# Heidelberger Texte zur Mathematikgeschichte

Autor: **Stäckel, Paul** (1862–1919)

Titel: **Geschichte der Funktionentheorie im achtzehnten Jahrhundert**

Quelle: Bibliotheca mathematica.
3. Folge, Band 2 (1901)
Seite 111 – 121.
*Signatur UB Heidelberg:* L 15-7::3.F: 2.1901

Dieser Artikel kann als eine Ergänzung zur Abhandlung: „Integration durch imaginäres Gebiet. Ein Beitrag zur Geschichte der Funktionentheorie“ (1900) betrachtet werden und behandelt ebenso wie dieser die Geschichte der Funktionen einer komplexen Veränderlichen; aber die Untersuchungen, die hier in Betracht kommen, haben wesentlich zum Ausgangspunkt gewisse Probleme der Hydrodynamik. Bei der Behandlung eines solchen Problemes hatte schon *Clairaut* (1743) einen Satz aufgestellt, der in nahem Zusammenhang mit der Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen steht; aber noch wichtiger waren die Untersuchungen von *d'Alembert*, der, veranlaßt durch eine Aufgabe aus der Hydrodynamik, teils (1752) die partiellen Differentialgleichungen $\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\partial q}{\partial x}$, $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial z}$ mittels Funktionen komplexen Argumentes integrierte, teils (1761) erkannte, daß diese Funktionen $p$ und $q$ derselben partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung $\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = 0$ genügen. Die *d'Alembert*sche Integrationsmethode ist von *Euler* (1755) für ein Problem der Hydrodynamik und von *Lagrange* (1772) für die Theorie der geographischen Karten verwertet worden.

Anhangsweise bringt *Stäckel* einige Bemerkungen über die Entdeckung des sogenannten „Theorems von *Frullani*“.

(Rezension von Gustaf Eneström (1852–1923) im *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, Band 32, 1901, S. 48–49)

# BIBLIOTHECA MATHEMATICA.

## ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE
DER
## MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN.

HERAUSGEGEBEN

VON

GUSTAF ENESTRÖM
IN STOCKHOLM.

DRITTE FOLGE. ZWEITER BAND.

MIT DEM BILDNISSE VON E. BELTRAMI IN PHOTOLITHOGRAPHIE ALS TITELBILD,
DEN IN TEXT GEDRUCKTEN BILDNISSEN VON K. PETERSON UND O. SCHLÖMILCH,
SOWIE 18 TEXTFIGUREN.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1901.

# Beiträge zur Geschichte der Funktionentheorie im achtzehnten Jahrhundert.

Von Paul Stäckel in Kiel.

**1.** In der Abhandlung: *Integration durch imaginäres Gebiet* (diese Zeitschrift $1_3$, 1900, 109—128, im folgenden mit **I.** angeführt) habe ich gezeigt, dafs Cauchys *Mémoire sur les intégrales définies, prises entre des limites imaginaires* vom Jahre 1825, womit man die Geschichte der Funktionen einer komplexen Veränderlichen zu beginnen pflegt, in Wahrheit als das Endglied einer Kette von Untersuchungen aufzufassen ist, die von Leibniz und Johann Bernoulli über d'Alembert und Euler bis Laplace und Poisson reicht. Durch Mitteilungen der Herren Burkhardt, Lipschitz und Osgood, denen ich auch an dieser Stelle für ihre Freundlichkeit bestens danke, bin ich darauf aufmerksam geworden, dafs für die Geschichte der Funktionentheorie im achtzehnten Jahrhundert noch eine zweite Reihe von Untersuchungen in Betracht kommt, an denen Clairaut und d'Alembert, Euler und Lagrange beteiligt sind; während es sich dort um die Ausbildung und Verfeinerung der Integralrechnung handelte, sind hier Probleme der Hydrodynamik der Ausgangspunkt für die analytischen Entwickelungen.

**2.** Clairaut hat in seinem klassischen Werke: *Théorie de la figure de la terre, tirée des principes de l'hydrostatique* (Paris 1743) die mathematische Figur der Erde als diejenige Niveaufläche einer gleichförmig rotierenden, gravitierenden Flüssigkeitsmasse aufgefafst, von der die Oberfläche der freien Weltmeere ein Teil ist. Damit die Flüssigkeitsmasse ihre Form beständig beibehält, mufs bei jedem in sich zurückkehrenden Kanal in der Meridianebene ($xy$-Ebene) Gleichgewicht herrschen. Berechnet man also die Wirkung (Arbeit) der Gravitation auf einen unendlich schmalen Kanal $OSN$, so mufs man dasselbe Resultat erhalten wie für irgend einen andern Kanal, der ebenfalls von $O$ nach $N$ führt. Werden die Komponenten der Kraft in Bezug auf die $y$- und $x$-Axe mit $P$ und $Q$ bezeichnet, so ist jene Wirkung (Arbeit) gleich

$$\int (Pdy + Qdx),$$

das Integral erstreckt über die Kanalkurve. Die Bedingung des Gleichgewichtes besteht also darin, daſs der Wert des Integrals unabhängig vom Wege $OSN$ ist, oder wie CLAIRAUT sagt (S. 37): „ne dépende pas de la courbure de $OSN$, c'est à dire de la valeur particulière de $y$ en $x$". „Il faut donc", fährt er fort, „que $Pdy + Qdx$ puisse s'intégrer sans connaître la valeur de $x$, c'est à dire qu'*il faut que* $Pdy + Qdx$ *soit une différentielle complète, afin qu'il puisse y avoir équilibre dans le Fluide*". Um aber zu erkennen, ob das der Fall sei, müsse man sich eines Theorems bedienen, das er in den Abhandlungen der Akademie für das Jahr 1740 gegeben habe[1]), nämlich nachsehen, ob die Gleichung

$$\frac{dP}{dx} = \frac{dQ}{dy}$$

identisch in $x$ und $y$ erfüllt sei.

Man erkennt hieraus, daſs die Frage, wann ein über eine Kurve erstrecktes Integral vom Wege unabhängig ist, bereits von CLAIRAUT aufgeworfen und — abgesehen von den Stetigkeitsbedingungen — richtig beantwortet worden ist. Welche Rolle diese Frage bei den funktionentheoretischen Untersuchungen CAUCHYS und RIEMANNS spielt, braucht hier nicht auseinandergesetzt zu werden[2]).

3. Nachdem D'ALEMBERT bereits 1744 einen *Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides* veröffentlicht hatte, ist er, veranlaſst durch eine Preisaufgabe der Berliner Akademie, in dem *Essai d'une nouvelle théorie de la résistance des fluides* (Paris 1752) auf die Hydrodynamik zurückgekommen. In eine homogene, schwerelose Flüssigkeit, bei der sämtliche Teilchen sich in derselben Richtung mit derselben Geschwindigkeit bewegen, denkt er sich (Kapitel IV) einen festen Körper gebracht, der an seinem Orte verharrt, und sucht die alsdann sich herausbildende stationäre Bewegung der Flüssigkeit zu bestimmen. Durch Betrachtungen, die zu kritisieren ebenso leicht als nutzlos sein würde, gelangt er dazu die Lösung des Problems auf die analytische Aufgabe zurückzuführen, zwei Funktionen $q$ und $p$ von $x$ und $z$ zu finden, die den Gleichungen:

$$dq = Adx + Bdz,$$

$$dp = Bdx - Adz - \frac{pdz}{z}$$

---

1) *Sur l'intégration ou la construction des équations différentielles du premier ordre* (Mem. Paris, Année 1740 (1742), 294).

2) Nicht weniger bedeutungsvoll ist CLAIRAUTS Untersuchung für die Mechanik, tritt doch bei ihm an dieser Stelle bereits der Begriff des Potentials auf, den man gewöhnlich auf LAGRANGE zurückführt (vgl. auch E. SCHERING, *C. F. Gauss und die Erforschung des Erdmagnetismus*, S. 68; Abhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 34, 1887).

genügen, oder, was auf dasselbe herauskommt, zu untersuchen, wann gleichzeitig $Adx + Bdz$ und $zBdx - zAdz$ vollständige Differentiale sind.

Um diese Frage leichter zu lösen, sagt D'ALEMBERT (S. 60), wolle er damit beginnen, die einfachere Annahme zu untersuchen, dafs gleichzeitig $Mdx + Ndz$ und $Ndx - Mdz$ vollständige Differentiale, $dq$ und $dp$, sein sollen. Alsdann ist

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\partial q}{\partial x}, \qquad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial z},$$

folglich sind $qdx + pdz$ und $pdx - qdz$ ebenfalls vollständige Differentiale, mithin auch, indem man das zweite mit $\sqrt{-1}$ multipliziert und zum ersten addiert, bez. vom ersten subtrahiert,

$$(q + \sqrt{-1}p)\left(dx + \frac{dz}{\sqrt{-1}}\right) \quad \text{und} \quad (q - \sqrt{-1}p)\left(dx - \frac{dz}{\sqrt{-1}}\right),$$

und daher ist $q + \sqrt{-1}p$ eine Funktion von $x + \frac{z}{\sqrt{-1}}$ allein, $q - \sqrt{-1}p$ eine Funktion von $x - \frac{z}{\sqrt{-1}}$ allein. Damit $p$ und $q$ reell ausfallen, mufs man irgend zwei Funktionen $\xi(u)$ und $\zeta(u)$ nehmen, die keine imaginären Konstanten enthalten, und hat dann zu setzen:

$$q = \xi\left(x + \frac{z}{\sqrt{-1}}\right) + \xi\left(x - \frac{z}{\sqrt{-1}}\right) + \sqrt{-1}\,\zeta\left(x + \frac{z}{\sqrt{-1}}\right) - \sqrt{-1}\,\zeta\left(x - \frac{z}{\sqrt{-1}}\right),$$

$$p = \frac{\xi\left(x + \frac{z}{\sqrt{-1}}\right)}{\sqrt{-1}} - \frac{\xi\left(x - \frac{z}{\sqrt{-1}}\right)}{\sqrt{-1}} + \zeta\left(x + \frac{z}{\sqrt{-1}}\right) + \zeta\left(x - \frac{z}{\sqrt{-1}}\right);$$

unter der Annahme, dafs $\xi$ und $\zeta$ ganze rationale Funktionen dritten Grades sind, werden diese Ausdrücke explicite hergestellt (S. 61—63[1]).

Dafs D'ALEMBERT eine für die damalige Zeit recht schwierige Aufgabe mit solcher Eleganz gelöst hat, beruht wohl darauf, dafs er wie kein andrer dazu vorbereitet war. Denn erstens hatte er im Jahre 1746 die Differentialgleichung der schwingenden Saite integriert[2]) und dabei ein ganz ähnliches Verfahren angewandt. Er ersetzte nämlich die Gleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

durch die Forderung, dafs gleichzeitig $pd\tau + qdx$ und $qd\tau + pdx$ vollständige Differentiale, $du$ und $dy$, werden sollen, und fand, indem er diese

1) Auf diese Stelle hat bereits 1899 Herr TIMTSCHENKO (vgl. I. S. 128) aufmerksam gemacht, der auch verschiedene der später zu nennenden Arbeiten von D'ALEMBERT, EULER und LAGRANGE anführt.

2) Mém. Berlin, Année 1747 (1749), 215—216.

Ausdrücke addierte bez. subtrahierte, dafs $y + u$ eine Funktion von $\tau + x$ allein, $y - u$ eine Funktion von $\tau - x$ allein sein mufs, woraus sofort

$$y = \Psi(\tau + x) + \Gamma(\tau - x)$$

folgt. Zweitens aber lag gerade D'ALEMBERT die Verwendung der Imaginären nahe, da er sich bereits 1746 mit der Untersuchung imaginärer Ausdrücke eingehend beschäftigt hatte[1]).

Es ist auffallend, dafs D'ALEMBERT bei der Behandlung der ursprünglichen Aufgabe, dafs $dq = Adx + Bdz$ und $dp = zBdx - zAdz$ gleichzeitig vollständige Differentiale sein sollen, von dem für $Adx + Bdz$ und $Bdx - Adz$ gewonnenen Ergebnisse gar keinen Gebrauch macht, dafs er vielmehr sofort $p$ als Potenzreihe in $x$ und $z$ mit unbestimmten Koeffizienten ansetzt, für die sich Gleichungen aus der Integrabilitätsbedingung für $dq$ ergeben, und es könnte scheinen, als ob er nur die Gelegenheit benutzt hätte, ein dem eigentlichen Gegenstande seines Werkes ganz fremdes Theorem, auf das er Wert legte, zu veröffentlichen, wenn er es nicht in den beiden letzten Kapiteln für Aufgaben der Hydrodynamik nutzbar machte. Er betrachtet in Kapitel VIII gewisse Bewegungen einer Flüssigkeit in einem Gefäfse, das er der Einfachheit halber als eben ansieht. Sind $P$ und $Q$ die Komponenten der Geschwindigkeit eines Teilchens, das sich zur Zeit $t$ im Punkte $x$, $z$ befindet, so findet er, dafs $P = p \cdot t$, $Q = q \cdot t$ sein mufs, wo $p$ und $q$ durch die Gleichungen:

$$dq = Adx + Bdz, \qquad dp = Bdx - Adz$$

bestimmt sind (S. 182). In Kapitel IX wird das Strömen von Flüssen behandelt, wobei wieder die Beschränkung auf Bewegungen in der $xz$-Ebene eintritt. Ohne jede nähere Begründung werden genau dieselben Gleichungen für $p$ und $q$ aufgestellt und dazu wird bemerkt, dafs demnach die Oberfläche des Flusses durch die Gleichung:

$$\frac{dx}{dz} = \frac{q}{p} = \sqrt{-1}\,\frac{\Delta\left(x + \frac{z}{\sqrt{-1}}\right) + \Delta\left(x - \frac{z}{\sqrt{-1}}\right)}{\Delta\left(x + \frac{z}{\sqrt{-1}}\right) - \Delta\left(x - \frac{z}{\sqrt{-1}}\right)}$$

bestimmt sei (S. 186).

Zusammenfassend werden wir sagen dürfen, dafs D'ALEMBERT, durch ein Problem der Hydrodynamik veranlafst, die partiellen Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\partial q}{\partial x}, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial z}$$

betrachtet und entdeckt hat, dafs sie erfüllt sind, wenn $p$ und $q$ den

1) Vgl. I. S. 112—113.

reellen und imaginären Teil einer Funktion des Argumentes $x + \frac{z}{\sqrt{-1}}$ bedeuten (wobei er sich jedoch auf solche Funktionen beschränkt, die für reelles Argument reell sind), eine Einsicht, für die ich in meiner schon angeführten Abhandlung nur eine im Jahre 1777 verfaſste, aber erst 1793 veröffentlichte Arbeit EULERS anführen konnte. Erinnert man sich noch daran, in welch genialer Weise D'ALEMBERT bereits 1746 die Theorie der imaginären Ausdrücke behandelt hatte, so wird man auf seine Untersuchungen einen Ausspruch übertragen dürfen, den Herr LIPSCHITZ in Bezug auf eine sogleich zu besprechende Arbeit von EULER geäuſsert hat[1]), daſs nämlich darin bereits *alle diejenigen Begriffe berührt sind, aus welchen sich die gegenwärtige Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen entwickelt hat.*

**4.** Eine neue Epoche für die Hydrodynamik beginnt mit drei Abhandlungen EULERS aus dem Jahre 1755, in denen die noch gegenwärtig geltende Theorie entwickelt wird[2]). Hier kommt nur der Schluſsabschnitt der dritten Abhandlung (S. 353—361) in Betracht. Die Koordinaten eines Teilchens der Flüssigkeit bezeichnet EULER mit $x$, $y$, $z$, die Komponenten seiner Geschwindigkeit nach den Axen der $x$, $y$, $z$ mit $u$, $v$, $w$. Die Bedingung der Inkompressibilität ist dann

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Besonders einfach, sagt EULER, wird die Untersuchung der Bewegung einer inkompressiblen Flüssigkeit, wenn man die Annahme macht, daſs

$$udx + vdy + wdz$$

ein vollständiges Differential sei (S. 353), und die Differentialgleichungen lassen sich sogar integrieren, wenn man sich auf die Betrachtung einer Bewegung in einer Ebene, etwa der $xy$-Ebene, beschränkt. In diesem Falle ist nämlich $w = 0$, also

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

folglich $udy - vdx$ ein vollständiges Differential, während gleichzeitig auch $udx + vdy$ integrabel sein soll. Man findet daher $u$ und $v$ „*par la méthode fort ingénieuse de M. D'ALEMBERT*". Damit $u$ und $v$ reell ausfallen, ist zu setzen:

1) Journ. für Mathem. **100** (1887), 111.

2) *Principes généraux de l'état de l'équilibre des fluides; Principes généraux du mouvement des fluides; Continuation des recherches sur la théorie du mouvement des fluides*; Mém. Berlin, Année 1755 (1757), 217—273, 274—315, 316—361.

$$u - iv = \frac{1}{2}\varphi(x+iy) - \frac{i}{2}\psi(x+iy),$$

$$u + iv = \frac{1}{2}\varphi(x-iy) + \frac{i}{2}\psi(x-iy).$$

Will man $u$ und $v$ in reeller Form erhalten, so braucht man nur die Funktionen $\varphi$ und $\psi$ nach Potenzen ihrer Argumente zu entwickeln. Ist nämlich:

$$\varphi(p) = A + Bp + Cp^2 + Dp^3 + \cdots,$$

$$\psi(p) = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}p + \mathfrak{C}p^2 + \mathfrak{D}p^3 + \cdots,$$

wo die Koeffizienten als reell vorausgesetzt werden, so ergiebt die Substitution

$$p = x \pm iy = s(\cos w \pm i \sin w)$$

für $u$ und $v$ die reellen Ausdrücke:

$$\begin{aligned} u = A &+ Bs\cos w + Cs^2\cos 2w + Ds^3\cos 3w + \cdots \\ &+ \mathfrak{B}s\sin w + \mathfrak{C}s^2\sin 2w + \mathfrak{D}s^3\sin 3w + \cdots, \\ v = \mathfrak{A} &+ \mathfrak{B}s\cos w + \mathfrak{C}s^2\cos 2w + \mathfrak{D}s^3\cos 3w + \cdots \\ &- Bs\sin w - Cs^2\sin 2w - Ds^3\sin 3w - \cdots \end{aligned}$$

Auch die Kurven, welche die Flüssigkeitsteilchen beschreiben und die durch die Gleichung $udy - vdx = 0$ definiert werden, also die *Stromlinien*, wie man jetzt sagt, ergeben sich bei diesem Ansatz ohne weiteres, ihre Gleichung wird

$$\left.\begin{array}{l} As\sin w + \frac{1}{2}Bs^2\sin 2w + \frac{1}{3}Cs^3\sin 3w + \cdots \\ -\mathfrak{A}s\cos w - \frac{1}{2}\mathfrak{B}s^2\cos 2w - \frac{1}{3}\mathfrak{C}s^3\cos 3w - \cdots \end{array}\right\} = \text{const.}$$

Derselben Gleichung genügen auch die *Wände* des ebenen Gefäfses, in dem sich die Flüssigkeit befindet.

EULERS Darlegungen sind in physikalischer wie mathematischer Beziehung bemerkenswert. *Sein Verfahren, Bewegungen einer ebenen, inkompressiblen Flüssigkeit zu ermitteln, ist genau dasselbe, das HELMHOLTZ im Jahre 1868 angegeben hat*[1]. Allerdings fehlt bei EULER, was HELMHOLTZ' Abhandlung auszeichnet: die Durchführung an physikalisch interessanten Beispielen. Dieser Mangel ist nicht zufällig. Er hat seinen Grund in den Schwierigkeiten, die für die Mathematiker des achtzehnten Jahrhunderts bei der expliciten Herstellung des reellen und rein imaginären Teiles einer Funktion komplexen Argumentes zu überwinden waren. EULERS Methode der Reihenentwicklung ist hierfür augenscheinlich nur

1) *Über discontinuierliche Flüssigkeitsbewegungen*; Monatsberichte Berlin 1868, 223—227 (= *Wissenschaftliche Abhandlungen*, Bd. I, Berlin 1882, 153—157).

ein Notbehelf. Das hat er wohl selbst gefühlt, denn er ist wiederholt auf diesen Gegenstand zurückgekommen[1]), der auch seine Zeitgenossen lebhaft beschäftigt hat. Ein Beweis hierfür sind D'ALEMBERT und LAGRANGE, die in ihrem Briefwechsel und in ihren Schriften die Gleichung $f(x + iy) = M(x, y) + i\,N(x, y)$ mit Aufwand von großem Scharfsinn behandelt haben[2]). Keiner der zwei genannten Autoren ist jedoch zu einer befriedigenden Lösung gekommen, was auch unmöglich war, solange die Begriffe *Funktion* und *analytischer Ausdruck* als identisch angesehen wurden. In der Erkenntnis der Diskrepanz dieser Begriffe liegt der wesentliche Fortschritt, der im neunzehnten Jahrhundert gemacht worden ist.

**5.** Bei D'ALEMBERT und EULER treten Funktionen einer komplexen Veränderlichen auf im Zusammenhange mit der Integration der simultanen partiellen Differentialgleichungen *erster Ordnung:*

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\partial q}{\partial x}, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial z},$$

dagegen wird nicht erwähnt, daſs $p$ und $q$ derselben partiellen Differentialgleichung *zweiter Ordnung*

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0$$

genügen. Zum ersten Male scheint diese Gleichung in dem ersten, 1761 erschienenen Bande der *Opuscules mathématiques* von D'ALEMBERT aufzutreten, der in der Abhandlung: *Recherches sur les vibrations des cordes sonores* (Bd. I, S. 11) sagt, bei anderen als den üblichen Annahmen über die Kräfte komme man für die schwingende Saite zu der Differentialgleichung

$$-\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

der durch

$$y = \varphi\,(x + \sqrt{-1}\,t) + \Delta\,(x - \sqrt{-1}\,t)$$

genügt werde.

Derselbe Band enthält eine Abhandlung: *Remarques sur les lois du mouvement des fluides* (S. 137—168), in der D'ALEMBERT EULERS Ab-

---

1) Vgl. z. B. *Institutiones calculi integralis,* t. III, Petersburg 1770, S. 197, 314, 317; Nova Acta Petrop. XII, ad annum 1794 (1801), 3—21 und XIV, ad annum 1798 (1803), 62—74.

2) Die betreffenden Briefe von D'ALEMBERT und LAGRANGE, die aus den Jahren 1765 und 1766 stammen, sind abgedruckt in den *Oeuvres* von LAGRANGE, t. XIII (Paris 1882), S. 22—46. Für D'ALEMBERT ist anzuführen *Opuscules mathématiques*, t. V, Paris 1768, S. 41—67 und 95—131, für LAGRANGE *Oeuvres*, t. I (Paris 1867), S. 498—514 (= Misc. Taurinensia III, 1762—1765).

handlung vom Jahre 1755 kritisiert, ohne freilich EULER beim Namen zu nennen. Es handelt sich hauptsächlich um die Gestalt der Wände des Gefäfses. EULER hatte behauptet, dafs man dafür beliebige Kurven nehmen dürfe, denn jede Funktion $f(x, y)$ lasse sich als der reine imaginäre Teil einer Funktion von $x + iy$ auffassen (in der $i$ nicht explicite vorkommt). Dazu bemerkt D'ALEMBERT, in der Forderung, $f(x, y)$ solle der rein imaginäre Teil einer Funktion von $x + iy$ sein, liege eine Beschränkung; das zeige schon das einfache Beispiel $f(x, y) = x + y$. Wenn er aber weiter geht und erklärt, falls man $f(x, y)$ nicht auf die verlangte Form bringen könne, so lasse sich die Bewegung der Flüssigkeit dem Kalkül nicht unterwerfen, so geht er zu weit, und mit Recht hat LAGRANGE dagegen Einspruch erhoben[1]).

**6.** Es verdient hervorgehoben zu werden, dafs D'ALEMBERTS Methode, die simultanen partiellen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\partial q}{\partial x}, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = +\frac{\partial q}{\partial z}$$

mittelst Funktionen komplexen Argumentes zu integrieren, bereits im achtzehnten Jahrhundert eine wichtige und folgenreiche Anwendung erfahren hat, und zwar durch LAGRANGE. Ich meine seine Abhandlung: *Sur la construction des cartes géographiques* vom Jahre 1779[2]). Das Problem, eine Rotationsfläche in den kleinsten Teilen ähnlich auf eine Ebene abzubilden, erfordert, dafs eine Gleichung der Form:

$$dx^2 + dy^2 = m^2 (du^2 + dt^2)$$

integriert wird. LAGRANGE leistet die Integration, indem er

$$dx = \alpha du - \beta dt, \qquad dy = \beta du + \alpha dt$$

setzt, und auf diese Gleichungen, wie er ausdrücklich bemerkt, die Methode von D'ALEMBERT anwendet. Danach wird

$$dx \pm i dy = (\alpha \pm i\beta)\,(du \pm i dt)$$

und daher

$$x + iy = f(u + it), \qquad x - iy = F(u - it).$$

In der That folgt aus diesen Gleichungen

$$dx^2 + dy^2 = f'(u + it) \cdot F'(u - it)\,(du^2 + dt^2),$$

sodafs alles auf die Bestimmung der Funktionen eines komplexen Argumentes $f$ und $F$ zurückgeführt ist.

Bei der Bedeutung, welche die konforme Abbildung durch RIEMANN

1) *Oeuvres*, t. I, Paris 1867, S. 445 (= Misc. Taurinensia II, 1760—1761).

2) *Oeuvres*, t. X, Paris 1869, S. 635—692 (= Mém. Berlin, Année 1779 (1781), 161—210).

und seine Nachfolger für die Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen gewonnen hat, erschien es angebracht, festzustellen, dafs es sich hier um Ideen handelt, für die nach der geometrischen Seite LAGRANGE, nach der analytischen D'ALEMBERT als erste Urheber zu nennen sind.

7. Die Hauptergebnisse der vorhergehenden Untersuchung lassen sich dahin formulieren, dafs D'ALEMBERT im Jahre 1752, veranlafst durch eine Aufgabe aus der Hydrodynamik, die partiellen Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\partial q}{\partial x}, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial z}$$

mittelst Funktionen komplexen Argumentes integriert und spätestens im Jahre 1761 die Beziehung dieser Funktionen zu der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0$$

erkannt hat. Seine Integrationsmethode ist von EULER für ein Problem der Hydrodynamik (1755), von LAGRANGE für die Theorie der geographischen Karten (1772)[1]) nutzbar gemacht worden, freilich nur in beschränktem Umfange, weil den Mathematikern des 18. Jahrhunderts die Trennung des reellen und imaginären Bestandteils von Funktionen einer komplexen Veränderlichen Schwierigkeiten machte.

Das sind Vervollständigungen für die Geschichte der Funktionen-

---

1) LAGRANGE hatte sein Verfahren schon im Jahre 1772 seinem Kollegen von der Berliner Akademie, J. H. LAMBERT, mitgeteilt, der es in dem dritten Bande der *Beyträge zum Gebrauch der Mathematik und deren Anwendung*, Berlin 1772, S. 156—157 veröffentlicht hat. Für die Integration der Gleichungen

$$dy = + n\,d\mu + m\,d\lambda,$$
$$dx = - m\,d\mu + n\,d\lambda$$

durch

$$x \pm iy = f(i\mu \pm \lambda)$$

verweist LAMBERT auf BOUGAINVILLE, *Traité du Calcul intégral*, P. II [Sect. I], Chap. 16 Probl. 2 [S. 140]. Dieses Werk war in Paris 1756 erschienen. In der That enthält die angeführte Stelle einen Beweis dafür, dafs die Ausdrücke $v\,dt + \beta\,ds$ und $v\,ds + \beta\,n\,dt$, wo $n$ eine Konstante bedeutet, dann und nur dann gleichzeitig vollständige Differentiale werden, wenn man

$$\beta\sqrt{n} \pm v = f(t\sqrt{n} \pm s)$$

setzt; dazu wird S. 143 bemerkt, dafs keine Schwierigkeit entstehe, wenn $\sqrt{n}$ imaginär ausfalle, denn man könne das Imaginäre in $\beta$ und $v$ stets zum Verschwinden bringen. Da BOUGAINVILLE in der Vorrede (P. II, S. IV) ausdrücklich angiebt, dafs er fast alle in seinem Buche auseinandergesetzten Integrationsmethoden den Abhandlungen D'ALEMBERTS entnommen habe, so gilt dies gewifs im besonderen für den vorliegenden Fall.

theorie. Allein die Bedeutung dieser Ergebnisse ist bei weitem gröfser. Sie sind ein neuer Beleg dafür, wie tief die Mathematik des 19. Jahrhunderts im 18. Jahrhundert wurzelt, sie zeigen, wie dringend notwendig es ist die Geschichte der Mathematik bis zum Beginn des 19. Jahrhunderts weiter zu führen. Auf der andern Seite aber lassen sie erkennen, wie schwer es sein wird, zu einer befriedigenden Lösung dieser Aufgabe zu gelangen. Denn dafür genügt keineswegs, dafs man die mathematische Litteratur im engern Sinne des Wortes durchforscht, es mufs vielmehr die Forderung gestellt werden, dafs die gesammte Litteratur der angewandten Mathematik, also im besondern der Astronomie und Physik, einer genauen Durchsicht auf ihren mathematischen Gehalt hin unterzogen wird, eine Forderung, deren Durchführung mehr als eine Verdoppelung der zu leistenden Vorarbeiten bedeutet. Wird sie einmal durchgeführt, so wird sich gewifs in noch höherem Mafse, als es bis jetzt nachgewiesen werden kann, herausstellen, dafs die grofsen allgemeinen Theorien, die den Stolz des 19. Jahrhunderts bilden, aus der Vertiefung in spezielle Aufgaben der angewandten Mathematik hervorgegangen sind, die im 18. Jahrhundert gestellt und behandelt wurden.

Die bisherigen Darstellungen genügen dieser Forderung noch nicht, ja man wird sagen dürfen: *die Geschichte der Mathematik des 18. Jahrhunderts mufs noch geschrieben werden.*

Kiel im Oktober 1900.

---

## Nachtrag

**zu der Abhandlung: „Integration durch imaginäres Gebiet“ ($1_3$, 1900, 109—128).**

Im Jahre 1831 hat, wie ich S. 120 bemerkte, POISSON die Gleichung

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi\,(\alpha+e^{-ix})\,dx=\varphi\,(\alpha)$$

aufgestellt, die 1840 von CAUCHY wieder entdeckt wurde und bei ihm eine fundamentale Rolle spielt. Die Herren BURKHARDT in Zürich und LORIA in Genua hatten die Freundlichkeit, mir mitzuteilen, dafs diese und eine noch allgemeinere Formel bereits im Jahre 1816 von GIUSEPPE FRULLANI angegeben worden ist, der in dem Werke *Ricerche sopra le serie e sopra l'integrazione delle equazioni a differenze parziali* (Firenze 1816) und in der Abhandlung *Sopra la dipendenza fra i differenziali delle funzioni e gli integrali definiti* (ricevuta li 4. Febbrajo 1818), Mem. mat. della Soc. italiana **18** (Modena 1820), 458—517 die Formeln herleitet:

$$(1) \qquad f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi (f(e^{i\varphi}) + f(e^{-i\varphi}))\, d\varphi,$$

$$(2) \qquad \frac{1}{m!}\left(\frac{d^m f(x)}{dx^m}\right)_{x=0} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (f(e^{i\varphi}) + f(e^{-i\varphi})) \cos m\varphi\, d\varphi.$$

Freilich hat FRULLANI mit seinen Formeln nichts anzufangen gewufst, vielmehr ist er bei dem Versuche sie anzuwenden sofort in ein Labyrinth von Schwierigkeiten geraten, aus dem er sich nicht herausfinden konnte. Er setzt nämlich

$$f(x) = \frac{2x}{nx^2 + 2x + n}$$

und findet alsdann für den Wert der reellen Seite von (2):

$$\pm \frac{1}{\sqrt{1-n^2}}\left[\left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^m - \left(\frac{1+\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^m\right],$$

für den Wert der linken Seite dagegen:

$$\pm \frac{2}{\sqrt{1-n^2}} \cdot \left[\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right]^m.$$

FRULLANI sucht den Widerspruch dadurch zu heben, dafs er annimmt, eine Funktion $F(\cos\varphi)$ lasse sich auf verschiedene Arten in eine trigonometrische Reihe entwickeln. Allein der wahre Grund, warum die Gleichung (2) versagt, besteht darin, dafs die Entwickelung von $f(x)$ nach Potenzen von $x$ für $|x| = 1$ divergiert, dafs also die Voraussetzungen für die Gültigkeit dieser Gleichung nicht erfüllt sind.