Heidelberger Texte zur Mathematikgeschichte

Autor: **Cantor, Moritz** (1829–1920)

Titel: **Über die älteste indische Mathematik**

Quelle: Archiv der Mathematik und Physik.
3. Reihe, Band 8 (1905),
Seite 63 – 72.
Signatur UB Heidelberg: L 5::3: 8.1904-05

Über das wirkliche Alter der Çulvasutras gingen die Ansichten der Gelehrten weit auseinander. Man hat behauptet, *Pythagoras* habe von den Indern gelernt, und nicht von den Ägyptern. Mehr Licht verbreitete in dieser Frage die 1901 erschienene Schrift von *Albert Bürk* über die Geometrie *Apastambas* (im IV. oder V. Jhr. v. Chr.). Die hierin enthaltenen Formeln für die rationalen Seiten des rechtwinkligen Dreiecks wurden mit denen verglichen, die auf ägyptischen Lederrollen sich finden, welche ein Alter von mehr als 4000 Jahren haben. Aus dem Umstand, daß die Formel des *Pythagoras*, auf welche die ägyptischen Beispiele hinauskommen, nicht alle Zahlen liefert, welche die Inder haben, folgert *Cantor*, daß *Pythagoras* sein Wissen von jenen Zahlen nicht aus Indien bezogen haben könne. Er kommt zu dem Resultat, man dürfe nicht behaupten, eine altursprüngliche Anschauungsgeometrie habe den Anstoß zur Geometrie des *Pythagoras* gegeben. Den Indologen bleibt es vorbehalten, mehr Licht in die Frage über das Alter der indischen Mathematik zu bringen.

(Rezension von Felix Müller (1843–1928) im *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, Band 35. 1904)

ARCHIV
DER MATHEMATIK UND PHYSIK

MIT BESONDERER RÜCKSICHT AUF DIE BEDÜRFNISSE
DER LEHRER AN HÖHEREN UNTERRICHTSANSTALTEN.

GEGRÜNDET 1841 DURCH J. A. GRUNERT.

DRITTE REIHE.

MIT ANHANG:
SITZUNGSBERICHTE DER BERLINER MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT.

HERAUSGEGEBEN

VON

E. LAMPE
IN BERLIN.

W. FRANZ MEYER
IN KÖNIGSBERG I. PR.

E. JAHNKE
IN BERLIN.

ACHTER BAND.

MIT 58 TEXTFIGUREN.

LEIPZIG UND BERLIN,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1905.

Über die älteste indische Mathematik.

Von Moritz Cantor in Heidelberg.

Als ich, durch Vertiefung in Thibauts Arbeiten von 1876 zu eigenen Forschungen angeregt, 1877 meine Gräkoindischen Studien, 1880 den ersten Band meiner Geschichte der Mathematik veröffentlichte und darin die indischen Çulvasutras als ältestes Zeugnis indischer Geometrie behandelte, war außer über dieses *relative* Alter der betreffenden Schriften Übereinstimmung über deren *wirkliches* Alter nicht vorhanden.

Thibaut hielt sie allerdings für sehr alt, Albrecht Weber dagegen für verhältnismäßig jung, jedenfalls für so jung, daß es gestattet war, eine Beeinflussung indischer Geometrie durch Eindringen Heronischer Wissenschaft anzunehmen. Ich traf damals auch nur auf allgemeine Zustimmung zu meiner, wie es schien einwandfreien Wiederherstellung der indischen Gedanken.

Nun kam 1884 die Schrift L. von Schroeders „Pythagoras und die Inder," welche ihr Verfasser mir zuzuschicken die Freundlichkeit hatte. Ich gestehe, daß mich die dort verfochtene Lehre: Pythagoras sei als Schüler der Inder und nicht der Ägypter zu betrachten, so wenig anmutete, daß ich 1894 in der 2. Auflage des I. Bandes meiner Geschichte der Mathematik das Schroedersche Buch ebensowenig berück-

1) Die der Figur beigelegten Symbole werden später erläutert.

sichtigte, als ich es mit den etwa ein halbes Jahrhundert älteren Schriften von Gladisch gemacht hatte, in welchen Pythagoras als Schüler der Chinesen dargestellt war. Was L. von Schroeder über die Seelenwanderungslehre, was er über das Verbot gewisser Speisen, z. B. der Bohnen sagte, konnte und kann ich nicht prüfen, was er über das Alter der indischen Seilspannungsvorschriften, die er bis in das X. vorchristliche Jahrhundert hinaufschob, vorbrachte, konnte mich nicht überzeugen, da ich wußte, daß ägyptische Seilspannung aus der Zeit der der 12. Dynastie angehörenden Könige Amenemhat gesichert ist, also aus einer Zeit, welche jedenfalls erheblich früher fällt als das Jahr 2000 vorchristlicher Zeitrechnung.

Eine wesentliche Verschiebung der Sachlage ergab sich seit 1901 durch die Arbeiten, welche Albert Bürk unter dem Titel „Das Āpastamba-Śulba-Sūtra" im 55. und 56. Bande der Zeitschrift der Deutschen Morgenländischen Gesellschaft veröffentlicht hat. Wenn Apastamba, wie die Sanskritforscher zur Zeit übereinstimmend annehmen, dem IV. oder V. vorchristlichen Jahrhunderte angehörend, nicht eben gar zu lang nach Pythagoras, jedenfalls aber um Jahrhunderte vor Heron gelebt hat, wenn Apastambas Vorschriften überdies nur die Kodifizierung von Dingen darstellen, die ein halbes Jahrtausend früher, nämlich damals als die indische Opferlehre zuerst die Errichtung sonderbar gestalteter Altäre forderte, in handwerksmäßiger Übung waren, dann kann selbstredend die Geometrie Apastambas kein Ableger Alexandrinischen Wissens des I. vorchristlichen Jahrhunders sein.

Aber mit dieser Verneinung ist nicht alles getan. Neue Fragen der verschiedensten Art stellen sich ein, unter welchen ich nur zwei hervorheben möchte. *Erstens* wie verhält es sich mit dem tatsächlichen Ursprung des Wissens des Pythagoras von dem nachmals mit seinem Namen belegten Satze? *Zweitens* hat man die in den Çulvasutras benutzten geometrischen Kenntnisse, nachdem sie nun einmal nicht alexandrinisch sein können, für altindisch zu halten?

Es ist wahr, daß unter den zahlreichen Berichten, welche das Altertum uns über die Wanderungen des Pythagoras hinterlassen hat, auch einer sich befindet, Pythagoras habe von den Brahmanen gelernt, und daß diese Angabe einigemal wiederholt worden ist. Aber eben so wahr ist, daß ziemlich allgemeine Übereinstimmung der Berichterstatter darüber herrscht, Pythagoras habe aus Wissensdrang Ägypten besucht, das Land, aus welchem auch ältere griechische Weisen, wie Thales, Geometrie zurückgebracht hatten. Ägypten war das Land, in welchem nach griechischer Meinung die Geometrie zu Hause war, während für Rechnerisches eine vorderasiatische Heimat gesucht wurde. Solchen durch Jahrhunderte sich erhaltenden Meinungen ist immerhin einiges Gewicht beizulegen, wenn auch nicht geleugnet werden soll, daß mehr oder weniger sagenhaften Ursprungsberichten für sich allein keine volle Beweiskraft innewohnt. Sie fordern, um mich mathematisch auszudrücken, jedenfalls noch einen Existenzbeweis. Ich verstehe darunter, man müsse zeigen, daß in dem Lande, aus welchem eine Lehre stammen soll, diese Lehre auch wirklich und zwar in einer Zeit, welche der der vermuteten Übertragung vorausging, bekannt war.

Wir wissen von der Herstellung riesiger Pyramiden, welche, jenseits des Jahres 3500 vorchristlicher Zeit entstanden, einen Böschungswinkel von nahezu 52 Grad in regelmäßiger Wiederkehr aufweisen. Wir besitzen die Überreste großartiger Tempelbauten, die vor dem Jahre 2000 ausgeführt wurden. Wir kennen im Felsengrabe des im Jahre 1407 verstorbenen Königs Seti I. vollständige Netze geradliniger zueinander senkrechter Koordinaten, welche den Bildhauern bei der Ausschmückung des Grabes mit Wandskulpturen dienten. Alle diese Tatsachen zwingen uns, eine uralte Geometrie mindestens praktischer Natur in Ägypten anzunehmen. Aber wir wissen noch mehr. Schriftdenkmale aus der Zeit der Könige Amenemhat haben sich, wie ich oben schon sagte, erhalten. Es sind Lederrollen von gegenwärtig mehr als viertausendjährigem Alter. Sie handeln von Tempelbauten, und die *Seilspannung*, welche zur Festlegung der Ecken und Wandrichtungen der Tempel diente, ist in ihnen erwähnt. Tempelbilder zeigen uns den Vollzug dieser Handlung. Die Seilspanner, *Harpedonapten*, der Ägypter genießen bei Demokrit (um 420) verdienten Ruhm. Seilspannung hat sich bei Heron von Alexandria erhalten. Das ist eine lückenlos zweitausend Jahre hindurch in dem gleichen Lande sich vererbende Übung, und wenn damit kein Existenzbeweis altägyptischer Geometrie geliefert ist, dann weiß ich nicht, wie ein solcher aussehen soll.

Was Seilspannung war, kann ich als Lesern dieser Zeitschrift bekannt voraussetzen: das Anknüpfen eines an einer bestimmten Stelle mit einem Knoten versehenen Seiles mittels seiner Enden an zwei Pflöcke von bestimmt gewählter Entfernung und die Herstellung eines rechtwinkligen Dreiecks durch Spannung des Seiles an dem erwähnten Knoten. Man kannte also in Ägypten, und zwar seitdem die Seilspannung dort geübt wurde, den Satz vom rechtwinkligen Dreiecke mit bestimmten Seitenlängen.

Welche Seitenlängen benutzte man? Ich habe früher die Mutmaßung ausgesprochen, man habe sich des rechtwinkligen Dreiecks von den Seiten 3, 4, 5 bedient. Ich stützte mich darauf, daß grade dieses Dreieck als Eigentum des Pythagoras erwähnt wird. Ich freue mich gegenwärtig weitere Stützpunkte meiner Vermutung zur Verfügung zu haben. In Kahun aufgefundene Papyrusfragmente, welche der Zeit der 12. Dynastie entstammen, also wiederum gegenwärtig das ganz achtbare Alter von mindestens 4000 Jahren besitzen, haben zweierlei erkennen lassen. Erstlich kommen in ihnen Quadratwurzelausziehungen vor: Die Quadratwurzel aus 16 ist 4, die Quadratwurzel aus $1\frac{9}{16}$ ist $1\frac{1}{4}$, die Quadratwurzel aus $6\frac{1}{4}$ ist $2\frac{1}{2}$; das Zeichen für Quadratwurzel ist ein rechter Winkel mit der mutmaßlichen Aussprache *tm*, wozu natürlich irgend ein ergänzender Vokal trat. Zweitens treten Gleichungen auf, welche durch leichte Ergänzungen einiger fehlenden Papyrusstückchen

$$\begin{aligned}(1)^2 + (\tfrac{3}{4})^2 &= (1\tfrac{1}{4})^2\\ (8)^2 + (6)^2 &= (10)^2\\ (2)^2 + (1\tfrac{1}{2})^2 &= (2\tfrac{1}{2})^2\\ (16)^2 + (12)^2 &= (20)^2\end{aligned}$$

heißen. Graf Schak-Schakkenburg, dem diese hochwichtige Entdeckung zu verdanken ist, hat sie im 38. und im 40. Bande der Zeitschrift für ägyptische Sprache veröffentlicht. Das Auftreten von Brüchen in zweien von diesen vier Gleichungen kann bei einem Volke, welches, wie man aus dem etwa 400 Jahre jüngeren, aber nach alten Mustern verfaßten Rechenbuche des Ahmes weiß, das Bruchrechnen in wunderbarer Weise beherrschte, nicht in Erstaunen setzen. Wohl aber ist darauf aufmerksam zu machen, daß alle vier Gleichungen augenscheinlich mit der einen Gleichung

$$(4)^2 + (3)^2 = (5)^2$$

zusammenhängen, indem die in dieser letzteren quadrierten Zahlen durch 4 und durch 2 dividiert, mit 2 und mit 4 multipliziert sind. Mir persönlich wenigstens genügt diese Tatsache, um auch die Kenntnisse der sich unmittelbar nicht vorfindenden Gleichung $4^2 + 3^2 = 5^2$ für die alten Ägypter in Anspruch zu nehmen. Daß sie selbst fehlt, ist möglicherweise damit zu erklären, daß sie das allgemein bekannte Hauptbeispiel darstellte, welchem der Verfasser der Rechnungen von Kahun nur ähnlich geartete Beispiele hinzuzugesellen beabsichtigte.

Dazu kommt ein weiteres. Das rechtwinklige Dreieck aus den Seiten 4, 3, 5 ist ein solches, in welchem der Unterschied der Länge der Hypotenuse und der größeren Kathete *eins* beträgt, und die von griechischen Schriftstellern dem Pythagoras zugeschriebene Formel zur Herstellung ganzzahlig rechtwinkliger Dreiecke mit ungerader Hypotenuse und gerader größerer Kathete lautet

$$\left(\frac{(2a+1)^2-1}{2}\right)^2 + (2a+1)^2 = \left(\frac{(2a+1)^2+1}{2}\right)^2$$

oder

$$(2a^2 + 2a)^2 + (2a + 1)^2 = (2a^2 + 2a + 1)^2$$

mit ebendemselben Unterschiede *eins* der genannten Strecken.

Dieses gesamte pythagoräische mathematische Wissen *kann* also, wie man sieht, aus ägyptischer Anregung entsprungen sein ebenso wie die dem Pythagoras zugeschriebene Kenntnis des Irrationalen, sobald er versuchte die Quadratwurzel aus einer Zahl wie 2 oder 3 usw. auszuziehen, ebenso wie der Versuch sich geometrisch darüber klar zu werden, ob denn die Seiten jedes rechtwinkligen Dreiecks Flächensätzen von der Art wie $4^2 + 3^2 = 5^2$ genügen müssen.

Jetzt zu den indischen Çulvasutras. *Çulva* bedeutet *Seil*, das Wort selbst kommt aber in den Seilvorschriften, wie man Çulvasutra übersetzen könnte, nicht vor. Dort ist vielmehr für das Seil ein anderes Wort in Gebrauch, welches Rajju transkribiert worden ist. Mir erscheint dieser Wechsel nicht ganz unwichtig. Er deutet mir darauf hin, daß zwischen dem ältesten Gebrauche des Seiles und der durch Apastamba usw. vollzogenen Niederschrift der Gebrauchsanweisung Veränderungen vorgegangen sein müssen, und ob diese sich nur auf ein Wort beziehen, wie wenn in älterer Zeit *Seil*, in jüngerer *Strick* gesagt worden wäre, dafür wird kaum ein Beweis zu erbringen sein. Jedenfalls handelt es sich in den Çulvasutras um Seilspannung in dem gleichen Sinne, den ich für die ägyptische Seilspannung in Anspruch nehmen mußte. Rechte Winkel werden durch Seilspannung erzeugt, wobei als Längen der Seiten des vornehmlich benutzten rechtwinkligen Dreiecks 36, 15, 39 erscheinen. Außerdem ist den Verfassern der Çulvasutras bekannt, daß das Quadrat der Diagonale eines Quadrates das Doppelte des ursprünglichen Quadrates, das Quadrat der Diagonale eines Rechtecks die Summe der Quadrate beider Rechtecksseiten ist. Sie kennen also unzweifelhaft den Satz vom rechtwinkligen Dreiecke nicht weniger unter der Voraussetzung irrationaler als rationaler Seiten. Unter den rationalen rechtwinkligen Dreiecken kennen sie neben dem Dreiecke 36, 15, 39 auch die Dreiecke

4,	3,	5
12,	5,	13
15,	8,	17
16,	12,	20
20,	15,	25
24,	7,	25
35,	12,	37

Apastamba gibt aber auch die Regel dafür, wie man ein Quadrat um ein zweites vermehrend unter Annahme von ausschließlich rationalen Quadratseiten zu einem dritten gelange. Herr Bürk hat das Verdienst darauf aufmerksam gemacht zu haben. Man soll an der östlichen und an der nördlichen Quadratseite je ein Rechteck von gleicher Breite anfügen und an der nordöstlichen Ecke ein Quadratchen, dessen Seite der Breite jener Rechtecke gleich ist, dann hat man ein neues Quadrat. In Zahlen heißt dieses, wenn a die ursprüngliche Quadratseite und b die Breite der anzufügenden Vierecke bedeutet, es sei

$$a^2 + ab + ab + b^2 = (a + b)^2$$

Ist alsdann $2ab + b^2$ selbst ein Quadrat, so hat man zwei Quadrate gefunden, deren Summe sich wieder als Quadrat zeigt.

Die um das ursprüngliche Quadrat herumgelegte Figur ist augenscheinlich diejenige, welche die Griechen *Gnomon* nannten, und von welcher Aristoteles sprach, wenn er sagte, die Pythagoräer hätten die Quadrate gebildet, indem sie die Gnomonen allmählich zur Einheit hinzufügten. Nimmt man in der Tat $a = 1$ und $b = 1$, so sieht man folgende neue Quadrate entstehen:

$$\begin{aligned} 1^2 + 3 &= 2^2 \\ 2^2 + 5 &= 3^2 \\ 3^2 + 7 &= 4^2 \\ 4^2 + 9 &= 5^2 \end{aligned}$$

Aber $9 = 3^2$ ist selbst ein Quadrat, und somit ist erkannt:

$$4^2 + 3^2 = 5^2$$

Das gleiche Verfahren fortsetzend gelangt man zu

$$\begin{aligned} 5^2 + 11 &= 6^2 \\ 6^2 + 13 &= 7^2 \\ 7^2 + 15 &= 8^2 \\ 8^2 + 17 &= 9^2 \\ 9^2 + 19 &= 10^2 \\ 10^2 + 21 &= 11^2 \\ 11^2 + 23 &= 12^2 \\ 12^2 + 25 &= 12^2 + 5^2 = 13^2 \text{ usw.} \end{aligned}$$

Man konnte aber auch $b = 2$ oder $b = 3$ usw. setzen. Dann ergab sich mittels $b = 2$ wieder von $a = 1$ ausgehend:

$$\begin{aligned} 1^2 + 8 &= 3^2 \\ 3^2 + 16 &= 3^2 + 4^2 = 5^2, \end{aligned}$$

welches so zum zweiten Male erkannt war. Ferner entstand:

$$\begin{aligned} 5^2 + 24 &= 7^2 \\ 7^2 + 32 &= 9^2 \\ 9^2 + 40 &= 11^2 \\ 11^2 + 48 &= 13^2 \\ 13^2 + 56 &= 15^2 \\ 15^2 + 64 &= 15^2 + 8^2 = 17^2 \text{ usw.} \end{aligned}$$

Es ist gewiß richtig, wie Herr Bürk es getan hat, darauf aufmerksam zu machen, daß die Formel des *Pythagoras* $[(2a^2 + 2a)^2 + (2a + 1)^2 = (2a^2 + 2a + 1)^2]$ für zwei zu einem neuen Quadrate einander ergänzende Quadratzahlen unmöglich zu $15^2 + 8^2 = 17^2$ führen konnte, weil jene Formel den Unterschied 1 zwischen den beiden größten Quadratseiten voraussetzt. Nur hätte Herr Bürk hinzufügen sollen, daß wir von einer zweiten Formel Kenntnis haben, welche auf Plato zurückgeht, und welche jenen Unterschied als 2 voraussetzt. In Platos Formel

$$(a^2 - 1)^2 + (2a)^2 = (a^2 + 1)^2$$

sind jene Zahlen, mittels $a = 4$, enthalten.

Ich betone diese Abweichung aus einem ganz besonderen Grunde. Grade der Umstand, daß die Formel des Pythagoras *nicht* alle Zahlen liefert, welche die Inder besaßen, daß sie vielmehr eine Ergänzungsformel nötig machte, scheint mir zu bestätigen, daß Pythagoras sein Wissen von jenen Zahlen nicht aus Indien bezogen hat.

Aber der Gnomon? Von dieser pythagoräischen Figur ist, so weit ich wenigstens die Literatur kenne, in Ägypten nirgend die Rede. In Indien spielt sie, wie wir sahen, eine hervorragend wichtige Rolle. Hier liegt zweifellos eine große Schwierigkeit vor, die ich nicht zu heben imstande bin. Man könnte ja darauf hinweisen, daß die Figur des Gnomon grade das hieroglyphische Zeichen für Quadratwurzel ist, allein bisher ist noch keine Veranlassung begründet, die Ähnlichkeit nicht für eine zufällige zu halten. Man könnte ferner betonen wollen, daß der Gnomon zwar bei Apastamba, aber nicht in den anderen Çulvasutras vorkomme, allein *ein* Vorkommen genügt, um das Vorhandensein zu beweisen. Ich wiederhole es daher, hier liegt eine Schwierigkeit vor, welche den Ägyptologen vielleicht Anlaß zu weiteren Forschungen geben kann.

Ist denn nun, fahren wir in unserer nach allen Seiten parteilosen Untersuchung fort, für Indien alles klar? Daß die Zahlen 4, 3, 5; 12, 5, 13; 15, 8, 17 und wie sie alle heißen, Maßzahlen der Seiten rechtwinkliger Dreiecke sind, das mußte selbstredend, bevor man einen strengen geometrischen Beweis des Satzes vom rechtwinkligen Dreiecke besaß, Erfahrungstatsache sein. Für Ägypten genügte nach meiner Auffassung die eine Erfahrungstatsache, daß es ein rechtwinkliges Dreieck 4, 3, 5 gebe. Dann nahm Pythagoras die Sache geometrisch in die Hand und bewies den nach ihm benannten Lehrsatz, indem er in altgriechischer Weise von Einzelfall zu Einzelfall, zuletzt zum ganz allgemeinen Satze aufstieg. Wie war es in Indien? Herr Bürk hat versucht zu zeigen, wie man dort zu der genannten Erfahrung kam. Man habe ein Quadrat z. B. 12^2 unten an die rechte Seite, ein anderes also 5^2 rechts an die untere Seite des Quadrats 13^2 hingezeichnet; diese beiden Quadrate 12^2 und 5^2 hätten einen Winkelraum erkennen lassen, in welchen genau das Rechteck mit den Seiten 12 und 5 paßte; man habe die Diagonale dieses Rechtecks gemessen und die Länge 13 gefunden. Ähnlich sei das Verfahren bei allen anderen obenerwähnten Quadraten mit ganzzahligen Seiten gewesen, und dann habe man das gefundene Ergebnis verallgemeinert. Es ist ungemein schwierig über eine solche Hypothese, die sich auf keinerlei bekannte Tatsache stützt, ein Urteil zu fällen, mag man sie auch als sinnreich begrüßen. Vielleicht kann Zweifel erregen, daß die Figur, an welcher die Wahrheit, daß die Diagonale des Quadrates ein doppelt so großes Quadrat als die Seite hervorbringe, erkannt sein soll, ganz anderer Natur gewesen sein muß und in der Tat in einer Gestalt angenommen wird, welche wenigstens teilweise bei dem falkenförmigen Altare der Inder benutzt wurde, und welche mit der bekannten Figur in Platos Maeon übereinstimmt, einem großen Quadrate, das durch zwei die Mitten von je zwei Gegenseiten verbindende Gerade in vier kleinere Quadrate zerfällt, in deren jedem diejenige Diagonale gezeichnet ist, welche nicht auf eine Diagonale des großen Quadrates fällt. Und wie fand man die anderen Irrationalitäten $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ usw.? Durch Umwandlung von Rechtecken in Quadrate, welche in den Çulvasutras vorkommen? Das ist wieder eine andere Figur und damit auch eine Schwierigkeit, denn die Unterscheidung zahlreicher Einzelfälle ist, wie ich schon gesagt habe, nachweisbar altgriechisch, aber indisch?

Nun kommt weiteres hinzu. Wir kennen ganz genau die indische Astronomie des II. nachchristlichen Jahrhunderts, ebenso die späte indische Geometrie, die späte indische Arithmetik und Algebra. Die Astronomie wie die Geometrie sind voll von nachweisbar griechischen Spuren, die Arithmetik und Algebra lassen in ihrer Entwicklung fast alle solche Spuren vermissen. Hier hat der indische Geist die glänzendsten Entdeckungen gemacht, mit welchen er dem europäischen Abendlande um Jahrhunderte zuvorkam. Ist es wahrscheinlich, daß gewisse mathematische Richtungen in einem Volke mit größtem dauernden Erfolge beibehalten werden, während andere in frühester Zeit schon erfolgreich behandelte Dinge plötzlich allen Reiz zu verlieren scheinen und gegen fremde Einfuhrware zurücktreten? Ich will die Unmöglichkeit einer solchen einseitigen Atrophie, wenn mir der Ausdruck gestattet wird, nicht behaupten, aber eine Schwierigkeit bietet sie dem Verständnisse.

Was ich mit diesen Auseinandersetzungen bezwecke, ist folgendes: Ich will zeigen, daß, wenn einerseits die frühe Entstehung der Çulvasutras der Vermutung, als sei in ihnen ausschließlich Alexandrinisches Wissen durchgesickert, den Todesstoß versetzt, man doch damit nicht auskommt, schlankweg zu behaupten, eine altursprüngliche indische Anschauungsgeometrie habe den Anstoß zu der Geometrie des Pythagoras gegeben.

Als ich die vielfachen miteinander selbst nicht in Einklang stehenden Widersprüche erwog, kam mir der Gedanke, ob nicht in den Zeiten, welche wir als uralt zu bezeichnen pflegen, also rund ausgesprochen jetzt vor drei bis vier Jahrtausenden, schon ein dem ganzen damaligen Kulturgebiete, also Vorderasien und Ägypten gemeinsames nicht ganz unbedeutendes mathematisches Wissen vorhanden gewesen sein könnte, welches sich je nach der Begabung der einzelnen Völker bald nach der einen, bald nach der anderen Richtung weiter entwickelte? An dem uralten Verkehre, der zwischen Ägypten und Babylon herrschte, ist nicht zu zweifeln. Weiß man doch von Heiratsanträgen, welche von Fürstenhaus zu Fürstenhaus gingen! Man müßte nur, um meinen Gedanken zu prüfen, genauer, als es bisher der Fall ist, mit der Mathematik des asiatischen Zweistromlandes bekannt sein. Das Wenige, was wir darüber wissen, bietet schon einige Anhaltspunkte für meine Konjektur, die ich in Kürze aufzählen will.

Die Dauer des längsten Tages wird in den Vedakalendern zu $14^h\ 24^m$ angegeben, genau als eben so lang in chinesischen Quellen, für Babylon berechnete sie schon Ptolemäus zu $14^h\ 25^m$; von Babylon aus dürfte mithin die dort fast genaue Zahl nach Osten und Südosten abgewandert sein.

In Babylon kommt in der dort einheimischen Vorbedeutungsgeometrie das Wort *tim* vor, welches ebensowohl Linie als Seil bedeutet und vielleicht die Möglichkeit einer auch dort vorhandenen Übung der Seilspannung eröffnet.

In Babylon wird der Ursprung der biblischen Kreisberechnung, daß der Umfang des Kreises dreimal durch die Schnur von einem Rande zum anderen gemessen werde, also $\pi = 3$ sei, vermutet, und Apastamba gibt als genauen Flächeninhalt des Kreises das Quadrat über $\frac{13}{15}$ des

Durchmessers oder $\frac{26}{15}$ des Halbmessers. Dadurch erhält man $\pi = (\frac{26}{15})^2 = 3\frac{1}{225}$. Aber Bandhâyana, der Verfasser eines anderen Çulvasutra, gibt die gleiche Vorschrift als ungenaue Quadratur, und $3\frac{1}{225}$ ist dem Werte 3 nächstliegend von allen für π irgend in Übung gewesenen Werten.

In Babylon kannte man, wie die Tafeln von Senkereh beweisen, eine Positionsarithmetik, indem die Stellung eines Zahlzeichens weiter links seinen Wert auf das Sechzigfache erhöht. In Indien gelangte die Positionsarithmetik zur fruchtbarsten Entwicklung insbesondere unter Anwendung der Null, die in den Tafeln von Senkereh nicht vorkommt.

Alle diese Dinge sind längst bekannt, aber auf eines möchte ich noch hinweisen, was in den Rahmen hineinzupassen scheint. Die schon genannten Tafeln von Senkereh enthalten die Quadratzahlen von 1^2 bis zu 60^2 und die Kubikzahlen von 1^3 bis zu 60^3. Zu welchem praktischen Zwecke hat man diese Tabellen hergestellt? Diese Frage ist meines Wissens noch niemals gestellt, jedenfalls noch niemals beantwortet worden. Ich wage die Mutmaßung, die Tabellen seien benutzt worden, um aus gegebenen Zahlen die angenäherten Quadratwurzeln und Kubikwurzeln ausziehen zu können. Freilich ist das fürs erste eine haltlos in der Luft schwebende Vermutung. Möge sie gleich dem übrigen, welches ich hier ausgesprochen habe, den Assyriologen als Fingerzeig dienen, worauf sie zu achten haben werden, wenn künftig noch Keilschrifttexte mathematischen Inhaltes der Entzifferung zu Gebote gestellt werden sollten. Vielleicht wird alsdann der Schleier sich lüften lassen, der heute noch so manches in der ältesten Geschichte der Mathematik bedeckt.

Eine Schwierigkeit wird freilich, fürchte ich, noch vorhanden bleiben. In den Çulvasutras sind Näherungswerte als Summen von Stammbrüchen dargestellt. Das hat nichts Erstaunliches, wenn meiner früheren Meinung entsprechend Heronischer Einfluß sich geltend machte. Wie aber jetzt? Auf ägyptischem Boden zeigen die Stammbrüche ein lückenloses Dasein. In Babylon sind sie bis jetzt noch nicht bekannt. In der späteren indischen Literatur kommen sie meines Wissens auch nicht vor. Sollten sie auf indischem Boden just für die Verfasser der Çulvasutras vorhanden gewesen und dann spurlos verschwunden sein? Oder sollte es doch darauf hinauslaufen, daß einzelne Teile der Çulvasutras verhältnismäßig moderne Einschiebsel sind? Diese Schlußfragen richten sich an die Indologen.

Heidelberg, den 14. März 1904.