Heidelberger Texte zur Mathematikgeschichte

Autor: **Hunrath, Karl** (1847 – nach 1908)

Titel: **Albrecht Dürers annähernde Dreiteilung eines Kreisbogens.**

Quelle: Quelle: Bibliotheca mathematica.
3. Folge, Band 7 (1906),
Seite 120 – 125.
Signatur UB Heidelberg: L 15-7::3.F: 7.1906

Das fragliche Verfahren Dürers wird zuerst auseinandergesetzt und dann auf seine Genauigkeit rechnerisch geprüft. Es ergiebt sich dabei, daß die Reihe für $\sin\frac{1}{3}\alpha$, die man aus der Dürerschen Konstruktion erhält, in den drei ersten Gliedern mit der richtigen Reihe übereinstimmt, und daß also die Fehler für kleine Werte des Bogens unbedeutend sind; für den Wert 150° betragen die Fehler für die drei Teile bzw. etwa 9', 18', 9'.

(Rezension von Gustaf Eneström (1852–1923) im *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, Band 37, 1906)

BIBLIOTHECA MATHEMATICA.

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN.

HERAUSGEGEBEN VON

GUSTAF ENESTRÖM
IN STOCKHOLM.

DRITTE FOLGE. SIEBENTER BAND.

MIT BILDNISSEN VON LEONHARD EULER ALS TITELBILD,
SOWIE 38 TEXTFIGUREN.

LEIPZIG
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1906—1907.

Albrecht Dürers annähernde Dreiteilung eines Kreisbogens.

Von KARL HUNRATH in Kassel.

In dieser Zeitschrift habe ich mich kürzlich mit ALBRECHT DÜRERS Näherungskonstruktionen regelmäßiger Vielecke beschäftigt[1]). Mir hatte damals nur die lateinische Ausgabe von 1532 vorgelegen. Inzwischen habe ich die deutsche Urausgabe von 1525 einsehen können (S. 8 u. 9 des mit E bezeichneten 5ten Bogens) und mich überzeugt, daß die Beschreibung und die Ausführung der Konstruktion des regelmäßigen Dreizehnecks in beiden Ausgaben durchaus übereinstimmen, daß in beiden Ausgaben die Figur den im Texte nicht erklärten Buchstaben *c* und zwischen den Buchstaben *c* und *b* die gleichfalls im Texte nicht erklärte Zahl 24 aufweist.

Nun möchte ich DÜRERS Dreiteilung eines Kreisbogens untersuchen.

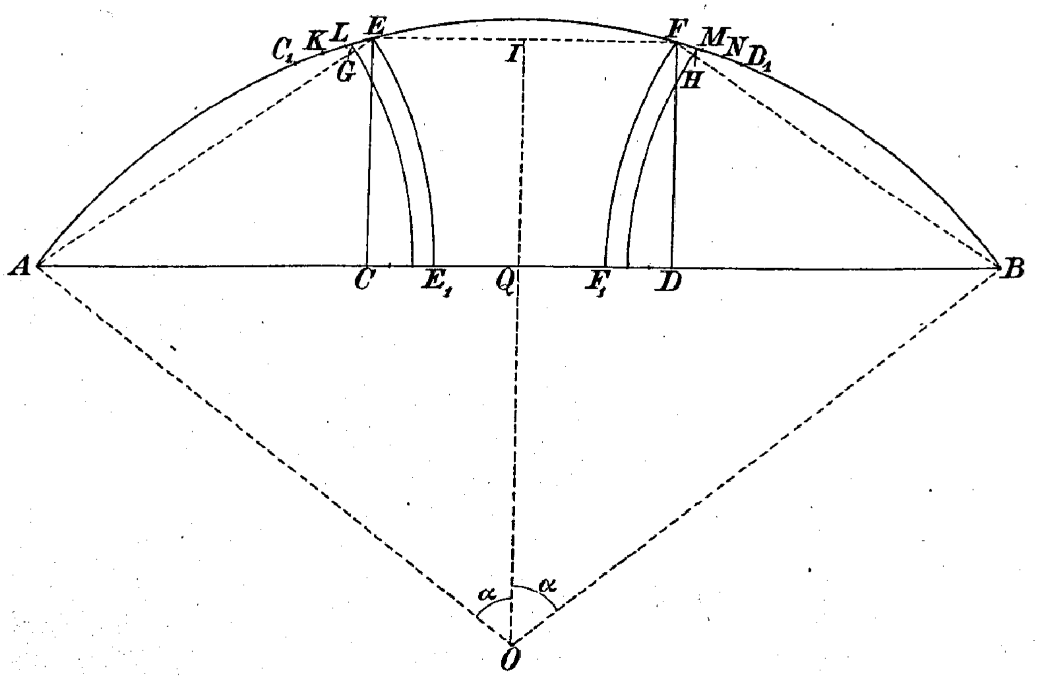

Fig. 1.

1) Siehe Biblioth. Mathem. 6_3, 1905, S. 249—251. — S. 251, Z. 8 bitte ich zu lesen *fa* statt *ef*, Z. 16 *eaf* statt *eab*, Z. 20 — *0,007* statt — *0,07* und + *0,003* statt + *0,03*.

Es sei (Fig. 1) die zum gegebenen Kreisbogen gehörige Sehne AB in den Punkten C und D in drei gleiche Teile geteilt, es seien auf AB in C und D die Senkrechten errichtet und bis zum Durchschnitte mit dem Bogen verlängert (E und F). Es sei $AE_1 = AE$, $BF_1 = BF$ gemacht, es seien CE_1 und DF_1 in drei gleiche Teile geteilt, endlich sei Sehne $AG = AC + \frac{2}{3} CE_1$, Sehne $BH = BD + \frac{2}{3} DF_1$ gemacht. Dann wird behauptet, daß annähernd die Bogen AG, GH, HB einander gleich seien. — So weit DÜRER.

Zum Beweise mache Sehne $AC_1 = AC$, $BD_1 = BD$, also jede $= EF$. Angenommen werde, die Bogen C_1E und D_1F seien in drei gleiche Teile geteilt, C_1E in den Punkten K und L, D_1F in den Punkten M und N. Man denke sich ferner die Sehne C_1E und die Sehnen $C_1K = KL = LE = n$ gezogen.

Nun ist $C_1E > AE - AC_1$, also $> CE_1$, ferner $C_1K + KL + LE = 3n$ ist $> C_1E$, also erst recht $> CE_1$, mithin $C_1K + KL > \frac{2}{3} C_1E > \frac{2}{3} CE_1$, sagen wir $= \frac{2}{3} CE_1 + d_1 + d_2$, Sehne C_1L aber $< C_1K + KL$, sagen wir $= \frac{2}{3} CE_1 + d_1 + d_2 - d_3$. Es ist weiter $C_1G > AG - AC_1$, d. h. $> \frac{2}{3} CE_1$, sagen wir $= \frac{2}{3} CE_1 + d_4$. Die mit d bezeichneten Strecken nehmen mit abnehmendem $\sphericalangle AOB$ rasch ab. Es können daher bei mäßiger Größe des Bogens C_1E sowohl die Sehnen C_1L und C_1G, als auch die zugehörigen Bogen nur geringen Unterschied zeigen, ebenso die Bogen AL und AG. Bogen AL aber ist nach Annahme ein Drittel des Bogens AB.

Zur rechnerischen Prüfung fälle $OJ \perp AB$ in Q.

Es ist nach Konstr. $AG = AC + \frac{2}{3} CE_1 = AC + \frac{2}{3}(AE - AC) = \frac{AC + 2AE}{3}$. Ferner ist nach Konstr., wenn man $\sphericalangle AOB$ mit 2α bezeichnet und den Kreishalbmesser $= 1$ setzt, $AC = \frac{2}{3} \sin \alpha$ und

$$\overline{AE}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CE}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{JQ}^2 = \tfrac{4}{9} \sin^2 \alpha + \overline{JQ}^2.$$

Da $EJ = CQ = \frac{1}{3} \sin \alpha$ und $OQ = \cos \alpha$ ist, so ergibt sich JQ aus der Gleichung

$$(JQ + \cos \alpha)^2 = 1 - \tfrac{1}{9} \sin^2 \alpha \quad , \quad \text{mithin } JQ = -\cos \alpha + \sqrt{1 - \tfrac{1}{9} \sin^2 \alpha}$$

und

$$AE = \tfrac{1}{3} \sqrt{6\,(3 - \sin^2 \alpha - \cos \alpha \sqrt{9 - \sin^2 \alpha})},$$

also

$$AG = \tfrac{2}{9} \left[\sin \alpha + \sqrt{6\,(3 - \sin^2 \alpha - \cos \alpha \sqrt{9 - \sin^2 \alpha})}\right]$$

oder auch

$$AG = \tfrac{2}{9} \left[\sin \alpha + \sqrt{6\,(2 + \cos^2 \alpha - \cos \alpha \sqrt{8 + \cos^2 \alpha})}\right].$$

Zu dem gleichen Ergebnis kommt STAIGMÜLLER[1]) in Berichtigung der von GÜNTHER[2]) angestellten Berechnung.

Es ist aber

$$\sqrt{6\,(3-\sin^2\alpha-\cos\alpha\,\sqrt{9-\sin^2\alpha})} =$$
$$\sqrt{3\,(3+2\sin\alpha-\sin^2\alpha)}-\sqrt{3\,(3-2\sin\alpha-\sin^2\alpha)},$$

also

$$AG=\tfrac{2}{9}\left[\sin\alpha+\sqrt{3\,(3+2\sin\alpha-\sin^2\alpha)}-\sqrt{3\,(3-2\sin\alpha-\sin^2\alpha)}\right]$$

und

$$\mathrm{I}\ldots\sin\tfrac{1}{2}\,AOG=\tfrac{1}{9}\left[\sin\alpha+\sqrt{3\,(3+2\sin\alpha-\sin^2\alpha)}\right.$$
$$\left.-\sqrt{3\,(3-2\sin\alpha-\sin^2\alpha)}\right].$$

Nun ist

$$\sqrt{9\pm 6\sin\alpha-3\sin^2\alpha}$$
$$=3\pm\sin\alpha-\tfrac{2}{3}\sin^2\alpha+\tfrac{2}{9}\sin^3\alpha-\tfrac{4}{27}\sin^4\alpha\pm\tfrac{8}{81}\sin^5\alpha-\tfrac{2}{27}\sin^6\alpha$$
$$\pm\tfrac{14}{243}\sin^7\alpha-\ldots,$$

also

$$\sqrt{3\,(3+2\sin\alpha-\sin^2\alpha)}-\sqrt{3\,(3-2\sin\alpha-\sin^2\alpha)}$$
$$=2\sin\alpha+\tfrac{4}{9}\sin^3\alpha+\tfrac{16}{81}\sin^5\alpha+\tfrac{28}{243}\sin^7\alpha+\ldots$$

und

$$\mathrm{II}\ldots\sin\tfrac{1}{2}\,AOG=\tfrac{1}{3}\sin\alpha+\tfrac{4}{81}\sin^3\alpha+\tfrac{16}{729}\sin^5\alpha+\tfrac{28}{2187}\sin^7\alpha+\ldots$$

Nach der Reihe für $\sin n\alpha$ aber erhält man

$$\sin\frac{\alpha}{3}=\tfrac{1}{3}\sin\alpha+\tfrac{4}{81}\sin^3\alpha+\tfrac{16}{729}\sin^5\alpha+\tfrac{256}{19683}\sin^7\alpha+\ldots$$

Die beiden Reihen stimmen in den ersten drei Gliedern überein, der Unterschied der vierten Glieder ist

$$-\frac{4}{19683}\sin^7\alpha.$$

Für kleine Werte von 2α ist daher die Abweichung unbedeutend. Für $\sin\alpha=0{,}3$, also $2\alpha=34^0\ 54'\ 55'',7$ ist sie nur $-\tfrac{4}{9}\cdot 0{,}0000001$. Die zweite Reihe ergibt, da sie nur aus positiven Gliedern besteht, an irgend einer Stelle abgebrochen, stets einen Näherungswert unter dem wahren Werte.

Aus der Formel I ergibt sich für $2\alpha=180^0$

$$\sin\tfrac{1}{2}\,AOG=\frac{1+2\sqrt{3}}{9}.$$

Setzt man für $\sqrt{3}$ den Näherungswert $\tfrac{7}{4}$ ein, so ergibt sich $\sin\tfrac{1}{2}\,AOG=\tfrac{1}{2}$. Da aber $\sqrt{3}<\tfrac{7}{4}$ ist, so ergibt sich $\sin\tfrac{1}{2}\,AOG<\tfrac{1}{2}$, $\sphericalangle AOG<60^0$. Es ist $\frac{1+2\sqrt{3}}{9}=0{,}4960113$, $\sphericalangle\tfrac{1}{2}\,AOG=29^0\ 44'\ 11'',12$, $\sphericalangle AOG=59^0$

1) H. STAIGMÜLLER, *Dürer als Mathematiker*, Stuttgart 1891, S. 26, Anm. 1.

2) S. GÜNTHER, *Die geometrischen Näherungskonstruktionen* ALBRECHT *Dürers*, Ansbach 1886, S. 14ff.

$28' 22'', 24 = HOB$, $\sphericalangle GOH = 61^0\ 3'\ 15'', 52$. Für den $\sphericalangle GOH$ ist daher der absolute Fehler $1^0\ 3'\ 15'', 52 = 3795'', 52$, der relative $\frac{3795{,}92}{216000} < \frac{1}{56}$, für jeden der Winkel AOG und HOB aber halb so groß mit entgegengesetztem Vorzeichen.

Für $2\alpha = 150^0$ ergibt sich

$$\sin \tfrac{1}{2} AOG = \tfrac{1}{18}\left[\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{3\left(10-\sqrt{3}+4\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)} - \sqrt{3\left(10-\sqrt{3}-4\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)}\right],$$

oder auch

$$= \tfrac{1}{36}\left[\sqrt{6}+\sqrt{2}+2\sqrt{3\left(10-\sqrt{3}+2\left[\sqrt{6}+\sqrt{2}\right]\right)} - 2\sqrt{3\left(10-\sqrt{3}-2\left[\sqrt{6}+\sqrt{2}\right]\right)}\right].$$

Die Rechnung ergibt 0,4214232, während $\sin 25^0 = 0{,}4226183$ ist. Man findet $\sphericalangle \frac{1}{2} AOG = 24^0\ 55'\ 28'', 1$, $AOG = 49^0\ 50'\ 56'', 2$, $GOH = 50^0\ 18'\ 7'', 6$, den relativen Fehler für $\sphericalangle GOH < \frac{1}{165}$.

Für $2\alpha = 135^0$ ergibt sich

$$\sin \tfrac{1}{2} AOG = \tfrac{1}{18}\left[\sqrt{2+\sqrt{2}} + \sqrt{3\left(10-\sqrt{2}+4\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)} - \sqrt{3\left(10-\sqrt{2}-4\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)}\right] = 0{,}3820962,$$

während $\sin 22^0\ 30' = 0{,}3826834$ ist. Man findet $\frac{1}{2} AOG = 22^0\ 27'\ 48'', 9$, $\sphericalangle AOG = 44^0\ 55'\ 37'', 8$, $\sphericalangle GOH = 45^0\ 8'\ 44'', 4$ und den relativen Fehler für $GOH < \frac{1}{308}$.

Für $2\alpha = 120^0$ ist

$$\sin \tfrac{1}{2} AOG = \tfrac{1}{18}\left[\sqrt{3}+\sqrt{3(9+4\sqrt{3})}-\sqrt{3(9-4\sqrt{3})}\right] = 0{,}3417569\ldots$$

($\sin 20^0 = 0{,}3420201$)... $\sphericalangle AOG = 39^0\ 58'\ 4'', 42$, $\sphericalangle GOH = 40^0\ 3'\ 51'', 16$ und der relative Fehler für $\sphericalangle GOH < \frac{1}{624}$.

Für $2\alpha = 108^0$ ist

$$\sin \tfrac{1}{2} AOG = \tfrac{1}{36}\left[\sqrt{5}+1+\sqrt{6(25+3\sqrt{5})}-\sqrt{6(17-5\sqrt{5})}\right]$$

$= 0{,}3088892\ldots$ ($\sin 18^0 = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = 0{,}3090170$) ... $\sphericalangle AOG = 35^0\ 59'\ 4'', 56$, $\sphericalangle GOH = 36^0\ 1'\ 50'', 88$ und der relative Fehler für $GOH < \frac{1}{1168}$.

Für $2\alpha = 90^0$ ist

$$\sin \tfrac{1}{2} AOG = \tfrac{1}{18}\left[\sqrt{2}+\sqrt{6(5+2\sqrt{2})}-\sqrt{6(5-2\sqrt{2})}\right] = 0{,}2587828\ldots$$

($\sin 15^0 = 0{,}2588190$)... $\sphericalangle AOG = 29^0\ 59'\ 44'', 5$, $\sphericalangle GOH = 30^0\ 0'\ 31''$, relativer Fehler für $\sphericalangle GOH < \frac{1}{3484}$.

Für $2\alpha = 60^0$ ist

$$\sin \tfrac{1}{2} AOG = \tfrac{1}{18}\left[1+3\sqrt{5}-\sqrt{21}\right] = 0{,}1736460\ldots (\sin 10^0 = 0{,}1736482)\ldots$$

$\sphericalangle AOG = 19^0\ 59'\ 59'', 1$, $\sphericalangle GOH = 20^0\ 0'\ 1'', 8$, relativer Fehler für $\sphericalangle GOH \frac{1}{40000}$.

Für $2\alpha = 45^0$ ist

$$\sin \tfrac{1}{2} AOG = \tfrac{1}{18}\left[\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{3\left(10+\sqrt{2}+4\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)} - \sqrt{3\left(10+\sqrt{2}-4\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)}\right] = 0{,}1305259\ldots (\sin 7^0\ 30' = 0{,}1305262)\ldots$$

Für $2\alpha = 36^0$ ist

$$\sin \tfrac{1}{2} AOG = \tfrac{1}{36}\left[\sqrt{5} - 1 + \sqrt{6(17 + 5\sqrt{5})} - \sqrt{6(25 - 3\sqrt{5})}\right]$$
$= 0{,}1045284\ldots$ ($\sin 6^0 = 0{,}1045285$).

Für $2\alpha = 30^0$ ist

$$\sin \tfrac{1}{2} AOG = \tfrac{1}{18}\left[\sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{3(10 + \sqrt{3} + 4\sqrt{2-\sqrt{3}})} - \sqrt{3(10 + \sqrt{3} - 4\sqrt{2-\sqrt{3}})}\right]$$

oder auch

$$= \tfrac{1}{36}\left[\sqrt{6} + \sqrt{2} + 2\sqrt{3(10 + \sqrt{3} + 2[\sqrt{6} - \sqrt{2}])} - 2\sqrt{3(10 + \sqrt{3} - 2[\sqrt{6} - \sqrt{2}])}\right]$$
$$= 0{,}0871557 \;(= \sin 5^0).$$

Für $180^0 > 2\alpha > 90^0$ würde man den Fehler sehr herabdrücken, wenn man die annähernde Dreiteilung an $180^0 - 2\alpha$ ausführen und den gefundenen $\sphericalangle$ zu 60^0 ergänzen würde.

An Winkel $> 180^0$ hat DÜRER offenbar bei seiner Dreiteilung nicht gedacht; auch für solche $\sphericalangle\sphericalangle$ kann man stets auf $\sphericalangle\sphericalangle < 90^0$ zurückgehen, auf dem eben angegebenen Wege.

STAIGMÜLLER a. a. O. meint, die Behandlung, welche KÄSTNER[1]) der DÜRERschen Trisektion eines Kreisbogens angedeihen lasse, sei infolge ihrer großen Ungenauigkeit für uns wertlos.

Doch liegt die Ungenauigkeit nicht in KÄSTNERs Methode begründet, sondern beruht auf Rechenfehlern und Versehen.

KÄSTNER nennt den gegebenen Bogen v, die zugehörige Sehne b, den Bogen EF unserer Figur $2w$; er findet $\sin w = \frac{1}{6} b$ und die Sehne AE unserer Figur $=$ Sehne $(\frac{1}{2} v - w)$, endlich Sehne AG unserer Figur

$$= \tfrac{1}{3}\left[\tfrac{1}{3} \text{ Sehne } v + 2 \times \text{Sehne } (\tfrac{1}{2} v - w)\right].$$

Als erstes Beispiel setzt er (a. a. O. S. 244) $v = 60^0$, findet $b = 1$ und $\sin w = \frac{1}{6}$, $\log \sin w = 9.2218487 - 10$, $w = 9^0\,35'\,38''$, $\frac{1}{2} v - w = 20^0\,24'\,22''$, $\frac{1}{2}(\frac{1}{2} v - w) = 10^0\,12'\,11''$; dann rechnet er:

$$\begin{aligned}
\log \sin 10^0\,12'\,10'' &= 0{,}2482981 - 1\\
\log 2 &= 0{,}3010300\\
\hline
\log \text{Sehne } (\tfrac{1}{2} v - w) &= 0{,}5493281 - 1\\
\text{Sehne } (\tfrac{1}{2} v - w) &= 0{,}354365\\
2 \times \text{Sehne} (\tfrac{1}{2} v - w) &= 0{,}708730\\
\tfrac{1}{3} \text{ Sehne } v &= 0{,}333333\\
\hline
& 1{,}141063
\end{aligned}$$

davon $\frac{1}{3}$ gibt $0{,}380354$ usw.

1) A. G. KÄSTNER, *Geometrische Abhandlungen.* I (Der math. Anfangsgründe I. Theil III. Abth.), Göttingen 1790, S. 241 ff.

Ich will nicht davon reden, daß KÄSTNER den $\sphericalangle w$ nicht sehr genau findet, daß er log sin 10° 12′ 10″ statt log sin 10° 12′ 11″ berechnet — aber in Zeile 4 findet er Sehne $(\frac{1}{2}v - w) = 0{,}354365$ statt $= 0{,}354265$ und in Zeile 7 als Summe der in Zeile 5 und 6 stehenden Zahlen 1,141063 statt 1,042063. Werden alle diese Fehler berichtigt, so ergibt sich als diese Summe 1,0418761, als $\frac{1}{3}$ dieser Summe 0,3472920, in Übereinstimmung mit dem oben von mir gefundenen Werte $(0{,}1736460 = \frac{1}{2} \,.\, 0{,}3472920)$.

In seinem zweiten Beispiele (a. a. O. S. 245), $v = 180^0$, findet KÄSTNER $\sphericalangle AOG = 59^0\,28'\,24''$, also leidlich genau. In seinem dritten Beispiele (S. 246), $v = 90^0$, findet er $\sin \frac{1}{2} AOG = 0{,}2588190$; $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}v - w)$ hat er richtig noch $= 15^0\,41'\,\frac{1}{2}''$, hätte daher für Sehne $(\frac{1}{2}v - w) = 2 \sin 15^0\,41'\,\frac{1}{2}''$ 0,5406408 finden müssen — er findet aber 0,5406454 —, und für $\sin \frac{1}{2} AOG$ 0,2587825, nicht 0,2587810.

KÄSTNER schreibt a. a. O. auf S. 247 unter 20): Für $v < 90^0$ gab die Regel zu viel, für $v > 90^0$ zu wenig. Ob das allemal so ist, und sie um 90^0 herum der Wahrheit nahe kommt, das mühsam untersuchen, wäre: sich mit der Theorie eines Irrtums beschäftigen.

Dieser nach KÄSTNERS Ansicht unnützen Mühe mich unterzogen zu haben muß ich mich schuldig bekennen.