



Leo Koenigsberger

Eigenreferate im
Repertorium der literarischen Arbeiten
aus dem Gebiete der reinen und
angewandten Mathematik

Band 1 und 2, 1877 – 1879

Leipzig : Teubner

zusammengestellt von Gabriele Dörflinger,
Universitätsbibliothek Heidelberg, 2012

Repertorium
der literarischen Arbeiten
aus dem Gebiete der
reinen und angewandten
Mathematik

„Originalberichte der Verfasser“

gesammelt und herausgegeben

von

Dr. Leo Koenigsberger, **Dr. Gustav Zeuner,**
Prof. d. Mathematik d. Univ. z. Wien und Prof. d. Mechanik a.d. Polytechn. z. Dresden

Leipzig. Teubner.

Erster Band. 1877.
Zweiter Band. 1879.

Beiträge von Leo Koenigsberger

Erster Band

Seite	[PDF]	
79	[4]	Ueber die allgemeinsten Beziehungen zwischen hyperelliptischen Integralen
84	[9]	Ueber die Entwicklung der hyperelliptischen Integrale 1. und 2. Gattung in Reihen
87	[12]	Beziehungen zwischen den Periodicitätsmoduln zweier hyperelliptischer Integrale
191	[14]	Referate aus den hinterlassenen Papieren von F. Richelot
334	[24]	Ueber die Reduction hyperelliptischer Integrale auf algebraisch-logarithmische Functionen
340	[30]	Referate aus den hinterlassenen Papieren von F. Richelot. Trigonometrische Form der hyperelliptischen Integrale der 1., 2. und 3. Gattung

Zweiter Band

Seite	[PDF]	
158	[39]	Ueber algebraische Beziehungen zwischen den Integralen verschiedener Differentialgleichungen
160	[41]	Ueber die Reduction hyperelliptischer Integrale auf elliptische
202	[44]	Vorlesungen über die Theorie der hyperelliptischen Integrale
247	[66]	Reduction des Transformationsproblems der hyperellipt. Integrale
285	[70]	Ueber die Beziehung der complexen Multiplication der elliptischen Integrale zur Reduction gewisser Klassen Abel'scher Integrale auf elliptische
291	[76]	Ueber die Erweiterung des Jacobi'schen Transformationsprinzips
361	[80]	Ueber die Reduction Abel'scher Integrale auf elliptische und hyperelliptische
440	[85]	Zur Geschichte der Theorie der elliptischen Transcendenten in den Jahren 1826–29
441	[86]	Ueber die Reduction Abel'scher Integrale auf niedere Integralformen, speciell auf elliptische Integrale

L. Koenigsberger: Ueber die allgemeinsten Beziehungen zwischen hyperelliptischen Integralen. (Journal für reine und angew. Mathematik. Band 81. Heft 3.)

Der Inhalt dieses Aufsatzes wurde einer ausführlicheren Darstellung einer allgemeinen Theorie der hyperelliptischen Integrale entnommen und musste daher mit der Angabe wenigstens derjenigen Bezeichnungen und Theoreme beginnen, welche zur Lösung des Reductionsproblems der Transformation sowie zur Aufstellung der allgemeinsten Beziehungen zwischen hyperelliptischen Integralen nöthig waren.

Die Integrale der drei Gattungen stellten sich der Definition gemäss, für *keinen* Punkt der zur Irrationalität

$$\sqrt{R(z)} = \sqrt{A(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \dots (z - \alpha_{2p+1})}$$

gehörigen Riemann'schen Fläche unendlich zu werden, oder für *einen* Punkt z_1 derselben algebraisch unendlich von der ersten Ordnung zu sein, oder endlich für *zwei* beliebig gewählte Punkte derselben $z_1, \varepsilon_1 \sqrt{R(z_1)}$; $z_2, \varepsilon_2 \sqrt{R(z_2)}$ so. logarithmisch unendlich zu werden, dass die Coefficienten A und B der logarithmischen Glieder

$$A \log(z - z_1) \quad \text{und} \quad B \log(z - z_2)$$

sich zu Null ergänzen, in der folgenden Form dar:

$$I(z) = \int_{z_0} \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_{p-1} z^{p-1}}{\sqrt{R(z)}} dz$$

$$E(z) = M \int_{z_0} \left[\frac{1}{(z - z_1)^2} + \frac{\frac{R'(z_1)}{2\varepsilon_1 R(z_1)^{\frac{1}{2}}} (z - z_1) + \varepsilon_1 R(z_1)^{\frac{1}{2}}}{(z - z_1)^2 \sqrt{R(z)}} \right] dz + I(z)$$

$$\Pi(z) = M \int_{z_0} \left[\frac{R(z)^{\frac{1}{2}} + \varepsilon_1 R(z_1)^{\frac{1}{2}}}{z - z_1} - \frac{R(z)^{\frac{1}{2}} + \varepsilon_2 R(z_2)^{\frac{1}{2}}}{z - z_2} \right] \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} + I(z);$$

das Hauptintegral dritter Gattung sollte als Coefficienten der logarithmischen Glieder die positive und negative Einheit haben; dieses und seine successiven Differenzialquotienten nach einem der Unstetigkeitspunkte z_1 lieferten in linearer Verbindung mit bestimmten Coefficienten versehen ein bestimmtes hyperelliptisches Integral, welches in einem Punkte z_1 , der weder ein Verzweigungspunkt noch der unendliche entfernte Punkt sein sollte, wie eine vorgelegte Function algebraisch und logarithmisch unendlich, im

Punkte z_2 logarithmisch unendlich ist, abgesehen von einem Integrale erster Gattung, dessen Coefficienten unbestimmt bleiben. Diese Darstellung liefert aber ein Mittel, jedes hyperelliptische Integral, welches in den Punkten $z_1, z_2, \dots, z_v$ unendlich wird wie resp.

$A_\alpha \log(z - z_\alpha) + B_\alpha(z - z_\alpha)^{-1} + C_\alpha(z - z_\alpha)^{-2} + \dots + K_\alpha(z - z_\alpha)^{-k_\alpha}$ in der Form einer Summe von einzelnen hyperelliptischen Integralen darzustellen, von denen jedes in *einem* z_α -Punkte in der vorgeschriebenen Weise und in einem willkürlich angenommenen, aber für alle diese Integrale demselben Punkte logarithmisch unendlich wird; der Nachweis dass es nur *ein* solches hyperelliptisches Integral gibt und dass keine andere Function noch diesen Bedingungen genügt, liefert das Dirichlet'sche Princip für diese Klasse doppelblättriger Riemann'scher Flächen, genau wie ich es für elliptische Integrale in meinen „Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen“ durchgeführt habe. Das allgemeine hyperelliptische Integral muss nun auf feste Normalformen gebracht werden, und es wird die Bestimmung der Coefficienten in der Zerlegungsformel

$$\begin{aligned} \frac{F(z)dz}{\sqrt{R(z)}} &= \frac{C_1 \sqrt{R(z_1)} dz}{(z - z_1) \sqrt{R(z)}} + \dots + \frac{C_n \sqrt{R(z_n)} dz}{(z - z_n) \sqrt{R(z)}} \\ &+ \frac{l^{(0)} z^{2p-1} dz}{\sqrt{R(z)}} + \frac{l^{(1)} z^{2p-2} dz}{\sqrt{R(z)}} + \dots + \frac{l^{(p-1)} z^p dz}{\sqrt{R(z)}} \\ &+ \frac{k^{(p)} z^{p-1} dz}{\sqrt{R(z)}} + \frac{k^{(p+1)} z^{p-2} dz}{\sqrt{R(z)}} + \dots + \frac{k^{(2p-1)} dz}{\sqrt{R(z)}} \\ &+ \frac{d}{dz} \{ f(z) \sqrt{R(z)} \} dz, \end{aligned}$$

wenn

$$l^{(v)} = \sum_1^v l_q^{(v)} - l_0^{(v)}, \quad k^{(v)} = \sum_1^v k_q^{(v)} - k_0^{(v)}, \quad f(z) = \sum_1^v f_q(z) - f_0(z),$$

$$R(z) = Az^{2p+1} + B_0 z^{2p} + B_1 z^{2p-1} + \dots + B_{2p-1} z + B_{2p},$$

$$\begin{aligned} F_r(t) &= \frac{2p-2r-1}{2} A t^r + \frac{2p-2r}{2} B_0 t^{r-1} + \frac{2p-2r+1}{2} B_1 t^{r-2} \\ &+ \dots + \frac{2p-r-2}{2} B_{r-2} t + \frac{2p-r-1}{2} B_{r-1} \end{aligned}$$

gesetzt wird, durch die Beziehungen gegeben

$$\begin{aligned} C_q &= \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \right]_{(t-z_q)^{-1}}, \quad l_q^{(v)} = \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \int_{z_q} \frac{F_v(t) dt}{\sqrt{R(t)}} \right]_{(t-z_q)^{-1}}, \\ l_0^{(v)} &= \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \int_x \frac{F_v(t) dt}{\sqrt{R(t)}} \right]_{t^{-1}}, \end{aligned}$$

und ähnliche Ausdrücke für die Grössen k und $f(z)$, somit auf die Herstellung der Coefficienten der um die Unstetigkeitspunkte von $F(z)$ und den unendlich entfernten Punkt genommenen Entwicklungen gewisser Functionen zurückgeführt, wie es Herr Weierstrass in seinen Vorlesungen für die elliptischen Integrale und Herr Fuchs in seiner Arbeit über die Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale in ähnlicher Form für hyperelliptische Integrale gethan haben. Nach Herstellung des allgemeinen hyperelliptischen Integrales aus gegebenen Discontinuitäten und Zerlegung desselben in feste Normalformen, mussten die Relationen ermittelt werden, welche sich mit Anwendung des bekannten Principes der Integration von

$$\int I dI_1$$

ergeben, worin I und I_1 zwei aus beliebig gegebenen Discontinuitäten construirte, zu derselben Fläche gehörige hyperelliptische Integrale bedeuten, und die geschlossene Integration über die gesamte Begrenzung der nach Ausschliessung der Unstetigkeiten in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandelten Riemann'schen Fläche auszudehnen ist; das gewonnene allgemeine, in den Nachrichten der Göttinger Societät vom April v. J. veröffentlichte Resultat, über das weiter unten referirt wird, wird für die in der vorliegenden Arbeit angestellte Untersuchung nur in dem speciellen Falle gebraucht, welcher für solche Hauptintegrale, deren Periodicitätsmoduln an einem gesammten Querschnittssystem verschwinden, den bekannten in der Form

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} dH(z, z_1, z_2) = \int_{z_1}^{z_2} dH(\xi, \xi_1, \xi_2)$$

enthaltenen Satz von der Umkehrung der Grenzen und Unstetigkeitspunkte lieferte. Sodann wird noch das Abel'sche Theorem, das gleich nachher für die betrachteten Hauptintegrale gebraucht wird, für das allgemeine hyperelliptische Integral in der Art entwickelt, dass man dasselbe aus einer Summe von solchen Integralen zusammensetzt, die nur in zwei Punkten logarithmisch unendlich werden.

An die Erwähnung des Additionstheorems der hyperelliptischen Integrale, welches zeigt, dass einer transcendenten Beziehung, nämlich einer additiven Verbindung gleichartiger hyperelliptischer Integrale eine algebraische Beziehung zwischen den oberen und unteren Grenzen jener Integrale entsprechen kann, knüpft sich die Frage,

[illegible]
$$z_1, z_2, \dots, z_p, \sqrt{R(z_1)}, \sqrt{R(z_2)}, \dots, \sqrt{R(z_p)}$$

An diese Reduction des allgemeinen Transformationsproblems auf das rationale, wie es wegen der Natur der Grössen $Y_1, Y_2, \dots Y_p$ genannt werden kann, knüpft sich nun naturgemäss die Frage nach der allgemeinsten Relation zwischen hyperelliptischen Integralen. Abel hat sich in seiner berühmten Arbeit „*précis d'une théorie des fonctions elliptiques*“ mit der Frage beschäftigt, welches die allgemeinste Beziehung zwischen einer beliebigen Anzahl von elliptischen Integralen mit derselben Variablen und demselben Modul sei und zeigte, dass, mit Zugrundelegung der von ihm gewählten Bezeichnungen für das elliptische Integral erster und dritter Gattung, dieselbe durch die Gleichung

$$\beta \pi(x) - \frac{2m_1 \Delta \alpha_1}{\alpha_1} \Pi'(\alpha_1) - \frac{2m_2 \Delta \alpha_2}{\alpha_2} \Pi'(\alpha_2) - \dots - \frac{2m_n \Delta \alpha_n}{\alpha_n} \Pi'(\alpha_n) \\ = \log \left\{ \frac{f(x) + \varphi(x) \Delta x}{f(x) - \varphi(x) \Delta x} \right\} + C$$

dargestellt werde, in welcher die Parameter $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ der Gleichung

$$f(x)^2 - \varphi(x)^2 (1 - x^2)(1 - c^2 x^2) = (x^2 - \alpha_1^2)^{m_1} (x^2 - \alpha_2^2)^{m_2} \dots (x^2 - \alpha_n^2)^{m_n}$$

genügen müssen, worin die eine der Functionen $f(x), \varphi(x)$ grade, die andere ungrade ist.

Mit Hilfe des oben bewiesenen Transformationssatzes führt man die analoge Frage für hyperelliptische Integrale auf die einfachere zurück, wann ein hyperelliptisches Integral mit der oberen Integrationsgrenze z_1 und der Irrationalität $\sqrt{R(z)}$ einer algebraisch-logarithmischen Function gleich sein kann, welche selbst oder für welche das Argument der Logarithmen rational aus z_1 und $\sqrt{R(z_1)}$ zusammengesetzt ist, und man findet leicht durch Einführung solcher hyperelliptischen Hauptintegrale dritter Gattung, deren Periodicitätsmoduln an allen Querschnitten eines Systems verschwinden, vermöge des Satzes von der Vertauschung der Grenzen und Unstetigkeitspunkte als allgemeinste zwischen gleichartigen hyperelliptischen Integralen und algebraisch-logarithmischen Functionen stattfindende Relation

$$m_1 \int_{\xi_1}^{z_1} \frac{\pm \sqrt{R(a_1)} dz}{(z - a_1) \sqrt{R(z)}} + m_2 \int_{\xi_1}^{z_1} \frac{\pm \sqrt{R(a_2)} dz}{(z - a_2) \sqrt{R(z)}} + \dots + m_r \int_{\xi_1}^{z_1} \frac{\pm \sqrt{R(a_r)} dz}{(z - a_r) \sqrt{R(z)}} \\ + \beta_0 \int_{\xi_1}^{z_1} \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} + \beta_1 \int_{\xi_1}^{z_1} \frac{z dz}{\sqrt{R(z)}} + \dots + \beta_{p-1} \int_{\xi_1}^{z_1} \frac{z^{p-1} dz}{\sqrt{R(z)}} \\ = \log \left\{ \frac{f_\varphi(z_1) - g_\varphi(z_1) \sqrt{R(z_1)}}{f_\varphi(z_1) + g_\varphi(z_1) \sqrt{R(z_1)}} \cdot \frac{f_\varphi(\xi_1) + g_\varphi(\xi_1) \sqrt{R(\xi_1)}}{f_\varphi(\xi_1) - g_\varphi(\xi_1) \sqrt{R(\xi_1)}} \right\},$$

worin $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{p-1}$ Constanten vorstellen, deren Bedeutung mit der aufgestellten Bedingung des Verschwindens der Periodicitätsmoduln an einem gesammten Querschnittssystem zusammenhängt, und $a_1, a_2, \dots, a_r$ der Gleichung genügen

$$f_\varphi(z)^2 - g_\varphi(z)^2 R(z) = (z - a_1)^{m_1} (z - a_2)^{m_2} \dots (z - a_r)^{m_r}.$$

Dresden.

L. Koenigsberger.

L. Koenigsberger: Ueber die Entwicklung der hyperelliptischen Integrale erster und zweiter Gattung in Reihen.

(Mathematische Annalen. Band IX. Heft 4.)

Herr Hermite hat in einem in den *Annali di Matematica* (Ser. II. a. t. II. F. II.) veröffentlichten Briefe an Herrn Brioschi zwischen den Coefficienten der im Bereiche des Nullpunktes gültigen Maclaurin'schen Entwicklung der Functionen

$$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-x^2x^2)}} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-x^2x^2)}} = \sum \alpha_n x^{2n+1},$$

$$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-x^2x^2)}} \int_0^x \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-x^2x^2)}} = \sum \beta_n x^{2n+1}$$

und den Coefficienten der Reductionsformel des Integrals

$$\int_0^x \frac{(x^2x^2)^{n+1} dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-x^2x^2)}} \\ = P_n \sqrt{(1-x^2)(1-x^2x^2)} - A_n \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-x^2x^2)}} + B_n \int_0^x \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-x^2x^2)}}$$

auf ein Integral erster und zweiter Gattung und einen algebraischen Theil die Beziehungen gefunden

$$A_n = \beta_n, \quad B_n = \alpha_n;$$

Herr Thomae hat gleichzeitig diesen Gegenstand im *Journal für reine und angewandte Mathematik* (Bd. 80) behandelt und ist zu demselben Resultate gelangt. Es schien mir nun nicht uninteressant, die eigentliche Quelle jener Relationen, aus der diese ohne weitere Rechnung sich unmittelbar ergeben, in den Formen der Reductionscoefficienten zu bezeichnen, wie sie Herr Weierstrass aufgestellt hat (s. Vorl. 14 meiner „Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen“); da nämlich — ich habe dies in der vorliegenden Arbeit nicht weiter ausgeführt —

$$\int \frac{x^{2n+2} x^{2n+2} dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-x^2x^2)}} = \frac{x^{2n+4} f^{(n)}}{2} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-x^2x^2)}} \\ - \frac{x^{2n+4} f^{(n)}}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-x^2x^2)}} + \frac{x^{2n+2}}{2} x f^{(n)}(x^2) \sqrt{(1-x^2)(1-x^2x^2)}$$

ist, worin nach den obigen Bezeichnungen von Hermite

$$A_n = \frac{x^{2n+4} k^{(n)}}{2}, \quad B_n = \frac{x^{2n+4} l^{(n)}}{2}, \quad P_n = x^{2n+2} x f^{(n)}(x^2),$$

wenn

$$k^{(n)} = -k_0^{(n)} = - \left[\frac{t^{n+1}}{\sqrt{t(1-t)(1-x^2t)}} \int_{\infty}^t \frac{tdt}{\sqrt{t(1-t)(1-x^2t)}} \right]_{t^{-1}},$$

$$l^{(n)} = -l_0^{(n)} = - \left[\frac{t^{n+1}}{\sqrt{t(1-t)(1-x^2t)}} \int_{\infty}^t \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)(1-x^2t)}} \right]_{t^{-1}},$$

$$\begin{aligned} f^n(x^2) &= -f_0^{(n)}(x^2) \\ &= - \left[\frac{t^{n+1}}{\sqrt{t(1-t)(1-x^2t)}} \int_{\infty}^t \frac{dt}{(t-x^2)\sqrt{t(1-t)(1-x^2t)}} \right]_{t^{-1}} \end{aligned}$$

gesetzt wird, so wird vermöge der Substitution $t = u^2$, $u = x^{-1}v^{-1}$

$$\begin{aligned} k^{(n)} &= - \left[\frac{2}{\sqrt{(1-u^2)(1-x^2u^2)}} \int_{\infty}^u \frac{u^2 du}{\sqrt{(1-u^2)(1-x^2u^2)}} \right]_{u^{-2n-3}} \\ &= \left[\frac{2v^2}{\sqrt{(1-v^2)(1-x^2v^2)}} \int_0^v \frac{dv}{v^2 \sqrt{(1-v^2)(1-x^2v^2)}} \right]_{x^{2n+4}v^{2n+3}} \end{aligned}$$

also

$$A_n = \left[\frac{1}{\sqrt{(1-v^2)(1-x^2v^2)}} \int_0^v \frac{dv}{v^2 \sqrt{(1-v^2)(1-x^2v^2)}} \right]_{v^{2n+1}}.$$

Man sieht hieraus leicht, dass

$$\begin{aligned} &\int_0^v \frac{dv}{v^2 \sqrt{(1-v^2)(1-x^2v^2)}} \\ &= \frac{\sqrt{(1-v^2)(1-x^2v^2)}}{v} + \sqrt{(1-v^2)(1-x^2v^2)} \sum A_n v^{2n+1} \end{aligned}$$

ist und mit Hülfe der Beziehung

$$\begin{aligned} &\int_0^v \frac{dv}{v^2 \sqrt{(1-v^2)(1-x^2v^2)}} \\ &= x^2 \int_0^v \frac{v^2 dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-x^2v^2)}} - \frac{\sqrt{(1-v^2)(1-x^2v^2)}}{v} \end{aligned}$$

folgt somit unmittelbar

$$\int_0^v \frac{x^2 v^2 dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-x^2v^2)}} = \sqrt{(1-v^2)(1-x^2v^2)} \sum A_n v^{2n+1};$$

genau in derselben Weise ergibt sich die zweite Relation.

Um nun festzustellen, dass in diesen Formen der Reductionscoefficienten der eigentliche Grund jener Beziehungen liegt, entwickelte ich für hyperelliptische Integrale die in dem obenstehenden

Referate bezeichnete Reductionsformel auf die Normalform erster, zweiter, dritter Gattung und auf einen algebraischen Theil, zu der ich wegen häufig vorkommender Anwendungen der entwickelten Ausdrücke eine Discussion über das Verschwinden der einzelnen Integrale der verschiedenen Gattungen hinzufügte, und leitete nun mit Hilfe dieser Reductionsformel vermöge der Uebertragung der Reihenentwicklung aus dem Bereiche des unendlich entfernten Punktes auf den des Nullpunktes für hyperelliptische Integrale die beiden folgenden Relationen her:

Wenn

$$R(z) = Az^{2p+1} + B_0z^{2p} + B_1z^{2p-1} + \dots + B_{2p-1}z$$

und die reciproke Irrationalität

$$R_1(\xi) = B_{2p-1}\xi^{2p+1} + B_{2p-2}\xi^{2p} + \dots + B_1\xi^3 + B_0\xi^2 + A\xi,$$

so ist für $r = 0, 1, 2, \dots, p-1$

$$\int_0^{\infty} \frac{\frac{2p-r-1}{2}B_{r-1}u^{p-1} + \frac{2p-r-2}{2}B_{r-2}u^{p-2} + \dots + \frac{2p-2r}{2}B_0u^{p-r} + \frac{2p-2r-1}{2}Au^{p-r-1}}{\sqrt{R_1(u)}} du$$

$$= (u^{p-r-1} + M_0u^{p-r} + \dots + M_{r-1}u^{p-1})\sqrt{R_1(u)} + \sqrt{R_1(u)} \sum_0^{\infty} l_{2p+v}^{(r)} u^{p+v},$$

und für $r = p, p+1, \dots, 2p-1$

$$\int_0^{\infty} \frac{(r-2p+\frac{1}{2})B_{2p-1}u^{3p-r-1} + (r-2p+1)B_{2p-2}u^{3p-r-2} + \dots + \frac{2p-r}{2}B_ru^p}{\sqrt{R_1(u)}} du$$

$$= (N_0u^{p-r} + N_1u^{p-r+1} + \dots + N_{r-1}u^{p-1})\sqrt{R_1(u)} + \sqrt{R_1(u)} \sum_0^{\infty} l_{2p+v}^{(r)} u^{p+v},$$

wenn $l_n^{(r)}$ und $k_n^{(r)}$ die Coefficienten der Integrale zweiter und erster Gattung in dem hyperelliptischen Integrale

$$\int \frac{z^n dz}{\sqrt{R(z)}}$$

sind.

Dresden.

L. Koenigsberger.

L. Koenigsberger: Beziehungen zwischen den Periodicitätsmoduln zweier hyperelliptischer Integrale. (Nachrichten der Göttinger Societät. April 1875.)

Die Anwendung des bekannten Princip's der Integration von

$$\int J dJ_1,$$

worin J und J_1 beliebige zu derselben Irrationalität gehörige hyperelliptische Integrale bedeuten, ausgedehnt über die gesammte Begrenzung der nach Ausschliessung der Unstetigkeitspunkte einfach zusammenhängend gemachten Riemann'schen Fläche, liefert die allgemeinsten Beziehungen zwischen den Periodicitätsmoduln dieser beiden hyperelliptischen Integrale. Man findet, dass, wenn das zur Irrationalität

$$\sqrt{R(z)} = \sqrt{A(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \dots (z - \alpha_{2p+1})}$$

gehörige Integral $J(z, z_\alpha)$ auf festbestimmten Blättern in den Punkten

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\mu, z_1, z_2, \dots, z_m, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2p+1}, \infty$$

unendlich werden soll wie die Functionen

$$\begin{aligned} & \mathfrak{B}_q(z - \beta_q)^{-1} + \mathfrak{C}_q(z - \beta_q)^{-2} + \dots + \mathfrak{R}_q(z - \beta_q)^{-\mathfrak{f}_q} \\ & A_q \log(z - z_q) + B_q(z - z_q)^{-1} + C_q(z - z_q)^{-2} + \dots + K_q(z - z_q)^{-k_q} \\ & a_q \log(z - \alpha_q)^{\frac{1}{2}} + b_q(z - \alpha_q)^{-\frac{1}{2}} + c_q(z - \alpha_q)^{-\frac{2}{2}} + \dots + h_q(z - \alpha_q)^{-\frac{\lambda_q}{2}} \\ & M_0 \log z^{\frac{1}{2}} + M_1 z^{\frac{1}{2}} + M_2 z^{\frac{2}{2}} + \dots + M_\delta z^{\frac{\delta}{2}} \end{aligned}$$

und das zu derselben Irrationalität gehörige Integral $J(z, \xi_\alpha)$ in den Punkten

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\mu, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2p+1}, \infty$$

wie die Functionen

$$\begin{aligned} & \mathfrak{A}'_q \log(z - \beta_q) + \mathfrak{B}'_q(z - \beta_q)^{-1} + \mathfrak{C}'_q(z - \beta_q)^{-2} + \dots + \mathfrak{R}'_q(z - \beta_q)^{-\mathfrak{f}'_q} \\ & A'_q \log(z - \xi_q) + B'_q(z - \xi_q)^{-1} + C'_q(z - \xi_q)^{-2} + \dots + K'_q(z - \xi_q)^{-k'_q} \\ & a'_q \log(z - \alpha_q)^{\frac{1}{2}} + b'_q(z - \alpha_q)^{-\frac{1}{2}} + c'_q(z - \alpha_q)^{-\frac{2}{2}} + \dots + h'_q(z - \alpha_q)^{-\frac{\lambda'_q}{2}} \\ & M'_0 \log z^{\frac{1}{2}} + M'_1 z^{\frac{1}{2}} + M'_2 z^{\frac{2}{2}} + \dots + M'_{\delta'} z^{\frac{\delta'}{2}}, \end{aligned}$$

wenn ferner die Stetigkeitssprünge von

$$J(z, z_\alpha) \text{ an dem Querschnitte } a_k \text{ mit } J_{a_k}, \text{ an } b_k \text{ mit } J_{b_k},$$

die von

$$I(z, \xi_\alpha) \text{ an dem Querschnitte } a_k \text{ mit } I_{a_k}, \text{ an } b_k \text{ mit } I_{b_k}$$

bezeichnet werden, der Ausdruck

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_1^p (J_{a_v} I_{b_v} - J_{b_v} I_{a_v})$$

von einer Summe von Integralen abgesehen, welche von einem Punkte des Querschnittssystems aus auf der einfach zusammenhängenden Fläche genommen bis zu den Punkten $z_1, z_2, \dots, z_m, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2p+1}, \infty$ führen, durch einfache algebraische Zusammensetzungen der Entwicklungscoefficienten der Integrale um die einzelnen singulären Punkte bis zu bestimmt angebbaren Grenzen hin genommen ausdrückbar ist. Die bekanntlich von Herrn Weierstrass für hyperelliptische Integrale entwickelte verallgemeinerte Legendre'sche Relation bildet einen speciellen Fall der in dieser Notiz angegebenen, welche ebenso die bekannte Beziehung für hyperelliptische Hauptintegrale in sich schliesst.

Dresden.

L. Koenigsberger.

Gustav Zeuner: Ueber die Wirkung des Drosselns und den Einfluss des schädlichen Raumes auf die bei Dampfmaschinen verbrauchte Dampfmenge.

(Civilingenieur. Bd. XXI. 1875.)

Bei der Anwendung der mechanischen Wärmetheorie zur Beurtheilung der Vorgänge im Cylinder der Dampfmaschinen ist die Schwierigkeit noch nicht überwunden worden, mit Sicherheit die Dampfmenge zu ermitteln, welche während des Dampfeinströmens in den Cylinder, während der *Admission*, vom Kessel nach dem Cylinder strömt. Das Gewicht des Dampfes, oder sofern der Dampf nass ist, das Gewicht von Dampf und Wasser, welches pro Kolbenschub oder wenn man will, pro Sekunde dem Cylinder zugeführt wird, erscheint aber gerade in den Hauptgleichungen der auf die mechanische Wärmetheorie begründeten Dampfmaschinenlehre und daher haben diese Gleichungen zunächst nur rein theoretischen Werth und sind für den praktischen Gebrauch noch nicht genügend geeignet.

Der Dampfverbrauch einer Dampfmaschine wird wesentlich abhängen: von der Grösse des schädlichen Raumes und der Beschaffenheit des Dampfes, der dort vom vorigen Schube zurückgeblieben ist und fernerhin von der Differenz zwischen dem Druck im Kessel

$$+ \Sigma (-1)^{\left[\frac{3n-p+4-(n-p)^2}{2} + \sum_{k=1}^{k=n-p-1} s_k \right]} \times \\ \Sigma \pm a_{p+1,1} a_{p+2,1} \dots a_{n,n-p-1} \times \Sigma \pm a_{1,2} a_{2,3} \dots a_{p,n}.$$

Die hier noch gebliebene Beschränkung betreffs der constanten ersten Vertikalreihe lässt sich leicht fortheben, indem man nur die Determinante, deren Vorzeichen bestimmt werden soll, mit einer in der Normalform $\Sigma \pm a_{I,I} a_{II,II} \dots a_{N,N}$ vorgelegten Hilfsdeterminante vergleicht. Zum Schluss wird noch gezeigt, wie man sich bei der allgemeinen Zerlegung einer Determinante in eine Summe aus Produkten von beliebig vielen Unterdeterminanten zu verhalten habe, und dass die hiebei zur Anwendung kommende combinatorische Methode die richtige sei, erhellt u. a. auch daraus, dass die daraus resultirenden Formeln für die Anzahl der bei der Zerlegung auftretenden Aggregatglieder mit den von Jacobi zum gleichen Zwecke gegebenen übereinstimmen.

Amberg.

S. Günther.

L. Koenigsberger: Referate aus den hinterlassenen Papieren von F. Richelot.

* Die mir von Frau Geheimrätin Richelot übertragene Durchsicht der Papiere des verstorbenen ausgezeichneten Mathematikers F. Richelot hat mich erkennen lassen, dass es den vielen Schülern und Verehrern jenes um die Verbreitung der mathematischen Wissenschaften in Deutschland so hochverdienten Mannes gewiss nicht unerwünscht und für den Fortschritt der Mathematik durch Anregung zu weiteren Untersuchungen sicher zweckmässig sein würde, von der grossen Anzahl einzelner von Richelot angestellter Untersuchungen, die meistens bei der Lectüre der Arbeiten anderer Mathematiker entstanden oder zum Zwecke der Vorlesungen ausgearbeitet worden, fortlaufende Referate mit genauer Angabe der benutzten Methoden und gefundenen Resultate in dieser Zeitschrift zu veröffentlichen, während ich möglicher Weise, wenn es meine Zeit gestatten wird, später durch Unterstützung von Seiten jüngerer Kräfte in der Lage sein werde, grössere Veröffentlichungen von Vorlesungen, die in vielfachen und verschiedenartigen Ausarbeitungen vorliegen, als Lehrbücher der analytischen Mechanik, Variationsrechnung etc. zu bewerkstelligen.

I. *Geometrische Interpretation der Transformation des elliptischen Integrales erster Gattung auf die Normalform.*

Werden die Lösungen des Polynoms vierten Grades $R(z)$ mit

$$a + a_1 i, b + b_1 i, c + c_1 i, d + d_1 i$$

bezeichnet und durch die entsprechenden Punkte A, B, C, D im z -Gebiete dargestellt, so führt bekanntlich die Substitution

$$\xi = \frac{A - C}{B - C} \frac{B - z}{A - z}$$

auf die Gleichung

$$\int_{z_0}^z \frac{dz}{R(z)^{\frac{1}{2}}} = \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{d\xi}{[(D - B)(C - A)]^{\frac{1}{2}} [\xi(1 - \xi)(1 - k^2 \xi)]^{\frac{1}{2}}},$$

worin

$$k^2 = \frac{B - C}{A - C} \cdot \frac{A - D}{B - D}$$

ist. Es kommt darauf an, den analytischen Modul von ξ zu bestimmen, woraus sich dann unmittelbar, wenn $z = D$ gesetzt wird, der analytische Modul von $\frac{1}{k^2}$ ergibt; nun sieht man aber, dass, wenn der die Grösse z repräsentirende Punkt mit Z bezeichnet wird,

$$\text{mod. } \xi = \frac{AC}{BC} \frac{BZ}{AZ} = \frac{\frac{BZ}{AZ}}{\frac{BC}{AC}}$$

wird, und aus dieser Form von mod. ξ lässt sich leicht ein geometrisches Criterium dafür ableiten, ob diese Grösse kleiner, gleich, grösser als die Einheit ist. Denn denkt man sich A und B durch eine Gerade verbunden, so ist bekanntlich ein Kreis, dessen Durchmesser in dieser Linie liegt, der geometrische Ort der Punkte Z , für welche das Verhältniss $\frac{BZ}{AZ}$ der Entfernungen desselben von A und B constant ist und es wird dieses constante Verhältniss von Null durch die Einheit bis Unendlich zunehmen, wenn der Kreis sich von dem Punkte B an zu dem unendlichen Kreise, welcher die in der Mitte von AB errichtete Gerade ist, erweitert und von da an bis zum Punkte A hin zusammenzieht, und daher mod. ξ von Null durch $\frac{AC}{BC}$ bis Unendlich stetig wachsen. Dasselbe leitet Richelot auch unmittelbar aus dem analytischen Ausdrucke für ξ ab, indem er bemerkt, dass, wenn $z = x + yi$ gesetzt wird, die Gleichung

$$\{(a-x)^2 + (a_1-y)^2\} \{(b-c)^2 + (b_1-c_1)^2\} \pmod{\xi^2} \\ - \{(b-x)^2 + (b_1-y)^2\} \{(a-c)^2 + (a_1-c_1)^2\} = 0$$

für ein constantes ξ die Gleichung eines Kreises ist, welcher mit den beiden Punkten, dessen Coordinaten $x=a$, $y=a_1$; $x=b$, $y=b_1$ die ideale Secante

$$0 = (a-b) \left\{ x - \frac{a+b}{2} \right\} + (a_1-b_1) \left\{ y - \frac{a_1+b_1}{2} \right\}$$

gemeinschaftlich hat.

Die Entscheidung der Frage, ob mod. ξ kleiner, gleich, grösser als die Einheit ist, wird sich nun leicht treffen lassen. Zieht man nämlich die zu den Punkten A und B gehörige ideale Secante, so kann der Kreis, der durch C geht und den Richelot den Einheitskreis nennt, entweder rechts oder links von derselben liegen oder diese selbst ist als ein solcher anzusehen; liegt nun der Punkt Z im ersten Falle innerhalb, auf oder ausserhalb des Einheitskreises, so ist mod. ξ resp. kleiner, gleich, grösser als die Einheit; dasselbe findet im zweiten Falle statt, wenn Z ausserhalb, auf oder innerhalb des Einheitskreises liegt und im dritten Falle, wenn Z rechts von MN , auf MN , links von MN sich befindet. Nun ist ferner mod. $\frac{1}{k^2}$ derjenige Werth von mod. ξ , welcher zu dem Punkte D gehört, und es ist daher leicht zu entscheiden, wann mod. $\frac{1}{k^2} \leq 1$ ist, wenn man nur dasselbe Criterium, das für Z benutzt wurde, auf D anwendet; zugleich ersieht man hieraus, wie man es durch geeignete Wahl des Punktes C oder D , als zum Einheitskreise gehörig, einrichten kann, dass mod. $\frac{1}{k^2}$ respective zu D oder C gehörig, nicht ein üchter Bruch also mod. $k^2 \leq 1$ wird.

Wenn die Anzahl der Punkte $A, B, C, D \dots H$ ganz beliebig ist, so sieht man für den Fall, dass man von der Transformation

$$\xi = \frac{A-P}{B-P} \cdot \frac{B-Z}{A-Z}$$

ausgeht, in welcher P einer der Punkte $C, D, \dots H$ ist, dass man für P nur denjenigen Punkt zu wählen hat, der die Eigenschaft hat, dass der durch ihn laufende, zur Schaar der Kreise, welche die Linie MN zur gemeinschaftlichen idealen Secante haben, gehörige Kreis, dem Punkte B am nächsten liegt, in der Art dass zwischen ihm und B keiner der zu den andern Punkten zugehörigen Kreise liegt. Dies Resultat hält Richelot aus dem Grunde für „ein nicht unwichtiges“, weil die Berechnung des Integrales

$$\int_B^P \frac{F(z) dz}{\{(z-A)(z-B)(z-C) \dots (z-H)\}^{\frac{1}{2}}},$$

wo $F(z)$ eine ganze rationale Function von z ist, durch eine convergente Reihe und die Reduction dieses Integrales auf die Form

$$\int_0^{\xi} \frac{\varphi(\xi) d\xi}{\{\xi(1-\xi)(1-k_1^2\xi)(1-k_2^2\xi) \dots\}^{\frac{1}{2}}},$$

wo $\text{mod. } k_1^2 \leq 1$, $\text{mod. } k_2^2 \leq 1$, ... und $\varphi(\xi)$ eine rationale Function von ξ ist, davon abhängen.

Die Anwendungen dieser Resultate auf den Fall von nur reellen Lösungen des Polynoms vierten Grades $R(z)$ sind zu einfach und zu bekannt, als dass eine Hervorhebung derselben nöthig erscheinen sollte.

II. Conforme Abbildung des Integrales

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)(1-\kappa^2 z)}}$$

• für beliebige κ^2 .

„Im 45. Bande des Crelle'schen Journals habe ich gezeigt, wie „eine jede reelle oder imaginäre Grösse in der Form

$$\sin \text{am}(u + iv, \kappa)$$

„unzweideutig dargestellt wird, falls κ ein positiver ächter Bruch „ist; dieselbe Aufgabe für ein beliebiges κ hat Heine in einer Ab- „handlung im 53. Bande desselben Journals behandelt, welche den „Titel führt: Reduction der elliptischen Integrale auf ihre kanonische „Form. Wenn ich im Folgenden auf diesen Gegenstand zurück- „komme, so wird die Einfachheit der Darstellung und seine An- „wendung auf die zur Begründung der Theorie der elliptischen „Functionen erforderliche conforme Abbildung des elliptischen Inte- „grales es entschuldigen.“

Diese einleitenden Worte Richelots und die Ausarbeitung, von der ich im Folgenden ein gedrängtes Referat gebe, sind in den Osterferien des Jahres 1872 niedergeschrieben.

Sei

$$z = x + yi, \quad w = u + vi, \quad \kappa^2 = \rho(\cos \alpha + i \sin \alpha), \\ 1 - \kappa^2 = \kappa_1^2 = \sigma(\cos \beta - i \sin \beta),$$

worin

$$-\pi \leq \alpha < \pi, \quad -\pi \leq \beta < \pi$$

ist, ferner

$$K = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)(1-\kappa^2 z)}}, \quad K_1 = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)(1-\kappa_1^2 z)}},$$

bei denen der Integrationsweg durch positive ächte Bruchwerthe von $\sqrt{z}$ führen soll, so sieht man aus Betrachtungen, wie sie aus der Theorie der complexen Integrale geläufig sind, dass während w in dem Integrale

$$\frac{1}{2} \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)(1-\kappa^2 z)}} = w$$

von 0 bis K geht, z das Stück der positiven Abscissenaxe von 0 bis 1 durchlaufen wird, und dass einem Fortschreiten der Variablen w von 0 bis iK_1 die ganze negative x -Axe als Bildcurve zugehört. Verändert sich jedoch w so von K bis $K + iK_1$, dass $u = K$ bleibt, und v von 0 bis K_1 so stetig fortgeht, dass $\sin \operatorname{am}(v, \kappa_1)$ durch positive ächte Bruchwerthe stetig von 0 bis 1 wächst, so wird die entsprechende z -Linie der durch die Gleichung

$$x^2 + y^2 - x + y \frac{(1 - e \cos \alpha)}{e \sin \alpha} = 0$$

definirte Kreis sein, welcher durch die Punkte

$$x = 0, y = 0; \quad x = 1, y = 0; \quad x = \frac{\cos \alpha}{e}, \quad y = -\frac{\sin \alpha}{e}$$

hindurchgeht.

Verändert sich endlich w stetig so von $K + iK_1$ bis iK_1 , dass $v = K_1$ bleibt, und u von K bis 0 so abnimmt, dass $\sin \operatorname{am}(u, \kappa)$ durch positive ächte Bruchwerthe von 1 bis 0 stetig abnimmt, so wird der entsprechende Punkt im xy -Gebiete vom Punkte $x = \frac{\cos \alpha}{e}$, $y = -\frac{\sin \alpha}{e}$ bis unendlich in einer Geraden fortschreiten, die rückwärts verlängert durch den Anfangspunkt der Coordinaten hindurchgeht, und es ist aus der allgemeinen Abbildungstheorie bekannt, dass das ganze so begrenzte xy -Gebiet in jeder Stelle mit Ausnahme der vier Ecken conform durch das bezeichnete endliche Curvenviereck im uv -Gebiete abgebildet ist.

Es erübrigt noch die durch $w = u + vi$ bezeichneten Integrale für alle vier Seiten der gefundenen Figur in geeigneter Form zu entwickeln, wobei man sich leicht überzeugt, dass dies im Wesentlichen nur auf die eine Aufgabe zurückkommt, das Integral

$$\frac{1}{2} \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)(1-\varrho e^{\pm i\alpha} z)}} = w$$

für einen durch positive ächte Bruchwerthe stetig fortlaufenden Integrationsweg und für $0 < \alpha < \pi$ zu bestimmen. Richelot setzt nämlich, um das vorgelegte Integral in die Form

$$U \pm iU'$$

zu bringen, worin U und U' reell bleiben, so lange z ein positiver ächter Bruch ist,

$$1 - \kappa^2 z = -\varrho e^{i\alpha} z = r (\cos \psi - i \sin \psi)$$

oder, wenn man von dem speciellen unmittelbar zu behandelnden Falle $\alpha = 0$ absieht,

$$z = \frac{1}{\varrho} \frac{\sin \psi}{\sin(\alpha + \psi)},$$

woraus sich nach leichter Rechnung, wenn $\alpha > 0$ angenommen wird,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)(1-\kappa^2 z)}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1-2\varrho \cos \alpha + \varrho^2}} \int_0^\psi \frac{\left(\cos \frac{\psi}{2} + i \sin \frac{\psi}{2}\right) d\psi}{\sqrt{\sin \alpha \cdot \sin \psi \cdot \sin(\alpha + \psi) \cdot \sin(\beta - \psi)}} = U + iU' \end{aligned}$$

ergibt, während der Fall $\alpha < 0$ sich auf diesen zurückführen lässt, wenn man nur statt der drei Grössen α, β, ψ drei andere Grössen $-\alpha', -\beta', -\psi'$ einführt.

Die Integrale

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1-2\varrho \cos \alpha + \varrho^2}} \int_0^\psi \frac{\cos \frac{\psi}{2} d\psi}{\sqrt{\sin \alpha \cdot \sin \psi \cdot \sin(\alpha + \psi) \cdot \sin(\beta - \psi)}} \\ U' &= \frac{1}{2} \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1-2\varrho \cos \alpha + \varrho^2}} \int_0^\psi \frac{\sin \frac{\psi}{2} d\psi}{\sqrt{\sin \alpha \cdot \sin \psi \cdot \sin(\alpha + \psi) \cdot \sin(\beta - \psi)}} \end{aligned}$$

sollen nun in eine zu ihrer Berechnung geeignete Form gebracht werden. Zu diesem Zwecke setzt Richelot

$$\sqrt{\frac{\sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \sin \frac{\psi}{2}}{\sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \left(\frac{\alpha + \psi}{2}\right)}} = \sin \varphi$$

und erhält durch eine geschickte, mit Hülfe logarithmischer Differenziation angestellte Substitutionsrechnung, nachdem

$$\begin{aligned} \kappa^2 &= \frac{\sin \frac{\beta}{2}}{\sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \frac{\alpha}{2}} & \kappa_1^2 &= \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)}{\cos \frac{\alpha}{2} \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)} \\ \lambda^2 &= \frac{\sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)} & \lambda_1^2 &= \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}}{\sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)} \\ \mu^2 &= \frac{\sin \frac{\beta}{2} \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)}{\cos \frac{\beta}{2} \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)} & \mu_1^2 &= \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\beta}{2} \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)} \end{aligned}$$

gesetzt worden, worin, weil $\cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) > 0$ ist,

$$0 < \mu^2 < \lambda^2 < \kappa^2 < 1,$$

das folgende Resultat

$$\begin{aligned} U &= \sqrt{\frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\beta}{2} \sin^2 \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)}} \times \\ &\frac{1}{\sqrt{1 - 2\varrho \cos \alpha + \varrho^2}} \int_0^{\varphi} \frac{(1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi) d\varphi}{\sqrt{(1 - \kappa^2 \sin^2 \varphi)(1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi)(1 - \mu^2 \sin^2 \varphi)}} \\ U' &= \sqrt{\frac{\sin^3 \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\beta}{2} \sin^3 \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)}} \times \\ &\frac{\sin \frac{\beta}{2}}{\sqrt{1 - 2\varrho \cos \alpha + \varrho^2}} \int_0^{\varphi} \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{\sqrt{(1 - \kappa^2 \sin^2 \varphi)(1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi)(1 - \mu^2 \sin^2 \varphi)}}. \end{aligned}$$

Ebenso erhält man, da eine Vertauschung der Grössen α und β die drei Grössen $\kappa^2, \lambda^2, \mu^2$ in $\mu_1^2, \lambda_1^2, \kappa_1^2$ überführt,

$$\frac{1}{2} \int_0^{z_1} \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)(1-\sigma e^{\pm i\beta} z)}} = U_1 \pm iU_1',$$

worin

$$\begin{aligned} U_1 &= \sqrt{\frac{\sin \frac{\beta}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)}} \times \\ &\frac{1}{\sqrt{1 - 2\sigma \cos \beta + \sigma^2}} \int_0^{\varphi_1} \frac{(1 - \lambda_1^2 \sin^2 \varphi) d\varphi}{\sqrt{(1 - \mu_1^2 \sin^2 \varphi)(1 - \lambda_1^2 \sin^2 \varphi)(1 - \kappa_1^2 \sin^2 \varphi)}} \end{aligned}$$

$$U_1' = \sqrt{\frac{\sin^3 \frac{\beta}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} \sin^3 \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)}} \times \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 - 2\sigma \cos \beta + \sigma^2}} \int_0^{\varphi_1} \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{\sqrt{(1 - \mu_1^2 \sin^2 \varphi)(1 - \lambda_1^2 \sin^2 \varphi)(1 - \kappa_1^2 \sin^2 \varphi)}},$$

worin φ_1 und ψ_1 durch eine Gleichung zusammenhängen, die aus der obigen zwischen φ und ψ unmittelbar herzuleiten ist.

Setzt man endlich noch die ursprüngliche Variable

$$z = \sin^2 \chi,$$

so folgt aus den obigen Substitutionsformeln

$$\sin \chi = \frac{\kappa}{\sqrt{e}} \sin \varphi \sqrt{\frac{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi}{1 - \kappa^2 \sin^2 \varphi}},$$

wobei hervorzuheben dass

$$\frac{\kappa}{\sqrt{e}} = \frac{\mu}{\lambda},$$

somit die ganze Transformation in κ, λ, μ ausgedrückt ist, und wir erhalten daher, wenn $\kappa, \lambda, \mu, \kappa_1, \lambda_1, \mu_1$ positiv angenommen werden,

$$= \frac{\kappa}{\sqrt{e}} \int_0^{\varphi} \frac{d\chi}{\sqrt{1 - e^{\pm i\alpha} \sin^2 \chi}} = \frac{\kappa}{\sqrt{e}} \int_0^{\varphi} \frac{\left(1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi \pm i \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}}{\sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)} \sin^2 \varphi \right) d\varphi}{\sqrt{(1 - \kappa^2 \sin^2 \varphi)(1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi)(1 - \mu^2 \sin^2 \varphi)}}.$$

Diese Formeln liefern nun Richelot unmittelbar die Gleichungen der transcendenten Curven, welche die Bilder der genannten Begrenzungsstücke sind. Dem Begrenzungsstück von $x = 0, y = 0$ bis $x = 0, y = 1$ nämlich entspricht das Bild, welches für positive φ -Werthe durch die Gleichungen

$$u = \frac{\kappa}{\sqrt{e}} \int_0^{\varphi} \frac{(1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi) d\varphi}{D\varphi}$$

$$v = \pm \frac{\kappa \lambda \sqrt{\kappa^2 - \lambda^2}}{\sqrt{e}} \int_0^{\varphi} \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{D\varphi}$$

bestimmt ist, wenn

$$D\varphi = \sqrt{(1 - \kappa^2 \sin^2 \varphi)(1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi)(1 - \mu^2 \sin^2 \varphi)}$$

gesetzt wird.

Dem Begrenzungsstück von $x = 0$ bis $x = -\infty$ entspricht das Bild, dessen Gleichungen sind,

$$u = \frac{\mu_1}{\sqrt{\sigma}} \int_0^{\varphi_1} \frac{(1 - \lambda_1^2 \sin^2 \varphi) d\varphi}{D_1 \varphi}$$

$$v = \pm \frac{\mu_1 \lambda_1}{\sqrt{\sigma}} \int_0^{\varphi_1} \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{D_1 \varphi},$$

wenn man

$$D_1 \varphi = \sqrt{(1 - \kappa_1^2 \sin^2 \varphi)(1 - \lambda_1^2 \sin^2 \varphi)(1 - \mu_1^2 \sin^2 \varphi)}$$

setzt.

Zu dem oben bezeichneten Kreisbogen gehört als Bild das Begrenzungsstück

$$u = \frac{\mu}{\sqrt{\varrho}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi) d\varphi}{D \varphi} + \frac{\mu_1}{\sqrt{\sigma}} \int_0^{\varphi_1} \frac{(1 - \lambda_1^2 \sin^2 \varphi) d\varphi}{D_1 \varphi}$$

$$v = \pm \frac{\kappa \lambda \sqrt{\kappa^2 - \lambda^2}}{\sqrt{\varrho}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{D \varphi} \pm \frac{\mu_1 \lambda_1 \sqrt{\mu_1^2 - \lambda_1^2}}{\sqrt{\sigma}} \int_0^{\varphi_1} \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{D_1 \varphi}.$$

Endlich entspricht dem Stück der genannten unendlichen Geraden das Bild, dessen Gleichungen

$$u = \frac{\kappa}{\sqrt{\varrho}} \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi) d\varphi}{D \varphi} + \frac{\mu}{\sqrt{\sigma}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \lambda_1^2 \sin^2 \varphi) d\varphi}{D_1 \varphi}$$

$$v = \pm \frac{\kappa \lambda \sqrt{\kappa^2 - \lambda^2}}{\sqrt{\varrho}} \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{D \varphi} \pm \frac{\mu_1 \lambda_1 \sqrt{\mu_1^2 - \lambda_1^2}}{\sqrt{\sigma}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{D_1 \varphi}.$$

Es würde noch erübrigen, nicht bloss, wie bisher geschehen, u und v für die Grenze des Flächenstückes sondern für jeden Punkt innerhalb derart zu bestimmen, dass

$$z = x + yi = \sin^2 \text{am}(u + vi, \kappa)$$

ist.

„Diese Aufgabe hat nun Heine in der angeführten Abhandlung gelöst und zugleich für ein anderes Gebiet, nicht für das „ xy “-Gebiet, wenn

$$x + yi = \sin^2 \operatorname{am}(u + vi, \kappa)$$

„sondern für das xy -Gebiet, wenn

$$x + yi = \sin \operatorname{am}(u + vi, \kappa)$$

„gegeben ist, jene vier Grenzlinien direct bestimmt. Es sind die „positive y -Halbaxe, die positive x -Halbaxe von $x = 0$ bis $x = 1$, „der Bogen einer bestimmten Lemniscate und eine von

$$x + iy = \frac{1}{z} = \frac{e^{\frac{i\alpha}{2}}}{e}$$

„in's Unendliche laufende Grade, die rückwärts verlängert durch „den Anfangspunkt der Coordinaten geht. Wenn man in unsern „früheren Begrenzungsstücken $x + yi$ für $\sqrt{x + yi}$ also

$$x^2 - y^2 \text{ für } x$$

$$2xy \text{ für } y$$

„einführt, so gelangt man in der That zu den Heine'schen.“

Dresden.

L. Koenigsberger.

Anmerkung zu dem Referate S. 138.

Die Erweiterung des dort erwähnten Jacobi'schen Satzes ist, wie ich erst später gefunden habe, in anderer Fassung und mit andersartigem Beweise von Liouville gegeben worden in seinem: „Mémoire sur quelques propositions générales de géométrie etc.“ Journal de Mathématiques Tome VI. 1841.

Leipzig.

Ax. Harnack.

Kräfte gegebene Ausdruck $ii' dw$ dagegen ist nur dann das negative Differential des magnetischen Potentials, wenn die Stromintensitäten constant sind, oder wenigstens ein constantes Product haben.

Bonn.

R. Clausius.

S. Günther: Adolph Zeising als Mathematiker. (Zeitschrift für Mathematik und Physik, 21. Jahrgang.)

Kurze Schilderung der Verdienste, welche der genannte Gelehrte um die Begründung der mathematischen Aesthetik sich erworben. Es werden mit kurzen Worten die wichtigsten Abhandlungen Zeising's angeführt, in welchen er für sein Princip, das Gesetz des goldenen Schnittes regle das ganze weite Gebiet des Schönen, Propaganda zu machen suchte. Manche seiner Aufstellungen werden geradezu verworfen, andere, wie die auf architektonische Verhältnisse und die mathematische Theorie der Blattstellung bezüglichen, vollkommen anerkannt. Zum Schluss folgt dann noch eine gedrängte Analyse derjenigen Arbeiten, welche ein allgemeineres Studium der geometrischen Formenlehre — ohne specielle Rücksicht auf die Theilung nach äusserem und mittlerem Verhältniss — zum Gegenstande haben.

Es möge an dieser Stelle noch bemerkt werden, dass, wie uns von kompetenter Seite mitgeteilt wird, dem Zeising'schen Theorem eine allgemeinere rein psychologische Bedeutung innewohne, dass aber der Urheber darin fehlte, nur immer nach Bestätigungen der Norm zu suchen, Ausnahmen aber gänzlich ausser Acht zu lassen. Ferner sei eines dem Grundgedanken nach verwandten Versuches des Franzosen Lagout gedacht, auf welchen uns Professor Favaro in Padua aufmerksam machte; dessen „*esthétique nombrée, application de l'équation du beau à l'analyse*“ (Paris 1863) vermag sich jedoch trotz manches geistreichen Raisonnements mit der consequent durchgeführten Systematik des deutschen Forschers nicht zu messen.

Ansbach.

S. Günther.

L. Königsberger: Ueber die Reduction hyperelliptischer Integrale auf algebraisch-logarithmische Functionen. (Mathematische Annalen Band XI.)

Die fundamentalen Untersuchungen von Clebsch haben gelehrt, dass, wenn y mit x durch eine algebraische Gleichung n^{ter} Ordnung

$$(a) \dots F(x, y) = 0$$

von der Art verbunden ist, dass x und y sich als rationale Functionen einer Hilfsvariablen t ausdrücken lassen, die Curve (a) die höchste Anzahl der Doppelpunkte nämlich

$$\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

besitzt, und dass umgekehrt, wenn diese Anzahl der Doppelpunkte erreicht wird, sich x und y als rationale Functionen einer andern Variablen darstellen lassen, so dass in diesem Falle

$$\int f(x, y) dx,$$

worin $f(x, y)$ eine rationale Function von x und y bedeutet, auf das Integral einer rationalen Function von t also auf eine algebraisch-logarithmische Function dieser Variablen reducirbar ist, sich somit auch algebraisch-logarithmisch durch x und y ausdrücken lässt. Eine andere Frage tritt auf, wenn es sich nicht um die ganze Klasse der zugehörigen Abel'schen Integrale handelt, sondern um specielle Integrale aus den verschiedenen Klassen, und in dem Sinne kann man sich die Aufgabe stellen, aus der Gattung der hyperelliptischen Integrale der verschiedenen Ordnungen diejenigen zu charakterisiren, welche auf algebraisch-logarithmische Functionen reducirbar sind. Herr Tchebichef hat sich im 18. Bande des Liouville'schen Journals mit der Reduction von Integralen der Form

$$\int \frac{F_0(x)}{f_0(x)} \frac{dx}{\sqrt[m]{\Theta(x)}}$$

auf algebraisch-logarithmische Functionen beschäftigt und sich stützend auf die Liouville'schen Untersuchungen gezeigt, wie, wenn die Reduction möglich ist, der algebraische Theil dieses Integrals bestimmt, die Anzahl der einzelnen logarithmischen Ausdrücke ermittelt und die Form der letzteren festgestellt werden kann; in einer folgenden Arbeit desselben Journals hat derselbe unter der Annahme, dass die Bedingungen erfüllt sind, in dem einfachsten Falle der elliptischen Integrale auch die logarithmischen Ausdrücke wirklich zu finden gelehrt. Herr Weierstrass ging in den Monatsberichten der Berliner Akademie — vom Jahre 1857 — näher auf diese letzte Arbeit Tchebichef's ein, und indem er den von demselben eingeschlagenen Weg nicht für den naturgemässen hält, sondern die Frage für elliptische Integrale bereits durch die von Abel in seiner letzten unvollendet gebliebenen Arbeit über die allgemeinsten zwischen elliptischen Integralen und algebraisch-loga-

rithmischen Functionen stattfindenden Relationen entwickelten Principien für erledigt betrachtet, zeichnet er einen Weg für die Behandlung dieser Frage für elliptische Integrale vor, der sich, wie er hervorhebt, auch für hyperelliptische Integrale durchführen lässt. Das Charakteristische der Weierstrass'schen Untersuchung besteht darin, dass das vorgelegte elliptische Integral dadurch dass für das elliptische Integral erster Gattung eine Variable u eingeführt wird, in bekannter Weise, von einem in u linearen Posten abgesehen, in eine Summe von $E(u)$, einer Reihe von Functionen der Form $\Pi(u, a_\alpha)$ und einem aus $\sin \operatorname{am} u$ und $\frac{d \sin \operatorname{am} u}{du}$ rational zusammengesetzten Theil zerlegt wird, und nun aus der Annahme, dass das Integral auf eine algebraisch-logarithmische Function reducirbar sein soll, durch Vergleichung der Perioden der elliptischen Functionen und der Logarithmen die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Reduction ermittelt werden.

Ich nehme die Untersuchung für die Reduction der hyperelliptischen Integrale beliebiger Ordnung auf, ohne das Umkehrungsproblem dieser Gattung Abel'scher Integrale zu benutzen, sondern suche direct mit Benutzung der früher von mir in den Annalen ausgeführten Reductionsformeln der allgemeinen hyperelliptischen Integrale auf die Integrale der drei Gattungen und den algebraischen Theil, sowie mich stützend auf die von mir vor Kurzem im Journal für Mathematik behandelte Zurückführung des allgemeinen Transformationsproblems auf das rationale und die dort aufgestellte allgemeinste Relation zwischen hyperelliptischen Integralen die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Reduction eines hyperelliptischen Integrales beliebiger Ordnung auf algebraisch-logarithmische Functionen herzuleiten.

Der von Herrn Fuchs zuerst ohne jede Beschränkung ausgesprochene Satz, dass die Determinante der zwischen den Verzweigungspunkten genommenen Integrale erster und zweiter Gattung stets einen von Null verschiedenen, von den Verzweigungspunkten völlig unabhängigen Werth besitzt, liess für die auf algebraische Functionen reducirbaren hyperelliptischen Integrale

$$\int \frac{F(z) dz}{\sqrt{R(z)}}$$

wenn

$$R(z) = A(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdots (z - \alpha_{2p+1})$$

und

$$z_1, z_2, \dots, z_n$$

die Werthe von z bedeuten, für welche $F(z)$ unendlich wird, die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen bei Anwendung bekannter Bezeichnungen in der Form finden

$$\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \right]_{(t-z_1)^{-1}} = 0, \quad \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \right]_{(t-z_2)^{-1}} = 0, \dots \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \right]_{(t-z_n)^{-1}} = 0,$$

$$\sum_1^n \alpha \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \int_{z_\alpha} \frac{F_r(t) dt}{\sqrt{R(t)}} \right]_{(t-z_\alpha)^{-1}} - \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \int_{\infty} \frac{F_r(t) dt}{\sqrt{R(t)}} \right]_{r-1} = 0,$$

wenn

$$R(z) = A z^{2p+1} + B_0 z^p + B_1 z^{p-1} + \dots + B_{2p-1} z + B_{2p}$$

$$F_r(t) = \frac{2p-2r-1}{2} A t^r + \frac{2p-2r}{2} B_0 t^{r-1} + \dots + \frac{2p-r-2}{2} B_{r-2} t$$

$$+ \frac{2p-r-1}{2} B_{r-1}$$

und

$$r = 0, 1, 2, \dots, p-1, p, \dots, 2p-1$$

gesetzt wird; der algebraische Werth des Integrales nimmt dann die Form an

$$\left\{ \sum_1^n \alpha \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \int_{z_\alpha} \frac{dt}{(t-z) \sqrt{R(t)}} \right]_{(t-z_\alpha)^{-1}} - \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \int_{\infty} \frac{dt}{(t-z) \sqrt{R(t)}} \right]_{r-1} \right\} \sqrt{R(z)}.$$

Um in ähnlicher Weise die Bedingungen für die Reduction eines hyperelliptischen Integrales auf algebraisch-logarithmische Functionen zu finden, wird wiederum das Integral in die Summe von p Integralen erster, p Integralen zweiter, n Integralen dritter Gattung und einem algebraischen Theile zerlegt und gezeigt, dass, wenn sich diese Summe in einen algebraisch-logarithmischen Theil umwandeln soll, nach Elimination der nicht von einander unabhängigen Coefficienten der Integrale dritter Gattung je ein Complex von diesen mit ganzzahligen Coefficienten versehenen Integralen einem Logarithmus einer aus z und $\sqrt{R(z)}$ rational zusammengesetzten Function gleich sein muss, und dass somit vermöge des Satzes von der Vertauschung der Unstetigkeitspunkte und Grenzen der Integrale dritter Gattung die zu je einem Complex gehörigen Unstetigkeitspunkte Lösungen einer Gleichung von der Form

$$p^2 - q^2 R(z) = 0$$

sein müssen, worin p und q rationale Functionen von z bedeuten; hat man nun geprüft, ob die Grössen je eines Complexes Lösungen

$$D \quad \lambda_{1i} \lambda_{2i} \dots \lambda_{n-ki},$$

worin i eine der Zahlen $1, 2, \dots, k$ bedeuten soll; sei derselbe δ_i und werde

$$\frac{D}{\delta_i} = t_0^{(i)}, \quad \frac{\lambda_{1i}}{\delta_i} = t_1^{(i)}, \quad \dots \quad \frac{\lambda_{n-ki}}{\delta_i} = t_{n-k}^{(i)}$$

gesetzt. Lassen sich nun Gleichungen von der Form finden

$$P^{(1)2} - Q^{(1)2} R(z) = 0, \quad P^{(2)2} - Q^{(2)2} R(z) = 0, \quad \dots \quad P^{(k)2} - Q^{(k)2} R(z) = 0$$

welche aus den resp. Werthen

$$z_1, z_{k+1}, \dots, z_n$$

$$z_2, z_{k+1}, \dots, z_n$$

$$\dots \dots \dots$$

$$z_k, z_{k+1}, \dots, z_n$$

mit der entsprechenden Vielfachheit

$$t_0^{(1)}, t_1^{(1)}, \dots, t_{n-k}^{(1)}$$

$$t_0^{(2)}, t_1^{(2)}, \dots, t_{n-k}^{(2)}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$t_0^{(k)}, t_1^{(k)}, \dots, t_{n-k}^{(k)}$$

nur noch Verzweigungswerthe zu Lösungen haben, so bilde man die Summe

$$\begin{aligned} & \frac{1}{t_0^{(1)}} \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \right]_{(t-z_1)^{-1}} \log \left(\frac{P^{(1)} - Q^{(1)} \sqrt{R(z)}}{P^{(1)} + Q^{(1)} \sqrt{R(z)}} \right) + \frac{1}{t_0^{(2)}} \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \right]_{(t-z_2)^{-1}} \log \left(\frac{P^{(2)} - Q^{(2)} \sqrt{R(z)}}{P^{(2)} + Q^{(2)} \sqrt{R(z)}} \right) \\ & + \dots + \frac{1}{t_0^{(k)}} \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \right]_{(t-z_k)^{-1}} \log \left(\frac{P^{(k)} - Q^{(k)} \sqrt{R(z)}}{P^{(k)} + Q^{(k)} \sqrt{R(z)}} \right) = L(z), \end{aligned}$$

dann wird $L(z)$ das Aggregat der im reducibaren hyperelliptischen Integrale vorkommenden logarithmischen Glieder darstellen. Setzt man sodann

$$\begin{aligned} & \frac{dL(z)}{dz} \\ &= \sum_1^k \left\{ \frac{1}{t_0^{(i)}} \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \right]_{(t-z_i)^{-1}} \frac{2R(z) \left[Q^{(i)} \frac{dP^{(i)}}{dz} - P^{(i)} \frac{dQ^{(i)}}{dz} \right] - P^{(i)} Q^{(i)} \frac{dR(z)}{dz}}{P^{(i)2} - Q^{(i)2} R(z)} \cdot \frac{1}{\sqrt{R(z)}} \right\} \\ &= \frac{\varphi(z)}{\sqrt{R(z)}}, \end{aligned}$$

so müssen ferner die Bedingungen befriedigt sein

$$\sum_1^n \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \int_{z_\alpha} \frac{F_r(t) dt}{\sqrt{R(t)}} \right]_{(t-z_\alpha)^{-1}} - \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \int_{\infty} \frac{F_r(t) dt}{\sqrt{R(t)}} \right]_{t^{-1}} = 0$$

für die Werthe $r = 0, 1, 2, \dots, p-1$, und

$$\sum_r^n \left[\frac{F(t) - \varphi(t)}{\sqrt{R(t)}} \int_{z_\alpha} \frac{F_r(t) dt}{\sqrt{R(t)}} \right]_{(t-z_\alpha)^{-1}} - \left[\frac{F(t) - \varphi(t)}{\sqrt{R(t)}} \int_{\infty} \frac{F_r(t) dt}{\sqrt{R(t)}} \right]_{t^{-1}} = 0$$

für die Werthe $r = p, p+1, \dots, 2p-1$; sind alle diese Bedingungen erfüllt, so ist der Werth des algebraischen Theiles jenes hyperelliptischen Integrales

$$\left\{ \sum_1^n \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \int_{z_\alpha} \frac{dt}{(t-z)\sqrt{R(t)}} \right]_{(t-z_\alpha)^{-1}} - \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \int_{\infty} \frac{dt}{(t-z)\sqrt{R(t)}} \right]_{t^{-1}} \right\} \sqrt{R(z)},$$

welcher mit $L(z)$ vereinigt die algebraisch-logarithmische Darstellung des gegebenen Integrales liefert.

Dresden,

L. Königsberger.

L. Königsberger: Referate aus den hinterlassenen Papieren von F. Richelot. Trigonometrische Form der hyperelliptischen Integrale der ersten, zweiten und dritten Gattung. (Der Inhalt der folgenden Mittheilung ist in den Michaelisferien 1874 niedergeschrieben.)

Richelot führt zuerst für die Lösungen $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ des Polynoms $2n^{\text{ten}}$ Grades

$$R(z) = (z - a_1)(z - a_2) \cdots (z - a_{2n})$$

eine Reihe von Moduln, analog dem Modul des elliptischen Integrals, durch folgende Betrachtungen ein. Transformirt man das hyperelliptische Integral durch den linearen Ausdruck

$$\xi_1 = \frac{z_1 - a_2}{z_1 - a_{2n}} \frac{a_1 - a_{2n}}{a_1 - a_2}$$

oder durch

$$\xi_2 = \frac{z_2 - a_4}{z_2 - a_{2n}} \frac{a_3 - a_{2n}}{a_3 - a_4}$$

u. s. w. oder endlich durch

$$\xi_{n-1} = \frac{z_{n-1} - a_{2n-2}}{z_{n-1} - a_{2n}} \cdot \frac{a_{2n-1} - a_{2n}}{a_{2n-1} - a_{2n-2}},$$

wodurch den Werthen

$$z_1 = a_2 \quad z_2 = a_4 \dots \dots \dots z_{n-1} = a_{2n-2}$$

$$z_1 = a_1 \quad z_2 = a_3 \dots \dots \dots z_{n-1} = a_{2n-1}$$

$$z_1 = a_{2n} \quad z_2 = a_{2n} \dots \dots \dots z_{n-1} = a_{2n}$$

für die Grössen ξ sämmtlich resp. die Werthe Null, die Einheit und ∞ zugeordnet werden, so erkennt man leicht, dass für die erste Transformation sich

$$\begin{aligned} z_1 = a_3 & \quad \frac{1}{\xi_1} = \frac{a_3 - a_{2n}}{a_3 - a_2} \cdot \frac{a_1 - a_2}{a_1 - a_{2n}} = k_{13}^2 \\ z_1 = a_4 & \quad \frac{1}{\xi_1} = \frac{a_4 - a_{2n}}{a_4 - a_2} \cdot \frac{a_1 - a_2}{a_1 - a_{2n}} = k_{14}^2 \\ & \dots \dots \dots \\ z_1 = a_{2n-1} & \quad \frac{1}{\xi_1} = \frac{a_{2n-1} - a_{2n}}{a_{2n-1} - a_2} \cdot \frac{a_1 - a_2}{a_1 - a_{2n}} = k_{12n-1}^2 \end{aligned}$$

entsprechen, für die zweite Transformation

$$\begin{aligned} z_2 = a_5 & \quad \frac{1}{\xi_2} = \frac{a_5 - a_{2n}}{a_5 - a_4} \cdot \frac{a_3 - a_4}{a_3 - a_{2n}} = k_{35}^2 \\ & \dots \dots \dots \\ z_2 = a_{2n-1} & \quad \frac{1}{\xi_2} = \frac{a_{2n-1} - a_{2n}}{a_{2n-1} - a_4} \cdot \frac{a_3 - a_4}{a_3 - a_{2n}} = k_{32n-1}^2 \\ z_2 = a_1 & \quad \frac{1}{\xi_2} = \frac{a_1 - a_{2n}}{a_1 - a_4} \cdot \frac{a_3 - a_4}{a_3 - a_{2n}} = k_{31}^2 \\ z_2 = a_2 & \quad \frac{1}{\xi_2} = \frac{a_2 - a_{2n}}{a_2 - a_4} \cdot \frac{a_3 - a_4}{a_3 - a_{2n}} = k_{32}^2, \end{aligned}$$

u. s. w. endlich für die letzte

$$\begin{aligned} z_{n-1} = a_1 & \quad \frac{1}{\xi_{n-1}} = \frac{a_1 - a_{2n}}{a_1 - a_{2n-2}} \cdot \frac{a_{2n-1} - a_{2n-2}}{a_{2n-1} - a_{2n}} = k_{2n-31}^2 \\ z_{n-1} = a_2 & \quad \frac{1}{\xi_{n-1}} = \frac{a_2 - a_{2n}}{a_2 - a_{2n-2}} \cdot \frac{a_{2n-1} - a_{2n-2}}{a_{2n-1} - a_{2n}} = k_{2n-32}^2 \\ & \dots \dots \dots \\ z_{n-1} = a_{2n-3} & \quad \frac{1}{\xi_{n-1}} = \frac{a_{2n-3} - a_{2n}}{a_{2n-3} - a_{2n-2}} \cdot \frac{a_{2n-1} - a_{2n-2}}{a_{2n-1} - a_{2n}} = k_{2n-32n-3}^2; \end{aligned}$$

diese $(n-1)(2n-3)$ Werthe k^2 werden Moduln genannt und vor

Allem die Beziehungen, die zwischen ihnen stattfinden, aufgesucht.
Mit Hülfe der Substitution

$$a'_h = \frac{1}{a_h - a_{2n}}$$

erhält man leicht die Ausdrücke

$$k_{1h}^2 = \frac{a'_2 - a'_1}{a'_2 - a'_h}, \quad k_{3h}^2 = \frac{a'_4 - a'_3}{a'_4 - a'_h}, \quad \dots \quad k_{2n-3h}^2 = \frac{a'_{2n-2} - a'_{2n-3}}{a'_{2n-2} - a'_h}$$

und somit, wenn h und i weder 1 noch 2 sind,

$$a'_h - a'_2 = \frac{a'_1 - a'_2}{k_{1h}^2}, \quad a'_i - a'_2 = \frac{a'_1 - a'_2}{k_{1i}^2}$$

also

$$a'_i - a'_h = (a'_1 - a'_2) \left(\frac{1}{k_{1i}^2} - \frac{1}{k_{1h}^2} \right);$$

daraus ergibt sich aber sofort für alle von 1 und 2 verschiedenen h

$$k_{3h}^2 = \frac{k_{14}^2 - k_{13}^2}{k_{14}^2 - k_{1h}^2} \cdot \frac{k_{1h}^2}{k_{13}^2},$$

$$k_{5h}^2 = \frac{k_{16}^2 - k_{15}^2}{k_{16}^2 - k_{1h}^2} \cdot \frac{k_{1h}^2}{k_{15}^2}, \quad \dots \quad k_{2n-3h}^2 = \frac{k_{12n-2}^2 - k_{12n-3}^2}{k_{12n-2}^2 - k_{1h}^2} \cdot \frac{k_{1h}^2}{k_{12n-2}^2}.$$

Um den Fall $h = 1$ und $= 2$ zu erledigen, beachte man, dass

$$k_{32}^2 = \frac{a'_4 - a'_3}{a'_4 - a'_2}, \quad k_{31}^2 = \frac{a'_4 - a'_3}{a'_4 - a'_1}$$

ist und dass, wenn oben $h = 4$, $i = 3$ gesetzt wird,

$$a'_3 - a'_4 = (a'_1 - a'_2) \left(\frac{1}{k_{13}^2} - \frac{1}{k_{14}^2} \right) \text{ und } a'_4 - a'_1 = (a'_1 - a'_2) \left(\frac{1}{k_{14}^2} - 1 \right)$$

wird, so dass

$$k_{32}^2 = \frac{k_{13}^2 - k_{14}^2}{k_{13}^2}, \quad k_{31}^2 = \frac{k_{13}^2 - k_{14}^2}{k_{13}^2 (1 - k_{14}^2)}$$

und ähnlich

$$k_{52}^2 = \frac{k_{15}^2 - k_{16}^2}{k_{15}^2}, \quad k_{51}^2 = \frac{k_{15}^2 - k_{16}^2}{k_{15}^2 (1 - k_{16}^2)}$$

u. s. w., endlich

$$k_{2n-32}^2 = \frac{k_{12n-3}^2 - k_{12n-2}^2}{k_{12n-3}^2}, \quad k_{2n-31}^2 = \frac{k_{12n-3}^2 - k_{12n-2}^2}{k_{12n-3}^2 (1 - k_{12n-2}^2)}$$

folgen. Somit sind *sämmtliche* Moduln durch die Modulreihe

$$k_{13}^2, k_{14}^2, \dots, k_{12n-1}^2$$

ausgedrückt, also durch $2n-3$ Moduln, die offenbar von einander unabhängig sind, da sie ausser a_1' und a_2' jeder eine andere Grösse $a_3', a_4', \dots, a_{2n-1}'$ enthalten und diese von einander unabhängige Grössen vorstellen.

Richelot stellt sich nun die Aufgabe, die hyperelliptischen Integrale erster, zweiter und dritter Gattung mit Hülfe der oben eingeführten Moduln in trigonometrische Form umzusetzen und zwar definiert derselbe als Integrale erster, zweiter und dritter Gattung nach Herrn Weierstrass (Theorie der Abel'schen Functionen, Journal für Mathematik) die Integrale

$$\int \frac{dz}{z-a_{2h}} \left(\frac{P(z)}{Q(z)} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \int \frac{dz}{z-a_{2h-1}} \left(\frac{P(z)}{Q(z)} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \int \frac{dz}{z-a} \left(\frac{P(z)}{Q(z)} \right)^{\frac{1}{2}},$$

worin

$$P(z) = -a_{2n}(z-a_2)(z-a_4)\dots(z-a_{2n-2})$$

$$Q(z) = (z-a_1)(z-a_3)\dots(z-a_{2n-1})(z-a_{2n})$$

und a eine willkürliche Zahl ist. Ich will bemerken, um eine Vergleichung mit den von Riemann definirten Integralen der drei Gattungen zu gestatten, dass die von Richelot aufgenommenen Integrale *erster* Gattung

$$\int_{a_{2p}}^{z_p} \frac{dz_p}{z_p-a_2} \left(\frac{P(z_p)}{Q(z_p)} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \int_{a_{2p}}^{z_p} \frac{dz_p}{z_p-a_4} \left(\frac{P(z_p)}{Q(z_p)} \right)^{\frac{1}{2}}, \dots, \int_{a_{2p}}^{z_p} \frac{dz_p}{z_p-a_{2n-2}} \left(\frac{P(z_p)}{Q(z_p)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

für *alle* Punkte der zu $\sqrt{R(z)}$ gehörigen Riemann'schen Fläche endlich sind, die Integrale *zweiter* Gattung

$$\int_{a_{2p}}^{z_p} \frac{dz_p}{z_p-a_1} \left(\frac{P(z_p)}{Q(z_p)} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \int_{a_{2p}}^{z_p} \frac{dz_p}{z_p-a_3} \left(\frac{P(z_p)}{Q(z_p)} \right)^{\frac{1}{2}}, \dots, \int_{a_{2p}}^{z_p} \frac{dz_p}{z_p-a_{2n-1}} \left(\frac{P(z_p)}{Q(z_p)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

nur in den resp. Verzweigungspunkten $a_1, a_3, \dots, a_{2n-1}$ algebraisch unendlich und zwar von der $-\frac{1}{2}$ ten Ordnung werden, während endlich die Integrale *dritter* Gattung

$$\int_{a_{2p}}^{z_p} \frac{dz_p}{z_p-a} \left(\frac{P(z_p)}{Q(z_p)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

nur im Punkte $z = a$ und zwar auf beiden Blättern logarithmisch unendlich werden.

Setzt man nach Richelot

$$\xi_1 = \sin^2 \varphi_1 = \frac{z_1 - a_2}{z_1 - a_{2n}} \cdot \frac{a_1 - a_{2n}}{a_1 - a_2}$$

$$\xi_2 = \sin^2 \varphi_2 = \frac{z_2 - a_4}{z_2 - a_{2n}} \cdot \frac{a_3 - a_{2n}}{a_3 - a_4}$$

$$\xi_{n-1} = \sin^2 \varphi_{n-1} = \frac{z_{n-1} - a_{2n-2}}{z_{n-1} - a_{2n}} \cdot \frac{a_{2n-1} - a_{2n}}{a_{2n-1} - a_{2n-2}}$$

und führt zuerst die erste Transformation durch, welche mit Weglassung des Index 1 bei z und φ die Form hat

$$\frac{z - a_2}{z - a_{2n}} \cdot \frac{a_1 - a_{2n}}{a_1 - a_2} = \sin^2 \varphi,$$

so folgt durch logarithmisches Differentiiren

$$\frac{2 \cos \varphi}{\sin \varphi} d\varphi = (a_2 - a_{2n}) \frac{dz}{(z - a_2)(z - a_{2n})}$$

oder

$$2d\varphi = \sqrt{-(a_1 - a_{2n})(a_2 - a_{2n})} \frac{dz}{z - a_2} \left(\frac{z - a_2}{z - a_1} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{z - a_{2n}}$$

wofür, weil

$$\left(\frac{P(z)}{Q(z)} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{(z - a_2)(z - a_4) \dots (z - a_{2n-2})}{(z - a_1)(z - a_3) \dots (z - a_{2n-1})} \cdot \frac{-a_{2n}}{z - a_{2n}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

ist, auch

$$\left(\frac{a_{2n}}{(a_1 - a_{2n})(a_2 - a_{2n})} \right)^{\frac{1}{2}} 2d\varphi \left(\frac{(z - a_4) \dots (z - a_{2n})}{(z - a_3) \dots (z - a_{2n-1})} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{dz}{z - a_2} \left(\frac{P(z)}{Q(z)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

gesetzt werden kann.

Beachtet man nun aber, dass, weil

$$\frac{z - a_{2h}}{z - a_{2h-1}} = C_h \cdot \frac{1 - k_{12h}^2 \sin^2 \varphi}{1 - k_{12h-1}^2 \sin^2 \varphi}$$

sein muss und sich hieraus wegen der entsprechenden Werthe $z = a_2$, $\varphi = 0$

$$C_h = \frac{a_2 - a_{2h}}{a_2 - a_{2h-1}}$$

ergiebt,

$$\frac{z - a_{2h}}{z - a_{2h-1}} = \frac{a_2 - a_{2h}}{a_2 - a_{2h-1}} \frac{1 - k_{12h}^2 \sin^2 \varphi}{1 - k_{12h-1}^2 \sin^2 \varphi}$$

folgt, so wird jeder Factor des obigen Ausdruckes für $h = 2, 4, \dots, 2n-1$ trigonometrisch umgeformt sein, nur für $h = n$ wird, wie leicht zu sehen,

$$\frac{z - a_{2n}}{z - a_{2n-1}} = \frac{a_2 - a_{2n}}{a_2 - a_{2n-1}} \frac{1}{1 - k_{12n-1}^2 \sin^2 \varphi}$$

sein, und man wird somit auch den vorher gefundenen Ausdruck gelten lassen können, wenn man nur $k_{12n} = 0$ setzt; man erhält somit

$$\frac{(z - a_4)(z - a_6) \dots (z - a_{2n})}{(z - a_3)(z - a_5) \dots (z - a_{2n-1})} = \prod_2^n \left(\frac{a_2 - a_{2h}}{a_2 - a_{2h-1}} \right) \prod_2^n \left(\frac{1 - k_{12h}^2 \sin^2 \varphi}{1 - k_{12h-1}^2 \sin^2 \varphi} \right),$$

so dass sich, wenn

$$2 \frac{a_{2n}}{a_1 - a_{2n}} \left(\frac{(a_2 - a_4)(a_2 - a_6) \dots (a_2 - a_{2n-2})}{(a_2 - a_3)(a_2 - a_5) \dots (a_2 - a_{2n-1})} \right)^{\frac{1}{2}} = M_{12}$$

gesetzt wird, mit Wiedereinführung der Grössen z_1 und φ_1 der gesuchte Ausdruck

$$\int_{a_2}^{z_1} \frac{dz_1}{z_1 - a_2} \left(\frac{P(z_1)}{Q(z_1)} \right)^{\frac{1}{2}} = M_{12} \int_0^{\varphi_1} d\varphi_1 \prod_2^n \left(\frac{1 - k_{12h}^2 \sin^2 \varphi_1}{1 - k_{12h-1}^2 \sin^2 \varphi_1} \right)^{\frac{1}{2}}$$

ergiebt. Zur Umformung des Integrales

$$\int_{a_2}^{z_1} \frac{dz_1}{z_1 - a_{2r-2}} \left(\frac{P(z_1)}{Q(z_1)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

braucht man nur vor der Integration die obige Gleichung mit

$$\frac{z_1 - a_2}{z_1 - a_{2r-2}} = C_{2r-2} \frac{\sin^2 \varphi_1}{1 - k_{12r-2}^2 \sin^2 \varphi_1}$$

zu multipliciren, in welcher offenbar

$$C_{2r-2} = -k_{12r-2}^2 \frac{a_{2n} - a_2}{a_{2n} - a_{2r-2}}$$

sein muss, und erhält somit

$$\begin{aligned} & \int_{a_2}^{z_1} \frac{dz_1}{z_1 - a_{2r-2}} \left(\frac{P(z_1)}{Q(z_1)} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{a_{2n} - a_2}{a_{2n} - a_{2r-2}} M_{12} \int_0^{\varphi_1} \frac{k_{12r-2}^2 \sin^2 \varphi_1 d\varphi_1}{1 - k_{12r-2}^2 \sin^2 \varphi_1} \prod_2^n \left(\frac{1 - k_{12h}^2 \sin^2 \varphi_1}{1 - k_{12h-2}^2 \sin^2 \varphi_1} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

In dem Falle, dass $R(z)$ nur $2n-1$ lineare Factoren hat, ändert sich nichts als dass man überall $a_{2n} = \infty$ zu setzen und den Grenzwert zu nehmen hat, wobei die Factoren

$$\frac{a_{2n} - a_2}{a_{2n} - a_{2r}}$$

der Einheit gleich werden.

Um nun die übrigen Integrale erster Gattung in $z_2, z_3, \dots, z_{n-1}$ ebenso umzuformen, hat man nur nöthig die Indices

$$1, 3, 5, \dots, 2n-3, 2n-1$$

und die Indices

$$2, 4, 6, \dots, 2n-4, 2n-2$$

cyclisch zu vertauschen, und erhält allgemein

$$\begin{aligned} & \int_{a_{2p}}^{z_p} \frac{dz_p}{z_p - a_{2r}} \left(\frac{P(z_p)}{Q(z_p)} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= - \frac{a_{2n} - a_{2p}}{a_{2n} - a_{2r}} M_{2p-1, 2p} \int_0^{\varphi_p} \frac{k_{2p-1, 2r}^2 \sin^2 \varphi_p d\varphi_p}{1 - k_{2p-1, 2r}^2 \sin^2 \varphi_p} \prod_{h=1}^n \prod_{(p)} \left(\frac{1 - k_{2p-1, 2h}^2 \sin^2 \varphi_p}{1 - k_{2p-1, 2h-1}^2 \sin^2 \varphi_p} \right)^{\frac{1}{2}}; \end{aligned}$$

so sind $(n-1)^2$ Integrale erster Gattung in die canonische Form umgesetzt.

Die hyperelliptischen Integrale zweiter Gattung werden ebenso einfache Formen annehmen; man braucht nur vor der Integration der ersten Reihe mit

$$\frac{z_1 - a_2}{z_1 - a_{2r-1}} = - \frac{a_{2n} - a_2}{a_{2n} - a_{2r-1}} \frac{k_{12r-1}^2 \sin^2 \varphi_1}{1 - k_{12r-1}^2 \sin^2 \varphi_1}$$

zu multipliciren und erhält

$$\begin{aligned} & \int_{a_2}^{z_1} \frac{dz_1}{z_1 - a_{2r-1}} \left(\frac{P(z_1)}{Q(z_1)} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= - \frac{a_{2n} - a_2}{a_{2n} - a_{2r-1}} M_{12} \int_0^{\varphi_1} \frac{k_{12r-1}^2 \sin^2 \varphi_1 d\varphi_1}{1 - k_{12r-1}^2 \sin^2 \varphi_1} \prod_{h=2}^n \prod \left(\frac{1 - k_{12h}^2 \sin^2 \varphi_1}{1 - k_{12h-1}^2 \sin^2 \varphi_1} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

oder wieder durch cyclische Vertauschung der Indices

$$\int_{a_{2p}}^{z_p} \frac{dz_p}{z_p - a_{2r-1}} \left(\frac{P(z_p)}{Q(z_p)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= - \frac{a_{2n} - a_{2p}}{a_{2n} - a_{2r-1}} M_{2p-1, 2p} \int_0^{\varphi_F} \frac{k_{2p-1, 2r-1}^2 \sin^2 \varphi_p}{1 - k_{2p-1, 2r-1}^2 \sin^2 \varphi_p} \prod_{h=1}^n I_{(p)} \left(\frac{1 - k_{2p-1, 2h}^2 \sin^2 \varphi_p}{1 - k_{2p-1, 2h-1}^2 \sin^2 \varphi_p} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Um endlich das hyperelliptische Integral dritter Gattung umzuformen, wird man vor der Integration der ersten Reihe mit

$$\frac{z_1 - a_2}{z_1 - a}$$

zu multipliciren haben; es mögen

$$z_1 = a \quad \text{und} \quad \xi_1 = \frac{1}{k_{12}^2 \sin^2 \alpha_{12}}$$

vermöge der Substitution

$$\frac{z_1 - a_2}{z_1 - a_{2n}} \cdot \frac{a_1 - a_{2n}}{a_1 - a_2} = \xi_1$$

entsprechende Werthe sein, so dass

$$\sin^2 \alpha_{12} = \frac{1}{k_{12}^2} \frac{a - a_{2n}}{a - a_2} \frac{a_1 - a_2}{a_1 - a_{2n}}$$

wird, dann ergibt sich

$$\frac{z_1 - a_2}{z_1 - a} = C \frac{\sin^2 \varphi_1}{1 - k_{12}^2 \sin^2 \alpha_{12} \sin^2 \varphi_1}$$

und daraus

$$\frac{a_{2n} - a_2}{a_{2n} - a} = - \frac{C}{k_{12}^2 \sin^2 \alpha_{12}},$$

so dass

$$\frac{z_1 - a_2}{z_1 - a} = - \sin^2 \alpha_{12} \frac{a_{2n} - a_2}{a_{2n} - a} \frac{k_{12}^2 \sin^2 \varphi_1}{1 - k_{12}^2 \sin^2 \alpha_{12} \sin^2 \varphi_1}$$

folgt. Bedenkt man ferner dass

$$\frac{a - a_2}{a - a_{2n}} = \frac{1}{k_{12}^2 \sin^2 \alpha_{12}} \cdot \frac{a_1 - a_2}{a_1 - a_{2n}} = 1 - \frac{a_2 - a_{2n}}{a - a_{2n}}$$

ist, so folgt mit Benutzung aller dieser Werthe

$$\int_{a_2}^{z_1} \frac{dz_1}{z_1 - a} \left(\frac{P(z_1)}{Q(z_1)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= - \frac{1}{1 - \frac{1}{k_{12}^2 \sin^2 \alpha_{12}} \cdot \frac{a_1 - a_2}{a_1 - a_{2n}}} M_{12} \int_0^{\varphi_1} \frac{k_{12}^2 \sin^2 \alpha_{12} \sin^2 \varphi_1 d\varphi_1}{1 - k_{12}^2 \sin^2 \alpha_{12} \sin^2 \varphi_1} \prod_{h=2}^n I_h \left(\frac{1 - k_{12h}^2 \sin^2 \varphi_1}{1 - k_{12h-1}^2 \sin^2 \varphi_1} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

und wieder allgemein

$$\begin{aligned}
 & \int_{a_{2p}}^{z_p} \frac{dz_p}{z_p - a} \left(\frac{P(z_p)}{Q(z_p)} \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= - \frac{1}{1 - \frac{1}{k_{2p-1, 2p}^2 \sin^2 \alpha_{2p-1, 2p}} \cdot \frac{a_{2p-1} - a_{2p}}{a_{2p-1} - a_{2n}}} M_{2p-1, 2p} \int_0^{\varphi_p} \frac{k_{2p-1}^2 \sin^2 \alpha_{2p-1, 2p} \sin^2 \varphi_p d\varphi_p}{1 - k_{2p-1, 2p}^2 \sin^2 \alpha_{2p-1, 2p} \sin^2 \varphi_p} \\
 & \quad \times \prod_{h=1}^n \left(\frac{1 - k_{2p-1, 2h}^2 \sin^2 \varphi_p}{1 - k_{2p-1, 2h-1}^2 \sin^2 \varphi_p} \right)^{\frac{1}{2}}.
 \end{aligned}$$

Alle diese Transformationsformeln gelten auch für den Fall, dass $R(z)$ vom $2n - 1^{\text{ten}}$ Grade ist, wenn man nur $a_{2n} = \infty$ setzt und zu den Grenzwerten übergeht.

Dresden.

L. Königsberger.

Berichtigung:

p. 132 vorletzte Zeile: statt Mandel'schen lies Mandel'schen.

J. Lüroth. Ueber cyclisch-projectivische Punktgruppen in der Ebene und im Raume. Math. Ann. Bd. XIII.

Die Aufgabe, welche in der obigen Arbeit gelöst ist, besteht in der Aufsuchung einer Gruppe von n reellen Punkten $a_1, a_2, a_3 \dots a_n$ der Ebene oder des Raumes, die so liegen, dass es eine projectivische Umformung der Ebene resp. des Raumes giebt, welche die Punkte der Gruppe cyklisch vertauscht. Es werden zuerst diejenigen Elemente bestimmt, welche bei einer solchen Transformation sich nicht ändern, woran sich dann die Aufsuchung der Punktgruppe schliesst. Es ergeben sich die Resultate: dass bei einer Ebene alle Punkte der Gruppe auf einer Geraden oder auf einem Kegelschnitte liegen müssen, dass sie dagegen im Raume auf einer Geraden, oder auf einer Ebene (und in dieser auf einem Kegelschnitte), oder auf zwei Ebenen (nur bei geradem n) und gleichzeitig auf zwei Kegeln, oder endlich auf einem Hyperboloid mit einer Mantelfläche liegen können.

Karlsruhe.

Lüroth.

L. Koenigsberger: Ueber algebraische Beziehungen zwischen den Integralen verschiedener Differentialgleichungen. (Borchardt's Journal für Mathematik. Bd. 84.)

Bekanntlich hat Liouville nachgewiesen, dass, wenn Abel'sche Integrale von der Form

$$\int y dx,$$

worin y eine algebraische Function von x bedeutet, auf algebraische Functionen und niedere Transcendente reducirbar sind, in die Reductionsformel die logarithmischen Functionen nur additiv und mit Constanten multiplicirt eintreten, die Argumente dieser Logarithmen nur algebraische Functionen von x sind, und Exponentialfunctionen in dieser Reduction gar nicht vorkommen können, dass also die allgemeine Beziehung die von Abel der weiteren Transformation zu Grunde gelegte Form annimmt

$$\int y dx = u + A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2 + \dots + A_n \log v_n,$$

in welcher $u, v_1, v_2, \dots v_n$ algebraische Functionen von x , und $A_1, A_2 \dots A_n$ constante Grössen bedeuten.

für Z ein bestimmtes anderes Integral jener Differentialgleichung n^{ter} Ordnung gesetzt wird.

Ich knüpfe daran die Auseinandersetzung einer Methode zur Untersuchung eines algebraischen Zusammenhanges zwischen Integralen von Differentialgleichungen, stelle Betrachtungen über die allgemeine Transformationsgleichung zwischen Abel'schen Integralen und über das Vorkommen der Abel'schen Umkehrungsfunktionen in derselben an und hebe die Verwendung des obigen Satzes auch für andere Untersuchungen hervor.

Wien.

L. Koenigsberger.

L. Koenigsberger: Ueber die Reduction hyperelliptischer Integrale auf elliptische. (Borchardt's Journal für Mathematik.)

Eine in den „Annales de la société scientifique de Bruxelles“ (1. année 1876) erschienene Arbeit von Hermite, die sich mit dem bekannten von Jacobi reducirten hyperelliptischen Integrale erster Ordnung beschäftigt, und in der angeführt wird, dass die beiden hyperelliptischen Integrale

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(z^2-a)(8z^3-6az-b)}} \text{ und } \int \frac{zdz}{\sqrt{(z^2-a)(8z^3-6az-b)}}$$

sich durch die beiden verschiedenen Substitutionen

$$x = \frac{4z^3 - 3az}{a} \text{ und } x = \frac{2z^3 + b}{3(z^2 - a)}$$

auf die beiden verschiedenen elliptischen Integrale

$$\frac{1}{3} \int \frac{dx}{\sqrt{(2ax-b)(x^2-a)}} \text{ und } \frac{1}{2\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^3-3ax-b}}$$

reduciren lassen, war für mich die Veranlassung, das Problem der Reduction der hyperelliptischen Integrale auf elliptische genauer zu untersuchen und einige darauf bezügliche Resultate zu veröffentlichen.

Auf Grund von allgemeinen Sätzen, die ich in einer früheren Arbeit „über die allgemeinsten Beziehungen zwischen hyperelliptischen Integralen“ (Borchardt's Journal für Mathematik Bd. 81) aufgestellt habe, konnte ich schliessen, dass, wenn zwischen einem hyperelliptischen Integrale

$$\int^z f(z, \sqrt{R(z)}) dz,$$

in welchem $R(z)$ ein Polynom $2p+1^{\text{ten}}$ Grades bedeutet, hyperelliptischen Integralen niederer Ordnung, elliptischen Integralen und algebraisch-logarithmischen Functionen eine Beziehung besteht, für

welche die Graenzen der Integrale und die Argumente der algebraisch-logarithmischen Functionen algebraischen Relationen unterworfen sind, jedenfalls ein zur Irrationalität $\sqrt{R(z)}$ gehöriges hyperelliptisches Integral erster Gattung auf ein Integral erster Gattung, welches den in der Relation vorkommenden elliptischen Integralen zugehörig ist, reducirbar sein muss, und dass, wenn die zu einem der elliptischen Integrale gehörige Irrationalität mit

$$\sqrt{\varphi(x)} = \sqrt{x(1-x)(1-c^2x)}$$

bezeichnet wird,

$$\int^x \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}} = \int^z \frac{(\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \dots + \pi x^{p-1}) dz}{\sqrt{R(z)}}$$

sein wird, worin x und $\sqrt{\varphi(x)}$ rational durch z und $\sqrt{R(z)}$ ausdrückbar sind. Es lässt sich sodann leicht nachweisen, dass man das Problem zurückführen kann auf die Aufsuchung derjenigen hyperelliptischen Integrale, welche auf elliptische Integrale derart reducirbar sind, dass die Variable des letzteren eine rationale Function derjenigen des hyperelliptischen Integrales ist, und man wird nunmehr zur weiteren Durchführung der Untersuchung zwei wesentlich verschiedene Wege einschlagen können. Will man die Typen für die Polynome $R(z)$ finden, deren zugehörige Integrale auf elliptische Integrale reducirbar sind, so wird man die Betrachtung auf die zu diesen Integralen gehörigen ϑ -functionen ausdehnen können und die Relationen für die Moduln dieser ϑ -functionen aufsuchen, wenn die zugehörigen Integrale auf elliptische reducirbar oder die resp. ϑ -functionen in ϑ -functionen niederer Ordnung und elliptische ϑ -functionen zerlegbar sein sollen; in diesem Sinne habe ich mir in einer früheren Arbeit „über die Transformation zweiten Grades der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung“ die Frage vorgelegt, welche hyperelliptischen Integrale erster Ordnung durch eine Transformation zweiten Grades auf elliptische Integrale zurückführbar sind und mit Hülfe der sich als nothwendig ergebenden Gleichung

$$\vartheta(0, 0, \tau_{11}', 0, \tau_{22}')_{14} = 0$$

auf Grund allgemeiner Sätze, welche ich für die Transformation zweiten Grades der hyperelliptischen Functionen entwickelt hatte, die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen zwischen den Lösungen des Polynoms fünften Grades aufgestellt, für welches die dazugehörigen hyperelliptischen Integrale auf elliptische reducirbar sind. Ich habe jedoch in der Arbeit, über die ich eben referire,

einen andern Weg eingeschlagen und zwar den der algebraischen Transformation, in der Weise, wie Jacobi die Reduction eines elliptischen Integrales auf ein anderes behandelt oder die Transformation der elliptischen Integrale durchführt. Ich stelle zuerst die Bedingungen für den Grad der Transformation auf, zeige, wie der bekannte Jacobi'sche Fall und die von Hermite gefundenen Integrale sich als einfachste Fälle ergeben, und wie man für jede Ordnung von hyperelliptischen Integralen beliebig viele auf elliptische Integrale reducirebare finden kann.

Die von Hermite angeregte Frage, ob für die algebraische Irrationalität, deren charakteristische Zahl gewöhnlich mit p bezeichnet wird, stets auf elliptische Integrale reducirebare Integrale existiren, für welche die p Integrale erster Gattung durch ebensoviel verschiedene elliptische Integrale mit Hülfe von p Substitutionen ausdrückbar sind, wird sich, wie ich glaube, nur mit Hülfe der Theorie der ϑ -functionen beantworten lassen.

Wien.

L. Koenigsberger.

(Zu Seite 87, Z. 14 v. o. ist einzuschalten:)

Nachschrift. Von Seiten ihres Verfassers Herrn Charles S. Peirce sind mir inzwischen die Separatabzüge zweier Abhandlungen zugestellt und dadurch bekannt geworden, betitelt:

Three papers on logic, Proceedings of the American academy of arts and sciences, 1867, p. 250—298, und

Description of a notation for the logic of relatives, resulting from an amplification of the conceptions of Boole's calculus of logic, Memoirs of the American academy, Vol. IX, 1870, 62 Seiten, welche ich mich zu dem in vorgenannter Schrift von mir gegebenen Literaturverzeichniss hiemit nachzutragen beile.

Aus der ersteren von diesen beiden Abhandlungen (I. Paper: „On an improvement in Boole's calculus of logic“) ersehe ich, dass bezüglich einiger wesentlichen Punkte in meiner ersteren Schrift, nämlich in Hinsicht auf die Wahrnehmung der vorstehend angeführten doppelten Distributivität sowohl, als auch bezüglich der für logische Differenzen und Quotienten auf S. 29—31 von mir aufgestellten Ausdrücke, die Priorität Herrn Peirce zukommt.

E. Schröder.

unabsehbare Zeit hinaus im mathematischen Unterrichte weitaus der meisten Schulen alles beim alten bleiben soll. — Hinsichtlich der speciellen Eigenthümlichkeiten des ersten Theiles wird an dieser Stelle auf den von der Verlagshandlung versendeten Prospect verwiesen.

Waren.

V. Schlegel.

L. Koenigsberger: Vorlesungen über die Theorie der hyperelliptischen Integrale. (Teubner 1878.)

Nachdem ich in den letzten Jahren eine Reihe von Arbeiten über die Theorie der hyperelliptischen Integrale veröffentlicht habe, welche die behandelten Gegenstände theils nur kurz und mit Voraussetzung von Verallgemeinerungen früher gegebener Sätze darstellten, theils auch nur die Resultate einzelner Untersuchungen brachten, hielt ich es für zweckmässig, meine Vorlesungen über die Theorie der hyperelliptischen Integrale in zusammenhängender Darstellung zu veröffentlichen, um einerseits auch der Theorie der Integrale an sich und den mit ihnen zusammenhängenden Problemen der Integralrechnung einige Aufmerksamkeit zuzuwenden, andererseits aber auch dieselbe als Basis für eine grössere und eingehendere Bearbeitung der Theorie der hyperelliptischen Functionen benutzen zu können.

Ich will im Folgenden den Inhalt der einzelnen Vorlesungen skizziren und auf die über dieselben Gegenstände angestellten Untersuchungen anderer Mathematiker hinweisen.

Die gesammte Darstellung legt die von Riemann eingeführten Vorstellungen und allgemeinen Sätze aus der Theorie der Functionen, soweit sie in meiner Einleitung zu den „Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen“ auseinandergesetzt worden, zu Grunde und ist in ihrem ersten Theile nur eine unmittelbare Verallgemeinerung der dort für elliptische Integrale entwickelten Sätze.

Nachdem in der ersten Vorlesung gezeigt worden, dass, wenn $R(z)$ ein Polynom $2p + 1^{\text{ten}}$ oder $2p + 2^{\text{ten}}$ Grades bedeutet, sich jede wie $\sqrt{R(z)}$ verzweigte Function rational aus z und $\sqrt{R(z)}$ zusammensetzen lässt, wird die Frage aufgeworfen, ob man für eine zu bildende, in z und $\sqrt{R(z)}$ rationale Function die Unstetigkeiten, welche für gewisse Punkte nur auf einem, für andere auf beiden Blättern stattfinden können, in ihrer Anzahl und Lage beliebig an-

nehmen kann, und man findet, dass, wenn die Function in ρ Unstetigkeitspunkten in nur einem Blatte von der

$$m_1, m_2, \dots, m_\rho^{\text{ten}}$$

Ordnung, in σ Unstetigkeitspunkten auf dem einen Blatte von der

$$n_1, n_2, \dots, n_\sigma^{\text{ten}},$$

auf dem andern Blatte von der

$$v_1, v_2, \dots, v_\sigma^{\text{ten}}$$

Ordnung, ferner in den Verzweigungspunkten von der

$$\frac{k_1}{2}, \frac{k_2}{2}, \dots, \frac{k_{2p+1}}{2}, \frac{k_{2p+2}}{2}^{\text{ten}}$$

Ordnung unendlich sein soll, worin, wenn das Polynom $R(z)$ vom $2p+1^{\text{ten}}$ Grade ist, $k_{2p+2} = 0$ zu setzen ist, wenn die Function endlich der Bedingung unterworfen wird, dass sie im unendlich entfernten Punkte, wenn $R(z)$ vom $2p+2^{\text{ten}}$ Grade ist, auf dem einen Blatte vom τ_1^{ten} , auf dem andern von der τ_2^{ten} Ordnung unendlich wird, während sie, wenn $R(z)$ vom $2p+1^{\text{ten}}$ Grade ist, in dem unendlich entfernten Verzweigungspunkte von der $\frac{k}{2}^{\text{ten}}$ Ordnung unendlich werden soll, — als nothwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz einer in z und $\sqrt{R(z)}$ rationalen und in der verlangten Weise unstetigen Function die folgenden:

I. wenn $R(z)$ vom $2p+2^{\text{ten}}$ Grade,

$$\sum_1^\rho m_r + \sum_1^\sigma n_r + \sum_1^{2p+2} \left(\frac{k_r+1}{2} \right) + \tau_1 - p - 1 \geq 0,$$

II. wenn $R(z)$ vom $2p+1^{\text{ten}}$ Grade,

$$\sum_1^\rho m_r + \sum_1^\sigma n_r + \sum_1^{2p+1} \left(\frac{k_r+1}{2} \right) + \left. \begin{array}{l} \left(\frac{k}{2} \right) - p - 1 \\ \left(\frac{k}{2} \right) - p \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{wenn } k \text{ gerade,} \\ \text{wenn } k \text{ ungerade,} \end{array}$$

worin

$$\left(\frac{k_r+1}{2} \right)$$

die grösste in $\frac{k_r+1}{2}$ enthaltene ganze Zahl bedeutet.

Am Schlusse der Vorlesung wird die bekannte Umformung einer in ξ und $\sqrt{\varphi(\xi)}$ rationalen Function, in welcher $\varphi(\xi)$ ein Polynom vom $2p+2^{\text{ten}}$ Grade ist, in eine rationale Function von z und $\sqrt{R(z)}$ gegeben, worin $R(z)$ ein ganzes Polynom des $2p+1^{\text{ten}}$ Grades darstellt.

Die zweite Vorlesung beschäftigt sich unter Annahme eines unpaaren Grades $2p+1$ von $R(z)$ mit der Aufstellung der hyperelliptischen Integrale erster, zweiter und dritter Gattung nach den von Riemann für diese drei Gattungen gegebenen Definitionen, und man findet für die stets endlich bleibenden Integrale die schon von Jacobi hervorgehobenen Formen der Integrale erster Gattung

$$\int \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}, \int \frac{z dz}{\sqrt{R(z)}}, \dots \int \frac{z^{p-1} dz}{\sqrt{R(z)}},$$

für das im Punkte z_1 , $\varepsilon_1 R(z_1)^{\frac{1}{2}}$, worin ε_1 die positive oder negative Einheit bedeutet, und nur in diesem algebraisch von der ersten Ordnung unendlich werdende Integral zweiter Gattung

$$E(z) = M \int \left[\frac{1}{(z-z_1)^2} + \frac{\frac{R'(z_1)}{2\varepsilon_1 R(z_1)^{\frac{1}{2}}}(z-z_1) + \varepsilon_1 R(z_1)^{\frac{1}{2}}}{(z-z_1)^2 \sqrt{R(z)}} \right] dz + J(z),$$

worin M eine willkürliche Constante, und $J(z)$ das allgemeine hyperelliptische Integral erster Gattung bedeutet; endlich stellt sich das Integral dritter Gattung, welches für zwei beliebig gewählte Punkte der Fläche z_1 und z_2 logarithmisch unendlich wird und zwar wie die Unstetigkeitsfunctionen

$$A_1 \log(z-z_1) \text{ und } -A_1 \log(z-z_2),$$

in der Form dar

$$\Pi(z) = M \int \left[\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)} + \frac{\frac{\varepsilon_2 R(z_2)^{\frac{1}{2}}}{z_2-z_1}(z-z_1) + \frac{\varepsilon_1 R(z_1)^{\frac{1}{2}}}{z_1-z_2}(z-z_2)}{(z-z_1)(z-z_2)\sqrt{R(z)}} \right] dz + J(z)$$

oder

$$\Pi(z) = M \int \left[\frac{R(z)^{\frac{1}{2}} + \varepsilon_1 R(z_1)^{\frac{1}{2}}}{z-z_1} - \frac{R(z)^{\frac{1}{2}} + \varepsilon_2 R(z_2)^{\frac{1}{2}}}{z-z_2} \right] \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} + J(z),$$

und das specielle Integral dritter Gattung, in welchem

$$M = \frac{z_1 - z_2}{2},$$

oder in welchem die Coefficienten der logarithmischen Glieder die positive oder die negative Einheit sind, wird das hyperelliptische Hauptintegral dritter Gattung genannt.

Die Form des Integrals zeigt unmittelbar, dass, wie Riemann für alle Abel'schen Integrale hervorhebt, und Weierstrass schon früher für die hyperelliptischen Integrale ausgesprochen, dass sich das allgemeine hyperelliptische Integral zweiter Gattung mit dem Discontinuitätspunkte erster Ordnung z_1 von einem Integrale erster

Gattung abgesehen als das Product einer Constanten in den nach z_1 genommenen Differentialquotienten eines hyperelliptischen Hauptintegrals dritter Gattung darstellen lässt, dessen zweiter logarithmischer Unstetigkeitspunkt ein völlig willkürlicher ist.

Aus diesen Integralen der drei Gattungen wird in der dritten Vorlesung die analytische Form desjenigen hyperelliptischen Integrals hergeleitet, welches in den ν Punkten $z_1, z_2, \dots, z_\nu$ und zwar in z_α wie

$A_\alpha \log(z - z_\alpha) + B_\alpha(z - z_\alpha)^{-1} + C_\alpha(z - z_\alpha)^{-2} + \dots + K_\alpha(z - z_\alpha)^{-k_\alpha}$ unendlich wird, wobei die zur Existenz eines hyperelliptischen Integrals nothwendige Bedingung, wie sie Riemann für alle Abel'schen Integrale gibt,

$$A_1 + A_2 + \dots + A_\nu = 0$$

vorausgesetzt wird; es bleiben in dem aus hyperelliptischen Integralen dritter Gattung und deren nach den Unstetigkeitspunkten genommenen Differentialquotienten der verschiedenen Ordnungen noch die Coefficienten der oben aufgestellten Fundamentalintegrale erster Gattung unbestimmt, und es wird gezeigt, dass man diese Coefficienten so bestimmen kann, dass das hyperelliptische Integral gegebene reelle Theile der $2p$ Periodicitätsmoduln oder gegebene p Periodicitätsmoduln an den a - oder an den b -Querschnitten besitzt; zugleich folgt aber auch, dass jede andere Function, welche alle diese Eigenschaften, welche die Unstetigkeitswerthe und Periodicitätsmoduln betreffen, mit dem hyperelliptischen Integrale gemein hat, sich von eben diesem Integrale nur um eine additive Constante unterscheiden kann. Dieser Satz ist für die vorgelegte Fläche die Darstellung und wirkliche Ausführung des von Riemann in die Functionentheorie eingeführten Dirichlet'schen Principis.

Nachdem noch die Form der in den Verzweigungspunkten algebraisch und logarithmisch unendlich werdenden Integrale aufgestellt worden, wird noch eine in dem oben gegebenen Beweise des Dirichlet'schen Principis gebliebene Lücke ausgefüllt, nämlich der Nachweis des Satzes, dass die Determinante des zur Bestimmung der Coefficienten der ersten Integrale aufgestellten linearen Gleichungssystems nicht verschwinden kann, und zwar wird, wie Riemann ebenfalls für alle Abel'schen Integrale nachgewiesen und Neumann für die hyperelliptischen Integrale ausgeführt hat, gezeigt, dass, wenn die Periodicitätsmoduln eines hyperelliptischen Integrals erster Gattung

$$\int \frac{C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \dots + C_{p-1} z^{p-1}}{\sqrt{R(z)}} dz$$

an den Querschnitten a_k in bestimmter Ueberschreitungsrichtung mit $\alpha_k + \gamma_k i$, an den Querschnitten b_k mit $\beta_k + \delta_k i$ bezeichnet werden, die Ungleichheit besteht

$$\sum_1^p (\alpha_r \delta_r - \beta_r \gamma_r) > 0.$$

Endlich werden in dieser Vorlesung noch die Periodicitätsmoduln durch Integrale, welche zwischen den Verzweigungspunkten auf der einfach zusammenhängenden Riemann'schen Fläche oder gradlinig zwischen diesen verlaufen, ausgedrückt, wie es zuerst von Prym in seiner „Theorie der Functionen in einer zweiblättrigen Fläche“ geschehen.

Die vierte Vorlesung beschäftigt sich mit der Reduction der allgemeinen hyperelliptischen Integrale auf drei Arten von Normalintegralen nach der von Weierstrass für elliptische Integrale in seinen Vorlesungen angegebenen Methode und führt, wenn $z_1, z_2, \dots, z_n$ die Unstetigkeitspunkte der Function $F(z)$ bedeuten, zu dem Resultate

$$\begin{aligned} & \int \frac{F(z) dz}{\sqrt{R(z)}} \\ &= C_1 \int \frac{\sqrt{R(z_1)} dz}{(z-z_1)\sqrt{R(z)}} + C_2 \int \frac{\sqrt{R(z_2)} dz}{(z-z_2)\sqrt{R(z)}} + \dots + C_n \int \frac{\sqrt{R(z_n)} dz}{(z-z_n)\sqrt{R(z)}} \\ &+ l^{(0)} \int \frac{z^{2p-1} dz}{\sqrt{R(z)}} + l^{(1)} \int \frac{z^{2p-2} dz}{\sqrt{R(z)}} + \dots + l^{(p-1)} \int \frac{z^p dz}{\sqrt{R(z)}} \\ &+ k^{(p)} \int \frac{z^{p-1} dz}{\sqrt{R(z)}} + k^{(p+1)} \int \frac{z^{p-2} dz}{\sqrt{R(z)}} + \dots + k^{(2p-1)} \int \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} \\ &+ f(z) \sqrt{R(z)}, \end{aligned}$$

worin

$$\int \frac{z^{p-\alpha} dz}{\sqrt{R(z)}}$$

ein Integral erster Gattung,

$$\int \frac{z^{p+\alpha} dz}{\sqrt{R(z)}}$$

ein im unendlich entfernten Verzweigungspunkte von der $2\alpha + 1$ ten Ordnung unendlich werdendes Integral, endlich

$$\int \frac{dz}{(z-z_0)\sqrt{R(z)}}$$

ein in $z = z_0$ und zwar auf beiden Blättern logarithmisch unendlich werdendes Integral bedeutet; die Coefficienten der obigen Normalintegrale sind mit Anwendung des bekannten Zeichens für den Coefficienten einer bestimmten Potenz einer Reihenentwicklung durch die Ausdrücke bestimmt:

$$\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \right]_{(t-z_0)^{-1}} = C_\alpha$$

$$\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \int_{z_\alpha} \frac{F_r(t) dt}{\sqrt{R(t)}} \right]_{(t-z_\alpha)^{-1}} = l_\alpha^{(r)}, \quad \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \int_{\infty} \frac{F_r(t) dt}{\sqrt{R(t)}} \right]_{t^{-1}} = l_0^{(r)},$$

worin $r = 0, 1, \dots, p-1$,

$$\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \int_{z_\alpha} \frac{F_r(t) dt}{\sqrt{R(t)}} \right]_{(t-z_\alpha)^{-1}} = k_\alpha^{(r)}, \quad \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \int_{\infty} \frac{F_r(t) dt}{\sqrt{R(t)}} \right]_{t^{-1}} = k_0^{(r)},$$

wenn $r = p, p+1, \dots, 2p-1$, ferner

$$\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \int_{z_\alpha} \frac{dt}{(t-z)\sqrt{R(t)}} \right]_{(t-z_\alpha)^{-1}} = f_\alpha(z), \quad \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \int_{\infty} \frac{dt}{(t-z)\sqrt{R(t)}} \right]_{t^{-1}} = f_0(z),$$

wenn

$$l_1^{(r)} + l_2^{(r)} + \dots + l_n^{(r)} - l_0^{(r)} = l^{(r)}$$

$$k_1^{(r)} + k_2^{(r)} + \dots + k_n^{(r)} - k_0^{(r)} = k^{(r)}$$

$$f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z) - f_0(z) = f(z)$$

gesetzt wird, und

$$R(z) = A_0 z^{2p+1} + B_0 z^{2p} + B_1 z^{2p-1} + \dots + B_{2p-1} z + B_{2p},$$

$$F_r(t) = \frac{2p-2r-1}{2} A t^r + \frac{2p-2r}{2} B_0 t^{r-1} + \frac{2p-2r+1}{2} B_1 t^{r-2} + \dots \\ + \frac{2p-r-2}{2} B_{r-2} t + \frac{2p-r-1}{2} B_{r-1}$$

ist.

Eine genauere Discussion der Coefficienten der Normalintegrale führt zu dem Resultat, dass, wenn z_α einer der Verzweigungswerthe ist, $C_\alpha = 0$ wird, dass ferner das vorgelegte Integral gar kein Integral erster Gattung enthält, wenn $F(z)$ für keine Wurzel von $R(z)$ unendlich wird, in seinen Discontinuitätspunkten von der ersten Ordnung unendlich gross und zu gleicher Zeit echt gebrochen ist, dass ferner die in den Verzweigungswerthen algebraisch unendlich werdenden in der obigen Reductionsformel vorkommenden Normal-

integrale fehlen, wenn $F(z)$ für keine Lösung von $R(z)$ unendlich wird, für seine Discontinuitätspunkte von der ersten Ordnung unendlich gross, und der Grad des Zählers kleiner ist als der um p Einheiten vermehrte Grad des Nenners, dass endlich $f(z)$ eine rationale Function von z und z_α darstellt, welche verschwindet, wenn $F(z)$ in z_α von der ersten Ordnung unendlich wird, während die rationale Function $f_0(z)$ Null wird, wenn der Grad des Zählers nicht mindestens den des Nenners um die Zahl $2p$ übertrifft.

Endlich wird noch auf Grund dieser Reductionsformel eine für alle hyperelliptischen Integrale geltende Beziehung abgeleitet, die von Hermite und Thomae für die elliptischen Integrale erkannt worden, wonach, wenn

$$\begin{aligned} \int \frac{z^n dz}{\sqrt{R(z)}} = & l_n^{(0)} \int \frac{z^{2p-1} dz}{\sqrt{R(z)}} + l_n^{(1)} \int \frac{z^{2p-2} dz}{\sqrt{R(z)}} + \dots + l_n^{(p-1)} \int \frac{z^p dz}{\sqrt{R(z)}} \\ & + k_n^{(p)} \int \frac{z^{p-1} dz}{\sqrt{R(z)}} + k_n^{(p+1)} \int \frac{z^{p-2} dz}{\sqrt{R(z)}} + \dots + k_n^{(2p-1)} \int \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} \\ & + f_n(z) \sqrt{R(z)} \end{aligned}$$

gesetzt wird, zwischen den Coefficienten l und k dieser Reductionsformel und den Coefficienten der um den unendlich entfernten Punkt gültigen Reihenentwicklung bestimmter Integrale die Beziehung besteht: wenn $r = 0, 1, 2, \dots, p-1$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_r(t) dt}{\sqrt{R(t)}} = & -(t^{r-2p} + m_1 t^{r-2p-1} + \dots + m_{r-1} t^{-2p}) \sqrt{R(t)} \\ & - \sqrt{R(t)} \sum_{\nu=0}^{\infty} l_{2p+\nu}^{(r)} t^{-2p-\nu-1} \end{aligned}$$

und, wenn $r = p, p+1, \dots, 2p-1$,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_r(t) dt}{\sqrt{R(t)}} = & -(n_0 t^{r-2p} + n_1 t^{r-2p-1} + \dots + n_{r-1} t^{-2p}) \sqrt{R(t)} \\ & - \sqrt{R(t)} \sum_{\nu=0}^{\infty} k_{2p+\nu}^{(r)} t^{-2p-\nu-1}. \end{aligned}$$

Am Schlusse der Vorlesung wird das hyperelliptische Integral durch die lineare Transformation

$$\xi = \frac{z - \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2}$$

in die Form

$$\int F(\xi, \sqrt{\xi(1-\xi)(1-x_1^2\xi)(1-x_2^2\xi) \dots (1-x_{2p-1}^2\xi)}) d\xi$$

umgesetzt.

Die von Legendre aufgestellte Beziehung zwischen den Periodicitätsmoduln der elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung wurde bekanntlich von Weierstrass für alle hyperelliptischen Integrale erweitert, und Riemann führte zur Herleitung einer Beziehung für die Perioden der Abel'schen Integrale erster Gattung die Methode der Integration von

$$\int w dw'$$

ein, worin w und w' Abel'sche Integrale erster Gattung bedeuten, und die Integration über die gesammte Begränzung der Riemann'schen Fläche auszuführen ist; Clebsch und Gordan dehnen diese Methode auf zwei Integrale dritter Gattung aus, um unter anderem den Satz von der Vertauschung der Parameter und Unstetigkeitswerthe herzuleiten. In der fünften Vorlesung werden zwei allgemeine hyperelliptische Integrale

$$J(z, z_\alpha) \text{ und } J(z, \xi_\alpha)$$

zu Grunde gelegt, von denen das erste in den Punkten

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\mu, z_1, z_2, \dots, z_m, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2p+1}, \infty$$

unendlich werden soll, wie die Functionen

$$\begin{aligned} & \mathfrak{A}_q \log(z - \beta_q) + \mathfrak{B}_q (z - \beta_q)^{-1} + \mathfrak{C}_q (z - \beta_q)^{-2} + \dots + \mathfrak{R}_q (z - \beta_q)^{-r_q} \\ & A_q \log(z - z_q) + B_q (z - z_q)^{-1} + C_q (z - z_q)^{-2} + \dots + K_q (z - z_q)^{-k_q} \\ & a_q \log(z - \alpha_q)^{\frac{1}{2}} + b_q (z - \alpha_q)^{-\frac{1}{2}} + c_q (z - \alpha_q)^{-\frac{3}{2}} + \dots + h_q (z - \alpha_q)^{-\frac{r_q}{2}} \\ & M_0 \log z^{\frac{1}{2}} + M_1 z^{\frac{1}{2}} + M_2 z^{\frac{3}{2}} + \dots + M_\delta z^{\frac{\delta}{2}}, \end{aligned}$$

das zweite in den Punkten

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\mu, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2p+1}, \infty$$

wie die Functionen

$$\begin{aligned} & \mathfrak{A}'_q \log(z - \beta_q) + \mathfrak{B}'_q (z - \beta_q)^{-1} + \mathfrak{C}'_q (z - \beta_q)^{-2} + \dots + \mathfrak{R}'_q (z - \beta_q)^{-r'_q} \\ & A'_q \log(z - \xi_q) + B'_q (z - \xi_q)^{-1} + C'_q (z - \xi_q)^{-2} + \dots + K'_q (z - \xi_q)^{-k'_q} \\ & a'_q \log(z - \alpha_q)^{\frac{1}{2}} + b'_q (z - \alpha_q)^{-\frac{1}{2}} + c'_q (z - \alpha_q)^{-\frac{3}{2}} + \dots + h'_q (z - \alpha_q)^{-\frac{r'_q}{2}} \\ & M'_0 \log z^{\frac{1}{2}} + M'_1 z^{\frac{1}{2}} + M'_2 z^{\frac{3}{2}} + \dots + M'_\delta z^{\frac{\delta}{2}}, \end{aligned}$$

und das Integral

$$\int J(z, z_\alpha) dJ(z, \xi_\alpha)$$

ausgedehnt über die gesammte Begränzung der einfach zusammenhängenden Fläche, welche aus der durch die bekannten Querschnitte

$$a_1, a_2, \dots, a_p, b_1, b_2, \dots, b_p, c_1, c_2, \dots, c_{p-1}$$

zerlegten Riemann'schen Fläche von $\sqrt{R(z)}$ durch neue

$$\mu + m + n + 2p + 2$$

Querschnitte entsteht, welche jeden der die Punkte

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\mu, z_1, z_2, \dots, z_m, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$$

umschliessenden unendlich kleinen einfachen Kreise und jeden der die Punkte

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2p+1}, \infty$$

umgebenden unendlich kleinen Doppelkreise mit demselben Punkte A der früher erhaltenen Begränzung verbinden.

Man findet, dass, wenn das Resultat der Integration ein endliches sein soll, $J(z, z_\alpha)$ in β_ϱ nur algebraisch unendlich werden darf; nimmt man sodann die Entwicklung der Function $J(z, z_\alpha)$ in der Nähe der in Betracht kommenden singulären Punkte in der Form an

$$\mathfrak{A}_\varrho \log(z - \beta_\varrho) + \dots + \mathfrak{R}_\varrho (z - \beta_\varrho)^{-1_\varrho} + m_0^{(\varrho)} + m_1^{(\varrho)} (z - \beta_\varrho) + \dots \\ + m_{r_\varrho}^{(\varrho)} (z - \beta_\varrho)^{r_\varrho} + \dots$$

$$A_\varrho \log(z - z_\varrho) + \dots + K_\varrho (z - z_\varrho)^{-1_\varrho} + \dots$$

$$p_0^{(\varrho)} + p_1^{(\varrho)} (z - \xi_\varrho) + p_2^{(\varrho)} (z - \xi_\varrho)^2 + \dots + p_{k_\varrho}^{(\varrho)} (z - \xi_\varrho)^{k_\varrho} + \dots$$

$$a_\varrho \log(z - \alpha_\varrho)^{\frac{1}{2}} + \dots + h_\varrho (z - \alpha_\varrho)^{-\frac{\lambda_\varrho}{2}} + \mu_0^{(\varrho)} + \mu_1^{(\varrho)} (z - \alpha_\varrho)^{\frac{1}{2}} + \dots \\ + \mu_{\lambda_\varrho}^{(\varrho)} (z - \alpha_\varrho)^{\frac{\lambda_\varrho}{2}} + \dots$$

$$M_0 \log z^{\frac{1}{2}} + \dots + M_{\delta} z^{\frac{\delta}{2}} + P_0 + P_1 z^{-\frac{1}{2}} + \dots + P_{\delta'} z^{-\frac{\delta'}{2}} + \dots,$$

die von $J(z, \xi_\alpha)$ in der Form

$$\mathfrak{A}'_\varrho \log(z - \beta_\varrho) + \dots + \mathfrak{R}'_\varrho (z - \beta_\varrho)^{-1'_\varrho} + n_0^{(\varrho)} + n_1^{(\varrho)} (z - \beta_\varrho) + \dots \\ + n_{r'_\varrho}^{(\varrho)} (z - \beta_\varrho)^{r'_\varrho} + \dots$$

$$\pi_0^{(\varrho)} + \pi_1^{(\varrho)} (z - z_\varrho) + \pi_2^{(\varrho)} (z - z_\varrho)^2 + \dots + \pi_{k_\varrho}^{(\varrho)} (z - z_\varrho)^{k_\varrho} + \dots$$

$$A'_\varrho \log(z - \xi_\varrho) + \dots + K'_\varrho (z - \xi_\varrho)^{-k'_\varrho}$$

$$a'_\varrho \log(z - \alpha_\varrho)^{\frac{1}{2}} + \dots + h'_\varrho (z - \alpha_\varrho)^{-\frac{\lambda'_\varrho}{2}} + v_0^{(\varrho)} + v_1^{(\varrho)} (z - \alpha_\varrho)^{\frac{1}{2}} + \dots \\ + v_{\lambda'_\varrho}^{(\varrho)} (z - \alpha_\varrho)^{\frac{\lambda'_\varrho}{2}} + \dots$$

$$M'_0 \log z^{\frac{1}{2}} + \dots + M'_{\delta'} z^{\frac{\delta'}{2}} + P'_0 + P'_1 z^{-\frac{1}{2}} + \dots + P'_{\delta'} z^{-\frac{\delta'}{2}} + \dots,$$

und bezeichnet die Stetigkeitssprünge von

$J(z, z_\alpha)$ an a_k mit J_{a_k} , an b_k mit J_{b_k} ,

von

$J(z, \xi_\alpha)$ an a_k mit I_{a_k} , an b_k mit I_{b_k} ,

so erhält man die nachfolgende allgemeine Periodenrelation

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \sum_1^p (J_{a_v} I_{b_v} - J_{b_v} I_{a_v}) &= - \sum_1^\mu [n_1^{(\varphi)} \mathfrak{B}_\varphi + 2n_2^{(\varphi)} \mathfrak{C}_\varphi + \dots + \mathfrak{k}_\varphi n_{\mathfrak{k}_\varphi}^{(\varphi)} \mathfrak{R}_\varphi \\ &\quad + m_0^{(\varphi)} \mathfrak{A}'_\varphi - m_1^{(\varphi)} \mathfrak{B}'_\varphi - 2m_2^{(\varphi)} \mathfrak{C}'_\varphi - \dots - \mathfrak{k}'_\varphi m_{\mathfrak{k}'_\varphi}^{(\varphi)} \mathfrak{R}'_\varphi] \\ &\quad - \sum_1^n [p_0^{(\varphi)} A'_\varphi - p_1^{(\varphi)} B'_\varphi - 2p_2^{(\varphi)} C'_\varphi - \dots - k'_\varphi p_{k'_\varphi}^{(\varphi)} K'_\varphi] \\ &\quad - \sum_1^m [\pi_1^{(\varphi)} B_\varphi + 2\pi_2^{(\varphi)} C_\varphi + \dots + k_\varphi \pi_{k_\varphi}^{(\varphi)} K_\varphi] + \sum_1^m A_\varphi \int_A^{z_\varphi} dJ(z, \xi_\alpha) \\ &\quad - \sum_1^{2p+1} [b_\varphi v_1^{(\varphi)} + 2c_\varphi v_2^{(\varphi)} + \dots + \lambda_\varphi h_\varphi v_{\lambda_\varphi}^{(\varphi)} \\ &\quad \quad + a'_\varphi \mu_0^{(\varphi)} - b'_\varphi \mu_1^{(\varphi)} - 2c'_\varphi \mu_2^{(\varphi)} - \dots - \lambda'_\varphi h'_\varphi \mu_{\lambda'_\varphi}^{(\varphi)}] \\ &\quad + \sum_1^{2p+1} a_\varphi \int_A^{\alpha_\varphi} dJ(z, \xi_\alpha) - 2\pi i \sum_1^{2p+1} a'_\varphi (A_1 + A_2 + \dots + A_m + a_1 + a_2 + \dots + a_{q-1}) \\ &\quad - [P_0 M'_0 + P_1 M'_1 + P_2 M'_2 + 3P_3 M'_3 + \dots \\ &\quad \quad + \delta' P_\delta M'_\delta - P'_1 M_1 - 2P'_2 M_2 - \dots - \delta P'_\delta M_\delta] \\ &\quad - 2\pi i M'_0 (A_1 + A_2 + \dots + A_m + a_1 + a_2 + \dots + a_{2p+1}) - M_0 \int_A^\infty dJ(z, \xi_\alpha), \end{aligned}$$

worin, wenn a_φ oder M_0 von Null verschieden,

$$a'_\varphi = b'_\varphi = \dots = h'_\varphi = 0 \quad \text{resp.} \quad M'_0 = M'_1 = \dots = M'_\delta = 0$$

anzunehmen sind.

Spezialisierungen der gefundenen Periodenrelation liefern den Satz, dass zwei Hauptintegrale dritter Gattung, bei denen die Grenzen des einen die Parameter des andern sind, eine nur von den Periodicitätsmoduln abhängige Differenz besitzen, und dass sich ein Hauptintegral, welches an den p Querschnitten $a_1, a_2, \dots, a_p$ den Periodicitätsmodul Null hat, nicht ändert, wenn die Grenzen mit den Unstetigkeitspunkten vertauscht werden, ein schon von Jacobi bewiesenes Theorem.

Für zwei Integrale erster Gattung

$$J^{(\alpha)}(z) = \int \frac{z^{p-\alpha-1} dz}{\sqrt{R(z)}}, \quad J^{(\beta)}(z) = \int \frac{z^{p-\beta-1} dz}{\sqrt{R(z)}}$$

folgt aus der obigen allgemeinen Beziehung die Periodenrelation

$$\sum_1^p (J_{a_v}^{(\alpha)} J_{b_v}^{(\beta)} - J_{b_v}^{(\alpha)} J_{a_v}^{(\beta)}) = 0,$$

und für Integrale erster und zweiter Gattung, wenn

$$E^{(\alpha)}(z) = \int \frac{z^{p+\alpha} dz}{\sqrt{R(z)}}$$

gesetzt wird, und die Entwicklung der Integrale $J^{(\beta)}(z)$ und $E^{(\alpha)}(z)$ in der Umgebung des unendlich entfernten Punktes in der Form angenommen wird

$$E^{(\alpha)}(z) = M_{2\alpha+1} z^{\frac{2\alpha+1}{2}} + M_{2\alpha-1} z^{\frac{2\alpha-1}{2}} + \dots + M_1 z^{\frac{1}{2}} + \dots$$

$$J^{(\beta)}(z) = P'_{2\beta+1} z^{\frac{-2\beta-1}{2}} + P'_{2\beta+3} z^{\frac{-2\beta-3}{2}} + \dots,$$

also, wenn

$$\frac{1}{\sqrt{R(z)}} = z^{-p-\frac{1}{2}} \{f_0 + f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2} + \dots\}$$

gesetzt wird,

$$M_{2\alpha+1} = \frac{2f_0}{2\alpha+1}, \quad M_{2\alpha-1} = \frac{2f_1}{2\alpha-1}, \quad M_{2\alpha-3} = \frac{2f_2}{2\alpha-3}, \dots$$

$$P'_{2\beta+1} = -\frac{2f_0}{2\beta+1}, \quad P'_{2\beta+3} = -\frac{2f_1}{2\beta+3}, \quad P'_{2\beta+5} = -\frac{2f_2}{2\beta+5}, \dots$$

ist, die Periodenbeziehung:

I. $\alpha \geq \beta$

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_1^p (E_{a_v}^{(\alpha)} J_{b_v}^{(\beta)} - E_{b_v}^{(\alpha)} J_{a_v}^{(\beta)})$$

$$= (2\beta+1)P'_{2\beta+1}M_{2\beta+1} + (2\beta+3)P'_{2\beta+3}M_{2\beta+3} + \dots + (2\alpha+1)P'_{2\alpha+1}M_{2\alpha+1}$$

und

II. $\alpha < \beta$

$$\sum_1^p (E_{a_v}^{(\alpha)} J_{b_v}^{(\beta)} - E_{b_v}^{(\alpha)} J_{a_v}^{(\beta)}) = 0.$$

Endlich wird noch der Werth derjenigen Determinante untersucht, welche aus sämtlichen Periodicitätsmoduln der $2p$ Integrale $J^{(\beta)}(z)$ und $E^{(\alpha)}(z)$ gebildet ist, und der später bei der Reduction

der hyperelliptischen Integrale auf niedere Transcendente zur Anwendung kommt. Dieser Werth ist zuerst von Fuchs für den Fall complexer Verzweigungswerthe von $\sqrt{R(z)}$ mit Hülfe der Differentialgleichungen, welchen die Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale genügen, hergeleitet worden, ich wähle hier einen andern Weg, indem ich zuerst zeige, dass die Determinante eine eindeutige Function der Verzweigungswerthe ist, und indem ich nachweise, dass sie nie verschwinden kann, folgt aus einem bekannten Satze der Functionentheorie, dass die Determinante eine constante, von den Verzweigungswerthen unabhängige Grösse ist. Der constante Werth selbst wird, wie auch Fuchs gethan, durch die einfachsten hyperelliptischen Integrale derselben Ordnung also durch die Integrale mit der Irrationalität

$$\sqrt{z^{2p+1} - 1}$$

bestimmt werden, und diese Bestimmung führe ich, um eine Anwendung der vorher entwickelten Periodenrelationen zu geben, mit Hülfe der früheren Formeln für die Verbindungen der Perioden der hyperelliptischen Integrale erster und zweiter Gattung aus; es ergibt sich das für reelle Verzweigungswerthe schon längst bekannte Resultat

$$\begin{vmatrix} J_{b_1}^{(0)} & J_{a_1}^{(0)} & J_{b_2}^{(0)} & J_{a_2}^{(0)} & \dots & J_{b_p}^{(0)} & J_{a_p}^{(0)} \\ J_{b_1}^{(1)} & J_{a_1}^{(1)} & J_{b_2}^{(1)} & J_{a_2}^{(1)} & \dots & J_{b_p}^{(1)} & J_{a_p}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ J_{b_1}^{(p-1)} & J_{a_1}^{(p-1)} & J_{b_2}^{(p-1)} & J_{a_2}^{(p-1)} & \dots & J_{b_p}^{(p-1)} & J_{a_p}^{(p-1)} \\ E_{b_1}^{(p)} & E_{a_1}^{(p)} & E_{b_2}^{(p)} & E_{a_2}^{(p)} & \dots & E_{b_p}^{(p)} & E_{a_p}^{(p)} \\ E_{b_1}^{(p+1)} & E_{a_1}^{(p+1)} & E_{b_2}^{(p+1)} & E_{a_2}^{(p+1)} & \dots & E_{b_p}^{(p+1)} & E_{a_p}^{(p+1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ E_{b_1}^{(2p-1)} & E_{a_1}^{(2p-1)} & E_{b_2}^{(2p-1)} & E_{a_2}^{(2p-1)} & \dots & E_{b_p}^{(2p-1)} & E_{a_p}^{(2p-1)} \end{vmatrix} = \frac{(-1)^{\frac{p}{2}} 2^{3p} \pi^p}{1 \cdot 3 \dots (2p-1)}.$$

Die sechste Vorlesung behandelt das Abel'sche Theorem der hyperelliptischen Integrale zunächst für Integrale erster und dritter Gattung und leitet hieraus mit Hülfe der in der dritten Vorlesung ausgeführten Bildungsweise des allgemeinen Integrales aus den Integralen dieser beiden Gattungen den Abel'schen Satz in der nachfolgenden Form ab: Bezeichnet

$$J(z, c_1, c_2, \dots, c_r)$$

ein hyperelliptisches Integral, welches in c_q unendlich wird wie

$A_q \log(z - c_q) + B_q(z - c_q)^{-1} + C_q(z - c_q)^{-2} + \dots + M_q(z - c_q)^{-m_q}$,
so wird sich die Summe von $2m$ solchen gleichartigen hyperelliptischen Integralen, deren obere Grenzen die Lösungen $z_1, z_2, \dots, z_{2m}$ der Gleichung

$$p^2 - q^2 R(z) = 0,$$

und deren untere Grenzen $z'_1, z'_2, \dots, z'_{2m}$ die Lösungen der Gleichung

$$p_1^2 - q_1^2 R(z) = 0$$

sind, worin p und p_1 beliebige ganze Polynome m^{ten} Grades, q und q_1 beliebige ganze Polynome höchstens vom $m - p - 1^{\text{ten}}$ Grade sind, durch den Ausdruck darstellen lassen

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^{2m} \int_{z'_\alpha}^{z_\alpha} dJ(z, c_1, c_2, \dots, c_r) = & \sum_q^r A_q \log \left\{ \frac{p(c_q) - q(c_q) \varepsilon_q \sqrt{R(c_q)}}{p_1(c_q) - q_1(c_q) \varepsilon_q \sqrt{R(c_q)}} \right\} \\ & - \sum_q^r B_q \frac{d}{dc_q} \log \left\{ \frac{p(c_q) - q(c_q) \varepsilon_q \sqrt{R(c_q)}}{p_1(c_q) - q_1(c_q) \varepsilon_q \sqrt{R(c_q)}} \right\} \\ & - \sum_q^r \frac{C_q}{1} \frac{d^2}{dc_q^2} \log \left\{ \frac{p(c_q) - q(c_q) \varepsilon_q \sqrt{R(c_q)}}{p_1(c_q) - q_1(c_q) \varepsilon_q \sqrt{R(c_q)}} \right\} \\ & - \dots - \sum_q^r \frac{M_q}{1 \cdot 2 \cdot \dots (m_q - 1)} \frac{d^{m_q}}{dc_q^{m_q}} \log \left\{ \frac{p(c_q) - q(c_q) \varepsilon_q \sqrt{R(c_q)}}{p_1(c_q) - q_1(c_q) \varepsilon_q \sqrt{R(c_q)}} \right\}, \end{aligned}$$

worin der Werth der zu den einzelnen z -Werthen gehörigen Irrationalität durch die Gleichung

$$\sqrt{R(z)} = \frac{p(z)}{q(z)}$$

bestimmt ist.

In anderer Form lässt sich dieses Resultat auch so aussprechen, dass sich $2m - p$ gleichartige hyperelliptische Integrale zu p eben solchen Integralen vereinigen lassen, deren Grenzen Lösungen von Gleichungen p^{ten} Grades sind, deren Coefficienten rational aus den $2m - p$ willkürlich angenommenen Grenzen und zugehörigen Irrationalitäten zusammengesetzt sind, und deren Irrationalitäten sich mit Hülfe der willkürlich angenommenen Grenzen und Irrationalitäten rational durch die entsprechende Gränze ausdrücken.

Schliesslich wird noch der Fall der gleichen Integralgränzen auf den früheren zurückgeführt.

Nachdem gezeigt worden, dass einer additiven Verbindung gleichartiger hyperelliptischer Integrale eine algebraische Beziehung

zwischen den oberen Grenzen dieser Integrale entsprechen kann, wird in der siebenten Vorlesung die Betrachtung auf die allgemeinsten algebraischen Beziehungen ausgedehnt, welche zwischen hyperelliptischen Integralen überhaupt bestehen können, sie mögen gleichartig oder ungleichartig sein, d. h. zu derselben oder verschiedenen Riemann'schen Flächen gehören, wenn auch zwischen den Grenzen dieser Integrale algebraische Beziehungen stattfinden sollen.

Es wird der Nachweis geführt, dass die allgemeinste Form einer algebraischen Beziehung zwischen n Integralen eine lineare Function dieser Integrale ist, deren Coefficienten constante Grössen sind, vermehrt um eine Grösse, welche von den Integralen frei ist, aber von den unabhängigen Variablen algebraisch abhängen wird, und diese lineare Beziehung wird nun der weiteren Untersuchung zu Grunde gelegt.

Durch Erweiterung einer von Abel in der Transformationstheorie der elliptischen Integrale angewandten Methode wird gezeigt, dass die Beziehungsgleichung

$$\begin{aligned}
 & \int^{z_{2p+1}^{(1)}} F_{2p+1}^{(1)}(z, \sqrt{R_{2p+1}^{(1)}(z)}) dz \\
 & + \int^{z_{2p+1}^{(2)}} F_{2p+1}^{(2)}(z, \sqrt{R_{2p+1}^{(2)}(z)}) dz + \dots \\
 & + \int^{z_{2p+1}^{(a)}} F_{2p+1}^{(a)}(z, \sqrt{R_{2p+1}^{(a)}(z)}) dz \\
 & + \int^{z_{2p-1}^{(1)}} F_{2p-1}^{(1)}(z, \sqrt{R_{2p-1}^{(1)}(z)}) dz \\
 & + \int^{z_{2p-1}^{(2)}} F_{2p-1}^{(2)}(z, \sqrt{R_{2p-1}^{(2)}(z)}) dz + \dots \\
 & + \int^{z_{2p-1}^{(b)}} F_{2p-1}^{(b)}(z, \sqrt{R_{2p-1}^{(b)}(z)}) dz \\
 & \dots \dots \dots \\
 & + \int^{z_3^{(1)}} F_3^{(1)}(z, \sqrt{R_3^{(1)}(z)}) dz \\
 & + \int^{z_3^{(2)}} F_3^{(2)}(z, \sqrt{R_3^{(2)}(z)}) dz + \dots \\
 & + \int^{z_3^{(r)}} F_3^{(r)}(z, \sqrt{R_3^{(r)}(z)}) dz \\
 & = u + A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2 + \dots + A_r \log v_r,
 \end{aligned}$$

in welcher

$$R_{2p+1}^{(q)}(z) = (z - \alpha_1^{(q)})(z - \alpha_2^{(q)}) \cdots (z - \alpha_{2p+1}^{(q)})$$

$$R_{2p-1}^{(q)}(z) = (z - \beta_1^{(q)})(z - \beta_2^{(q)}) \cdots (z - \beta_{2p-1}^{(q)})$$

ferner

$$F(z, \sqrt{R(z)})$$

eine rationale Function von z und $\sqrt{R(z)}$ bedeutet, endlich,

$$u, v_1, v_2, \dots, v_r$$

algebraische Functionen von

$$z_{2p+1}^{(1)} \cdots z_{2p+1}^{(a)}, \quad z_{2p-1}^{(1)} \cdots z_{2p-1}^{(b)}, \quad \dots \quad z_3^{(1)} \cdots z_3^{(r)}$$

vorstellen, reducirt werden kann auf die ihr völlig aequivalente

$$\begin{aligned} & \delta \int_{z_{2p+1}^{(1)}}^{z_{2p+1}^{(a)}} F_{2p+1}^{(1)}(z, \sqrt{R_{2p+1}^{(1)}(z)}) dz \\ &= - \sum_1^{p-h} \int_{\xi_{2p-2h+1}^{(a)}}^{\xi_{2p-2h+1}^{(g+1)}} F_{2p-2h+1}^{(g+1)}(z, \sqrt{R_{2p-2h+1}^{(g+1)}(z)}) dz - \dots \\ & \quad - \sum_1^{p-h} \int_{\xi_{2p-2h+1}^{(a)}}^{\xi_{2p-2h+1}^{(k)}} F_{2p-2h+1}^{(k)}(z, \sqrt{R_{2p-2h+1}^{(k)}(z)}) dz \\ & \quad \dots \dots \dots \\ & \quad - \sum_1^1 \int_{\xi_3^{(a)}}^{\xi_3^{(1)}} F_3^{(1)}(z, \sqrt{R_3^{(1)}(z)}) dz - \dots \\ & \quad - \sum_1^1 \int_{\xi_3^{(a)}}^{\xi_3^{(r)}} F_3^{(r)}(z, \sqrt{R_3^{(r)}(z)}) dz \\ & + U' + B_1' \log V_1' + B_2' \log V_2' + \dots + B_e' \log V_e', \end{aligned}$$

worin die zu je einer Summe gehörigen ξ -Werthe Lösungen von Gleichungen des durch die obere Gränze des Summationszeichens gegebenen Grades sind, deren Coefficienten rational aus den Grössen

$$z_{2p+1}^{(1)} \text{ und } \sqrt{R_{2p+1}^{(1)}(z_{2p+1}^{(1)})}$$

zusammengesetzt sind, und die Irrationalitäten sich mit Hülfe eben dieser Grössen rational durch die zugehörige ξ -Grösse ausdrücken lassen, während

$$U_1', V_1', V_2', \dots, V_e'$$

rationale Functionen eben dieser Grössen sind.

worin $m_1, m_2, \dots, m_r$ ganze Zahlen, $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{r-1}$ Constanten vorstellen, deren Bedeutung dort näher angegeben wird.

Endlich wird noch die Frage aufgeworfen, ob in algebraische Relationen zwischen hyperelliptischen Integralen auch jene eindeutigen Umkehrfunktionen der Integrale niederer Gattung, also die Exponentialfunctionen, die trigonometrischen und elliptischen Functionen eintreten können, und zwar wird diese Frage mit Hülfe eines allgemeinen von mir aufgestellten Satzes über Differentialgleichungen beantwortet, der für den vorliegenden Zweck specialisirt folgendermassen lautet: wenn zwischen den Integralen

$$Z \text{ und } Z_1, Z_2, \dots, Z_r$$

der irreductibeln Differentialgleichungen

$$f\left(x, z, \frac{dz}{dx}\right) = 0$$

und

$$\left(\frac{dz_1}{dx}\right)^{k_1} + \varphi_1(x, z_1)\left(\frac{dz_1}{dx}\right)^{k_1-1} + \dots + \varphi_{k_1-1}(x, z_1)\frac{dz_1}{dx} + \varphi_{k_1}(x, z_1) = 0$$

$$\left(\frac{dz_2}{dx}\right)^{k_2} + \psi_1(x, z_2)\left(\frac{dz_2}{dx}\right)^{k_2-1} + \dots + \psi_{k_2-1}(x, z_2)\frac{dz_2}{dx} + \psi_{k_2}(x, z_2) = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\left(\frac{dz_r}{dx}\right)^{k_r} + \chi_1(x, z_r)\left(\frac{dz_r}{dx}\right)^{k_r-1} + \dots + \chi_{k_r-1}(x, z_r)\frac{dz_r}{dx} + \chi_{k_r}(x, z_r) = 0,$$

ein algebraischer Zusammenhang stattfindet, und man setzt statt der Grössen $Z_1, Z_2, \dots, Z_r$ r beliebige andere Integrale der Differentialgleichungen, so wird die algebraische Beziehung noch fortbestehen, wenn für Z ein gewisses anderes Integral Z' der ersten Differentialgleichung gesetzt wird.

Die Anwendung dieses Satzes führt die oben aufgeworfene Frage auf die Untersuchung von Functionalgleichungen zurück, und liefert das Resultat, dass weder die Exponentialfunction noch die trigonometrischen und elliptischen Functionen in jenen algebraischen Beziehungen vorkommen können.

Mit den vorausgegangenen Untersuchungen sind nun die Mittel gegeben, um die Beantwortung der Fragen der Integralrechnung anzugreifen, welche die Reduction der hyperelliptischen Integrale einer gewissen Ordnung auf solche niederer Ordnung zum Gegenstande haben, und zwar liefert die achte Vorlesung die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen, unter denen ein hyperelliptisches Integral irgend welcher Ordnung auf algebraisch-logarithmische Functionen reducirbar ist, eine Frage, die für elliptische Integrale von

Tchebichef im Anschluss an die Untersuchungen von Abel, von Weierstrass mit Hülfe der Umkehrungsfunktionen behandelt worden ist.

Die Bedingungen dafür, dass das Integral

$$\int \frac{F(z) dz}{\sqrt{R(z)}}$$

auf algebraische Functionen reducirt ist, sind unter Benützung schon oben in diesem Referate erklärter Zeichen die folgenden:

$$\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \right]_{(t-z_1)^{-1}} = 0, \quad \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \right]_{(t-z_2)^{-1}} = 0, \quad \dots \quad \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \right]_{(t-z_n)^{-1}} = 0,$$

$$\sum_1^n \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \int_{z_\alpha} \frac{F_r(t) dt}{\sqrt{R(t)}} \right]_{(t-z_\alpha)^{-1}} - \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \int_{\infty} \frac{F_r(t) dt}{\sqrt{R(t)}} \right]_{t^{-1}} = 0,$$

worin $r = 0, 1, 2, \dots, 2p-1$ zu setzen ist; der algebraische Werth des hyperelliptischen Integrales ist dann durch den Ausdruck gegeben

$$\left\{ \sum_1^n \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \int_{z_\alpha} \frac{dt}{(t-z)\sqrt{R(t)}} \right]_{(t-z_\alpha)^{-1}} - \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \int_{\infty} \frac{dt}{(t-z)\sqrt{R(t)}} \right]_{t^{-1}} \right\} \sqrt{R(z)}.$$

Weit schwieriger ist die Frage nach der Reducirbarkeit auf Logarithmen, und eine genaue Untersuchung der nothwendigen und hinreichenden Bedingungen liefert das folgende Verfahren zur Beantwortung der Frage, ob ein hyperelliptisches Integral von der Form

$$\int \frac{F(z) dz}{\sqrt{R(z)}}$$

auf algebraisch-logarithmische Functionen reducirt ist.

Man bilde die Gleichung

$$T_1 \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \right]_{(t-z_1)^{-1}} + T_2 \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \right]_{(t-z_2)^{-1}} + \dots + T_n \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \right]_{(t-z_n)^{-1}} = 0,$$

und suche dieselbe durch Systeme von ganzen Zahlen $T_1, T_2, \dots, T_n$ zu befriedigen; mögen sich nun $n - k$ solcher Systeme finden lassen

$$\begin{array}{cccc} T_{11}, & T_{12}, & \dots & T_{1n}, \\ T_{21}, & T_{22}, & \dots & T_{2n}, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_{n-k1}, & T_{n-k2}, & \dots & T_{n-kn}, \end{array}$$

welche von einander unabhängig sind, und mögen sich aus diesen $n - k$ Gleichungen die Relationen ergeben

$$D \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \right]_{(t-z_{k+1})^{-1}} = \lambda_{11} \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \right]_{(t-z_1)^{-1}} + \dots + \lambda_{1k} \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \right]_{(t-z_k)^{-1}} \\
\vdots \\
D \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \right]_{(t-z_n)^{-1}} = \lambda_{n-k1} \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \right]_{(t-z_1)^{-1}} + \dots + \lambda_{n-kk} \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \right]_{(t-z_k)^{-1}},$$

so suche man den grössten gemeinsamen Theiler zwischen den Zahlen

$$D, \lambda_{1i}, \lambda_{2i}, \dots, \lambda_{n-ki},$$

worin i eine der Zahlen $1, 2, \dots, k$ bedeuten soll; sei derselbe δ_i , und werde

$$\frac{D}{\delta_i} = t_0^{(i)}, \quad \frac{\lambda_{1i}}{\delta_i} = t_1^{(i)}, \quad \frac{\lambda_{2i}}{\delta_i} = t_2^{(i)}, \quad \dots \quad \frac{\lambda_{n-ki}}{\delta_i} = t_{n-k}^{(i)}$$

gesetzt, so muss

$$t_0^{(i)} + t_1^{(i)} + \dots + t_{n-k}^{(i)} > p$$

sein, wenn $R(z)$ vom $2p + 1^{\text{ten}}$ Grade ist; lassen sich nun Gleichungen von der Form

$$P^{(1)2} - Q^{(1)2}R(z) = 0, \quad P^{(2)2} - Q^{(2)2}R(z) = 0, \quad \dots \quad P^{(k)2} - Q^{(k)2}R(z) = 0$$

finden, welche ausser den resp. Werthen

$$z_1, z_{k+1}, \dots, z_n$$

$$z_2, z_{k+1}, \dots, z_n$$

$$\vdots$$

$$z_k, z_{k+1}, \dots, z_n$$

mit der entsprechenden Vielfachheit

$$t_0^{(1)}, t_1^{(1)}, \dots, t_{n-k}^{(1)}$$

$$t_0^{(2)}, t_1^{(2)}, \dots, t_{n-k}^{(2)}$$

$$\vdots$$

$$t_0^{(k)}, t_1^{(k)}, \dots, t_{n-k}^{(k)}$$

nur noch die Verzweigungswerthe zu Lösungen haben, so bilde man die Summe

$$\frac{1}{t_0^{(1)}} \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \right]_{(t-z_1)^{-1}} \log \left(\frac{P^{(1)} - Q^{(1)}\sqrt{R(z)}}{P^{(1)} + Q^{(1)}\sqrt{R(z)}} \right) + \frac{1}{t_0^{(2)}} \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \right]_{(t-z_2)^{-1}} \log \left(\frac{P^{(2)} - Q^{(2)}\sqrt{R(z)}}{P^{(2)} + Q^{(2)}\sqrt{R(z)}} \right) \\
+ \dots + \frac{1}{t_0^{(k)}} \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \right]_{(t-z_k)^{-1}} \log \left(\frac{P^{(k)} - Q^{(k)}\sqrt{R(z)}}{P^{(k)} + Q^{(k)}\sqrt{R(z)}} \right) = L(z),$$

dann wird $L(z)$ das Aggregat der im reducibaren hyperelliptischen Integrale vorkommenden logarithmischen Glieder darstellen; setzt man sodann

$$\frac{dL(z)}{dz} = \sum_1^k \left\{ \frac{1}{t_0^{(i)}} \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \right]_{(t-z_0)^{-1}} \frac{2R(z) \left[Q^{(i)} \frac{dP^{(i)}(z)}{dz} - P^{(i)} \frac{dQ^{(i)}(z)}{dz} \right] - P^{(i)} Q^{(i)} \frac{dR(z)}{dz}}{P^{(i)^2} - Q^{(i)^2} R(z)} \cdot \frac{1}{\sqrt{R(z)}} \right\} \\ = \frac{\varphi(z)}{\sqrt{R(z)}},$$

so müssen ferner mit Zugrundelegung der früher eingeführten Bezeichnungen noch die Bedingungen befriedigt sein

$$\sum_1^n \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \int_{z_\alpha}^{\infty} \frac{F_r(t) dt}{\sqrt{R(t)}} \right]_{(t-z_\alpha)^{-1}} - \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \int_{\infty}^{\infty} \frac{F_r(t) dt}{\sqrt{R(t)}} \right]_{r-1} = 0$$

für die Werthe 0, 1, 2, . . . p-1, und

$$\sum_1^n \left[\frac{F(t) - \varphi(t)}{\sqrt{R(t)}} \int_{z_\alpha}^{\infty} \frac{F_r(t) dt}{\sqrt{R(t)}} \right]_{(t-z_\alpha)^{-1}} - \left[\frac{F(t) - \varphi(t)}{\sqrt{R(t)}} \int_{\infty}^{\infty} \frac{F_r(t) dt}{\sqrt{R(t)}} \right]_{r-1} = 0$$

für die Werthe $r = p, p+1, \dots, 2p-1$; sind alle diese Bedingungen erfüllt, so ist der Werth des algebraischen Theiles jenes hyperelliptischen Integrales

$$\left\{ \sum_1^n \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \int_{z_\alpha}^{\infty} \frac{dt}{(t-z)\sqrt{R(t)}} \right]_{(t-z_\alpha)^{-1}} - \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \int_{\infty}^{\infty} \frac{dt}{(t-z)\sqrt{R(t)}} \right]_{r-1} \right\} \sqrt{R(z)},$$

welcher mit $L(z)$ vereinigt die algebraisch-logarithmische Darstellung des gegebenen Integrales liefert.

Die Frage, welche hyperelliptische Integrale auf elliptische oder auf hyperelliptische niederer Ordnung reducirbar sind, ist in diesen Vorlesungen nicht behandelt; der vollständigen Beantwortung dieser Frage stehen noch grosse Schwierigkeiten im Wege, die sich möglicherweise nur mit Hülfe der Umkehrungsfunktionen der hyperelliptischen Integrale oder der ϑ -Functionen mit mehreren Variablen werden überwinden lassen.

Endlich behandelt die neunte Vorlesung das Multiplications-theorem — nichts anderes als das Abel'sche Theorem für gleiche Integrale und nur nach dem oben behandelten Transformationsprincip in verschiedenen Formen dargestellt — und das Divisionsproblem, das bereits von Hermite für hyperelliptische Integrale erster Ordnung und von Clebsch und Gordan für alle Abel'schen Integrale erledigt worden ist; ich beweise durch Verallgemeinerung der von Hermite befolgten Methode den bekannten Satz, dass die Grössen

$$x_1, x_2, \dots, x_p,$$

welche der Gleichung

$$\int \frac{f(x) dx}{\sqrt{R(x)}} + \dots + \int \frac{f(x) dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{1}{n} \int \frac{f(x) dx}{\sqrt{R(x)}} + \dots + \frac{1}{n} \int \frac{f(x) dx}{\sqrt{R(x)}}$$

genügen, die Lösungen einer Gleichung p^{ten} Grades sind, deren Coefficienten sich als lineare Functionen von n^{ten} Wurzeln aus Functionen darstellen lassen, welche rational aus

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p, \sqrt{R(\xi_1)}, \sqrt{R(\xi_2)}, \dots, \sqrt{R(\xi_p)}$$

zusammengesetzt sind.

Am Schlusse dieser letzten Vorlesung wird gezeigt, dass das Theilungsproblem der Perioden, welches beim allgemeinen Divisionsproblem als gelöst betrachtet wird, sich auf die Theilung derselben durch eine einfache Primzahl zurückführen lässt, und dass für diesen Fall das Problem auf die Auflösung einer Gleichung

$$\frac{n^{2p} - 1}{n - 1}^{\text{ten}}$$

Grades zurückführbar ist, aus deren Lösungen sich durch Wurzelziehen die Coefficienten der verschiedenen Gleichungen p^{ten} Grades bilden lassen, deren Wurzeln die Grössen

$$\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_p$$

sind, welche der Gleichung

$$m \left(\frac{\mu_1}{n} J_1 + \frac{\mu_2}{n} J_2 + \dots + \frac{\mu_{k-1}}{n} J_{k-1} + \frac{1}{n} J_k \right) \\ = \int \frac{f(x) dx}{\sqrt{R(x)}} + \int \frac{f(x) dx}{\sqrt{R(x)}} + \dots + \int \frac{f(x) dx}{\sqrt{R(x)}}$$

genügen, in welcher

$$J_1, J_2, \dots$$

die Periodicitätsmoduln, k jeden Werth von 1 bis $2p$, die Grössen $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{k-1}$ alle Zahlen $0, 1, 2, \dots, (n-1)$ vorstellen, und m aus der Werthereihe $1, 2, \dots, n-1$ zu nehmen ist.

Die weiteren wesentlichen Punkte, welche die Theorie der allgemeinen hyperelliptischen Integrale und der Periodicitätsmoduln derselben betreffen, gehören naturgemäss in die Theorie der hyperelliptischen Functionen, welche sich bekanntlich als Integrale eines Systems von hyperelliptischen Differentialgleichungen ergeben und zu noch weit ausgedehnteren und für die Algebra und Zahlentheorie ebenso wichtigen Untersuchungen führen als es bei den elliptischen Functionen der Fall gewesen.

Wien.

Leo Koenigsberger.

Mathematische Modelle in Gips, nach den im mathematischen Institut der k. technischen Hochschule zu München ausgeführten Originalen.

Mit begleitendem Text. Verlag von L. Brill in Darmstadt.

Serie I. Ausgeführt unter Leitung von Prof. Brill.

Serie II. Ausgeführt unter Leitung der Professoren Brill und Klein.

Diese von Studirenden der Mathematik angefertigten Modelle (die Autoren zugleich auch der beigefügten erläuternden Abhandlungen sind: J. Bacharach, A. v. Braunmühl, W. Dyck, K. Rohn, L. Schleiermacher) verdanken ihre Entstehung dem Wunsche, die Theilnehmer an den mathematischen Seminarien zu möglichst vollständiger, auch numerischer Durchführung eines und des anderen der behandelten Probleme anzuregen und so rückwirkend ein eingehenderes Studium desselben überhaupt zu veranlassen. Die Aufgaben, an welche die Modelle anknüpfen, sind dem Lehrstoff verschiedener Vorlesungen entnommen, welche an der technischen Hochschule gehalten werden. Die Modelle erheben also nicht den Anspruch, etwas in sich Abgeschlossenes zu geben, noch wollen sie allen Anforderungen eines weiteren Gesichtskreises genügen. Bei dem fühlbaren Mangel jedoch an derartigen Anschauungsmitteln konnte gegen eine von Seiten des Verlegers angebotene Vervielfältigung und Verbreitung der Modelle nichts erinnert werden, zumal da dieselben auch in dieser Form wohl manches Neue und des Interesses Werthe bieten, wie denn die beigefügten Abhandlungen zum Theil wirklich selbständige Untersuchungen darstellen.

München, im Juni 1878.

A. Brill.

L. Koenigsberger: Reduction des Transformationsproblems der hyperelliptischen Integrale. (Clebsch's Annalen B. 13.)

In der im Journal für Mathematik B. 81. H. 3 veröffentlichten Arbeit „über die allgemeinsten Beziehungen zwischen hyperelliptischen Integralen“ zeigte ich, dass, wenn zwischen hyperelliptischen Integralen verschiedener Ordnung irgendeine in den Integralen lineare Relation mit constanten Coefficienten besteht (und diese ist nach dem von mir in demselben Journale B. 84. H. 4 bewiesenen allgemeinen Satze „über die algebraischen Beziehungen zwischen In-

tegralen verschiedener Differentialgleichungen der allgemeinsten algebraischen Relation zwischen jenen Integralen äquivalent), für je zwei solche in der angenommenen Beziehung vorkommende hyperelliptische Integrale

$$\int_{z_1}^z f(z, \sqrt{R(z)}) dz \quad \text{und} \quad \int_y^y F(y, \sqrt{R_1(y)}) dy,$$

in denen

$$\sqrt{R(z)} = \sqrt{(z-a_1)(z-a_2) \cdots (z-a_{2p+1})}$$

$$\sqrt{R_1(y)} = \sqrt{(y-\alpha_1)(y-\alpha_2) \cdots (y-\alpha_{2\sigma+1})}$$

ist, zwischen den Differentialen der zugehörigen hyperelliptischen Integrale erster Gattung die Relation stattfindet

$$\frac{dy_1}{\sqrt{R_1(y_1)}} + \frac{dy_2}{\sqrt{R_1(y_2)}} + \cdots + \frac{dy_\sigma}{\sqrt{R_1(y_\sigma)}} = \frac{F_0(z_1) dz_1}{\sqrt{R(z_1)}},$$

$$\frac{y_1 dy_1}{\sqrt{R_1(y_1)}} + \frac{y_2 dy_2}{\sqrt{R_1(y_2)}} + \cdots + \frac{y_\sigma dy_\sigma}{\sqrt{R_1(y_\sigma)}} = \frac{F_1(z_1) dz_1}{\sqrt{R(z_1)}},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\frac{y_1^{\sigma-1} dy_1}{\sqrt{R_1(y_1)}} + \frac{y_2^{\sigma-1} dy_2}{\sqrt{R_1(y_2)}} + \cdots + \frac{y_\sigma^{\sigma-1} dy_\sigma}{\sqrt{R_1(y_\sigma)}} = \frac{F_{\sigma-1}(z_1) dz_1}{\sqrt{R(z_1)}};$$

in derselben bedeuten

$$F_0(z_1), F_1(z_1), \dots, F_{\sigma-1}(z_1)$$

ganze Functionen $\sigma-1^{\text{ten}}$ Grades von z_1 ,

$$y_1, y_2, \dots, y_\sigma$$

Lösungen einer algebraischen Gleichung

$$(2) \quad y^\sigma + f_1(z_1, \sqrt{R(z_1)}) y^{\sigma-1} + \cdots + f_\sigma(z_1, \sqrt{R(z_1)}) = 0,$$

in welcher

$$f_1, f_2, \dots, f_\sigma$$

rationale Functionen von z_1 und $\sqrt{R(z_1)}$ vorstellen, und

$$\sqrt{R_1(y_1)}, \sqrt{R_1(y_2)}, \dots, \sqrt{R_1(y_\sigma)}$$

lassen sich mit Hülfe eben dieser Grössen z_1 und $\sqrt{R(z_1)}$ rational durch die resp. y in der Form

$$(3) \quad \sqrt{R_1(y_r)} = \varphi(y_r, z_1, \sqrt{R(z_1)})$$

ausdrücken.

Die Beziehungen zwischen den Integralgrößen lassen sich jedoch noch vereinfachen, und die folgende Reduction des Problems führt zu einem Ergebniss, welches weitere Einsicht in die allgemeine

im vorigen Hefte des Repertoriums über eine Untersuchung, in welcher ich eine Anwendung des obigen Satzes auf die Ermittlung von hyperelliptischen Integralen gab, welche auf elliptische Integrale zurückführbar sind.

Wien.

Leo Koenigsberger.

F. Klein: Ueber die Transformation der elliptischen Functionen und die Auflösung der Gleichungen fünften Grades. (Math. Ann. Bd. XIV. p. 111 ff.)

Durch meine „*Untersuchungen über das Ikosaeder*“ (Math. Ann. XII) und Gordans eng damit zusammenhängende Arbeit „*Ueber die Auflösungen der Gleichungen 5. Grades*“ (ebenda, Bd. XIII), sind zunächst nur die *algebraischen* Methoden, deren man bei Behandlung der allgemeinen Gleichungen fünften Grades bedarf, in neuer Klarheit dargelegt und weiter entwickelt worden. Ich wünschte in ähnlich anschaulicher Weise die Rolle zu kennzeichnen, welche die *elliptischen Functionen* in dieser Theorie spielen, und so ist die Abhandlung entstanden, über welche ich heute zu berichten habe. Zunächst bestimmt, meine früheren Untersuchungen über Gleichungen fünften Grades zu vervollständigen, soll sie zugleich den Zugang zu umfassenderen Fragen eröffnen und also eine Vorarbeit für weitere Untersuchungen sein. Ich darf in dieser Beziehung anführen, dass ich in den Erlanger Berichten (März und Mai 1878) bereits zwei Noten über diejenigen Gleichungen *siebenten* Grades veröffentlichte, welche die Gruppe der Modulargleichung haben.

Mein Ausgangspunkt ist der, dass ich die functionentheoretische Abhängigkeit zwischen dem Periodenverhältniss $\omega = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ des elliptischen Integrals $\int \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}$ und der absoluten Invariante $J = \frac{g_2^3}{\Delta}$ der binären biquadratischen Form $f(x)$ in geometrisch anschaulicher Weise erfasse. Durchläuft J seine positive, oder negative Halbebene, so bewegt sich ω über ein Kreisbogendreieck, das Winkel $= \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, 0$ besitzt, welche $J = 0, 1, \infty$ entsprechen. Derartiger Dreiecke legen sich in der ω -Ebene unbegrenzt viele nach dem Principe der Symmetrie lückenlos und einfach nebeneinander, wie es neuerdings auch von Hrn. Dedekind in seinem Aufsätze über

siècles, che realmente non è se non una statistica illustrata dei valenti scienziati che appartennero alle tre principali Accademie scientifiche, vale a dire all' Accademia delle Scienze di Parigi, alla Società Reale di Londra ed alla Accademia di Berlino.

A. Favaro: Intorno alla pubblicazione fatta dal Dr. Carlo Malagola di alcuni documenti relativi a Niccolò Copernico ed altri astronomi e matematici dei Secoli XV e XVI (Bulletino di Bibliografia e di Storia delle Scienze Matematiche e Fisiche. Tomo XI.) Roma, 1878.

La pubblicazione della quale qui si occupa l'Autore venne già annunciata due or sono all' incirca da questo medesimo periodico (Erster Band, S. 185—186). Il presente scritto tuttavia non è un' analisi del volume pubblicato dal signor Malagola, ma bensì uno studio di tutto quanto nel detto volume si contiene di interessante per la Storia delle Matematiche. Quest' ultimo argomento per verità non entra se non per incidenza nel volume in discorso e vi si legge soltanto perchè, come tutto porta a credere, Niccolò Copernico fu scolaro di Antonio Urceo detto Codro, al quale l'opera del signor Malagola è precipuamente dedicata.

Ed infatti i documenti i quali interessano la Storia delle Matematiche abbondano nel volume medesimo: l'Autore della pubblicazione della quale si è riferito il titolo li analizza tutti e si giova di essi e di altre notizie raccolte in tale occasione per fissare alcuni punti ancora non bene definiti o per rettificare alcune inesattezze nelle quali scrittori precedenti erano caduti.

Padova.

A. Favaro.

L. Koenigsberger: Ueber die Beziehung der complexen Multiplication der elliptischen Integrale zur Reduction gewisser Klassen Abel'scher Integrale auf elliptische. (Borchardt's Journal für Mathematik.)

Nachdem von denjenigen Mathematikern des vorigen Jahrhunderts, welche, durch die Untersuchungen von Fagnano dazu veranlasst, sich mit dem Additions- und Multiplicationstheorem de

elliptischen Integrale und gewisser Integrale von Functionen höherer Irrationalität beschäftigten, einzelne Integrale algebraischer Functionen auf elliptische Integrale zurückgeführt worden, war Legendre der erste, welcher in seinem „traité des fonctions elliptiques“ zwei Klassen solcher reducirbarer Integrale aufstellte, nämlich:

$$(a) \quad \int f(z, \sqrt[3]{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3}) dz$$

und

$$(b) \quad \int f(z, \sqrt[4]{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4}) dz.$$

Die späteren Untersuchungen von Riemann und Clebsch haben das Problem von einer anderen und allgemeineren Seite aufgefasst, indem die algebraischen Gleichungen, welche den Abel'schen Integralen zu Grunde gelegt wurden, durch ihre Geschlechtzahl p charakterisirt wurden, und als Abel'sche Integrale, welche auf elliptische reducirt werden können, solche bezeichnet wurden, für welche $p = 1$ ist. Davon verschieden ist jedoch die Frage nach den *einzelnen* Integralen, welche auf elliptische Integrale reducirbar sein können, ohne dass die Geschlechtzahl $p = 1$ zu sein braucht, und gerade diese Frage ist in der Integralrechnung von grosser Wichtigkeit und spielt in den Anwendungen eine wesentliche Rolle.

Ueber eine von mir angestellte Untersuchung über die Reduction hyperelliptischer Integrale auf elliptische habe ich im zweiten Hefte dieses Bandes referirt und bei Gelegenheit dieser Untersuchung kam ich naturgemäss auf die Frage der Reduction auf elliptische Integrale für die nächst höhere Gattung Abel'scher Integrale

$$\int F(z, \sqrt[n]{(z - \alpha_1)^{m_1} (z - \alpha_2)^{m_2} \cdots (z - \alpha_q)^{m_q}}) dz,$$

für welche mir nur der Fall der Legendre'schen Integrale bekannt war, und für diesen Fall ein von Roethig (Crelle's Journal B. 56) gefundenes, eigenthümliches Resultat, dass sich die Integrale von der Form (a) auf elliptische Integrale zurückführen lassen, deren Modul $\frac{1}{2}\sqrt{2 \pm \sqrt{3}}$ ist, die Integrale von der Form (b) auf elliptische Integrale mit dem Modul $\sqrt{\frac{1}{2}}$. Dieses letztere Resultat von Roethig war die Veranlassung zu der Arbeit, über die ich jetzt kurz referiren will.

Aus meinen früheren Arbeiten folgt der Satz, dass, wenn eine Gleichung von der Form

$$\int_{x_1}^{x_2} F(z, \sqrt[n]{R(z)}) dz = \int_{x_1}^{x_2} f_1(x, \sqrt{\varphi_1(x)}) dx + \int_{x_2}^{x_3} f_2(x, \sqrt{\varphi_2(x)}) dx + \dots$$

$$+ \int_{x_r}^{x_r} f_r(x, \sqrt{\varphi_r(x)}) dx + u + A_1 \log v_1 + \dots + A_r \log v_r,$$

besteht, worin

$$\varphi_a(x) = (1-x^2)(1-k_a^2 x^2)$$

ist, dann auch zur Irrationalität $\sqrt[n]{R(z)}$ gehörige Integrale erster Gattung existiren, welche auf je ein zu den elliptischen Integralen der rechten Seite gehöriges Integral erster Gattung reducirbar sind.

Es folgt sodann die Darstellung der Integrale erster Gattung, welche zu $\sqrt[n]{R(z)}$ gehören, und es wird die allgemeine Frage darauf zurückgeführt, diejenigen *Fundamentalintegrale* erster Gattung zu charakterisiren, für welche

$$\int \psi_r(z) (\sqrt[n]{R(z)})^r dz = \int \frac{dy}{\sqrt{\varphi(y)}}$$

$$\int \psi_r(z) (\sqrt[n]{R(z)})^r dz + \int \psi_s(z) (\sqrt[n]{R(z)})^s dz = \int \frac{dy}{\sqrt{\varphi(y)}}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\int \psi_1(z) \sqrt[n]{R(z)} dz + \int \psi_2(z) (\sqrt[n]{R(z)})^2 dz + \dots$$

$$+ \int \psi_{n-1}(z) (\sqrt[n]{R(z)})^{n-1} dz = \int \frac{dy}{\sqrt{\varphi(y)}}$$

ist.

Nachdem für die erste Klasse zu den bekannten Integralen noch die Beziehung

$$\int \frac{dz}{(\sqrt[6]{a+2bz+cz^2})^5} = \frac{3}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{x(b^2+(x^3-a)c)}}$$

vermöge der Substitution

$$a + 2bz + cz^2 = x^3$$

hinzugefügt worden, wird der Satz bewiesen,

dass der Modul des elliptischen Integrales, auf welches ein Abel'sches Fundamentalintegral der obigen Art reducirbar ist, ein Modul der complexen Multiplication sein muss.

Nach einer Darstellung des Abel'schen Satzes, dass der Multiplikator der complexen Multiplication von der Form $A + i\sqrt{B}$ sein muss, worin A und B rationale Zahlen bedeuten, von denen die letztere wesentlich positiv ist, wird gezeigt, dass gleiche Multiplikatoren nur dann zwei verschiedenen Moduln der complexen Multiplication zugehören können, wenn die Moduln ineinander trans-

formirbar sind, und dass ferner die verschiedenen Multiplicatoren, welche demselben complexen Multiplicationsmodul angehören, in ganzer linearer Beziehung von einander abhängen, also die Form haben

$$a = P + iQ\sqrt{R} \quad \text{und} \quad a' = P' + iQ'\sqrt{R}.$$

Aus diesen Sätzen wird durch einfache Schlüsse gefolgert, dass ein Abel'sches Fundamentalintegral der Form

$$\int \psi(z) (\sqrt[n]{R(z)})^r dz$$

nur dann auf ein elliptisches Integral reducirbar sein kann, wenn $n = 2, 3, 4, 6$ ist.

Diesen vier Fällen entsprechen die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{\sqrt{\varphi(\eta)}} &= - \frac{dy}{\sqrt{\varphi(y)}} \\ \frac{d\eta}{\sqrt{\varphi(\eta)}} &= \left(\pm \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \sqrt{3} \right) \frac{dy}{\sqrt{\varphi(y)}} \\ \frac{d\eta}{\sqrt{\varphi(\eta)}} &= i \frac{dy}{\sqrt{\varphi(y)}} \end{aligned}$$

von denen die erste uns hier nicht interessirt, während aus den beiden andern mit Hülfe der vorher entwickelten Sätze sich das folgende Theorem ergibt:

Wenn ein Abel'sches Integral erster Gattung von der Form

$$\int \psi(z) (\sqrt[n]{R(z)})^r dz,$$

worin $n > 2$ auf ein elliptisches Integral reducirbar sein soll, so kann dies nur für $n = 3, 4, 6$ der Fall sein, und zwar haben die elliptischen Integrale, auf welche sich die Integrale

$$\int \psi(z) (\sqrt[3]{R(z)})^r dz, \quad \int \psi(z) (\sqrt[4]{R(z)})^r dz$$

reduciren lassen, den Modul der complexen Multiplication $\frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ oder einen aus diesem transformirten, während die elliptischen Integrale, auf welche die Abel'schen Integrale

$$\int \psi(z) (\sqrt[6]{R(z)})^r dz$$

zurückführbar sein können, den complexen Multiplicationsmodul $\sqrt[4]{2}$ oder einen aus diesem transformirten besitzen.

Für den Fall der Reduction der Summe mehrerer Fundamentalintegrale auf ein elliptisches Integral wird zuerst das Beispiel aufgestellt

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt[3]{A}} \int \frac{dz}{(\sqrt{a+2bz+cz^2})^5} + \int \frac{dz}{(\sqrt{a+2bz+cz^2})^7} \\ &= \frac{2}{\sqrt{c}(\sqrt[3]{A})^3} \int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(2x^2-1)}} \\ & \frac{1}{\sqrt[3]{A}} \int \frac{dz}{(\sqrt{a+2bz+cz^2})^5} - \int \frac{dz}{(\sqrt{a+2bz+cz^2})^7} \\ &= \frac{2}{\sqrt{c}(\sqrt[3]{A})^3} \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)(2x^2-1)}}, \end{aligned}$$

worin

$$A = \frac{b^2 - ac}{a}, \quad a + 2bz + cz^2 = -Ax^4$$

ist, und für die allgemein zu untersuchende Gleichung

$$\psi_{r_1}(z) (\sqrt[n]{R(z)})^{r_1} dz + \psi_{r_2}(z) (\sqrt[n]{R(z)})^{r_2} dz + \dots + \psi_{r_\nu}(z) (\sqrt[n]{R(z)})^{r_\nu} dz,$$

wenn $\alpha = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ gesetzt wird, die Bedingung gegeben

$$(m) \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & \frac{dy}{\sqrt{\varphi(y)}} \\ \alpha^{r_1} & \alpha^{r_2} & \alpha^{r_3} & \dots & \alpha^{r_\nu} & \frac{dy_1}{\sqrt{\varphi(y_1)}} \\ \alpha^{2r_1} & \alpha^{2r_2} & \alpha^{2r_3} & \dots & \alpha^{2r_\nu} & \frac{dy_2}{\sqrt{\varphi(y_2)}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha^{r_1 r_\nu} & \alpha^{r_2 r_\nu} & \alpha^{r_3 r_\nu} & \dots & \alpha^{r_\nu r_\nu} & \frac{dy_\nu}{\sqrt{\varphi(y_\nu)}} \end{vmatrix} = 0,$$

um aus derselben Folgerungen für den Modul der elliptischen Integrale abzuleiten.

Es wird gezeigt, dass, wenn $\nu = n - 1$, die Bedingungs-gleichung die Form annimmt

$$\frac{dy}{\sqrt{\varphi(y)}} + \frac{dy_1}{\sqrt{\varphi(y_1)}} + \dots + \frac{dy_{n-1}}{\sqrt{\varphi(y_{n-1})}} = 0,$$

und dass sich hieraus Eigenschaften der Moduln der elliptischen Integrale nicht ableiten lassen; ist jedoch $\nu < n - 1$, so wird erst an einem Beispiele gezeigt, wie man wieder Folgerungen für den

Modul der Integrale ableiten kann, und sodann der Fall $\nu = 2$ allgemein untersucht, welcher der Gleichung

$$\alpha^{r_1+r_2} \frac{dy}{\sqrt{\varphi(y)}} - (\alpha^{r_1} + \alpha^{r_2}) \frac{dy_1}{\sqrt{\varphi(y_1)}} + \frac{dy_2}{\sqrt{\varphi(y_2)}} = 0$$

entspricht; für den Fall, dass $r_1 + r_2 = n$, schliesst man, dass die einzig möglichen Fälle mit Anwendung unmittelbar verständlicher Abkürzungen

$$(\sqrt[n]{R(z)}, \sqrt[n]{R(z)}), (\sqrt[n]{R(z)}, (\sqrt[n]{R(z)})^2), (\sqrt[n]{R(z)}, (\sqrt[n]{R(z)})^3), \\ (\sqrt[n]{R(z)}, (\sqrt[n]{R(z)})^5)$$

sind; für den Fall, dass $r_1 + r_2 = \frac{n}{2}, \frac{3n}{2}$, folgen als einzig mögliche Fälle

$$(\sqrt[n]{R(z)}, (\sqrt[n]{R(z)})^2), ((\sqrt[n]{R(z)})^4, (\sqrt[n]{R(z)})^5), (\sqrt[n]{R(z)}, (\sqrt[n]{R(z)})^3), \\ ((\sqrt[n]{R(z)})^5, (\sqrt[n]{R(z)})^7), ((\sqrt[n]{R(z)})^9, (\sqrt[n]{R(z)})^{11}),$$

wofür die elliptischen Integrale die complexe Multiplication besitzen, und zwar mit den für je zwei aufeinanderfolgende gültigen resp. Multiplicatoren

$$i\sqrt{3}, i\sqrt{2}, i$$

und somit auf Integrale mit den Moduln

$$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}, \sqrt{2}-1, \sqrt{\frac{1}{2}}$$

reducirt werden können, wofür das Beispiel

$$B_2 \frac{dx}{\sqrt{x^4(x+1)^{11}}} - A_2 \frac{x(x+1)^4 dx}{(\sqrt{x^4(x+1)^{11}})^5} = (A_1 B_2 - A_2 B_1) \frac{dY_1}{\sqrt{(1-Y_1^2)(1-\frac{1}{2}Y_1^2)}}$$

entwickelt wird.

Ist nun $\alpha^{r_1+r_2}$ nicht reell, so ist die folgende Methode der Untersuchung anzuwenden, die zugleich für den allgemeinen Fall $\nu < n-1$ ausgeführt ist; es wird gezeigt, dass aus der Gleichung (m) oder aus

$$A \frac{dy}{\sqrt{\varphi(y)}} + A_1 \frac{dy_1}{\sqrt{\varphi(y_1)}} + \dots + A_{r-1} \frac{dy_{r-1}}{\sqrt{\varphi(y_{r-1})}} + A_r \frac{dy_r}{\sqrt{\varphi(y_r)}} = 0,$$

worin die A aus den Potenzen der n^{ten} Einheitswurzel α zusammengesetzt sind, mit Hülfe eines Abel'schen Satzes die Gleichung folgt

$$A\delta + m_1 A_1 + m_2 A_2 + \dots + m_r A_r = 0,$$

worin δ eine positive ganze Zahl, m_a , wenn es reell ist, ebenfalls eine ganze Zahl bedeutet, wenn es imaginär ist, die Form hat

$$\frac{1}{2}(\lambda_a + i\sqrt{\mu_a}),$$

worin λ_a und μ_a ganze Zahlen vorstellen, von denen die letztere wesentlich positiv ist, und es fragt sich, ob aus dieser Gleichung weitere Folgerungen abgeleitet werden können.

Für $\nu = 2$ geht diese Gleichung in

$$\delta \alpha^{r_1+r_2} - m_1(\alpha^{r_1} + \alpha^{r_2}) + m_2 = 0$$

über, und es wird an diesem Falle der Gang der weiteren Untersuchung skizzirt und gezeigt, in welcher Verbindung diese Fragen mit der Kreistheilung stehen.

Wien.

Leo Koenigsberger.

L. Koenigsberger: Ueber die Erweiterung des Jacobi'schen Transformationsprincips.

Bekanntlich hat Jacobi in seinen ersten Arbeiten über die Theorie der elliptischen Functionen nachgewiesen, dass, was auch p für eine positive ganze Zahl sein mag, stets eine Substitution von der Form

$$y = \frac{a + a'x + a''x^2 + \dots + a^{(p)}x^p}{b + b'x + b''x^2 + \dots + b^{(p)}x^p}$$

bestimmt werden könne, welche

$$\frac{dy}{\sqrt{A' + B'y + C'y^2 + D'y^3 + E'y^4}} \text{ in } \frac{dx}{\sqrt{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4}}$$

überführt, und zwar wird der Beweis auf rein algebraischem Wege geführt durch Abzählung der Constanten und Aufsuchung der für dieselben bestehenden Bedingungsgleichungen. Wie Richelot in der ersten seiner beiden ausgezeichneten Arbeiten über die Transformation der Abel'schen Functionen nachgewiesen hat, ist es unmöglich für Polynome von höherem Grade als dem vierten eine solche rationale Transformation eines hyperelliptischen Integrales erster Gattung in ein anderes zu einem Polynome gleichen Grades gehöriges derselben Gattung herzustellen, und es war wieder Jacobi, welcher Richelot auf die Untersuchung irrationaler, durch quadratische Gleichungen definirter Substitutionen für die hyperelliptischen Integrale erster Ordnung führte, welche das Analogon zur Landen'schen Transformation der elliptischen Integrale bildeten. Diese

ganze Functionen des $p-1^{\text{ten}}$ Grades,

$$Y_1, Y_2, \dots Y_p$$

Lösungen der algebraischen Gleichung

$$Y^p + \chi_1(z) Y^{p-1} + \chi_2(z) Y^{p-2} + \dots + \chi_p(z) = 0$$

sind, deren Coefficienten rationale Functionen von z sind, und für welche

$$\sqrt{R_1(Y_1)}, \sqrt{R_1(Y_2)}, \dots \sqrt{R_1(Y_p)}$$

sich als rationale Functionen der zugehörigen Y -Grössen und z ausdrücken lassen multiplicirt mit $\sqrt{R(z)}$; es wird auch weiter die Umkehrung dieses Satzes bewiesen.

Wird nun dieser Satz zu Grunde gelegt, so ist die Untersuchung der Transformation der hyperelliptischen Integrale darauf zurückgeführt, in der Gleichung

$$\varphi_0(z) Y^p + \varphi_1(z) Y^{p-1} + \dots + \varphi_{p-1}(z) Y + \varphi_p(z) = 0$$

die unbestimmten Coefficienten der ganzen Functionen

$$\varphi_0(z), \varphi_1(z), \dots \varphi_p(z)$$

so zu bestimmen, dass der Quotient der Irrationalitäten

$$\frac{\sqrt{(Y-\beta_1)(Y-\beta_2)\dots(Y-\beta_{2p+1})}}{\sqrt{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\dots(z-\alpha_{2p+1})}}$$

auf der die Grösse Y als Function von z darstellenden Riemann'schen Fläche eindeutig, also wie Y verzweigt ist, und somit nach einem bekannten Riemann'schen Satze als rationale Function von z und Y dargestellt werden kann.

Die Untersuchung wird für gerade und ungerade p mit Hülfe der Reihenentwickelungen um die Verzweigungspunkte herum an gestellt und durch Abzählung der zur Verfügung stehenden Constanten und der durch das Problem gelieferten Bedingungen der Satz bewiesen,

dass das allgemeine Transformationsproblem in dem von Jacobi aufgestellten Sinne bei beliebig gewählten Lösungen des Polynoms $R(z)$ nur für die elliptischen Integrale und die hyperelliptischen Integrale erster Ordnung möglich ist,

und durch den Gang der Untersuchung auch die Methode angegeben, wie man für die hyperelliptischen Integrale erster Ordnung die Transformation auf rein algebraischem Wege ausführen und somit ähnliche Untersuchungen anstellen kann, wie sie von Jacobi für elliptische Integrale in der algebraischen Herleitung der Transformationsausdrücke und der Bildung der Modulargleichungen gegeben worden.

Wien.

Leo Koenigsberger.



ment, par multiplication de deux déterminants, dans la note de l'Académie de Belgique, dont le titre est donné ci-dessus. 4. *Sur le théorème de Fermat* ($B^{\varphi(N)} - 1$ est divisible par N , si B est premier à N). Notice historique: la seconde démonstration d'Euler est identique au principe fondamental de la théorie des fractions périodiques. La démonstration dite de Poincot appartient en réalité à Catalan ou même à Gauss. 5. *Loi de réciprocité des résidus quadratiques*. Démonstration extrêmement simple formée en rapprochant des théorèmes connus; elle ne suppose aucune connaissance préliminaire en arithmétique, autre que celle de la théorie du plus grand commun diviseur. Voici l'ordre suivi: Lemme de Gauss. On en déduit le théorème de Fermat. Celui-ci, à son tour donne le criterium d'Euler pour distinguer les résidus des non-résidus. Le reste de la démonstration s'achève d'après Zeller.

Le 3^e de ces articles contient, par inadvertance, une démonstration complètement erronée, et d'ailleurs inutile, de la formule $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$, quand a et b sont premiers entre eux. Cette erreur est rectifiée dans une note, qui contient, en outre, une démonstration simple, due à Catalan, de la formule $2\sigma(n) = n\varphi(n)$, où $\sigma(n)$ est la somme des $\varphi(n)$ nombres premiers et non supérieurs à n .

P. Mansion.

L. Koenigsberger: Ueber die Reduction Abel'scher Integrale auf elliptische und hyperelliptische. (Mathematische Annalen.)

Im 4^{ten} Hefte des 86^{ten} Bandes des Borchardt'schen Journals habe ich die Frage behandelt, ob sich von vornherein charakteristische Eigenschaften für die Moduln derjenigen elliptischen Integrale angeben lassen, auf welche sich gewisse Abel'sche Integrale von der Form

$$\int f(x, \sqrt{R(x)}) dx$$

reduciren lassen, worin f eine rationale und R eine ganze Function von x bedeutet. Ich spreche in dieser neuen Arbeit eines der dort gefundenen Resultate etwas anders in der folgenden Form aus: die Integrale von der Gestalt

$$\int \psi(x) (\sqrt{R(x)})^r dx,$$

in denen n und r relativ prim liefern als einzig mögliche Reductionsformeln auf elliptische Integrale

$$\int \psi(x) (\sqrt[n]{R(x)})^r dx = \int \frac{dz}{\sqrt{z^3-1}}, \quad \int \psi(x) (\sqrt[4]{R(x)})^r dx = \int \frac{dz}{\sqrt{z^4-1}}$$

$$\int \psi(x) (\sqrt[6]{R(x)})^r dx = \int \frac{dz}{\sqrt{z^6-1}},$$

von denen die letzte wegen der Transformirbarkeit des rechtsstehenden elliptischen Integrales mit der ersten zusammenfällt.

Es wird nun gezeigt, dass genau dieselben Sätze bestehen, wenn es sich um die Reduction ähnlicher Integralformen für algebraisch auflösbare Gleichungen überhaupt handelt d. h. um Integrale von der Form

$$\int Q_0 p^{\frac{s}{n}} dx,$$

worin Q_0 und p algebraische Functionen einer bestimmten Ordnung bezeichnen, und nun die Frage in Angriff genommen, wie man alle reducirbaren Integrale der angegebenen Form wirklich aufstellen kann. Man findet zuerst — wenn der Einfachheit wegen in der Aufzählung der Resultate wieder Q_0 und p als rationale Functionen vorausgesetzt werden —, dass, wenn zwei Functionen $f(x)$ und $R(x)$ so bestimmt werden, dass

$$(1 - f^2(x) R(x)) (1 - k^2 f^2(x) R(x))$$

nur Doppelfactoren besitzt, alle auf je ein elliptisches Integral reducirbaren hyperelliptischen Integrale erster Gattung, wenn

$$\sqrt{(1 - f^2(x) R(x)) (1 - k^2 f^2(x) R(x))} = F(x)$$

gesetzt wird und F eine rationale Function bedeutet, erhalten werden in der Form

$$\int \frac{\frac{1}{2} f(x) R'(x) + f'(x) R(x)}{R(x) F(x)} \sqrt{R(x)} dx = \int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}}$$

und zwar durch die Substitution $z = f(x) \sqrt{R(x)}$.

Mit Berücksichtigung der complexen Multiplication der in Frage kommenden elliptischen Integrale und mit Hülfe des Abel'schen Theorems findet man ferner, dass, wenn $f(x)$ und $R(x)$ so gewählt werden, dass der Ausdruck

$$f(x)^3 R(x)^2 - 1 = F(x)^2$$

nur Doppelfactoren besitzt, sämtliche Abel'sche Integrale der

verlangten Form, welche auf elliptische Integrale reducirbar sind, in dem Ausdruck enthalten sind

$$\int \frac{\frac{q}{3} f(x) R'(x) + f'(x) R(x)}{R(x) F(x)} (\sqrt[3]{R(x)})^q dx,$$

und zwar werden dieselben dann durch die Substitution

$$Z = f(x) (\sqrt[3]{R(x)})^q$$

auf das elliptische Integral

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^3 - 1}}$$

zurückgeführt; für die Reductionsformel

$$\int \psi(x) (\sqrt[3]{R(x)})^q dx = \int \frac{dz}{\sqrt{z^6 - 1}}$$

bleibt alles unverändert, nur ist $f(x)$ und $R(x)$ so zu bestimmen, dass

$$f(x) [f(x)^3 R(x)^q - 1]$$

ein vollständiges Quadrat ist.

Endlich ergibt sich durch wiederholte Anwendung des Abel'schen Theorems, dass für die als nothwendig erkannte Gestalt der Reductionsformel

$$\int \psi(x) (\sqrt[3]{R(x)})^q dx = \int \frac{dz}{\sqrt{z^4 - 1}}$$

alle reducibaren Integrale erhalten werden, wenn man

$$\psi(x) = \frac{\frac{q}{4} f(x) R'(x) + f'(x) R(x)}{R(x) F(x)}$$

setzt, worin die rationale Function $f(x)$ und die ganze Function $R(x)$ der Bedingung zu unterwerfen sind, dass

$$f(x)^4 R(x)^q - 1$$

das Quadrat einer rationalen Function $F(x)$ ist.

Es wird ferner noch die Frage der Reduction der in der obigen Form enthaltenen Abel'schen Integrale auf hyperelliptische Integrale behandelt, und die Gleichung charakterisirt, welcher der complexe Multiplicator der hyperelliptischen Reductionsintegrale genügen muss; sodann wird die Reductionsgleichung untersucht

$$\int \psi(x) (\sqrt[2p+1]{R(x)})^r dx = \int \frac{f(z_1) dz_1}{\sqrt[2p+1]{z_1^{2p+1} - 1}} + \int \frac{f(z_2) dz_2}{\sqrt[2p+1]{z_2^{2p+1} - 1}} + \dots + \int \frac{f(z_p) dz_p}{\sqrt[2p+1]{z_p^{2p+1} - 1}},$$

in welcher, wie aus allgemeinen Sätzen der Transformationstheorie der Abel'schen Integrale folgt, die Grössen $z_1, z_2, \dots, z_p$ die Lösungen einer Gleichung p^{ten} Grades

$$z^p + f_1(x, (\sqrt[2p+1]{R(x)})^r) z^{p-1} + \dots + f_p(x, (\sqrt[2p+1]{R(x)})^r) = 0$$

bedeuten, worin $f_1, f_2, \dots, f_p$ rational aus den in ihnen enthaltenen Grössen zusammengesetzt sind, und die zu jenen z -Grössen gehörigen Irrationalitäten durch einen Ausdruck von der Form bestimmt sind

$$\sqrt[2p+1]{z_q^{2p+1} - 1} = F(z_q, x, (\sqrt[2p+1]{R(x)})^r),$$

in welchem F wiederum eine rationale Function vorstellt.

Es wird wieder mit Hülfe geschlossener Umläufe der Variablen x die obige Gleichung auf eine andere der Form

$$(2p+1) \int \psi(x) (\sqrt[2p+1]{R(x)})^r dx = \sum_0^{p-1} A_k \sum_0^{2p} \alpha^{-s} \sum_1^p \int \frac{z_{qs}^k dz_{qs}}{\sqrt[2p+1]{z_{qs}^{2p+1} - 1}}$$

zurückgeführt, wenn

$$f(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \dots + A_{p-1} z^{p-1}$$

gesetzt wird, und eine solche vermöge der Substitution

$$z_{qs} = \alpha^{m_s} t_{qs},$$

in welcher α eine $2p+1^{\text{te}}$ primitive Einheitswurzel und m_s der Congruenz genügt

$$m_s(k+1) \equiv s \pmod{2p+1},$$

hergeleitete Summe

$$\sum_0^{2p} \sum_1^p \int \frac{t_{qs}^k dt_{qs}}{\sqrt[2p+1]{t_{qs}^{2p+1} - 1}}$$

nach dem Abel'schen Theorem behandelt, indem man die Form der unbestimmten Coefficienten des Abel'schen Theorems zu bestimmen sucht. Es mag hier genügen, das Resultat in Folgendem anzugeben: Die Gleichung

$$\sum_0^{2p} \sum_1^p \int \frac{t_{qs}^k dt_{qs}}{\sqrt[2p+1]{t_{qs}^{2p+1} - 1}} = \int \frac{Z_1^k dZ_1}{\sqrt[2p+1]{Z_1^{2p+1} - 1}} + \dots + \int \frac{Z_p^k dZ_p}{\sqrt[2p+1]{Z_p^{2p+1} - 1}}$$

ist so beschaffen, dass, wenn man

$$Z_q = W_q y^{\lambda}$$

setzt, worin

$$y = (\sqrt[2p+1]{R(x)})^r, \text{ und } \lambda(k+1) \equiv 1 \pmod{2p+1}$$

ist, die Grössen

$$W_1, W_2, \dots, W_p$$

die Lösungen einer Gleichung

$$W^p + \mathfrak{M}_1 W^{p-1} + \dots + \mathfrak{M}_{p-1} W + \mathfrak{M}_p = 0$$

sind, deren Coefficienten rational aus x zusammengesetzt sind, während die Irrationalitäten

$$\sqrt[2p+1]{W_q^{2p+1} y^{\lambda(2p+1)} - 1} = \sqrt[2p+1]{W_q^{2p+1} R(x)^{\lambda r} - 1}$$

sich als rationale Functionen von W_q darstellen lassen, deren Coefficienten wiederum rational aus x zusammengesetzt sind; ferner wird gezeigt, dass in den obigen Formeln auch sämtliche Beziehungen enthalten sind, welche derartige Transformationen liefern.

Es wird sodann die Behandlung des Problems für hyperelliptische Integrale erster Ordnung zu Ende geführt; wie für hyperelliptische Integrale höherer Ordnung die Bedingungsgleichungen herzustellen sind, denen nach den obigen Gleichungen die Coefficienten der Substitutionsfunctionen $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \dots, \mathfrak{M}_p$ und des Polynoms des Abel'schen Integrals unterliegen müssen, zeige ich in einer demnächst im 3^{ten} Hefte des 87^{ten} Bandes von Borchardt's Journal erscheinenden Arbeit: „Erweiterung des Jacobi'schen Transformationsprincips“, über die ich bereits im letzten Hefte des Repertoriums referirte, und ich behalte mir die Anwendung der dort gegebenen Methoden auf die oben behandelten Probleme bis zum Erscheinen dieser Arbeit vor.

Wien.

L. Koenigsberger.

Otto Hesse: Ueber Sechsecke im Raume. (Aus den hinterlassenen Papieren von Otto Hesse mitgetheilt durch S. Gundelfinger. Borchardt's Journal Bd. 85 S. 304—314.)

In dieser Abhandlung giebt Hesse einen analytischen Beweis des Satzes:

„Wenn im Raume irgend ein Sechseck U und ein Punkt U_0 gegeben ist, und wenn man drei gerade Linien zieht, welche die gegenüberliegenden Seiten des Sechsecks paarweise schneiden, so

- 4) für den Strahlbüschel;
- 5) für das Gebilde, welches aus einem Strahle, einem auf dem Strahle liegenden Punkte und einer durch den Strahl gehenden Ebene besteht;
- 6) für das Gebilde, welches aus einer Geraden und n darin befindlichen Punkten besteht;
- 7) für das Gebilde, welches aus einem Strahlbüschel und n darin befindlichen Strahlen besteht.

Die Anwendung der in den Fällen 3) bis 7) gefundenen Charakteristikenformeln führt theilweise zu einer einfacheren Ableitung bekannter Resultate, theils auch zu ganz neuen Resultaten, z. B. zu gewissen Singularitäten der Congruenz, die zweien gegebenen Complexen gemeinsam ist.

Das nächste Ziel der eigentlichen Charakteristikentheorie dürfte die Aufstellung der Charakteristikenformeln für das Dreieck und das Viereck sein, und im Anschluss daran, die Berücksichtigung der Halphen'schen Ausartungen in den Charakteristikenformeln des Kegelschnitts im Raume und der Fläche zweiter Ordnung.

Den Schluss des Buches bilden ein Literaturverzeichnis, ein Wortregister und ein Autorenregister. Etwaige Lücken im Literaturverzeichnis verzeihe man dem Verfasser, welcher sein Buch in einer Stadt abfasste, deren grosse Bibliotheken für reine Mathematik zur Zeit noch werthlos sind.

Hamburg.

H. Schubert.

L. Koenigsberger: Zur Geschichte der Theorie der elliptischen Transcendenten in den Jahren 1826—29. (Teubner, 1879.)

Veranlasst durch das fünfzigjährige Jubiläum, welches in diesem Jahre die „*Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum*“ von Jacobi feiern, deren Erscheinen zusammenfiel mit dem Tode Abel's, des andern grossen Schöpfers der Theorie der Transcendenten, habe ich in einer kurzen freien Zeit aus früheren Notizen eine gedrängte Zusammenstellung und Vergleichung der von Abel und Jacobi in den Jahren 1826—29 gemachten Untersuchungen, welche die Theorie der elliptischen Transcendenten betreffen, geliefert, welche eingeleitet ist durch eine Besprechung des Inhaltes des „*Traité des fonctions elliptiques*“ von Legendre, und deren Schluss eine kurze Erwähnung

der durch Herrn Schering veröffentlichten, auf die Theorie der elliptischen Functionen bezüglichen Nachlassarbeiten von Gauss bildet. Ich habe mich auf die Jahre 1826—29 beschränkt, weil einerseits in jenem Zeitraume fast alle wichtigeren und umfangreicheren Theile der elliptischen Transcendenten entstanden sind, andererseits der durch die Herren Bertrand und Borchardt veröffentlichte wichtige und überaus interessante Briefwechsel zwischen Legendre und Jacobi eine klare Einsicht in die Folge und den Zusammenhang der Entdeckungen Abel's und Jacobi's gestattet; übrigens liefert das verdienstvolle Werk des Herrn Enneper „*Elliptische Functionen, Theorie und Geschichte*“ hinreichendes und gut geordnetes Material zur Orientirung in der weiteren Geschichte der Theorie der Transcendenten.

Wien, im October 1879.

L. Koenigsberger.

L. Koenigsberger: Ueber die Reduction Abel'scher Integrale auf niedere Integralformen, speciell auf elliptische Integrale. (Borchardt's Journal für Mathematik.)

Die Arbeit geht von der Untersuchung der allgemeinsten Relation zwischen Abel'schen Integralen aus, welche in der Form

$$F \{ \varphi_1(f_1), \varphi_2(f_2), \dots, \varphi_k(f_k), J_1, J_2, \dots, J_n, x_1, x_2, \dots, x_n \} = 0$$

dargestellt wird, worin $J_1, J_2, \dots, J_n$ beliebige Abel'sche Integrale der resp. Variablen $x_1, x_2, \dots, x_n$,

$$f_1, f_2, \dots, f_k$$

beliebige algebraische Verbindungen dieser Integrale mit den Variablen,

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$$

transcendente Functionen bedeuten, welche durch Integrale algebraischer Differentialgleichungen definirt werden und endlich F eine algebraische Function der in ihr enthaltenen Grössen vorstellt. Nachdem mit Hülfe von Betrachtungen, welche einer Arbeit des Verfassers über den algebraischen Zusammenhang von Integralen verschiedener Differentialgleichungen entnommen sind, die allgemeine Relation auf die lineare

$$a_1 J_1 + a_2 J_2 + \dots + a_n J_n = u$$

zurückgeführt worden, in welcher u eine algebraische Function der Variablen bedeutet, wird auf Grund von Umformungen, wie sie

Abel zuerst für elliptische Integrale angegeben, für die in der Form

$$\begin{aligned} & \int_{x_1}^{x_2} F_1(x, y_1) dx + \int_{x_2}^{x_3} F_2(x, y_2) dx + \dots + \int_{x_m}^{x_{m+1}} F_m(x, y_m) dx \\ &= - \int_{x_{m+1}}^{x_{m+2}} F_{m+1}(x, y_{m+1}) dx - \dots - \int_{x_n}^{x_{n+1}} F_n(x, y_n) dx + u \end{aligned}$$

angesetzte Beziehung, in welcher $x_1, x_2, \dots, x_m$ die unabhängigen Variablen bedeuten, der Satz bewiesen,

dass jeder Art von Abel'schen Integralen, welche auf der rechten Seite dieser Transformationsgleichung vorkommen, ein System von Integralen erster Gattung zugehört, deren Zahl durch die den Integralen zukommende charakteristische Zahl $q_{m+\alpha}$ bestimmt wird, deren Summe gleich einem Integrale erster Gattung ist, welches einem der auf der linken Seite der Transformationsgleichung befindlichen Abel'schen Integrale angehört, und deren Grenzen die Lösungen einer algebraischen Gleichung

$$z^{q_{m+\alpha}} + \varphi_1(x_1, Y_1) z^{q_{m+\alpha}-1} + \dots + \varphi_{q_{m+\alpha}}(x_1, Y_1) = 0$$

sind, während die diesen Grenzen zugehörigen algebraischen Irrationalitäten rational durch die zugehörige Lösung dieser algebraischen Gleichung und x_1, Y_1 ausdrückbar sind.

Handelt es sich somit um die auf elliptische Integrale zurückführbaren Abel'schen Integrale, so wird

jedes elliptische Integral erster Gattung, welches einem der in der Reductionsformel vorkommenden elliptischen Integrale zugehört, gleich sein müssen einem, dem betrachteten Abel'schen Integrale zugehörigen Integrale erster Gattung, oder es wird die Beziehung stattfinden müssen

$$\int_{\xi}^{\xi} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}} = \int_{x_1}^{x_1} F(x, y) dx,$$

worin ξ eine rationale Function von x_1 und y_1 , wenn y_1 den Werth von y für $x = x_1$ bezeichnet, und die zu ξ gehörige Irrationalität

$$y = \sqrt{(1-\xi^2)(1-c^2\xi^2)}$$

sich ebenfalls rational durch x_1, y_1 ausdrücken lässt.

Wir betrachten zuerst Abel'sche Integrale erster Gattung von der Form

$$\int_{\alpha}^{x_1} Y dx,$$

worin Y um einen Verzweigungspunkt α herum eine Entwicklung von der Form

$$Y = \psi(x) (x - \alpha)^{\frac{r}{m}}$$

besitzt, in der $\psi(x)$ um α herum eindeutig ist, Y also die Lösung einer Gleichung von der Form

$$F_0(x) Y^{km} + F_m(x) Y^{(k-1)m} + F_{2m}(x) Y^{(k-2)m} + \dots + F_{km}(x) = 0$$

ist, und finden,

dass das obige Integral nur dann auf ein elliptisches Integral reducirbar sein kann, wenn $m = 2, 3, 4, 6$ ist, und dann sind in den drei letzten Fällen die elliptischen Reductionsintegrale:

$$\int \frac{dZ}{\sqrt{Z^3-1}}, \int \frac{dZ}{\sqrt{Z^4-1}}, \int \frac{dZ}{\sqrt{Z^6-1}} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t(t^3-1)}}.$$

Nachdem für diese Fälle durch wiederholte Anwendung des Abel'schen Theorems gezeigt worden, dass man die Form der Transformationen vereinfachen kann, dass also z. B.

in der Reductionsgleichung

$$Y_1 dx_1 = \frac{dZ}{\sqrt{Z^3-1}}$$

stets angenommen werden darf, dass

$$Z = T \cdot Y_1, \sqrt{Z^3-1} = T_1,$$

worin T und T_1 rationale Functionen von x_1 und Y_1 sind,

und ähnliche Sätze für die andern Integralformen, werden für alle vier Fälle auch die hinreichenden Bedingungen für die Reducirbarkeit auf ein elliptisches Integral entwickelt und zwar mit Hülfe der Reihenentwicklungen der algebraischen Functionen.

Die Untersuchung wendet sich dann zu dem allgemeinen Falle, in welchem die Entwicklung von Y_1 um einen Verzweigungspunkt $x_1 = \alpha$ herum die Form hat

$$(a) Y_1 = \psi_1(x_1) (x_1 - \alpha)^{\frac{r_1}{m}} + \psi_2(x_1) (x_1 - \alpha)^{\frac{r_2}{m}} + \dots + \psi_\mu(x_1) (x_1 - \alpha)^{\frac{r_\mu}{m}},$$

worin die ψ eindeutige Functionen von x_1 sind, und wir gelangen mit Hülfe von Sätzen, die Abel in seinem „*précis d'une théorie des fonctions elliptiques*“ bewiesen, zu dem folgenden Resultat:

Ist ein Abel'sches Integral $\int_{x_1} Y dx$ erster Gattung auf ein elliptisches Integral erster Gattung reducirbar, und kommen in der Entwicklung (a) von Y_1 um nur einen seiner Verzweigungspunkte α , der ein m -facher Windungspunkt sein mag und für den m eine Primzahl sein soll, nicht alle gebrochenen Potenzen

$$(x_1 - \alpha)^{\frac{1}{m}}, (x_1 - \alpha)^{\frac{2}{m}}, \dots, (x_1 - \alpha)^{\frac{m-1}{m}}$$

vor, so ist der Modul des elliptischen Integrales stets ein Modul complexer Multiplication.

Die Annahme nun, dass der Integralmodul ein solcher complexer Multiplication ist, führt unmittelbar zur Vergleichung der sich aus der Integralrelation ergebenden Gleichungen mit den Beziehungen, welche die Kreistheilung für die Einheitswurzeln liefert, und ergibt das folgende Theorem:

Ist $\int_{\alpha}^{x_1} Y dx$ auf ein elliptisches Integral reducirbar, und hat Y einen m -fachen Windungspunkt, worin m eine Primzahl $\equiv 3 \pmod{4}$, in dessen Umgebung Y eine Entwicklung besitzt, in welcher nicht alle Potenzen

$$(x_1 - \alpha)^{\frac{1}{m}}, (x_1 - \alpha)^{\frac{2}{m}}, \dots, (x_1 - \alpha)^{\frac{m-1}{m}}$$

vorkommen, so wird einerseits der Modul des elliptischen Reductionsintegrales ein Modul complexer Multiplication sein müssen, andererseits folgt, dass die Entwicklungsform von Y_1

$$Y_1 = \psi_1(x_1)(x_1 - \alpha)^{\frac{q_1}{m}} + \psi_2(x_1)(x_1 - \alpha)^{\frac{q_2}{m}} + \dots + \psi_{\frac{m-1}{2}}(x_1 - \alpha)^{\frac{q_{\frac{m-1}{2}}}{m}}$$

sein muss, worin die q entweder alle $\frac{m-1}{2}$ quadratischen Reste oder alle $\frac{m-1}{2}$ quadratischen Nichtreste von m bedeuten; zugleich ergibt sich, dass $\sqrt{-m}$ der Multiplicator der complexen Multiplication des elliptischen Integrales sein wird, und dass somit auch der Integralmodul bis auf die durch algebraische Transformation aus diesem herleitbaren bestimmt ist.

Ist $m \equiv 1 \pmod{4}$, so hat man wieder die Fälle $m \equiv 1$ oder $\equiv 5 \pmod{8}$ zu unterscheiden und gelangt zu ähnlichen Resultaten durch Zusammenstellung mit den Factoren der Kreistheilungsgleichung vom $\frac{m-1}{4}$ ten Grade; auf diese Weise lässt sich eine Reihe interessanter Sätze entwickeln, welche die Reduction Abel'scher Integrale auf elliptische in Verbindung bringen mit der Form der Entwicklung der algebraischen Functionen um deren Verzweigungspunkte herum, und diese wiederum mit den Fundamentalsätzen der Kreistheilung, der Zerlegung der Kreistheilungsgleichung in Factoren niederer Grade und der Irreductibilität dieser Theilgleichungen in Bezug auf die rationalen Ausdrücke in den Perioden.

Wien.

Leo Koenigsberger.