veränderliche y die normale Form hat; wenn man daher zwei Functionen

$$\varphi^{(0)}(x|a), \quad \varphi^{(1)}(x|a)$$

willkürlich annimmt, so kann man $\varphi(x, y|a, b)$ nach dem Vorhergehenden so bestimmen, dass diese Function der gegebenen Differentialgleichung genügt und für $y = b$

$$\varphi(x, y|a, b) \text{ in } \varphi^{(0)}(x|a)$$

und

$$\frac{\partial \varphi(x, y|a, b)}{\partial y} \text{ in } \varphi^{(1)}(x|a)$$

übergeht. Und zwar erhält man, da in diesem Falle

$$\varphi^{(2)}(x|a) \text{ nur den einen Werth } \frac{\partial \varphi^{(0)}(x|a)}{\partial x}$$

hat,

$$\sum_0^{\infty} \frac{\partial^r \varphi^{(0)}(x|a)}{\partial x^r} \frac{(y-b)^{2r}}{(2r)!} + \sum_0^{\infty} \frac{\partial^r \varphi^{(1)}(x|a)}{\partial x^r} \frac{(y-b)^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

als den *allgemeinsten* Ausdruck von $\varphi(x, y|a, b)$.

Ist nun

$$\varphi^{(0)}(x|a) = \sum_0^{\infty} c_r (x-a)^r$$

und

$$\varphi^{(1)}(x|a) = \sum_0^{\infty} c'_r (x-a)^r,$$

so ergibt sich

$$\varphi_0(y|b) = \varphi(a, y|a, b) = \sum_0^{\infty} \frac{v!}{(2v)!} c_v (y-b)^{2v} + \sum_0^{\infty} \frac{v!}{(2v+1)!} c'_v (y-b)^{2v+1}.$$

Bezeichnet man nun mit ϱ eine positive Grösse, die kleiner ist als der Radius des gemeinschaftlichen Convergenzbezirks der Reihen $\varphi^{(0)}$, $\varphi^{(1)}$, und die absoluten Beträge von c_r , c'_r mit $|c_r|$, $|c'_r|$, so lässt sich eine positive Grösse g so angeben, dass für jeden Werth von v

$$|c_r| < g\varrho^{-r}, \quad |c'_r| < g\varrho^{-r}.$$

Es muss also $\varphi_0(y|b)$ so gewählt werden, dass für zwei bestimmte Grössen g, ρ dem absoluten Betrage nach

der Coefficient von $(y-b)^{2r}$ kleiner ist als $\frac{\nu!}{(2\nu)!} g \rho^{-r}$,

- - - - - $(y-b)^{2r+1}$ - - - - - $\frac{\nu!}{(2\nu)!} g \rho^{-r}$.

Daraus folgt, dass die Reihe

$$\sum \frac{d^{2r} \varphi_0(y|b)}{dy^{2r}} \frac{(x-a)^r}{r!}$$

niemals convergent ist, wie klein man auch $x-a, y-b$ annehmen möge, wenn die Reihe $\varphi_0(y|b)$ nur einen beschränkten Convergenzbezirk besitzt. Aber auch wenn $\varphi_0(y|b)$ eine beständig convergirende Reihe ist, kann die vorstehende Reihe beständig divergent sein. Dies ist z. B. der Fall, wenn man

$$\varphi_0(y|b) = \sum_{\nu} \frac{(y-b)^\nu}{(\nu!)^2}$$

annimmt, weil dann die eben angegebenen Bedingungen für die Coefficienten der Reihe $\varphi_0(y|b)$ nicht erfüllt sind.

§. IV.

Ich gehe jetzt zu dem Fall über, wo zur Bestimmung von m Functionen $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ von $r+1$ Veränderlichen (x, x_1, \dots, x_r) ein System von m algebraischen partiellen Differentialgleichungen gegeben ist, welches in Beziehung auf φ_i von der n_i -ten Ordnung sein möge. Ich setze dabei voraus, dass dasselbe die *normale* Form habe, d. h. dass in demselben die Ableitungen

$$\frac{\partial^{n_1} \varphi_1}{\partial x^{n_1}}, \dots, \frac{\partial^{n_m} \varphi_m}{\partial x^{n_m}}$$

wirklich vorkommen, und dass es, wenn man diese Grössen als die Unbekannten, die übrigen in ihm vorkommenden aber als willkürlich gegebene betrachtet, auflösbar sei, und nur eine endliche Anzahl von Werthsystemen der genannten Grössen liefere.

Der ersten Bedingung ist, wenn sie nicht von selbst erfüllt sein sollte, stets durch eine lineare Transformation der unabhängigen Veränderlichen in der im vorhergehenden Paragraphen angegebenen Weise zu genügen.

Was dagegen die zweite Bedingung angeht, so bleibt allerdings noch

zu untersuchen, ob ein Gleichungssystem von nicht normaler Form stets durch ein ähnliches Verfahren, wie es *Jacobi* bei einem System gewöhnlicher Differentialgleichungen angewandt hat, auf ein normales zurückgeführt werden könne, worauf ich aber hier nicht eingehen kann.

Dieses vorausgeschickt, bringe ich das vorgelegte Gleichungssystem folgendermassen auf eine „canonische“ Gestalt:

Man kann, um die Grössen

$$\frac{\partial^{n_1} \varphi_1}{\partial x^{n_1}}, \dots, \frac{\partial^{n_m} \varphi_m}{\partial x^{n_m}}$$

durch $x, x_1, \dots, x_r, \varphi_1, \dots, \varphi_m$ und die in den gegebenen Gleichungen enthaltenen Ableitungen von $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ auszudrücken, eine lineare Function der ersteren

$$\varphi_0 = c_1 \frac{\partial^{n_1} \varphi_1}{\partial x^{n_1}} + \dots + c_m \frac{\partial^{n_m} \varphi_m}{\partial x^{n_m}},$$

wo c_1, \dots, c_m willkürlich anzunehmende Constanten bezeichnen, als unbekannte Grösse einführen. Man erhält dann für φ_0 eine algebraische Gleichung

$$\mathfrak{G} = 0,$$

wo \mathfrak{G} eine ganze Function von φ_0 , deren Coefficienten ganze und rationale Functionen der als bekannt angenommenen Grössen sind, bezeichnet.

Es sei G ein unzerlegbarer Theiler von \mathfrak{G} , so entspricht jedem Werthe von φ_0 , welcher der Gleichung

$$G = 0$$

genügt, ein Werthsystem der unbekanntenen Ableitungen:

$$\frac{\partial^{n_1} \varphi_1}{\partial x^{n_1}} = \frac{G_1}{G'}, \dots, \frac{\partial^{n_m} \varphi_m}{\partial x^{n_m}} = \frac{G_m}{G'},$$

wo

$$G' = \frac{\partial G}{\partial \varphi_0}, \quad G_1 = -\frac{\partial G}{\partial c_1}$$

ist.

Es werden daher die gegebenen Gleichungen ersetzt durch eine gewisse Anzahl von Gleichungssystemen der Form

$$(1.) \quad \begin{cases} G(\varphi_0) = 0, \\ G' \frac{\partial^{n_1} \varphi_1}{\partial x^{n_1}} = G_1, \\ \dots \\ G' \frac{\partial^{n_m} \varphi_m}{\partial x^{n_m}} = G_m, \end{cases}$$

wo die sämmtlichen G , wenn man

$$\frac{\partial^{a+a_1+\dots+a_r} \varphi_i}{\partial x^a \partial x_1^{a_1} \dots \partial x_r^{a_r}}$$

mit $\varphi_{i,a,a_1,\dots,a_r}$ bezeichnet, ganze rationale Functionen von x, x_1, \dots, x_r und denjenigen Grössen

$$\varphi_{i,a,a_1,\dots,a_r}$$

sind, in denen — für den jedesmal betrachteten Werth von λ —

$$\alpha + \alpha_1 + \dots + \alpha_r \leq n_i, \quad \alpha < n_i$$

ist.

Es handelt sich nun darum, $m+1$ Functionen-Elemente

$\varphi_0(x, x_1, \dots, x_r | a, a_1, \dots, a_r), \varphi_1(x, x_1, \dots, x_r | a, a_1, \dots, a_r), \dots, \varphi_m(x, x_1, \dots, x_r | a, a_1, \dots, a_r)$ auf die allgemeinste Weise so zu bestimmen, dass dieselben für $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_m$ gesetzt, die Gleichungen (1.) befriedigen.

Man setze, unter i eine der Zahlen $0, 1, \dots, m$ verstehend,

$$(2.) \quad \begin{cases} \varphi_i = \sum (b_{a,a_1,\dots,a_r}^{(i)} \frac{(x-a)^\alpha}{\alpha!} \frac{(x_1-a_1)^{\alpha_1}}{\alpha_1!} \dots \frac{(x_r-a_r)^{\alpha_r}}{\alpha_r!}) \\ (\alpha = 0 \dots \infty, \alpha_1 = 0 \dots \infty, \dots, \alpha_r = 0 \dots \infty) \\ = \sum_a^{(a)} \varphi_{i,a,a_1,\dots,a_r} \frac{(x-a)^\alpha}{\alpha!}, \end{cases}$$

die Constanten a, a_1, \dots, a_r und sämmtliche Coefficienten $b_{a,a_1,\dots,a_r}^{(i)}$ vorläufig ganz unbestimmt lassend, und entwickle den Ausdruck G nach Potenzen von $x-a, x_1-a_1, \dots, x_r-a_r$; so erhält man das constante Glied dieser Entwicklung, das mit \bar{G} bezeichnet werden möge, wenn man in G

$$a, a_1, \dots, a_r \quad \text{für} \quad x, x_1, \dots, x_r, \\ b_{a,a_1,\dots,a_r}^{(i)} \quad \text{für} \quad \varphi_{i,a,a_1,\dots,a_r}$$

und

$$b_{0,0,\dots,0}^{(0)} \quad \text{für} \quad \varphi_0$$

setzt. Dann muss, wenn die Gleichungen (1.) befriedigt werden sollen, zunächst

$$\bar{G} = 0$$

sein. Diese Gleichung dient dazu, um $b_{0,0,\dots,0}^{(0)}$ durch die eben genannten Grössen auszudrücken. Die letzteren müssen also so gewählt werden, dass in dem Ausdrücke \bar{G} die zu bestimmende Grösse $b_{0,0,\dots,0}^{(0)}$ wirklich vorkommt. Entwickelt man ferner G nach Potenzen von $x-a$, so wird der

Coefficient von $(x-a)^0$, der mit $\dot{G}^{(0)}(\varphi_0)$ bezeichnet werden möge, dadurch erhalten, dass man in G

a für x ,

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\dots+\alpha_r} \varphi(x_1, \dots, x_r | a_1, \dots, a_r)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_r^{\alpha_r}} \quad \text{für} \quad \varphi_{\lambda; \alpha_1, \dots, \alpha_r}$$

und

$\varphi_0^{(0)}$ für φ_0

setzt. Es ist also

$$\dot{G}^{(0)}(\varphi_0)$$

eine ganze Function von $\varphi_0^{(0)}$ mit Coefficienten, welche ganze Functionen von x_1, \dots, x_r ,

ferner von

$$\varphi_1^{(0)}, \dots, \varphi_1^{(n_1-1)}, \dots, \varphi_m^{(0)}, \dots, \varphi_m^{(n_m-1)}$$

und einer gewissen Anzahl der Ableitungen dieser Functionen sind. Dieselbe geht in \bar{G} über, wenn man $x_1 = a_1, \dots, x_r = a_r$ nimmt. Unterwirft man also die in \bar{G} vorkommenden Grössen $a, a_1, \dots, a_r, b_{a, a_1, \dots, a_r}^{(2)}$ der Bedingung, dass die Gleichung

$$\bar{G} = 0$$

nach $b_{0, \dots, 0}^{(0)}$ aufgelöst, mindestens *eine* endliche, einfache Wurzel besitze, und versteht jetzt unter $b_{0, \dots, 0}^{(0)}$ eine solche, so giebt es eine völlig bestimmte Function $\varphi_0^{(0)}(x_1, \dots, x_r | a_1, \dots, a_r)$, welche, für $\varphi_0^{(0)}$ gesetzt, der Gleichung

$$(3.) \quad \dot{G}^{(0)}(\varphi_0) = 0$$

genügt, und in $b_{0, \dots, 0}^{(0)}$ übergeht, wenn man $x_1 = a_1, \dots, x_r = a_r$ setzt. Dabei können die Coefficienten der eben genannten $n_1 + n_2 + \dots + n_m$ Functionen

$$\varphi_i^{(\nu)}(x_1, \dots, x_r | a_1, \dots, a_r),$$

abgesehen von der angegebenen Beschränkung, ganz willkürlich angenommen werden, selbstverständlich jedoch so, dass jede von ihnen einen Convergenzbezirk besitze. Dann hat die in der angegebenen Weise bestimmte Function $\varphi_0^{(0)}(x_1, \dots, x_r | a_1, \dots, a_r)$ ebenfalls immer einen gewissen Convergenzbezirk.

Différentiirt man ferner den Ausdruck

$$G' \frac{\partial^{n_\lambda} \varphi_\lambda}{\partial x^{n_\lambda}} - G_\lambda$$

als Function von x betrachtet, so hat die ν^{te} Ableitung derselben die Form

$$G' \frac{\partial^{n_\lambda + \nu} \varphi_\lambda}{\partial x^{n_\lambda + \nu}} + H_\nu^{(\lambda)},$$

wo $H_\nu^{(\lambda)}$ eine ganze Function von x, x_1, \dots, x_r und denjenigen Grössen

$$\varphi_{\mu; a, a_1, \dots, a_r},$$

in denen — bei dem jedesmal betrachteten Werth von λ —

$$\alpha + \alpha_1 + \dots + \alpha_r \leq n_\mu + \nu, \quad \alpha < n_\mu + \nu$$

ist, bezeichnet.

Die Entwicklung von

$$G' \frac{\partial^{n_\lambda} \varphi_\lambda}{\partial x^{n_\lambda}} - G_\lambda$$

nach Potenzen von $x - a$ hat also die Form

$$\dot{G}' \varphi_\lambda + \dot{H}_\nu^{(\lambda)},$$

wo $\dot{G}', \dot{H}_\nu^{(\lambda)}$ aus $G', H_\nu^{(\lambda)}$ dadurch entstehen, dass man setzt

$$x = a$$

und

$$\varphi_{\mu; a, a_1, \dots, a_r} = \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_r} \varphi_\mu^{(\alpha)}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_r^{\alpha_r}}.$$

Es hat ferner die ν^{te} Ableitung des Ausdruckes G nach x die Gestalt:

$$G' \frac{\partial^\nu \varphi_\lambda}{\partial x^\nu} + H_\nu^{(0)},$$

wo $H_\nu^{(0)}$ dieselbe Gestalt wie die vorstehenden Functionen $H_\nu^{(\lambda)}$ hat.

Bezeichnet man also mit

$$\dot{G}^{(\lambda)}, \quad \dot{H}_\nu^{(0)}$$

die Ausdrücke, in welche $G^{(\lambda)}, H_\nu^{(0)}$ dadurch übergehen, dass man $x = a$ und

$$\varphi_{\mu; a, a_1, \dots, a_r} = \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_r} \varphi_\mu^{(\alpha)}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_r^{\alpha_r}}$$

setzt, so ist der Coefficient von $\frac{(x-a)^\nu}{\nu!}$ in der Entwicklung von G nach

Potenzen von $x - a$

$$\dot{G}' \varphi_0 + \dot{H}_v^{(0)}.$$

Damit also die Gleichungen (1.) befriedigt werden, muss man haben

$$(4.) \quad \dot{G}' \varphi_\lambda + \dot{H}_v^{(\lambda)} = 0, \quad (\lambda = 0, 1, \dots m).$$

Da sich, weil \dot{G}' an der Stelle $(x_1 = a_1, \dots x_r = a_r)$ nicht verschwindet,

$$\frac{1}{\dot{G}'}$$

in eine Potenzreihe von $x_1 - a_1, \dots x_r - a_r$ entwickeln lässt, so ergeben sich aus den Gleichungen (4.)

$$\begin{matrix} (\nu+1) & (n_1+\nu) & & (n_m+\nu) \\ \varphi_0, & \varphi_1, & \dots & \varphi_m \end{matrix}$$

als Potenzreihen von $x_1 - a_1, \dots x_r - a_r$, welche vollständig bestimmt sind, sobald

$$\begin{matrix} (0) \\ \varphi_0, \\ (0) & & (n_1-1) \\ \varphi_1, & \dots & \varphi_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ (0) & & (n_m-1) \\ \varphi_m, & \dots & \varphi_m \end{matrix}$$

es sind.

Daraus folgt, dass wenn man $a, a_1, \dots a_r$ und die vorstehenden Functionen

$$\varphi_\lambda(x_1, \dots x_r | a_1, \dots a_r) \quad (\text{für } \lambda = 1 \dots m)$$

den angegebenen Bedingungen gemäss, im Uebrigen aber willkürlich annimmt, darauf, nach Fixirung der aus der Gleichung

$$\bar{G} = 0$$

sich ergebenden Coefficienten $b_{0,0,\dots,0}^{(0)}$, zunächst φ_0 und dann die sämtlichen Functionen $\varphi_\lambda(x_1, \dots x_r | a_1, \dots a_r)$ sich so bestimmen lassen, und zwar nur auf eine einzige Weise, wie es erforderlich ist, wenn

und deren ersten Ableitungen nach den Veränderlichen x_1, \dots, x_r vermittelt der Gleichungen (4.) eliminieren, und erhält so eine Gleichung

$$(7.) \quad (G')^k \frac{\partial \varphi_0}{\partial u} - G_0 = 0,$$

wo k eine der Zahlen 0, 1, 2, 3 und G_0 ein Ausdruck von derselben Gestalt wie die G_i in den Gleichungen (6.) ist.

Sodann hat man für jede Function $\varphi_{\lambda; \alpha_1, \dots, \alpha_r}$, in welcher

$$\alpha + \alpha_1 + \dots + \alpha_r < n_1$$

und mindestens eine der Grössen $\alpha_1, \dots, \alpha_r$, z. B. $\alpha_\mu > 0$ ist,

$$(8.) \quad \frac{\partial \varphi_{\lambda; \alpha_1, \dots, \alpha_\mu, \dots, \alpha_r}}{\partial u} = \frac{\partial \varphi_{\lambda; \alpha+1, \dots, \alpha_\mu, \dots, \alpha_r}}{\partial u_\mu}.$$

Endlich ist

$$(9.) \quad \frac{\partial x}{\partial u} = 1, \quad \frac{\partial x_1}{\partial u} = 0, \quad \dots \quad \frac{\partial x_r}{\partial u} = 0.$$

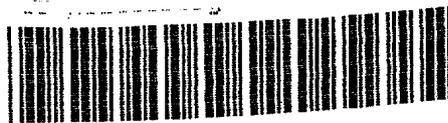
So ergibt sich für x, x_1, \dots, x_r und diejenigen Functionen

$$\varphi_{\lambda; \alpha_1, \dots, \alpha_r},$$

in welchen $\alpha + \alpha_1 + \dots + \alpha_r < n_1$ ist (wobei jedoch jetzt *jede* solche Function, auch wenn sie in den Gleichungen (1.) nicht vorkommen sollte, in Betracht zu ziehen ist), ein System partieller Differentialgleichungen von der in §. I, Zusatz D) betrachteten Form.

Damit ist festgestellt, dass sie Potenzreihen von u, u_1, \dots, u_r oder $x-a, x_1-a_1, \dots, x_r-a_r$ sind, welche sämtlich innerhalb eines bestimmten Bezirks convergieren, indem die am angeführten Orte unter a), b) angegebenen Bedingungen in diesem Falle erfüllt sind.

Der Beweis ferner, dass man für jedes die Gleichungen (1.) befriedigende System analytischer Functionen ein dasselbe definirendes System von Functionen-Elementen durch das beschriebene Verfahren erhalten kann, wird ganz so geführt, wie es am Schlusse des §. II. für den Fall, dass nur eine Differentialgleichung vorliegt, geschehen ist. Die singulären Lösungen der Gleichungen (1.) bilden diejenigen Functionensysteme $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_m$, welche ausser den genannten Gleichungen auch noch die Gleichung $G' = 0$ befriedigen. Die Bestimmung dieser singulären Functionen-Systeme lässt sich aber immer durch algebraische Gleichungen oder vermittelt eines Systems anderer Differentialgleichungen, von dem sie keine singulären Lösungen sind, bewerkstelligen.



01904681,5

Hiermit ist die Aufgabe, die ich mir gestellt habe, vollständig gelöst. Ich bemerke aber noch Folgendes. Auch transcendente partielle Differentialgleichungen lassen sich in vielen Fällen auf das Gleichungssystem (1.) in der Art zurückführen, dass

$$G, G_1, \dots, G_m$$

nicht rationale, aber in der Form beständig convergirender Potenzreihen darstellbare ganze Functionen von

$$x, x_1, \dots, x_r \text{ und den Grössen } \varphi_{1,a,\sigma_1,\dots,\sigma_r}$$

sind. In diesem Falle behalten die im Vorstehenden gefundenen Resultate ihre volle Gültigkeit, wie aus der Herleitung derselben ohne Weiteres ersichtlich ist.

Berlin, im Juli 1874.