

H ~~XVII~~ 29.3

ZUR THEORIE
DER
SINGULÄREN LÖSUNGEN
PARTIELLER
DIFFERENTIALGLEICHUNGEN.
ERSTER ORDNUNG

VON
HEINRICH WEBER

DR. PHIL.



LEIPZIG
WILHELM ENGELMANN.

1866.

Die vorliegende Schrift ist ein Auszug einer grösseren Abhandlung, welche demnächst veröffentlicht werden soll. Ich theile hier nur die Entwicklung des Begriffs der singulären Lösung, sowie die Bestimmungsweise derselben aus der Differentialgleichung selbst mit.

In der erwähnten Abhandlung habe ich von den Principien einige Anwendungen gemacht, welche zu bemerkenswerthen Aufschlüssen über die Natur nicht nur der singulären Lösungen, sondern der Lösungen gewisser partiellen Differentialgleichungen überhaupt führen. Diese Anwendungen habe ich in dem vorliegenden Auszug der Kürze wegen übergangen. Der einzige Zusatz, welchen diese Schrift erhalten hat, ist das Beispiel des § 3, welches, streng genommen, meinem Gegenstand fremd ist, welches ich aber seiner grossen Einfachheit wegen nicht übergangen zu dürfen glaubte, zumal da ich allerdings durch die Untersuchung der singulären Lösungen darauf geführt wurde. Das Resultat lässt sich auch auf anderem Wege finden, und dürfte vielleicht auch schon bekannt sein, jedoch ist der andere Weg weit weniger einfach.

Was endlich die singulären Lösungen der linearen partiellen Differentialgleichungen betrifft, so glaubte ich diese etwas ausführlicher behandeln zu müssen, hauptsächlich aus dem Grund, weil diese Gleichungen die einzigen sind, bei denen

eine allgemeingültige Methode bekannt war, um die singulären Lösungen aus der Differentialgleichung selbst zu bestimmen, und diese Methode von JACOBI auf anderem Wege und in anderer Form gefunden war, als die von mir gefundene. Es war mir daher von besonderem Interesse, die Uebereinstimmung der beiden Resultate nachzuweisen.

Heidelberg im Juni 1866.

§ 1.

Die partiellen Differentialgleichungen, welche ich in Betrachtung ziehe, müssen die abhängige Variable selbst jedenfalls enthalten. Da man, um allgemeingültige Resultate zu erhalten, immer eine bestimmte Form der Differentialgleichung voraussetzen muss, so werde ich diejenige bestimmte Form wählen, welche die symmetrischste ist, nämlich ich werde annehmen, die Differentialgleichung sei aufgelöst nach der abhängigen Variablen, sie habe also die Form:

$$(1) \quad z = \psi(x_1, x_2, \dots, x_u, p_1, p_2, \dots, p_u).$$

Hierin bedeutet z die abhängige Variable, $x_1, x_2, \dots, x_u$ die unabhängigen Variablen, und $p_1, p_2, \dots, p_u$ die partiellen Differentialquotienten von z nach den x , also:

$$p_1 = \frac{\partial z}{\partial x_1}, p_2 = \frac{\partial z}{\partial x_2}, \dots, p_u = \frac{\partial z}{\partial x_u}.$$

Für eine Gleichung von der Form (1) kann man die Definition der vollständigen Lösung folgendermassen fassen:

Die vollständige Lösung ist ein Ausdruck für z durch die unabhängigen Variablen $x_1, \dots, x_u$ und u willkürliche Constante $c_1, c_2, \dots, c_u$ von der Art, dass wenn man denselben und seine partiellen Differentialquotienten in die Gleichung (1) für $z, p_1, \dots, p_u$ einsetzt, diese identisch erfüllt wird. Dazu kommt noch die Bestimmung, dass zwischen den Ausdrücken für z und seine partiellen Differentialquotienten ausser der Gleichung (1) keine andere identische, von den willkürlichen Constanten befreite Relation obwalten darf. Da vermöge der Gleichung (1) z als Function seiner partiellen Differentialquotienten ausgedrückt ist, so kann man die letztere Bedingung auch so fassen: Es darf zwischen den Ausdrücken der Differentialquotienten $p_1, \dots, p_u$

durch $x_1, x_2, \dots, x_u$ und die willkürlichen Constanten $c_1, c_2, \dots, c_u$ keine von den willkürlichen Constanten befreite identische Relation bestehen.

Dieser Bedingung zufolge kann man also immer die Ausdrücke für $p_1, p_2, \dots, p_u$ auflösen nach den Constanten $c_1, c_2, \dots, c_u$ und die dadurch gewonnenen Ausdrücke der Constanten $c_1, c_2, \dots, c_u$ wieder umgekehrt nach den Grössen $p_1, p_2, \dots, p_u$. Durch das hierdurch angedeutete Verfahren ergibt sich ein System Gleichungen von folgender Form:

$$(2) \quad \begin{aligned} c_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_u, p_1, p_2, \dots, p_u) \\ c_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_u, p_1, p_2, \dots, p_u) \\ &\vdots \\ c_u &= f_u(x_1, x_2, \dots, x_u, p_1, p_2, \dots, p_u), \end{aligned}$$

welche Gleichungen nach $p_1, p_2, \dots, p_u$ auflösbar sein müssen, so dass sich aus denselben die vollständige Lösung auf algebraischem Wege ergibt, wenn man mittelst des Systems (2) die Grössen $p_1, p_2, \dots, p_u$ aus (1) eliminirt. Die Aufgabe, die vollständige Lösung der Gleichung (1) zu finden, ist daher vollständig äquivalent mit der Aufgabe der Bestimmung der Functionen $f_1, f_2, \dots, f_u$.

§ 2.

Damit die Gleichungen (2) des vorigen § die vollständige Lösung der vorgelegten Differentialgleichung enthalten, ist erforderlich, dass die Functionen $f_1, f_2, \dots, f_u$ gewisse Bedingungen erfüllen, welche Bedingungen ich hier zusammenstellen werde.

Die erste dieser Bedingungen ist die, dass die Gleichungen (2) nach den Grössen $p_1, p_2, \dots, p_u$ auflösbar sind, und aus diesen Auflösungen müssen die Functionen $f_1, f_2, \dots, f_u$ wiederhergestellt werden können, mit andern Worten, es darf keine der beiden Determinanten:

$$(3) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial p_1} & \frac{\partial f_1}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial p_u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial p_1} & \frac{\partial f_2}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial p_u} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_u}{\partial p_1} & \frac{\partial f_u}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial f_u}{\partial p_u} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial f_1} & \frac{\partial p_1}{\partial f_2} & \dots & \frac{\partial p_1}{\partial f_u} \\ \frac{\partial p_2}{\partial f_1} & \frac{\partial p_2}{\partial f_2} & \dots & \frac{\partial p_2}{\partial f_u} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial p_u}{\partial f_1} & \frac{\partial p_u}{\partial f_2} & \dots & \frac{\partial p_u}{\partial f_u} \end{vmatrix}$$

identisch verschwinden.

4) Vgl. JACOBI Crelle's Journal Bd. 47. Bd. 60.

Die andern Bedingungen, welche die Functionen $f_1 f_2 \dots f_u$ zu erfüllen haben, sind die, dass die aus den Gleichungen (2) des vorigen § bestimmten Werthe von $p_1 p_2 \dots p_u$ die partiellen Differentialquotienten einer und derselben Function werden, und zwar gerade derjenigen Function z welche sich mittelst (2) aus der gegebenen Gleichung (1) ergibt. Diese Bedingungen sind aber nicht bloss nothwendig, sondern sie sind auch hinreichend, d. h. jedes Functionensystem $f_1 f_2 \dots f_u$, welches diesen Bedingungen genügt, führt auf eine vollständige Lösung der gegebenen Differentialgleichung (1).

Die letzteren dieser Bedingungen lassen sich vollständig ersetzen durch ein System von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, denen die Functionen $f_1 \dots f_u$ zu genügen haben.

Um dieses System von partiellen Differentialgleichungen abzuleiten, bezeichne ich den Differentialquotienten $\frac{\partial p_k}{\partial x_\lambda}$ mit $p_{k\lambda}$, wenn für p_k diejenigen Ausdrücke gesetzt sind, welche sich aus dem System (2) ergeben. Die Bedingungen, um welche es sich hier handelt, werden alsdann:

$$(4) \quad \begin{aligned} p_{k\lambda} &= p_{\lambda k} & \frac{\partial z}{\partial x_k} &= p_k \\ \lambda &= 1, 2, \dots, u & k &= 1, 2, \dots, u \\ k &= 1, 2, \dots, u \end{aligned}$$

Differentiirt man das System Gleichungen (2) nach den sämtlichen Grössen $x_1 \dots x_u$, so erhält man folgende $u \cdot u$ Gleichungen:

$$-f'_q(x_i) = \sum_h f'_q(p_h) p_{hi} \quad \begin{aligned} q &= 1, 2, \dots, u \\ i &= 1, 2, \dots, u \end{aligned}$$

Man multiplicirt nun die vorstehende Gleichung mit $f'_\sigma(p_i)$ und summirt in Bezug auf alle Indices i , dann vertauscht man die Indices q und σ mit einander und zieht die so gebildete Gleichung von der vorigen ab. Dieses Verfahren ergibt folgendes System von u^2 Gleichungen:

$$\sum_i \{f'_q(p_i) f'_\sigma(x_i) - f'_\sigma(p_i) f'_q(x_i)\} = \sum_i \sum_h f'_q(p_h) f'_\sigma(p_i) \{p_{ih} - p_{hi}\}.$$

Diese Gleichung zeigt, dass die erste Gruppe der Bedingungen (4) ersetzt werden können durch folgendes System von Gleichungen:

$$(5) \quad 0 = \sum_i \{f'_q(p_i) f'_\sigma(x_i) - f'_\sigma(p_i) f'_q(x_i)\}.$$

Denn aus diesen Gleichungen folgt auch umgekehrt

$$p_{ih} - p_{hi} = 0,$$

wenn man berücksichtigt, dass die erste Determinante (3) nicht verschwinden darf.

In ähnlicher Weise lässt sich die zweite Gruppe der Bedingungen (4) durch andere ersetzen. Differentiirt man die gegebene Differentialgleichung (1) und die Gleichungen (2) nach sämtlichen x , so erhält man Gleichungen von der Form:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x_i} - \psi'(x_i) &= \sum_h \psi'(p_h) p_{hi} \\ - f'_q(x_i) &= \sum_h f'_q(p_h) p_{hi}. \end{aligned}$$

Multipliziert man die erste dieser Gleichungen mit $f'_q(p_i)$, die zweite mit $\psi'(p_i)$, zieht beide von einander ab, und summiert über alle Indices i , so erhält man, weil $p_{hi} = p_{ih}$ ist:

$$\sum_i \left\{ \left(\frac{\partial z}{\partial x_i} - \psi'(x_i) \right) f'_q(p_i) + f'_q(x_i) \psi'(p_i) \right\} = 0.$$

Soll nun die zweite Gruppe der Bedingungen (4) erfüllt sein, so folgt aus der vorstehenden Gleichung:

$$(6) \quad 0 = \sum_i \{ f'_q(x_i) \psi'(p_i) - f'_q(p_i) (\psi'(x_i) - p_i) \}.$$

Die Gleichungen (6) ersetzen wieder vollkommen die zweite Gruppe der Bedingungen (4), denn zieht man die Gleichung (6) von der unmittelbar vorhergehenden ab, so erhält man:

$$\sum_i f'_q(p_i) \left\{ \frac{\partial z}{\partial x_i} - p_i \right\} = 0$$

und daraus folgt weiter, da die Determinante der $f'_q(p_i)$ nicht verschwindet:

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} - p_i = 0.$$

Die Bedingungen (5), (6) sind also nothwendig und hinreichend dafür, dass die Functionen f_q , Constanten gleich gesetzt, eine vollständige Lösung der vorgelegten partiellen Differentialgleichung ergeben. Es folgt aus unsern Betrachtungen zunächst nur, dass die Gleichungen (5), (6) erfüllt sein müssen, wenn man mittelst der Gleichungen (2) die Grössen $p_1, p_2, \dots, p_u$ aus denselben eliminirt. Durch diese Elimination werden aber ebenso viele neue willkürliche Grössen, nämlich die willkürlichen Constanten, eingeführt, welche sich nicht auf eine geringere Anzahl reduciren lassen; daraus folgt, dass die Gleichun-

gen (5), (6) identisch erfüllt sein müssen, auch vor der Elimination der p mittelst (2); mit andern Worten, die Gleichungen (5), (6) können als partielle Differentialgleichungen angesehen werden, denen die Functionen f genügen müssen.

§ 3.

Ich will hier an einem Beispiel zeigen, wie die Bedingungen (5), (6) unter Umständen zur Auffindung der vollständigen Lösungen einer partiellen Differentialgleichung dienen können:

Es sei $\varphi(p_1 p_2 \dots p_u)$ irgend eine Function der Grössen $p_1 p_2 \dots p_u$, aber von den Variablen $x_1 x_2 \dots x_u$ unabhängig. Setzt man:

$$\begin{aligned} f_1 &= \varphi'(p_1) - x_1 \\ f_2 &= \varphi'(p_2) - x_2 \\ &\dots \dots \dots \\ f_u &= \varphi'(p_u) - x_u, \end{aligned} \quad (7)$$

so erfüllen diese Functionen $f_1 f_2 \dots f_u$ die Bedingungen (5). Wenn also, was vorausgesetzt sein soll, die Determinante der zweiten partiellen Differentialquotienten der Function φ nicht identisch verschwindet, so wird es gewisse partielle Differentialgleichungen geben, für welche die Functionen (7) eine vollständige Lösung ergeben.

Ich will untersuchen, von welcher Art diese Differentialgleichungen sind. Der gewünschte Fall wird eintreten, sobald die Function ψ so beschaffen ist, dass die Gleichungen (6) erfüllt werden. Nehmen wir an, die Function ψ sei ebenfalls von $x_1 x_2 \dots x_u$ unabhängig, so werden die Gleichungen (6):

$$\psi'(p_i) = \sum_j \psi''(p_i p_j) p_j.$$

Diese Gleichungen werden identisch erfüllt unter der Voraussetzung, dass φ irgend eine beliebige homogene Function der p von der k ten Ordnung ist, und dass

$$\psi(p_1 p_2 \dots p_u) = (k-1) \varphi(p_1 p_2 \dots p_u).$$

Wir sind also zu folgendem Satz gelangt:

Es sei eine partielle Differentialgleichung vorgelegt:

$$z = (k-1) \varphi(p_1 p_2 \dots p_u),$$

wo φ eine ganz beliebige homogene Function der Grössen p ist, von der Ordnung k (wobei der einzige Werth $k=1$ ausgenommen ist), so sind die vollständigen Lösungen dieser Gleichung:

$$\begin{aligned} q'(p_1) - x_1 &= c_1 \\ q'(p_2) - x_2 &= c_2 \\ &\vdots \\ q'(p_u) - x_u &= c_u. \end{aligned}$$

§ 4.

Ich kehre wieder zurück zu den allgemeinen Betrachtungen:

Wenn man für $z, p_1, p_2, \dots, p_u$ irgend eine Lösung der Differentialgleichung setzt, gleichviel, ob dieselbe willkürliche Constanten enthält, oder nicht, so muss immer der lineare Differentialausdruck:

$$(8) \quad dz - p_1 dx_1 - p_2 dx_2 - \dots - p_u dx_u$$

verschwinden, da eben die p die partiellen Differentialquotienten der Function z sind. Der Ausdruck (8) muss also auch verschwinden, wenn man für die oben definirten Functionen $f_1, \dots, f_u$ constante Werthe setzt. Denkt man sich also mittelst der gegebenen Differentialgleichung die Grössen $z, p_1, p_2, \dots, p_u$ ausgedrückt durch die unabhängigen Variablen $x_1, x_2, \dots, x_u$ und durch die Functionen $f_1, f_2, \dots, f_u$, was wegen der Unabhängigkeit der Functionen f immer möglich ist, so muss man eine identische Gleichung von folgender Form erhalten:

$$(9) \quad dz - p_1 dx_1 - p_2 dx_2 - \dots - p_u dx_u = F_1 df_1 + F_2 df_2 + \dots + F_u df_u.$$

Es handelt sich zunächst um die Bestimmung der Coefficienten $F_1, F_2, \dots, F_u$.

Bezeichnet man zu diesem Ende den Differentialquotienten von z nach x_ρ , so genommen, wie nach der Substitution der Ausdrücke von $p_1, \dots, p_u$ durch die x und f, x_ρ explicite in dem Ausdruck von z vorkommt, mit $\left(\frac{\partial z}{\partial x_\rho}\right)$, so hat man wegen der Bedingungen, denen die Functionen f unterworfen sind:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x_\rho}\right) - p_\rho = 0$$

und die Vergleichung der beiden Seiten der Gleichung (9) ergibt:

$$F_1 = \frac{dz}{df_1}, \quad F_2 = \frac{dz}{df_2}, \quad \dots \quad F_u = \frac{dz}{df_u}.$$

Dieses Resultat setzt uns nun in den Stand, den Zusammen-

hang aufzufinden, der zwischen zwei verschiedenen vollständigen Lösungen der partiellen Differentialgleichungen besteht.

Es seien

$$f_1 f_2 \dots f_u$$

$$\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_u$$

zwei Systeme von Functionen, welche den Bedingungen der vollständigen Lösungen entsprechen. Man denke sich nun z ausgedrückt, einmal durch $x_1 x_2 \dots x_u f_1 f_2 \dots f_u$, dann durch $x_1 x_2 \dots x_u \varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_u$ und bezeichne diese beiden Ausdrücke mit z' und z'' ; nach dem Vorhergehenden haben wir dann die Doppelgleichung:

$$(10) \quad \begin{aligned} dz - p_1 dx_1 - p_2 dx_2 \dots - p_u dx_u \\ = \frac{\partial z'}{\partial f_1} df_1 + \frac{\partial z'}{\partial f_2} df_2 + \dots + \frac{\partial z'}{\partial f_u} df_u \\ = \frac{\partial z''}{\partial \varphi_1} d\varphi_1 + \frac{\partial z''}{\partial \varphi_2} d\varphi_2 + \dots + \frac{\partial z''}{\partial \varphi_u} d\varphi_u. \end{aligned}$$

Wenn man sich nun in den Functionen f für $p_1 p_2 \dots p_u$ ihre Ausdrücke durch die x und die φ substituirt denkt, und wenn man mit $[f'_\varphi(x_i)]$ $[f'_\varphi(\varphi_i)]$ die Differentialquotienten von f_φ nach x_i und φ_i bezeichnet, so wie diese Grössen nach dieser Substitution noch in f_φ vorkommen, so löst sich die Gleichung (10) in folgendes System auf:

$$(11) \quad \begin{aligned} \frac{\partial z''}{\partial \varphi_i} &= \sum_h \frac{\partial z'}{\partial f_h} [f'_h(\varphi_i)] \\ 0 &= \sum_h \frac{\partial z'}{\partial f_h} [f'_h(x_i)]. \end{aligned}$$

Die erste dieser beiden Gleichungen ist von selbst erfüllt, weil durch die hier vorausgesetzte Substitution z' und z'' mit einander identisch werden. Die letzte Gleichung ergibt den gesuchten Zusammenhang zwischen den beiden vollständigen Lösungen. Da nämlich die Grössen $\frac{\partial z}{\partial f_\varphi}$ nicht identisch verschwinden können, so folgt die identische Gleichung:

$$(12) \quad \begin{vmatrix} [f'_1 x_1] & [f'_1 x_2] & \dots & [f'_1 x_u] \\ [f'_2 x_1] & [f'_2 x_2] & \dots & [f'_2 x_u] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [f'_u x_1] & [f'_u x_2] & \dots & [f'_u x_u] \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung sagt aus, dass zwischen den Functionen $f_1 f_2 \dots f_u$, nachdem in denselben $p_1 p_2 \dots p_u$ durch $\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_u$ ausgedrückt sind, eine identische Gleichung bestehen muss, welche von den $x_1 x_2 \dots x_u$ frei ist, also eine Gleichung von der Form:

$$(13) \quad 0 = \Pi (f_1 f_2 \dots f_u q_1 q_2 \dots q_u)$$

oder auch eine beliebige Anzahl m solcher Gleichungen, wenn nur m kleiner als u ist:

$$(14) \quad \begin{cases} o = I_1(f_1 f_2 \dots f_u q_1 q_2 \dots q_v) \\ o = I_2(f_1 f_2 \dots f_u q_1 q_2 \dots q_v) \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ o = I_m(f_1 f_2 \dots f_u q_1 q_2 \dots q_v). \end{cases}$$

Aus diesen Betrachtungen ergibt sich leicht das bekannte Verfahren zur Bestimmung einer beliebigen vollständigen Lösung aus einer gegebenen.

Aus (11) und (14) folgt nämlich durch Differentiation des letzten Systems nach x_i :

[illegible]

welche Gleichungen, mit den Gleichungen (14) zusammenge-
nommen, genügen, um die unbekannten Grössen $\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_n$
 $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m$ zu bestimmen.

Q. 5.

Nehmen wir nun an, es sei irgend eine Lösung der Gleichung $z = \psi$ gefunden, so sind durch diese $z, p_1, p_2, \dots, p_u$ als Functionen von $x_1, x_2, \dots, x_u$ bestimmt. Ob diese Functionen willkürliche Constanten enthalten, darauf kommt es vorläufig nicht an. Unter allen Umständen müssen diese Functionen folgende Eigenschaften haben: Es muss die Gleichung

$$z = \psi$$

identisch erfüllt sein, und es muss der Differentialausdruck:

$$dz - p_1 dx_1 - p_2 dx_2 \dots - p_u dx_u$$

durch Substitution der Lösung verschwinden.

Verstehen wir wieder unter $f_1 f_2 \dots f_u$ Functionen, welche, Constanten gleich gesetzt, eine vollständige Lösung ergeben, und welche durch Substitution der gerade vorliegenden Lösung in Functionen der $x_1 x_2 \dots x_u$ allein übergehen, so müssen diese Functionen wegen der identischen Gleichung (9) § 4 der Bedingung genügen:

$$(16) \quad 0 = \frac{\partial z}{\partial f_1} df_1 + \frac{\partial z}{\partial f_2} df_2 + \dots + \frac{\partial z}{\partial f_u} df_u,$$

worin die $f_1 f_2 \dots f_u$ als Functionen der $x_1 x_2 \dots x_u$ allein anzusehen sind. Bezeichnet man die in diesem Sinne genommenen Differentialquotienten dieser Functionen durch $\frac{df_i}{dx_i}$, so löst sich die Gleichung (16) in folgendes System auf:

$$(17) \quad \begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial f_1} \frac{df_1}{dx_1} + \frac{\partial z}{\partial f_2} \frac{df_2}{dx_1} + \dots + \frac{\partial z}{\partial f_u} \frac{df_u}{dx_1} &= 0 \\ \frac{\partial z}{\partial f_1} \frac{df_1}{dx_2} + \frac{\partial z}{\partial f_2} \frac{df_2}{dx_2} + \dots + \frac{\partial z}{\partial f_u} \frac{df_u}{dx_2} &= 0 \\ \dots &\dots \dots \\ \frac{\partial z}{\partial f_1} \frac{df_1}{dx_u} + \frac{\partial z}{\partial f_2} \frac{df_2}{dx_u} + \dots + \frac{\partial z}{\partial f_u} \frac{df_u}{dx_u} &= 0. \end{aligned}$$

Mittelst dieses Systems können wir nun aus einer vollständigen Lösung der gegebenen Differentialgleichung alle übrigen Lösungen auf algebraischem Wege finden. Vermöge der vollständigen Lösung sind nämlich die Functionen $f_1 f_2 \dots f_u$ durch $x_1 x_2 \dots x_u p_1 p_2 \dots p_u$ gegeben. Aus dem System (17) aber ergeben sich dieselben Functionen ausgedrückt durch $x_1 x_2 \dots x_u$ allein, wodurch man Gleichungen erhält, aus denen $p_1 p_2 \dots p_u$ als Functionen von $x_1 x_2 \dots x_u$ bestimmt werden.

Hat man die Functionen $f_1 f_2 \dots f_u$ den Gleichungen (17) gemäss bestimmt, so erhält man daraus unter allen Umständen eine Lösung. Diese Bestimmung kann aber auf verschiedene Arten geschehen.

Nehmen wir zunächst an, dass die Grössen $\frac{\partial z}{\partial f_1}, \frac{\partial z}{\partial f_2}, \dots, \frac{\partial z}{\partial f_u}$ nicht alle zugleich verschwinden, so folgt aus (17) die Gleichung:

$$(18) \quad \begin{vmatrix} \frac{df_1}{dx_1} & \frac{df_2}{dx_1} & \dots & \frac{df_u}{dx_1} \\ \frac{df_1}{dx_2} & \frac{df_2}{dx_2} & \dots & \frac{df_u}{dx_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{df_1}{dx_u} & \frac{df_2}{dx_u} & \dots & \frac{df_u}{dx_u} \end{vmatrix} = 0.$$

Dieser Gleichung zufolge müssen also zwischen den Functionen $f_1 f_2 \dots f_u$, wenn dieselben als Functionen der $x_1 x_2 \dots x_u$ allein dargestellt sind, eine oder mehrere identische Gleichungen bestehen.

Diese Gleichungen, welche beliebig angenommen werden können, und deren Anzahl $m \leq u$ sein muss, seien:

$$(19) \quad \begin{aligned} II_1(f_1 f_2 \dots f_u) &= 0 \\ II_2(f_1 f_2 \dots f_u) &= 0 \\ \dots &\dots \dots \\ II_m(f_1 f_2 \dots f_u) &= 0. \end{aligned}$$

Ist $m = u$, so erhalten die $f_1 f_2 \dots f_u$ willkürliche constante Werthe, und man kommt auf die vollständige Lösung, von der man ausging, zurück. Ist aber $m < u$, so werden die $f_1 f_2 \dots f_u$ als Functionen von $x_1 \dots x_u$ bestimmt, nachdem man über die Functionen $II_1 II_2 \dots II_m$ irgend eine willkürliche Annahme gemacht hat, mittelst der folgenden Gleichungen, die sich unmittelbar aus dem System (17) ergeben:

$$(20) \quad \begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial f_1} &= \lambda_1 II_1'(f_1) + \lambda_2 II_2'(f_1) + \dots + \lambda_m II_m'(f_1) \\ \frac{\partial z}{\partial f_2} &= \lambda_1 II_1'(f_2) + \lambda_2 II_2'(f_2) + \dots + \lambda_m II_m'(f_2) \\ \dots &\dots \dots \\ \frac{\partial z}{\partial f_u} &= \lambda_1 II_1'(f_u) + \lambda_2 II_2'(f_u) + \dots + \lambda_m II_m'(f_u), \end{aligned}$$

welche Gleichungen zusammen mit den Gleichungen (19) ausreichen, um die Grössen $f_1 f_2 \dots f_u \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m$ als Functionen von $x_1 x_2 \dots x_u$ zu bestimmen.

§ 6.

Eine Möglichkeit, die Gleichungen (17) zu befriedigen, ohne dass (18) erfüllt wird, haben wir bis jetzt noch nicht berücksichtigt; es ist nämlich die, wenn die Functionen $f_1 f_2 \dots f_u$ so bestimmt werden können, dass die Gleichungen

$$(21) \quad \frac{\partial z}{\partial f_1} = 0, \frac{\partial z}{\partial f_2} = 0, \dots, \frac{\partial z}{\partial f_u} = 0$$

erfüllt werden.

Die daraus entspringende Lösung ist ganz bestimmt und enthält keine willkürlichen Functionen oder Constanten. Im Allgemeinen ist es die singuläre Lösung. Es ist jedoch nicht nothwendig, dass, wenn in den Gleichungen (21) eine Lösung enthalten ist, diese immer singulär sein muss.

Unter singulärer Lösung verstehe ich nämlich eine Lösung von folgender Beschaffenheit:

Es sei

$$(22) \quad z = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_u, f_1, f_2, \dots, f_u)$$

ein Ausdruck, welcher dadurch, dass man für $f_1, f_2, \dots, f_u$ willkürliche Constanten setzt, in eine vollständige Lösung übergeht. Man erhält daraus alle übrigen Lösungen, wenn man für die $f_1, \dots, f_u$ gewisse Functionen der x einsetzt.

Ist es nun möglich, ohne dass (22) aufhört, eine Lösung zu sein, für die $f_1, f_2, \dots, f_u$ solche Functionen von $x_1, x_2, \dots, x_u$ zu setzen, deren Functionaldeterminante nach den $x_1, x_2, \dots, x_u$ nicht verschwindet, so ist dies die singuläre Lösung.

Aus dieser Definition folgt, dass die singuläre Lösung nie von einer willkürlichen Constanten, also noch weniger von einer willkürlichen Function abhängen kann, denn aus den Gleichungen (17) folgt, dass für die singuläre Lösung jederzeit die Gleichungen (21) erfüllt sein müssen. Wenn nun auch diese Gleichungen zu solchen Werthen von $f_1, f_2, \dots, f_u$ führen können, die eine willkürliche Constante c enthalten, was etwa dadurch geschehen könnte, dass die Gleichungen (21) gemeinschaftliche Factoren haben, so muss sich diese Constante aus der Verbindung, in welcher die f in z enthalten sind, herausheben, denn durch Differentiation nach der willkürlichen Constanten erhält man:

$$\frac{\partial z}{\partial c} = \frac{\partial z}{\partial f_1} \frac{\partial f_1}{\partial c} + \frac{\partial z}{\partial f_2} \frac{\partial f_2}{\partial c} + \dots + \frac{\partial z}{\partial f_u} \frac{\partial f_u}{\partial c} = 0.$$

§ 7.

Die singuläre Auflösung einer partiellen Differentialgleichung, die ich im vorigen § definirt habe, hat die bemerkenswerthe Eigenschaft, dass sie immer aus der gegebenen Differentialgleichung selbst, ohne Kenntniss der vollständigen Lösung durch Differentiation gefunden werden kann; und zwar auf folgende Weise:

Wenn man in der gegebenen Differentialgleichung

$$z - \psi(x_1, x_2, \dots, x_u, p_1, p_2, \dots, p_u) = 0$$

irgend eine Lösung substituirt, so muss dieselbe identisch erfüllt sein; es müssen also auch noch die durch Differentiation nach den x aus dieser Gleichung gebildeten Gleichungen identisch sein.

Setzt man also zur Abkürzung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_\rho \partial x_\sigma} = p_{\rho\sigma},$$

so erhält man folgendes System identischer Gleichungen:

$$\begin{aligned} (23) \quad & -p_1 + \psi'(x_1) + \sum_h \psi'(p_h) p_{h1} = 0 \\ & -p_2 + \psi'(x_2) + \sum_h \psi'(p_h) p_{h2} = 0 \\ & \dots \dots \dots \\ & -p_u + \psi'(x_u) + \sum_h \psi'(p_h) p_{hu} = 0. \end{aligned}$$

Bezeichnet man wieder mit $f_1, f_2, \dots, f_u$ solche Functionen von $x_1, x_2, \dots, x_u, p_1, p_2, \dots, p_u$, welche, willkürlichen Constanten gleich gesetzt, eine vollständige Lösung ergeben, so müssen diese den Bedingungen (6) des § 2 genügen, nämlich:

$$(24) \quad \sum_i \{f'_\rho(x_i) \psi'(p_i) - f'_\rho(p_i) (\psi'(x_i) - p_i)\} = 0$$

und wenn man für $\psi'(x_i) - p_i$ aus (23) die Werthe in (24) substituirt, so ergibt sich:

$$(25) \quad \sum_i \psi'(p_i) \{f'_\rho(x_i) + \sum_h f'_\rho(p_h) \cdot p_{hi}\} = 0.$$

Dieses System muss identisch erfüllt sein, wenn man irgend eine Lösung substituirt.

Nun ist aber:

$$f_{\rho}'(x_i) + \sum_h f_{\rho}'(p_h) p_{hi} = \frac{df_{\rho}}{dx_i},$$

wo das Zeichen d in dem früheren Sinne genommen ist, und demnach geht das System (25) über in:

[illegible]

War nun die Lösung, welche wir substituirt haben, eine singuläre, so gibt es ein System von Functionen $f_1 f_2 \dots f_u$ der Art, dass die Determinante

$$\begin{array}{ccc} \frac{df_1}{dx_1}, & \frac{df_2}{dx_1}, & \dots, & \frac{df_u}{dx_1} \\ \frac{df_1}{dx_2}, & \frac{df_2}{dx_2}, & \dots, & \frac{df_u}{dx_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{df_1}{dx_u}, & \frac{df_2}{dx_u}, & \dots, & \frac{df_u}{dx_u} \end{array}$$

nicht verschwindet, nach der Definition der singulären Lösung. Dann folgt aber aus den Gleichungen (26), dass für die singuläre Lösung die Gleichungen

$$(27) \quad \psi'(p_1) = 0, \psi'(p_2) = 0, \dots, \psi'(p_n) = 0$$

erfüllt sein müssen.

Die Aufsuchung der singulären Lösung ist dadurch auf die algebraische Aufgabe zurückgeführt, aus den Gleichungen (27) die Werthe von $p_1 p_2 \dots p_u$ zu bestimmen. Wenn man diese dann in die gegebene Gleichung einsetzt, so ergibt sich der Werth von z , welches die gesuchte singuläre Lösung ist.

Die erste Bedingung der Existenz einer singulären Lösung ist also die, dass das eben auseinandergesetzte Verfahren überhaupt zu einer Lösung der Differentialgleichung führt, mit andern Worten, dass die auf die angedeutete Weise bestimmten Werthe von $x, p_1, p_2, \dots, p_n$ den Gleichungen genügen:

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = p_1, \quad \frac{\partial z}{\partial x_2} = p_2, \quad \dots \quad \frac{\partial z}{\partial x_n} = p_n.$$

Diese Bedingungen lassen sich noch anders ausdrücken: Denkt man sich aus den Gleichungen (27) die $p_1, p_2, \dots, p_u$ bestimmt, und in die gegebene Gleichung eingesetzt, so wird dadurch der Ausdruck für z bestimmt:

$$z = \psi(x_1, x_2, \dots, x_u, p_1, p_2, \dots, p_u).$$

Differentiirt man diese Gleichung nach den x_i , so erhält man mit Rücksicht auf die Gleichungen (27)

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = \psi' x_i$$

und daraus ergeben sich die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass man mittelst unserer Methode überhaupt zu einer Lösung der Differentialgleichung gelange:

$$\begin{aligned} \psi' x_1 - p_1 &= 0 \\ \psi' x_2 - p_2 &= 0 \\ &\dots \\ \psi' x_u - p_u &= 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Diese Gleichungen müssen erfüllt sein, wenn man die aus (27) bestimmten Werthe der $p_1, p_2, \dots, p_u$ substituirt.

Man erhält also die singuläre Lösung, ihre Existenz vorausgesetzt, dadurch, dass man ein System Werthe der p aufsucht, welches die Gleichungen (27), (28) zugleich befriedigt, und dieses in die gegebene Gleichung $z = \psi$ einsetzt. Existirt kein solches System, so kann man sicher sein, dass auch keine singuläre Lösung existirt.

Eine andere, und viel schwieriger Frage ist aber die umgekehrte: Ist die auf die eben entwickelte Weise abgeleitete Lösung wirklich singulär, oder ist sie nicht unter Umständen von der Beschaffenheit, dass sie durch specielle Annahmen über die willkürlichen Grössen aus anderen Lösungen folgt?

Mit dieser Frage, in dem Fall, wo es sich nicht um eine partielle, sondern um eine gewöhnliche Differentialgleichung handelt, hat sich zuerst EULER¹⁾ beschäftigt; und auf einem ganz ähnlichen Wege haben LAPLACE²⁾, LAGRANGE³⁾, POISSON⁴⁾ die Frage behandelt.

1) EULER, Calculus integralis. Bd. I. Problema 72.

2) LAPLACE, Mémoires de l'Académie de Paris 1772.

3) Leçons sur le calcul des fonctions, leçon quinzième, u. a. a. O.

4) POISSON, Sur les solutions particulières etc. Journal de l'école polytechnique. Bd. 6.

Diese Methode lässt sich leicht auf den Fall einer partiellen Differentialgleichung übertragen, und führt zu dem Resultat, dass die Lösung, welche auf die oben auseinandergesetzte Methode bestimmt ist, nie durch eine willkürliche Constante vervollständigt werden kann, d. h. dass sie immer singulär ist.

Alle diese Beweise enthalten aber eine Voraussetzung, durch welche die ganze Untersuchung illusorisch wird, da die Zulässigkeit der Voraussetzung nicht einmal a priori aus der Differentialgleichung erkannt werden kann. Die Voraussetzung ist nämlich die, dass die Differentialgleichung keine anderen Lösungen mit willkürlichen Constanten habe als solche, welche irgend wie nach positiven Potenzen dieser Constanten entwickelt werden können.

Ich habe daher in der in der Einleitung erwähnten Arbeit den alten Beweis durch einen andern ersetzt, der zwar auch keinen Anspruch auf Allgemeinheit machen kann, bei welchem aber die Beschränkungen sich nur auf die Differentialgleichung selbst beziehen, und dessen Zulässigkeit ohne Kenntniss der vollständigen Lösungen entschieden werden kann. Ich bin bei dieser Untersuchung zu folgendem Resultat gelangt:

Die auf die oben beschriebene Methode bestimmte Lösung der Gleichung:

$$z = \psi(x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n)$$

ist immer singulär, wenn die Determinante:

$$\begin{vmatrix} \psi''(p_1 p_1) & \psi''(p_1 p_2) & \dots & \psi''(p_1 p_n) \\ \psi''(p_2 p_1) & \psi''(p_2 p_2) & \dots & \psi''(p_2 p_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi''(p_n p_1) & \psi''(p_n p_2) & \dots & \psi''(p_n p_n) \end{vmatrix}$$

durch Einsetzen der Werthe von $p_1, p_2, \dots, p_n$, welche der fraglichen Lösung angehören, nicht verschwindet, und keine der Grössen $\psi''(p_i p_j)$ durch dieselbe Substitution unendlich wird. Auf den Beweis dieser Behauptung und die daraus weiter folgenden Resultate gehe ich hier nicht ein.

§ 8

Ich werde von den gewonnenen Resultaten nun eine Anwendung machen auf eine gewisse Gattung partieller Differentialgleichungen, welche ein besonderes Interesse darbieten, einmal ihrer Wichtigkeit wegen, dann aber auch, weil die singulären Lösungen dieser Differentialgleichungen von JACOBI¹⁾ auf einem von dem unsrigen ganz verschiedenen Wege behandelt worden sind, so dass die Uebereinstimmung der Resultate eine Bestätigung der Richtigkeit unserer Untersuchungen ist. Es sind dies die linearen partiellen Differentialgleichungen.

Wenn die lineare partielle Differentialgleichung vorliegt:

$$(29) \quad X_0 p_1 + X_1 p_2 + \dots + X_u p_u = X_0,$$

worin $X_0, X_1, \dots, X_u$ irgend welche Functionen von $x_1, x_2, \dots, x_u$ sind, so erhält man bekanntlich die allgemeine Lösung dieser Gleichung, indem man die Integrale des Systems aufsucht:

$$dx : dx_1 : dx_2 : \dots : dx_u = X_0 : X_1 : X_2 : \dots : X_u.$$

Sind die Integrale dieses Systems, deren Anzahl u ist:

$$f_1 = \alpha_1, f_2 = \alpha_2, \dots, f_u = \alpha_u,$$

wo die $f_1, f_2, \dots, f_u$ Functionen von $x_1, x_2, \dots, x_u$ sind, aber die willkürlichen Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_u$ nicht mehr enthalten, so ist die allgemeine Lösung der Gleichung (29):

$$(30) \quad \Phi(f_1, f_2, \dots, f_u) = 0,$$

wo Φ eine willkürliche Function bedeutet. Man erhält eine vollständige Lösung, wenn man über Φ irgend eine besondere Annahme macht, so dass u willkürliche Constanten darin vorkommen, welche sich nicht auf eine geringere Anzahl reduciren lassen; man erhält also eine Gleichung von folgender Form:

$$(31) \quad \Psi(f_1, f_2, \dots, f_u, c_1, c_2, \dots, c_u) = 0$$

als vollständige Lösung.

Wenn man, um von der Lösung (31) zu irgend einer andern Lösung überzugehen, nach den früheren Regeln die Constanten $c_1, c_2, \dots, c_u$ als Functionen der $x_1, x_2, \dots, x_u$ bestimmt, so erhält man dazu Gleichungen von folgender Form:

1, CRELLE'S Journal Bd. 27, p. 239.

$$\begin{aligned} Q''(c_1) &= Q_1 H_1'(c_1) + Q_2 H_2'(c_1) + \dots + Q_m H_m'(c_1) \\ Q''(c_2) &= Q_1 H_1'(c_2) + Q_2 H_2'(c_2) + \dots + Q_m H_m'(c_2) \\ &\vdots \\ Q''(c_u) &= Q_1 H_1'(c_u) + Q_2 H_2'(c_u) + \dots + Q_m H_m'(c_u) \\ H_1(c_1 c_2 \dots c_u) &= 0 \\ &\vdots \\ H_m(c_1 c_2 \dots c_u) &= 0, \end{aligned}$$

worin die $\Pi_1, \Pi_2 \dots \Pi_m$ willkürliche Functionen bedeuten. Die Form dieser Gleichungen zeigt, dass die $c_1, c_2 \dots c_u$ immer Functionen der $f_1, f_2 \dots f_u$ werden, woraus erhellt, dass die Gleichung (30) wirklich die allgemeinste Form der Lösung ist. Allein die singuläre Lösung kann nicht in der Form (30) enthalten sein, denn nach unserer Definition der singulären Lösung erhält man dieselbe, wenn man in (31) die Constanten $c_1, c_2 \dots c_u$ als Functionen der x derart bestimmt, dass die Functionaldeterminante derselben nicht verschwindet. Bildet man aber die Functionaldeterminante unter der Voraussetzung, dass die $c_1, c_2 \dots c_u$ Functionen der $f_1, f_2 \dots f_u$ seien, so erhält man:

$$\begin{array}{ccc|ccc} \frac{\partial c_1}{\partial f_1}, \frac{\partial c_1}{\partial f_2}, \dots, \frac{\partial c_1}{\partial f_u} & \frac{\partial c_2}{\partial f_1}, \frac{\partial c_2}{\partial f_2}, \dots, \frac{\partial c_2}{\partial f_u} & \dots & f_1' x_1 + p_1 f_1' z, f_2' x_1 + p_1 f_2' z, \dots, f_u' x_1 + p_1 f_u' z \\ \frac{\partial c_2}{\partial f_1}, \frac{\partial c_2}{\partial f_2}, \dots, \frac{\partial c_2}{\partial f_u} & \frac{\partial c_3}{\partial f_1}, \frac{\partial c_3}{\partial f_2}, \dots, \frac{\partial c_3}{\partial f_u} & \dots & f_1' x_2 + p_2 f_1' z, f_2' x_2 + p_2 f_2' z, \dots, f_u' x_2 + p_2 f_u' z \\ \frac{\partial c_u}{\partial f_1}, \frac{\partial c_u}{\partial f_2}, \dots, \frac{\partial c_u}{\partial f_u} & \frac{\partial c_u}{\partial f_1}, \frac{\partial c_u}{\partial f_2}, \dots, \frac{\partial c_u}{\partial f_u} & \dots & f_1' x_u + p_u f_1' z, f_2' x_u + p_u f_2' z, \dots, f_u' x_u + p_u f_u' z \end{array}$$

Bedenkt man nun, dass die $p_1, p_2, \dots, p_u$ bestimmt werden durch Gleichungen von der Form:

$$\sum_i x'(f_i) (f_i'(x_\rho) + p_\rho f_i''(z)) = 0,$$

so erkennt man, dass die zweite der vorstehenden Determinanten identisch verschwindet, also die singuläre Lösung nicht in der Form (30) enthalten sein kann.

Um die singuläre Lösung zu bestimmen, hätte man nach unserer Methode die Gleichung (29) in Bezug auf z aufzulösen, und die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial z}{\partial p_1}, \frac{\partial z}{\partial p_2}, \dots, \frac{\partial z}{\partial p_n} = 0$ zu setzen.

Es ist aber nicht nothwendig, diese Auflösung wirklich auszuführen; man kann die gegebene Gleichung (29) selbst differenziren, und erhält zur Bestimmung der $\frac{\partial z}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial z}{\partial p_n}$ das System Gleichungen:

$$\begin{aligned} 0 &= X_1 + \frac{\partial z}{\partial p_1} \left\{ \frac{\partial X_1}{\partial z} p_1 + \frac{\partial X_2}{\partial z} p_2 + \dots + \frac{\partial X_u}{\partial z} p_u - \frac{\partial X_0}{\partial z} \right\} \\ 0 &= X_2 + \frac{\partial z}{\partial p_2} \left\{ \frac{\partial X_1}{\partial z} p_1 + \frac{\partial X_2}{\partial z} p_2 + \dots + \frac{\partial X_u}{\partial z} p_u - \frac{\partial X_0}{\partial z} \right\} \\ &\dots \dots \dots \\ 0 &= X_u + \frac{\partial z}{\partial p_u} \left\{ \frac{\partial X_1}{\partial z} p_1 + \frac{\partial X_2}{\partial z} p_2 + \dots + \frac{\partial X_u}{\partial z} p_u - \frac{\partial X_0}{\partial z} \right\} . \end{aligned}$$

Den Bedingungen der singulären Lösung:

$$\frac{\partial z}{\partial p_1} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial p_2} = 0, \quad \dots \quad \frac{\partial z}{\partial p_u} = 0$$

kann nun dadurch genügt werden, dass $X_1 X_2 \dots X_u$ durch eine einzige Gleichung zwischen $z x_1 x_2 \dots x_u$ zum verschwinden gebracht werden. Damit aber dadurch die Gleichung (29) überhaupt befriedigt wird, muss gleichzeitig X_0 verschwinden, d. h. die ganze Differentialgleichung muss einen algebraischen Factor haben. Nehmen wir also diesen Fall aus, d. h. nehmen wir an, die Coefficienten $X_0 X_1 \dots X_u$ seien von gemeinschaftlichen Factoren befreit, so bleibt nichts übrig, als dass für die singuläre Lösung, der Ausdruck:

$$(33) \quad \frac{\partial X_1}{\partial z} p_1 + \frac{\partial X_2}{\partial z} p_2 + \dots + \frac{\partial X_u}{\partial z} p_u - \frac{\partial X_0}{\partial z}$$

unendlich gross wird, jedoch so, dass nicht gleichzeitig einer der Coefficienten $X_0 X_1 \dots X_u$ unendlich gross wird. Es müssen also, ehe man zur Aufsuchung der singulären Lösung schreitet, die Coefficienten von gemeinschaftlichen Factoren und von Nennern befreit sein.

Der Ausdruck (33) kann nur dadurch unendlich werden, dass eines seiner Glieder unendlich wird, so dass man aus dieser Bedingung die singuläre Lösung in Gestalt einer Relation zwischen $z x_1 x_2 \dots x_u$ erhält, welche befreit ist von $p_1 p_2 \dots p_u$.

Die Gleichung, aus welcher nach JACOB die singuläre Lösung zu bestimmen ist, scheint von der unsrigen verschieden zu sein. Sie lautet (a. a. O.):

$$\frac{\partial X_0}{\partial z} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial X_u}{\partial x_u} = \infty .$$

Es lässt sich aber ohne Schwierigkeiten nachweisen, dass die beiden Methoden zu demselben Resultat führen.

Denkt man sich nämlich in die Coefficienten $X_0 X_1 \dots X_u$ an die Stelle von z die singuläre Lösung substituirt, so gelten

diese in Functionen von $x_1, x_2, \dots, x_u$ allein über, welche der Voraussetzung nach nicht unendlich sind. Bezeichnet man also die partiellen Differentialquotienten dieser Functionen nach den x mit $\left(\frac{\partial X_\rho}{\partial x_\sigma}\right)$, so hat man die identischen Gleichungen:

$$\left(\frac{\partial X_\rho}{\partial x_\sigma}\right) = \frac{\partial X_\rho}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial X_\rho}{\partial z} p_\sigma$$

und daraus:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1}\right) + \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_2}\right) + \dots + \left(\frac{\partial X_u}{\partial x_u}\right) \\ &= \frac{\partial X_1}{\partial z} p_1 + \frac{\partial X_2}{\partial z} p_2 + \dots + \frac{\partial X_u}{\partial z} p_u - \frac{\partial X_\rho}{\partial z} \\ & \quad + \frac{\partial X_\rho}{\partial z} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial X_u}{\partial x_u}. \end{aligned}$$

Der Ausdruck auf der linken Seite dieser Gleichung ist endlich. Wenn daher die erste Zeile rechts vom Gleichheitszeichen unendlich wird, so muss es auch die zweite Zeile werden und umgekehrt. Dadurch ist die Uebereinstimmung der beiden Methoden der Auffindung der singulären Lösung dargethan.