# Heidelberger Texte zur Mathematikgeschichte

Autor: **Koenigsberger, Leo** (1837–1921)

Titel: **Referate aus den hinterlassenen Papieren von F. Richelot**

Quelle: Repertorium der literarischen Arbeiten aus dem Gebiete der reinen und angewandten Mathematik : Originalberichte der Verfasser.
Band 1 (1877)
Seite 191–200 und 340–348.

Leo Koenigsberger verdankte seine Berufung 1869 nach Heidelberg dem Rat Friedrich J. Richelot, des Schwiegervaters von Gustav R. Kirchhoff. 1919 berichtet er auf S. 156 seiner Autobiographie „Mein Leben“ über den Nachlass Friedrich J. Richelots:

> Im Jahre 1875 war Richelot nach langem Leiden in seinem 67. Jahre gestorben und Kirchhoff sowie Frau Richelot, welche wußten, wie ich den Verstorbenen als Mathematiker und Freund verehrt und geliebt habe, legten es mir nahe, den wissenschaftlichen Nachlaß dieses Mannes durchzusehen, dessen ganzes Leben unermüdlicher Arbeit gewidmet war. Ich ließ die verschiedenen sorgfältigen Aufzeichnungen seiner Vorlesungen über Mechanik von meinen Schülern im Seminar durcharbeiten und Teile derselben vortragen, während ich selbst die überaus umfangreichen Ausarbeitungen über elliptische Funktionen, allgemeine Funktionentheorie usw. einer genauen Durchsicht unterwarf. Es war staunenswert zu sehen, mit welchem Fleiß und welcher Sachkenntnis die während der letzten 20 Jahre erschienenen Abhandlungen und Lehrbücher durchgearbeitet, zum Teil fast vollständig noch einmal niedergeschrieben waren — aber für den Druck geeignet konnte ich nicht mehr als zwei kleinere Arbeiten ermitteln, die aber auch nichts wesentlich Neues boten.

# L. Koenigsberger: Referate aus den hinterlassenen Papieren von F. Richelot

Die mir von Frau Geheimräthin Richelot übertragene Durchsicht der Papiere des verstorbenen ausgezeichneten Mathematikers F. Richelot hat mich erkennen lassen, dass es den vielen Schülern und Verehrern jenes um die Verbreitung der mathematischen Wissenschaften in Deutschland so hochverdienten Mannes gewiss nicht unerwünscht und für den Fortschritt der Mathematik durch Anregung zu weiteren Untersuchungen sicher zweckmässig sein würde, von der grossen Anzahl einzelner von Richelot angestellter Untersuchungen, die meistens bei der Lectüre der Arbeiten anderer Mathematiker entstanden oder zum Zwecke der Vorlesungen ausgearbeitet worden, fortlaufende Referate mit genauer Angabe der benutzten Methoden und gefundenen Resultate in dieser Zeitschrift zu veöffentlichen, während ich möglicher Weise, wenn es meine Zeit gestatten wird, später durch Unterstützung von Seiten jüngerer Kräfte in der Lage sein werde, grössere Veröffentlichungen von Vorlesungen, die in vielfachen und verschiedenartigen Ausarbeitungen vorliegen, als Lehrbücher der analytischen Mechanik, Variationsrechnung etc. zu bewerkstelligen.

I. *Geometrische Interpretation der Transformation des elliptischen Integrales erster Gattung auf die Normalform.*

Werden die Lösungen des Polynoms vierten Grades $R(z)$ mit

$$a + a_1 i,\ b + b_1 i,\ c + c_1 i,\ d + d_1 i$$

bezeichnet und durch die entsprechenden Punkte $A$, $B$, $C$, $D$ im $z$-Gebiete dargestellt, so führt bekanntlich die Substitution

$$\zeta = \frac{A - C}{B - C} \frac{B - z}{A - z}$$

auf die Gleichung

$$\int_{z_0}^{z} \frac{dz}{R(z)^{\frac{1}{2}}} = \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{d\zeta}{[(D - B)(C - A)]^{\frac{1}{2}}\, [\zeta(1 - \zeta)(1 - k^2\zeta)]^{\frac{1}{2}}},$$

worin

$$k^2 = \frac{B - C}{A - C} \cdot \frac{A - D}{B - D}$$

ist. Es kommt darauf an, den analytischen Modul von $\zeta$ zu bestimmen, woraus sich dann unmittelbar, wenn $z = D$ gesetzt wird, der analytische Modul von $\frac{1}{k^2}$ ergibt; nun sieht man aber, dass, wenn der die Grösse $z$ repräsentirende Punkt mit $Z$ bezeichnet wird,

$$\text{mod.}\, \zeta = \frac{AC}{BC} \frac{BZ}{AZ} = \frac{\frac{BZ}{AZ}}{\frac{BC}{AC}}$$

wird, und aus dieser Form von mod. $\zeta$ lässt sich leicht ein geometrisches Criterium dafür ableiten, ob diese Grösse kleiner, gleich, grösser als die Einheit ist. Denn denkt man sich $A$ und $B$ durch eine Grade verbunden, so ist bekanntlich ein Kreis, dessen Durchmesser in dieser Linie liegt, der geometrische Ort der Punkte $Z$, für welche das Verhältniss $\frac{BZ}{AZ}$ der Entfernungen desselben von $A$ und $B$ constant ist und es wird dieses constante Verhältniss von Null durch die Einheit bis Unendlich zunehmen, wenn der Kreis sich von dem Punkte $B$ an zu dem unendlichen Kreise, welcher die in der Mitte von $AB$ errichtete Grade ist, erweitert und von da an bis zum Punkte $A$ hin zusammenzieht, und daher mod. $\zeta$ von Null durch $\frac{AC}{BC}$ bis Unendlich stetig wachsen. Dasselbe leitet Richelot auch unmittelbar aus dem analytischen Ausdrucke für $\zeta$ ab, indem er bemerkt, dass, wenn $z = x + yi$ gesetzt wird, die Gleichung

$$\{(a-x)^2+(a_1-y)^2\}\,\{(b-c)^2+(b_1-c_1)^2\}\,(\mathrm{mod.}\,\zeta)^2$$
$$-\{(b-x)^2+(b_1-y)^2\}\,\{(a-c)^2+(a_1-c_1)^2\}=0$$

für ein constantes $\zeta$ die Gleichung eines Kreises ist, welcher mit den beiden Punkten, dessen Coordinaten $x=a$, $y=a_1$; $x=b$, $y=b_1$ die ideale Secante

$$0=(a-b)\left\{x-\frac{a+b}{2}\right\}+(a_1-b_1)\left\{y-\frac{a_1+b_1}{2}\right\}$$

gemeinschaftlich hat.

Die Entscheidung der Frage, ob mod. $\zeta$ kleiner, gleich, grösser als die Einheit ist, wird sich nun leicht treffen lassen. Zieht man nämlich die zu den Punkten $A$ und $B$ gehörige ideale Secante, so kann der Kreis, der durch $C$ geht und den Richelot den Einheitskreis nennt, entweder rechts oder links von derselben liegen oder diese selbst ist als ein solcher anzusehen; liegt nun der Punkt $Z$ im ersten Falle innerhalb, auf oder ausserhalb des Einheitskreises, so ist mod. $\zeta$ resp. kleiner, gleich, grösser als die Einheit; dasselbe findet im zweiten Falle statt, wenn $Z$ ausserhalb, auf oder innerhalb des Einheitskreises liegt und im dritten Falle, wenn $Z$ rechts von $MN$, auf $MN$, links von $MN$ sich befindet. Nun ist ferner mod. $\frac{1}{k^2}$ derjenige Werth von mod. $\zeta$, welcher zu dem Punkte $D$ gehört, und es ist daher leicht zu entscheiden, wann mod. $\frac{1}{k^2}\lesseqgtr 1$ ist, wenn man nur dasselbe Criterium, das für $Z$ benutzt wurde, auf $D$ anwendet; zugleich ersieht man hieraus, wie man es durch geeignete Wahl des Punktes $C$ oder $D$, als zum Einheitskreise gehörig, einrichten kann, dass mod. $\frac{1}{k^2}$ respective zu $D$ oder $C$ gehörig, nicht ein ächter Bruch also mod. $k^2\leqq 1$ wird.

Wenn die Anzahl der Punkte $A, B, C, D \ldots H$ ganz beliebig ist, so sieht man für den Fall, dass man von der Transformation

$$\zeta=\frac{A-P}{B-P}\cdot\frac{B-Z}{A-Z}$$

ausgeht, in welcher $P$ einer der Punkte $C, D, \ldots H$ ist, dass man für $P$ nur denjenigen Punkt zu wählen hat, der die Eigenschaft hat, dass der durch ihn laufende, zur Schaar der Kreise, welche die Linie $MN$ zur gemeinschaftlichen idealen Secante haben, gehörige Kreis, dem Punkte $B$ am nächsten liegt, in der Art dass zwischen ihm und $B$ keiner der zu den andern Punkten zugehörigen Kreise liegt. Dies Resultat hält Richelot aus dem Grunde für „ein nicht unwichtiges“, weil die Berechnung des Integrales

$$\int_B^P \frac{F(z)\,dz}{\{(z-A)(z-B)(z-C)\ldots(z-H)\}^{\frac{1}{2}}},$$

wo $F(z)$ eine ganze rationale Function von $z$ ist, durch *eine* convergente Reihe und die Reduction dieses Integrales auf die Form

$$\int_0^\zeta \frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\{\zeta(1-\zeta)(1-k_1{}^2\zeta)(1-k_2{}^2\zeta)\ldots\}^{\frac{1}{2}}},$$

wo mod. $k_1{}^2 \leqq 1$, mod. $k_2{}^2 \leqq 1$, ... und $\varphi(\zeta)$ eine rationale Function von $\zeta$ ist, davon abhängen.

Die Anwendungen dieser Resultate auf den Fall von nur reellen Lösungen des Polynoms vierten Grades $R(z)$ sind zu einfach und zu bekannt, als dass eine Hervorhebung derselben nöthig erscheinen sollte.

II. *Conforme Abbildung des Integrales*

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)(1-\varkappa^2 z)}}$$

*für beliebige* $\varkappa^2$.

„Im 45. Bande des Crelle'schen Journals habe ich gezeigt, wie „eine jede reelle oder imaginäre Grösse in der Form

$$\sin\operatorname{am}(u+iv,\varkappa)$$

„unzweideutig dargestellt wird, falls $\varkappa$ ein positiver ächter Bruch „ist; dieselbe Aufgabe für ein beliebiges $\varkappa$ hat Heine in einer Ab„handlung im 53. Bande desselben Journals behandelt, welche den „Titel führt: Reduction der elliptischen Integrale auf ihre kanonische „Form. Wenn ich im Folgenden auf diesen Gegenstand zurück„komme, so wird die Einfachheit der Darstellung und seine An„wendung auf die zur Begründung der Theorie der elliptischen „Functionen erforderliche conforme Abbildung des elliptischen Inte„grales es entschuldigen."

Diese einleitenden Worte Richelots und die Ausarbeitung, von der ich im Folgenden ein gedrängtes Referat gebe, sind in den Osterferien des Jahres 1872 niedergeschrieben.

Sei

$$z = x + yi, \quad w = u + vi, \quad \varkappa^2 = \varrho(\cos\alpha + i\sin\alpha),$$
$$1 - \varkappa^2 = \varkappa_1{}^2 = \sigma(\cos\beta - i\sin\beta),$$

worin

$$-\pi \leqq \alpha < \pi, \qquad -\pi \leqq \beta < \pi$$

ist, ferner

$$K = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)(1-\varkappa^2 z)}}, \quad K_1 = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)(1-\varkappa_1^{\,2} z)}},$$

bei denen der Integrationsweg durch positive ächte Bruchwerthe von $\sqrt{z}$ führen soll, so sieht man aus Betrachtungen, wie sie aus der Theorie der complexen Integrale geläufig sind, dass während $w$ in dem Integrale

$$\frac{1}{2}\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)(1-\varkappa^2 z)}} = w$$

von 0 bis $K$ geht, $z$ das Stück der positiven Abscissenaxe von 0 bis 1 durchlaufen wird, und dass einem Fortschreiten der Variabeln $w$ von 0 bis $iK_1$ die ganze negative $x$-Axe als Bildcurve zugehört. Verändert sich jedoch $w$ so von $K$ bis $K + iK_1$, dass $u = K$ bleibt, und $v$ von 0 bis $K_1$ so stetig fortgeht, dass $\sin\operatorname{am}(v, \varkappa_1)$ durch positive ächte Bruchwerthe stetig von 0 bis 1 wächst, so wird die entsprechende $z$-Linie der durch die Gleichung

$$x^2 + y^2 - x + y\frac{(1 - \varrho\cos\alpha)}{\varrho\sin\alpha} = 0$$

definirte Kreis sein, welcher durch die Punkte

$$x = 0,\ y = 0;\ x = 1,\ y = 0;\ x = \frac{\cos\alpha}{\varrho},\ y = -\frac{\sin\alpha}{\varrho}$$

hindurchgeht.

Verändert sich endlich $w$ stetig so von $K + iK_1$ bis $iK_1$, dass $v = K_1$ bleibt, und $u$ von $K$ bis 0 so abnimmt, dass $\sin\operatorname{am}(u, \varkappa)$ durch positive ächte Bruchwerthe von 1 bis 0 stetig abnimmt, so wird der entsprechende Punkt im $xy$-Gebiete vom Punkte $x = \frac{\cos\alpha}{\varrho}$, $y = -\frac{\sin\alpha}{\varrho}$ bis unendlich in einer Graden fortschreiten, die rückwärts verlängert durch den Anfangspunkt der Coordinaten hindurchgeht, und es ist aus der allgemeinen Abbildungstheorie bekannt, dass das ganze so begrenzte $xy$-Gebiet in jeder Stelle mit Ausnahme der vier Ecken conform durch das bezeichnete endliche Curvenviereck im $uv$-Gebiete abgebildet ist.

Es erübrigt noch die durch $w = u + vi$ bezeichneten Integrale für alle vier Seiten der gefundenen Figur in geeigneter Form zu entwickeln, wobei man sich leicht überzeugt, dass dies im Wesentlichen nur auf die *eine* Aufgabe zurückkommt, das Integral

$$\frac{1}{2}\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)(1-\varrho e^{\pm i\alpha} z)}} = w$$

für einen durch positive ächte Bruchwerthe stetig fortlaufenden Integrationsweg und für $0 < \alpha < \pi$ zu bestimmen. Richelot setzt nämlich, um das vorgelegte Integral in die Form

$$U \pm i U'$$

zu bringen, worin $U$ und $U'$ reell bleiben, so lange $z$ ein positiver ächter Bruch ist,

$$1 - \varkappa^2 z = -\varrho e^{i\alpha} z = r(\cos\psi - i\sin\psi)$$

oder, wenn man von dem speciellen unmittelbar zu behandelnden Falle $\alpha = 0$ absieht,

$$z = \frac{1}{\varrho}\,\frac{\sin\psi}{\sin(\alpha+\psi)},$$

woraus sich nach leichter Rechnung, wenn $\alpha > 0$ angenommen wird,

$$\frac{1}{2}\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)(1-\varkappa^2 z)}}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\sin\alpha}{\sqrt[4]{1-2\varrho\cos\alpha+\varrho^2}}\int_0^\psi \frac{\left(\cos\frac{\psi}{2} + i\sin\frac{\psi}{2}\right)d\psi}{\sqrt{\sin\alpha.\sin\psi.\sin(\alpha+\psi).\sin(\beta-\psi)}} = U + iU'$$

ergibt, während der Fall $\alpha < 0$ sich auf diesen zurückführen lässt, wenn man nur statt der drei Grössen $\alpha, \beta, \psi$ drei andere Grössen $-\alpha', -\beta', -\psi'$ einführt.

Die Integrale

$$U = \frac{1}{2}\,\frac{\sin\alpha}{\sqrt[4]{1-2\varrho\cos\alpha+\varrho^2}}\int_0^\psi \frac{\cos\frac{\psi}{2}\,d\psi}{\sqrt{\sin\alpha.\sin\psi.\sin(\alpha+\psi).\sin(\beta-\psi)}}$$

$$U' = \frac{1}{2}\,\frac{\sin\alpha}{\sqrt[4]{1-2\varrho\cos\alpha+\varrho^2}}\int_0^\psi \frac{\sin\frac{\psi}{2}\,d\psi}{\sqrt{\sin\alpha.\sin\psi.\sin(\alpha+\psi).\sin(\beta-\psi)}}$$

sollen nun in eine zu ihrer Berechnung geeignete Form gebracht werden. Zu diesem Zwecke setzt Richelot

$$\sqrt{\frac{\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\sin\frac{\psi}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\left(\frac{\alpha+\psi}{2}\right)}} = \sin\varphi$$

und erhält durch eine geschickte, mit Hülfe logarithmischer Differenziation angestellte Substitutionsrechnung, nachdem

$$\varkappa^2 = \frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\frac{\alpha}{2}} \qquad \varkappa_1^{\,2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$$

$$\lambda^2 = \frac{\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} \qquad \lambda_1^{\,2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$$

$$\mu^2 = \frac{\sin\frac{\beta}{2}\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\cos\frac{\beta}{2}\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} \qquad \mu_1^{\,2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$$

gesetzt worden, worin, weil $\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) > 0$ ist,

$$0 < \mu^2 < \lambda^2 < \varkappa^2 < 1,$$

das folgende Resultat

$$U = \sqrt{\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}\sin^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}} \times$$

$$\frac{1}{\sqrt[4]{1-2\varrho\cos\alpha+\varrho^2}}\int_0^{\varphi}\frac{(1-\lambda^2\sin^2\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\varphi)(1-\lambda^2\sin^2\varphi)(1-\mu^2\sin^2\varphi)}}$$

$$U' = \sqrt{\frac{\sin^3\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}\sin^3\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}} \times$$

$$\frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\sqrt[4]{1-2\varrho\cos\alpha+\varrho^2}}\int_0^{\varphi}\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\varphi)(1-\lambda^2\sin^2\varphi)(1-\mu^2\sin^2\varphi)}}.$$

Ebenso erhält man, da eine Vertauschung der Grössen $\alpha$ und $\beta$ die drei Grössen $\varkappa^2$, $\lambda^2$, $\mu^2$ in $\mu_1^{\,2}$, $\lambda_1^{\,2}$, $\varkappa_1^{\,2}$ überführt,

$$\frac{1}{2}\int_0^{z_1}\frac{dz}{\sqrt{z(1-z)(1-\sigma e^{\pm i\beta}z)}} = U_1 \pm iU_1',$$

worin

$$U_1 = \sqrt{\frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}} \times$$

$$\frac{1}{\sqrt[4]{1-2\sigma\cos\beta+\sigma^2}}\int_0^{\varphi_1}\frac{(1-\lambda_1^{\,2}\sin^2\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{(1-\mu_1^{\,2}\sin^2\varphi)(1-\lambda_1^{\,2}\sin^2\varphi)(1-\varkappa_1^{\,2}\sin^2\varphi)}}$$

$$U_1' = \sqrt{\frac{\sin^3\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\sin^3\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}} \times$$

$$\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt[4]{1-2\sigma\cos\beta+\sigma^2}}\int_0^{\varphi_1}\frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{(1-\mu_1{}^2\sin^2\varphi)(1-\lambda_1{}^2\sin^2\varphi)(1-\varkappa_1{}^2\sin^2\varphi)}},$$

worin $\varphi_1$ und $\psi_1$ durch eine Gleichung zusammenhängen, die aus der obigen zwischen $\varphi$ und $\psi$ unmittelbar herzuleiten ist.

Setzt man endlich noch die ursprüngliche Variable

$$z = \sin^2\chi,$$

so folgt aus den obigen Substitutionsformeln

$$\sin\chi = \frac{\varkappa}{\sqrt{\varrho}}\sin\varphi\sqrt{\frac{1-\lambda^2\sin^2\varphi}{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}},$$

wobei hervorzuheben dass

$$\frac{\varkappa}{\sqrt{\varrho}} = \frac{\mu}{\lambda},$$

somit die ganze Transformation in $\varkappa$, $\lambda$, $\mu$ ausgedrückt ist, und wir erhalten daher, wenn $\varkappa$, $\lambda$, $\mu$, $\varkappa_1$, $\lambda_1$, $\mu_1$ positiv angenommen werden,

$$\int_0^{\chi}\frac{d\chi}{\sqrt{1-\varrho e^{\pm i\alpha}\sin^2\chi}}$$

$$= \frac{\varkappa}{\sqrt{\varrho}}\int_0^{\varphi}\frac{\left(1-\lambda^2\sin^2\varphi \pm i\,\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}\sin^2\varphi\right)d\varphi}{\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\varphi)(1-\lambda^2\sin^2\varphi)(1-\mu^2\sin^2\varphi)}}.$$

Diese Formeln liefern nun Richelot unmittelbar die Gleichungen der transcendenten Curven, welche die Bilder der genannten Begrenzungsstücke sind. Dem Begrenzungsstück von $x=0$, $y=0$ bis $x=0$, $y=1$ nämlich entspricht das Bild, welches für positive $\varphi$-Werthe durch die Gleichungen

$$u = \frac{\varkappa}{\sqrt{\varrho}}\int_0^{\varphi}\frac{(1-\lambda^2\sin^2\varphi)\,d\varphi}{D\varphi}$$

$$v = \pm\frac{\varkappa\lambda\sqrt{\varkappa^2-\lambda^2}}{\sqrt{\varrho}}\int_0^{\varphi}\frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{D\varphi}$$

bestimmt ist, wenn

$$D\varphi = \sqrt{(1 - \varkappa^2 \sin^2\varphi)(1 - \lambda^2 \sin^2\varphi)(1 - \mu^2 \sin^2\varphi)}$$

gesetzt wird.

Dem Begrenzungsstück von $x = 0$ bis $x = -\infty$ entspricht das Bild, dessen Gleichungen sind,

$$u = \frac{\mu_1}{\sqrt{\sigma}} \int_0^{\varphi_1} \frac{(1 - \lambda_1^2 \sin^2\varphi)\, d\varphi}{D_1 \varphi}$$

$$v = \pm \frac{\mu_1 \lambda_1}{\sqrt{\sigma}} \int_0^{\varphi_1} \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{D_1 \varphi},$$

wenn man

$$D_1 \varphi = \sqrt{(1 - \varkappa_1^2 \sin^2\varphi)(1 - \lambda_1^2 \sin^2\varphi)(1 - \mu_1^2 \sin^2\varphi)}$$

setzt.

Zu dem oben bezeichneten Kreisbogen gehört als Bild das Begrenzungsstück

$$u = \frac{\mu}{\sqrt{\varrho}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \lambda^2 \sin^2\varphi)\, d\varphi}{D\varphi} + \frac{\mu_1}{\sqrt{\sigma}} \int_0^{\varphi_1} \frac{(1 - \lambda_1^2 \sin^2\varphi)\, d\varphi}{D_1 \varphi}$$

$$v = \pm \frac{\varkappa \lambda \sqrt{\varkappa^2 - \lambda^2}}{\sqrt{\varrho}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{D\varphi} \pm \frac{\mu_1 \lambda_1 \sqrt{\mu_1^2 - \lambda_1^2}}{\sqrt{\sigma}} \int_0^{\varphi_1} \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{D_1 \varphi}.$$

Endlich entspricht dem Stück der genannten unendlichen Graden das Bild, dessen Gleichungen

$$u = \frac{\varkappa}{\sqrt{\varrho}} \int_\varphi^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \lambda^2 \sin^2\varphi)\, d\varphi}{D\varphi} + \frac{\mu}{\sqrt{\sigma}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \lambda_1^2 \sin^2\varphi)\, d\varphi}{D_1 \varphi}$$

$$v = \pm \frac{\varkappa \lambda \sqrt{\varkappa^2 - \lambda^2}}{\sqrt{\varrho}} \int_\varphi^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{D\varphi} \pm \frac{\mu_1 \lambda_1 \sqrt{\mu_1^2 - \lambda_1^2}}{\sqrt{\sigma}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{D_1 \varphi}.$$

Es würde noch erübrigen, nicht bloss, wie bisher geschehen, $u$ und $v$ für die Grenze des Flächenstückes sondern für jeden Punkt innerhalb derart zu bestimmen, dass

$$z = x + yi = \sin^2 \operatorname{am}(u + vi, \varkappa)$$

ist.

„Diese Aufgabe hat nun Heine in der angeführten Abhand-
„lung gelöst und zugleich für ein anderes Gebiet, nicht für das
„$xy$-Gebiet, wenn

$$x + yi = \sin^2 \operatorname{am}(u + vi, \varkappa)$$

„sondern für das $xy$-Gebiet, wenn

$$x + yi = \sin \operatorname{am}(u + vi, \varkappa)$$

„gegeben ist, jene vier Grenzlinien direct bestimmt. Es sind die „positive $y$-Halbaxe, die positive $x$-Halbaxe von $x = 0$ bis $x = 1$, „der Bogen einer bestimmten Lemniscate und eine von

$$x + iy = \frac{1}{\varkappa} = \frac{e^{\frac{i\alpha}{2}}}{\varrho}$$

„in's Unendliche laufende Grade, die rückwärts verlängert durch „den Anfangspunkt der Coordinaten geht. Wenn man in unsern „früheren Begrenzungsstücken $x + yi$ für $\sqrt{x + yi}$ also

$$x^2 - y^2 \text{ für } x$$
$$2xy \quad \text{für } y$$

„einführt, so gelangt man in der That zu den Heine'schen."

Dresden. L. Koenigsberger.

---

**Anmerkung zu dem Referate S. 138.**

Die Erweiterung des dort erwähnten Jacobi'schen Satzes ist, wie ich erst später gefunden habe, in anderer Fassung und mit andersartigem Beweise von Liouville gegeben worden in seinem: „Mémoire sur quelques propositions générales de géométrie etc." Journal de Mathématiques Tome VI. 1841.

Leipzig. Ax. Harnack.

---

$$\sum_1^n {}_\alpha \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \int_{z_\alpha} \frac{F_r(t)\, dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_\alpha)^{-1}} - \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \int_\infty \frac{F_r(t)\, dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{t^{-1}} = 0$$

für die Werthe $r = 0, 1, 2, \cdots p - 1$, und

$$\sum_1^n {}_\alpha \left[\frac{F(t) - \varphi(t)}{\sqrt{R(t)}} \int_{z_\alpha} \frac{F_r(t)\, dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_\alpha)^{-1}} - \left[\frac{F(t) - \varphi(t)}{\sqrt{R(t)}} \int_\infty \frac{F_r(t)\, dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{t^{-1}} = 0$$

für die Werthe $r = p, p + 1, \cdots 2p - 1$; sind alle diese Bedingungen erfüllt, so ist der Werth des algebraischen Theiles jenes hyperelliptischen Integrales

$$\left\{\sum_1^n {}_\alpha \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \int_{z_\alpha} \frac{dt}{(t-z)\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_\alpha)^{-1}} - \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \int_\infty \frac{dt}{(t-z)\sqrt{R(t)}}\right]_{t^{-1}}\right\} \sqrt{R(z)},$$

welcher mit $L(z)$ vereinigt die algebraisch-logarithmische Darstellung des gegebenen Integrales liefert.

Dresden. L. Königsberger.

---

**L. Königsberger: Referate aus den hinterlassenen Papieren von F. Richelot. Trigonometrische Form der hyperelliptischen Integrale der ersten, zweiten und dritten Gattung.**

(Der Inhalt der folgenden Mittheilung ist in den Michaelisferien 1874 niedergeschrieben.)

Richelot führt zuerst für die Lösungen $a_1, a_2, \ldots a_{2n}$ des Polynoms $2n^{\text{ten}}$ Grades

$$R(z) = (z - a_1)(z - a_2) \cdots (z - a_{2n})$$

eine Reihe von Moduln, analog dem Modul des elliptischen Integrals, durch folgende Betrachtungen ein. Transformirt man das hyperelliptische Integral durch den linearen Ausdruck

$$\zeta_1 = \frac{z_1 - a_2}{z_1 - a_{2n}} \quad \frac{a_1 - a_{2n}}{a_1 - a_2}$$

oder durch

$$\zeta_2 = \frac{z_2 - a_4}{z_2 - a_{2n}} \quad \frac{a_3 - a_{2n}}{a_3 - a_4}$$

u. s. w. oder endlich durch

$$\zeta_{n-1} = \frac{z_{n-1} - a_{2n-2}}{z_{n-1} - a_{2n}} \quad \frac{a_{2n-1} - a_{2n}}{a_{2n-1} - a_{2n-2}},$$

wodurch den Werthen

$$z_1 = a_2 \quad z_2 = a_4 \cdots\cdots z_{n-1} = a_{2n-2}$$
$$z_1 = a_1 \quad z_2 = a_3 \cdots\cdots z_{n-1} = a_{2n-1}$$
$$z_1 = a_{2n} \quad z_2 = a_{2n} \cdots\cdots z_{n-1} = a_{2n}$$

für die Grössen $\zeta$ sämmtlich resp. die Werthe Null, die Einheit und $\infty$ zugeordnet werden, so erkennt man leicht, dass für die *erste* Transformation sich

$$z_1 = a_3 \qquad \frac{1}{\zeta_1} = \frac{a_3 - a_{2n}}{a_3 - a_2} \frac{a_1 - a_2}{a_1 - a_{2n}} = k_{13}^2$$

$$z_1 = a_4 \qquad \frac{1}{\zeta_1} = \frac{a_4 - a_{2n}}{a_4 - a_2} \frac{a_1 - a_2}{a_1 - a_{2n}} = k_{14}^2$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$z_1 = a_{2n-1} \qquad \frac{1}{\zeta_1} = \frac{a_{2n-1} - a_{2n}}{a_{2n-1} - a_2} \frac{a_1 - a_2}{a_1 - a_{2n}} = k_{1\,2n-1}^2$$

entsprechen, für die *zweite* Transformation

$$z_2 = a_5 \qquad \frac{1}{\zeta_2} = \frac{a_5 - a_{2n}}{a_5 - a_4} \frac{a_3 - a_4}{a_3 - a_{2n}} = k_{35}^2$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$z_2 = a_{2n-1} \qquad \frac{1}{\zeta_2} = \frac{a_{2n-1} - a_{2n}}{a_{2n-1} - a_4} \frac{a_3 - a_4}{a_3 - a_{2n}} = k_{3\,2n-1}^2$$

$$z_2 = a_1 \qquad \frac{1}{\zeta_2} = \frac{a_1 - a_{2n}}{a_1 - a_4} \frac{a_3 - a_4}{a_3 - a_{2n}} = k_{31}^2$$

$$z_2 = a_2 \qquad \frac{1}{\zeta_2} = \frac{a_2 - a_{2n}}{a_2 - a_4} \frac{a_3 - a_4}{a_3 - a_{2n}} = k_{32}^2,$$

u. s. w. endlich für die letzte

$$z_{n-1} = a_1 \qquad \frac{1}{\zeta_{n-1}} = \frac{a_1 - a_{2n}}{a_1 - a_{2n-2}} \frac{a_{2n-1} - a_{2n-2}}{a_{2n-1} - a_{2n}} = k_{2n-3\,1}^2$$

$$z_{n-1} = a_2 \qquad \frac{1}{\zeta_{n-1}} = \frac{a_2 - a_{2n}}{a_2 - a_{2n-2}} \frac{a_{2n-1} - a_{2n-2}}{a_{2n-1} - a_{2n}} = k_{2n-3\,2}^2$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$z_{n-1} = a_{2n-3} \qquad \frac{1}{\zeta_{n-1}} = \frac{a_{2n-3} - a_{2n}}{a_{2n-3} - a_{2n-2}} \frac{a_{2n-1} - a_{2n-2}}{a_{2n-1} - a_{2n}} = k_{2n-3\,2n-3}^2;$$

diese $(n-1)(2n-3)$ Werthe $k^2$ werden Moduln genannt und vor

Allem die Beziehungen, die zwischen ihnen stattfinden, aufgesucht. Mit Hülfe der Substitution

$$a'_h = \frac{1}{a_h - a_{2n}}$$

erhält man leicht die Ausdrücke

$$k^2_{1h} = \frac{a'_2 - a'_1}{a'_2 - a'_h}, \quad k^2_{3h} = \frac{a'_4 - a'_3}{a'_4 - a'_h}, \; \ldots\ldots \; k^2_{2n-3h} = \frac{a'_{2n-2} - a'_{2n-3}}{a'_{2n-2} - a'_h}$$

und somit, wenn $h$ und $i$ weder 1 noch 2 sind,

$$a'_h - a'_2 = \frac{a'_1 - a'_2}{k^2_{1h}}, \quad a'_i - a'_2 = \frac{a'_1 - a'_2}{k^2_{1i}}$$

also

$$a'_i - a'_h = (a'_1 - a'_2)\left(\frac{1}{k^2_{1i}} = \frac{1}{k^2_{1h}}\right);$$

daraus ergiebt sich aber sofort für alle von 1 und 2 verschiedenen $h$

$$k^2_{3h} = \frac{k^2_{14} - k^2_{13}}{k^2_{14} - k^2_{1h}} \; \frac{k^2_{1h}}{k^2_{13}},$$

$$k^2_{5h} = \frac{k^2_{16} - k^2_{15}}{k^2_{16} - k^2_{1h}} \; \frac{k^2_{1h}}{k^2_{15}}, \; \ldots\ldots \; k^2_{2n-3h} = \frac{k^2_{12n-2} - k^2_{12n-3}}{k^2_{12n-2} - k^2_{1h}} \; \frac{k^2_{1h}}{k^2_{12n-2}}.$$

Um den Fall $h = 1$ und $= 2$ zu erledigen, beachte man, dass

$$k^2_{32} = \frac{a'_4 - a'_3}{a'_4 - a'_2}, \quad k^2_{31} = \frac{a'_4 - a'_3}{a'_4 - a'_1}$$

ist und dass, wenn oben $h = 4$, $i = 3$ gesetzt wird,

$$a'_3 - a'_4 = (a'_1 - a'_2)\left(\frac{1}{k^2_{13}} - \frac{1}{k^2_{14}}\right) \text{ und } a'_4 - a'_1 = (a'_1 - a'_2)\left(\frac{1}{k^2_{14}} - 1\right)$$

wird, so dass

$$k^2_{32} = \frac{k^2_{13} - k^2_{14}}{k^2_{13}}, \qquad k^2_{31} = \frac{k^2_{13} - k^2_{14}}{k^2_{13}\left(1 - k^2_{14}\right)}$$

und ähnlich

$$k^2_{52} = \frac{k^2_{15} - k^2_{16}}{k^2_{15}}, \qquad k^2_{51} = \frac{k^2_{15} - k^2_{16}}{k^2_{15}\left(1 - k^2_{16}\right)}$$

u. s. w., endlich

$$k^2_{2n-32} = \frac{k^2_{12n-3} - k^2_{12n-2}}{k^2_{12n-3}}, \quad k^2_{2n-31} = \frac{k^2_{12n-3} - k^2_{12n-2}}{k^2_{12n-3}\left(1 - k^2_{12n-2}\right)}$$

folgen. Somit sind *sämmtliche* Moduln durch die Modulreihe

$$k_{13}{}^2, k_{14}{}^2, \ldots . k_{12n-1}^2$$

ausgedrückt, also durch $2n-3$ Moduln, die offenbar von einander unabhängig sind, da sie ausser $a_1'$ und $a_2'$ jeder eine andere Grösse $a_3', a_4', .. a_{2n-1}'$ enthalten und diese von einander unabhängige Grössen vorstellen.

Richelot stellt sich nun die Aufgabe, die hyperelliptischen Integrale erster, zweiter und dritter Gattung mit Hülfe der oben eingeführten Moduln in trigonometrische Form umzusetzen und zwar definirt derselbe als Integrale erster, zweiter und dritter Gattung nach Herrn Weierstrass (Theorie der Abel'schen Functionen, Journal für Mathematik) die Integrale

$$\int \frac{dz}{z-a_{2h}} \left(\frac{P(z)}{Q(z)}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \int \frac{dz}{z-a_{2h-1}} \left(\frac{P(z)}{Q(z)}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \int \frac{dz}{z-a} \left(\frac{P(z)}{Q(z)}\right)^{\frac{1}{2}},$$

worin

$$P(z) = -a_{2n}(z-a_2)(z-a_4) \ldots . (z-a_{2n-2})$$
$$Q(z) = (z-a_1)(z-a_3) \ldots . (z-a_{2n-1})(z-a_{2n})$$

und $a$ eine willkürliche Zahl ist. Ich will bemerken, um eine Vergleichung mit den von Riemann definirten Integralen der drei Gattungen zu gestatten, dass die von Richelot aufgenommenen Integrale *erster* Gattung

$$\int_{a_{2p}}^{z_p} \frac{dz_p}{z_p-a_2} \left(\frac{P(z_p)}{Q(z_p)}\right)^{\frac{1}{2}}, \int_{a_{2p}}^{z_p} \frac{dz_p}{z_p-a_4} \left(\frac{P(z_p)}{Q(z_p)}\right)^{\frac{1}{2}}, \ldots . . \int_{a_{2p}}^{z_p} \frac{dz_p}{z_p-a_{2n-2}} \left(\frac{P(z_p)}{Q(z_p)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

für *alle* Punkte der zu $\sqrt{R(z)}$ gehörigen Riemann'schen Fläche endlich sind, die Integrale *zweiter* Gattung

$$\int_{a_{2p}}^{z_p} \frac{dz_p}{z_p-a_1} \left(\frac{P(z_p)}{Q(z_p)}\right)^{\frac{1}{2}}, \int_{a_{2p}}^{z_p} \frac{dz_p}{z_p-a_3} \left(\frac{P(z_p)}{Q(z_p)}\right)^{\frac{1}{2}}, \ldots . . \int_{a_{2p}}^{z_p} \frac{dz_p}{z_p-a_{2n-1}} \left(\frac{P(z_p)}{Q(z_p)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

nur in den resp. Verzweigungspunkten $a_1, a_3, \ldots . a_{2n-1}$ algebraisch unendlich und zwar von der $-\frac{1}{2}$ten Ordnung werden, während endlich die Integrale *dritter* Gattung

$$\int_{a_{2p}}^{z_p} \frac{dz_p}{z_p-a} \left(\frac{P(z_p)}{Q(z_p)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

nur im Punkte $z = a$ und zwar auf beiden Blättern logarithmisch unendlich werden.

Setzt man nach Richelot

$$\zeta_1 = \sin^2\varphi_1 = \frac{z_1 - a_2}{z_1 - a_{2n}} \quad \frac{a_1 - a_{2n}}{a_1 - a_2}$$

$$\zeta_2 = \sin^2\varphi_2 = \frac{z_2 - a_4}{z_2 - a_{2n}} \quad \frac{a_3 - a_{2n}}{a_3 - a_4}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\zeta_{n-1} = \sin^2\varphi_{n-1} = \frac{z_{n-1} - a_{2n-2}}{z_{n-1} - a_{2n}} \cdot \frac{a_{2n-1} - a_{2n}}{a_{2n-1} - a_{2n-2}}$$

und führt zuerst die erste Transformation durch, welche mit Weglassung des Index 1 bei $z$ und $\varphi$ die Form hat

$$\frac{z - a_2}{z - a_{2n}} \quad \frac{a_1 - a_{2n}}{a_1 - a_2} = \sin^2\varphi,$$

so folgt durch logarithmisches Differentiiren

$$\frac{2\cos\varphi}{\sin\varphi}\, d\varphi = (a_2 - a_{2n}) \frac{dz}{(z - a_2)(z - a_{2n})}$$

oder

$$2d\varphi = \sqrt{-(a_1 - a_{2n})(a_2 - a_{2n})}\, \frac{dz}{z - a_2} \left(\frac{z - a_2}{z - a_1}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{z - a_{2n}}$$

wofür, weil

$$\left(\frac{P(z)}{Q(z)}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{(z - a_2)(z - a_4) \cdots\cdots (z - a_{2n-2})}{(z - a_1)(z - a_3) \cdots\cdots (z - a_{2n-1})} \cdot \frac{-a_{2n}}{z - a_{2n}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

ist, auch

$$\left(\frac{a_{2n}}{(a_1 - a_{2n})(a_2 - a_{2n})}\right)^{\frac{1}{2}} 2d\varphi \left(\frac{(z - a_4)\cdots\cdots(z - a_{2n})}{(z - a_3)\cdots\cdots(z - a_{2n-1})}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{dz}{z - a_2}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

gesetzt werden kann.

Beachtet man nun aber, dass, weil

$$\frac{z - a_{2h}}{z - a_{2h-1}} = C_h \cdot \frac{1 - k_{12h}^2 \sin^2\varphi}{1 - k_{12h-1}^2 \sin^2\varphi}$$

sein muss und sich hieraus wegen der entsprechenden Werthe $z = a_2$, $\varphi = 0$

$$C_h = \frac{a_2 - a_{2h}}{a_2 - a_{2h-1}}$$

ergiebt,

$$\frac{z - a_{2h}}{z - a_{2h-1}} = \frac{a_2 - a_{2h}}{a_2 - a_{2h-1}} \quad \frac{1 - k_{12h}^2 \sin^2\varphi}{1 - k_{12h-1}^2 \sin^2\varphi}$$

folgt, so wird jeder Factor des obigen Ausdruckes für $h = 2, 4, \cdots 2n-1$ trigonometrisch umgeformt sein, nur für $h = n$ wird, wie leicht zu sehen,

$$\frac{z - a_{2n}}{z - a_{2n-1}} = \frac{a_2 - a_{2n}}{a_2 - a_{2n-1}} \quad \frac{1}{1 - k_{12n-1}^2 \sin^2\varphi}$$

sein, und man wird somit auch den vorher gefundenen Ausdruck gelten lassen können, wenn man nur $k_{12n} = 0$ setzt; man erhält somit

$$\frac{(z-a_4)(z-a_6)\cdots(z-a_{2n})}{(z-a_3)(z-a_5)\cdots(z-a_{2n-1})} = \prod_2^n{}^h \left(\frac{a_2 - a_{2h}}{a_2 - a_{2h-1}}\right) \prod_2^n{}^h \left(\frac{1 - k_{12h}^2 \sin^2\varphi}{1 - k_{12h-1}^2 \sin^2\varphi}\right),$$

so dass sich, wenn

$$2\,\frac{a_{2n}}{a_1 - a_{2n}} \left(\frac{(a_2 - a_4)(a_2 - a_6)\cdots(a_2 - a_{2n-2})}{(a_2 - a_3)(a_2 - a_5)\cdots(a_2 - a_{2n-1})}\right)^{\frac{1}{2}} = M_{12}$$

gesetzt wird, mit Wiedereinführung der Grössen $z_1$ und $\varphi_1$ der gesuchte Ausdruck

$$\int_{a_2}^{z_1} \frac{dz_1}{z_1 - a_2} \left(\frac{P(z_1)}{Q(z_1)}\right)^{\frac{1}{2}} = M_{12} \int_0^{\varphi_1} d\varphi_1 \prod_2^n{}^h \left(\frac{1 - k_{12h}^2 \sin^2\varphi_1}{1 - k_{12h-1}^2 \sin^2\varphi_1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

ergiebt. Zur Umformung des Integrales

$$\int_{a_2}^{z_1} \frac{dz_1}{z_1 - a_{2r-2}} \left(\frac{P(z_1)}{Q(z_1)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

braucht man nur vor der Integration die obige Gleichung mit

$$\frac{z_1 - a_2}{z_1 - a_{2r-2}} = C_{2r-2}\,\frac{\sin^2\varphi_1}{1 - k_{12r-2}^2 \sin^2\varphi_1}$$

zu multipliciren, in welcher offenbar

$$C_{2r-2} = -k_{12r-2}^2\,\frac{a_{2n} - a_2}{a_{2n} - a_{2r-2}}$$

sein muss, und erhält somit

$$\int_{a_2}^{z_1} \frac{dz_1}{z_1 - a_{2r-2}} \left(\frac{P(z_1)}{Q(z_1)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{a_{2n} - a_2}{a_{2n} - a_{2r-2}}\, M_{12} \int_0^{\varphi_1} \frac{k_{12r-2}^2 \sin^2\varphi_1\, d\varphi_1}{1 - k_{12r-2}^2 \sin^2\varphi_1} \prod_2^n{}^h \left(\frac{1 - k_{12h}^2 \sin^2\varphi_1}{1 - k_{12h-2}^2 \sin^2\varphi_1}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

In dem Falle, dass $R(z)$ nur $2n-1$ lineare Factoren hat, ändert sich nichts als dass man überall $a_{2n}=\infty$ zu setzen und den Grenzwerth zu nehmen hat, wobei die Factoren

$$\frac{a_{2n}-a_2}{a_{2n}-a_{2r}}$$

der Einheit gleich werden.

Um nun die übrigen Integrale erster Gattung in $z_2, z_3, \ldots z_{n-1}$ ebenso umzuformen, hat man nur nöthig die Indices

$$1,\ 3,\ 5, \ldots .\ 2n-3,\ 2n-1$$

und die Indices

$$2,\ 4,\ 6, \ldots .\ 2n-4,\ 2n-2$$

cyclisch zu vertauschen, und erhält allgemein

$$\int_{a_{2p}}^{z_p} \frac{dz_p}{z_p-a_{2r}} \left(\frac{P(z_p)}{Q(z_p)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=-\frac{a_{2n}-a_{2p}}{a_{2n}-a_{2r}} M_{2p-1\,2p} \int_0^{\varphi_p} \frac{k^2_{2p-1\,2r}\sin^2\varphi_p\, d\varphi_p}{1-k^2_{2p-1\,2r}\sin^2\varphi_p} \prod_{1\ (p)}^{n}{}_h \left(\frac{1-k^2_{2p-1\,2h}\sin^2\varphi_p}{1-k^2_{2p-1\,2h-1}\sin^2\varphi_p}\right)^{\frac{1}{2}};$$

so sind $(n-1)^2$ Integrale erster Gattung in die canonische Form umgesetzt.

Die hyperelliptischen Integrale zweiter Gattung werden ebenso einfache Formen annehmen; man braucht nur vor der Integration der ersten Reihe mit

$$\frac{z_1-a_2}{z_1-a_{2r-1}}=-\frac{a_{2n}-a_2}{a_{2n}-a_{2r-1}}\ \frac{k^2_{12r-1}\sin^2\varphi_1}{1-k^2_{12r-1}\sin^2\varphi_1}$$

zu multipliciren und erhält

$$\int_{a_2}^{z_1} \frac{dz_1}{z_1-a_{2r-1}} \left(\frac{P(z_1)}{Q(z_1)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=-\frac{a_{2n}-a_2}{a_{2n}-a_{2r-1}} M_{12} \int_0^{\varphi_1} \frac{k^2_{12r-1}\sin^2\varphi_1\, d\varphi_1}{1-k^2_{12r-1}\sin^2\varphi_1} \prod_2^n{}_h \left(\frac{1-k^2_{12h}\sin^2\varphi_1}{1-k^2_{12h-1}\sin^2\varphi_1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

oder wieder durch cyclische Vertauschung der Indices

$$\int\limits_{a_{2p}}^{z_p} \frac{dz_p}{z_p - a_{2r-1}} \left(\frac{P(z_p)}{Q(z_p)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{a_{2n}-a_{2p}}{a_{2n}-a_{2r-1}} M_{2p-1\,2p} \int\limits_0^{\varphi_p} \frac{k^2_{2p-1\,2r-1} \sin^2\varphi_p}{1 - k^2_{2p-1\,2r-1} \sin^2\varphi_p} \prod_1^n {}_{(p)} \left(\frac{1 - k^2_{2p-1\,2h} \sin^2\varphi_p}{1 - k^2_{2p-1\,2h-1} \sin^2\varphi_p}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Um, endlich das hyperelliptische Integral dritter Gattung umzuformen, wird man vor der Integration der ersten Reihe mit

$$\frac{z_1 - a_2}{z_1 - a}$$

zu multipliciren haben; es mögen

$$z_1 = a \quad \text{und} \quad \zeta_1 = \frac{1}{k^2_{12} \sin^2\alpha_{12}}$$

vermöge der Substitution

$$\frac{z_1 - a_2}{z_1 - a_{2n}} \cdot \frac{a_1 - a_{2n}}{a_1 - a_2} = \zeta_1$$

entsprechende Werthe sein, so dass

$$\sin^2\alpha_{12} = \frac{1}{k^2_{12}} \frac{a - a_{2n}}{a - a_2} \frac{a_1 - a_2}{a_1 - a_{2n}}$$

wird, dann ergiebt sich

$$\frac{z_1 - a_2}{z_1 - a} = C \frac{\sin^2\varphi_1}{1 - k^2_{12} \sin^2\alpha_{12} \sin^2\varphi_1}$$

und daraus

$$\frac{a_{2n} - a_2}{a_{2n} - a} = -\frac{C}{k^2_{12} \sin^2\alpha_{12}},$$

so dass

$$\frac{z_1 - a_2}{z_1 - a} = -\sin^2\alpha_{12} \frac{a_{2n} - a_2}{a_{2n} - a} \frac{k^2_{12} \sin^2\varphi_1}{1 - k^2_{12} \sin^2\alpha_{12} \sin^2\varphi_1}$$

folgt. Bedenkt man ferner dass

$$\frac{a - a_2}{a - a_{2n}} = \frac{1}{k^2_{12} \sin^2\alpha_{12}} \cdot \frac{a_1 - a_2}{a_1 - a_{2n}} = 1 - \frac{a_2 - a_{2n}}{a - a_{2n}}$$

ist, so folgt mit Benutzung aller dieser Werthe

$$\int\limits_{a_2}^{z_1} \frac{dz_1}{z_1 - a} \left(\frac{P(z_1)}{Q(z_1)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{1}{1 - \frac{1}{k^2_{12} \sin^2\alpha_{12}} \cdot \frac{a_1 - a_2}{a_1 - a_{2n}}} M_{12} \int\limits_0^{\varphi_1} \frac{k^2_{12} \sin^2\alpha_{12} \sin^2\varphi_1 \, d\varphi_1}{1 - k^2_{12} \sin^2\alpha_{12} \sin^2\varphi_1} \prod_2^n {}_h \left(\frac{1 - k^2_{12h} \sin^2\varphi_1}{1 - k^2_{12h-1} \sin^2\varphi_1}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

und wieder allgemein

$$\int_{a_{2p}}^{z_p} \frac{dz_p}{z_p - a}\left(\frac{P(z_p)}{Q(z_p)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{1}{1-\frac{1}{k^2_{2p-1\,2p}\sin^2\alpha_{2p-1\,2p}}\cdot\frac{a_{2p-1}-a_{2p}}{a_{2p-1}-a_{2n}}}\, M_{2p-1\,2p}\int_0^{\varphi_p}\frac{k^2_{2p-1}\sin^2\alpha_{2p-1\,2p}\sin^2\varphi_p\,d\varphi_p}{1-k^2_{2p-1\,2p}\sin^2\alpha_{2p-1\,2p}\sin^2\varphi_p}$$

$$\times \prod_{1}^{n}{}^{h}_{(p)}\left(\frac{1-k^2_{2p-1\,2h}\sin^2\varphi_p}{1-k^2_{2p-1\,2h-1}\sin^2\varphi_p}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Alle diese Transformationsformeln gelten auch für den Fall, dass $R(z)$ vom $2n-1^{\text{ten}}$ Grade ist, wenn man nur $a_{2n}=\infty$ setzt und zu den Grenzwerthen übergeht.

Dresden. L. Königsberger.

---

Berichtigung:

p. 132 vorletzte Zeile: statt Maudel'schen lies Mandel'schen.