Heidelberger Texte zur Mathematikgeschichte

Autor: **Stäckel, Paul** (1862–1919)

Titel: **Karl Peterson (1828–1881)**

Quelle: Bibliotheca mathematica.
3. Folge, Band 2 (1901),
Seite 122 – 132.
Signatur UB Heidelberg: L 15-7::3.F: 2.1901

Karl Peterson wurde am 13. Mai (a. St.) 1828 zu Riga geboren, studierte 1847–1852 an der Universität Dorpat Mathematik und Naturwissenschaft, siedelte einige Jahre später von Dorpat nach Moskau über, wo er eine Anstellung als Lehrer der Mathematik an der Peter-Paul-Schule der evangelischen Gemeinde hatte, und starb in Moskau am 19. April (a. St.) 1881.

Schon in einer der Universität Dorpat im Jahre 1853 eingereichten, bisher ungedruckten Kandidatenschrift, aus der *Stäckel* einige Auszüge mitteilt, hatte *Peterson* Betrachtungen über die Biegungsverhältnisse der Flächen angestellt, die von Interesse sind, und hatte eine schöne Verallgemeinerung eines Satzes über kürzeste Linien auf Flächen angegeben. Auch seine gedruckten Schriften beschäftigen sich hauptsächlich mit der Theorie Kurven und Flächen; eine derselben („Über Kurven und Flächen", 1868) ist besonders herausgegeben, die übrigen sind in russischer Sprache in der „Sammlung" der mathematischen Gesellschaft in Moskau veröffentlicht. In diesen Schriften kommen viele originelle Gedanken vor, und sie enthalten neue Sätze, die später von anderen Verfassern selbständig wiedergefunden worden sind. Besonders gilt dies von *Petersons* Untersuchungen über Biegungen, wo u. a. die später sogenannten Spiralflächen behandelt werden.

Zum Schluß bemerkt *Stäckel*, daß *Peterson* in hohem Grade die Eigenschaften besaß, welche für einen Forscher auf dem Gebiete der Differentialgeometrie nötig sind: schöpferische geometrische Phantasie, verbunden mit tüchtiger analytischer Schulung.

(Rezension von Gustaf Eneström (1852–1923) im *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, Band 32, 1901, S. 10)

Karl Peterson (1828—1881).

Von PAUL STÄCKEL in Kiel.

1.

In verschiedenen neueren Abhandlungen aus dem Gebiete der Flächentheorie wird der russische Mathematiker KARL PETERSON erwähnt[1]), dessen Leistungen längere Zeit nicht beachtet worden waren, und dessen Namen man in POGGENDORFFS *Biographisch-litterarischem Handwörterbuch* (Bd. I bis III) vergebens sucht. Etwas über PETERSONS Leben und Arbeiten zu erfahren, war freilich nicht ganz leicht, und nur der liebenswürdigen Unterstützung der Herren KNESER (damals in Dorpat, jetzt in Berlin) und MLODZJEJOWSKIJ (in Moskau) verdanke ich es, wenn ich im Folgenden darüber einen kurzen Bericht erstatten kann.

KARL PETERSON[2]) ist am 13. Mai (alten Stils) 1828 zu Riga geboren als Sohn des Bürgers MICHAEL PETERSON und seiner Gattin MARIA geb. MANGELSOHN; beide Familiennamen deuten auf Abstammung von germanisierten Letten. Nachdem er das Gymnasium in Riga absolviert

1) H. A. SCHWARZ, *Miscellen aus dem Gebiete der Minimalflächen*; Journ. für Mathem. **80** (1875), 288 (= *Ges. Abhandlungen*, Bd. I, S. 176).

B. MLODZJEJOWSKIJ, *Untersuchungen über die Biegung von Flächen*; Gelehrte Berichte der Kaiserlichen Universität zu Moskau **7** (1887) (russisch) und: *Sur la déformation des surfaces*; Bullet. des sc. mathém. (2) **15** (1891), 17.

A. VOSS, *Zur Theorie der Krümmung der Flächen*; Mathem. Ann. **39** (1891), 205,

P. STÄCKEL, *Über Abbildungen*, Mathem. Ann. **44** (1894), 558, 564; *Sur la déformation des surfaces*, C. R. Paris **123** (1896), 678; *Biegungen und conjugierte Systeme*; Mathem. Ann. **49** (1897), 255—256, und: *Beiträge zur Flächentheorie*: VI. *Zur Theorie der Spiralflächen*, Ber. Leipzig 1898, 15—17.

2) Das *Album Academicum der Kaiserlichen Universität Dorpat, herausgegeben*

hatte, wurde er am 28. Juli 1847 an der Universität Dorpat immatrikuliert, wo er bis 1852 Mathematik und Naturwissenschaften studiert hat.

Professoren der Mathematik waren damals KARL EDUARD SENFF (1810—1849) und FERDINAND MINDING (1806—1885). SENFF war ein Schüler von BARTELS (1769—1836). Es ist bekannt, dafs BARTELS sich besonders für die analytische Geometrie des Raumes interessierte. Zwei von ihm gestellte, diesem Gebiete angehörende Preisaufgaben wurden von SENFF gelöst; die betreffenden Abhandlungen sind erschienen unter den Titeln: *Systematische Darstellung der Hauptsätze der analytischen Geometrie im Raume* (Dorpat 1829) und *Theoremata principalia e theoria curvarum et superficierum* (Dorpat 1831). SENFF selbst sagt, dafs nur wenige seiner Sätze sein Eigentum seien, dafs er vielmehr im wesentlichen nur Ideen von BARTELS wiedergebe. Es verdient das um so mehr hervorgehoben zu werden, als in der zweiten Schrift die Theorie der Raumkurven in origineller Weise behandelt und ein Teil der Resultate vorausgenommen wird, die später PAUL SERRET[1]) gefunden hat. Bei SENFF hat PETERSON eine Vorlesung über die Theorie der krummen Linien und Flächen gehört.

MINDING ist der erste gewesen, der die von GAUSS begründete Theorie der *Biegung krummer Flächen*[2]) weitergeführt hat; die Bedeutung

---

von A. KASSELBLATT *und* G. OTTO (Dorpat 1889) enthält eine kurze Notiz über PETERSONS Leben. Dabei wird der Name „PETERSOHN" geschrieben; jedoch hat PETERSON selbst das h weggelassen, wie auch der Titel seiner noch zu besprechenden Schrift *Ueber Curven und Flächen* zeigt.

1) *Théorie nouvelle géométrique et mécanique des courbes à double courbure*, Paris 1860; vgl. auch meinen Hinweis auf SENFF Mathem. Ann. **45** (1894), 351.

2) Angaben über Untersuchungen, die vor GAUSS nach dieser Richtung hin angestellt worden sind, findet man in meiner Abhandlung *Bemerkungen zur Geschichte der geodätischen Linien*; Ber. Leipzig **1893**, 452—455. Mir war jedoch damals eine Abhandlung von EULER entgangen, auf die ich nachträglich hinweisen möchte, nämlich: *Problema invenire duas superficies, quarum alteram in alteram transformare licet, ita ut in utraque singula puncta homologa easdem inter se teneant distantias.* Sie findet sich Opera postuma, t. I, Petropoli 1862, S. 494—496. Wie S. 496 angegeben ist, steht sie auf Seite 10 bis 13 des ersten Bandes der „Adversaria mathematica", eines Handbuches, das EULER von 1766 bis 1775 geführt hat, und stammt demnach wahrscheinlich aus dem Anfange dieses Zeitraumes. EULER denkt sich die Koordinaten t, u, v der ersten und x, y, z der zweiten Fläche durch zwei unabhängige Veränderliche r und s ausgedrückt und findet als Bedingung für die Gleichheit der Abstände entsprechender unendlich naher Punkte der Flächen das Bestehen der drei Gleichungen:

$$\left(\frac{\partial t}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2=\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2,$$
$$\left(\frac{\partial t}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)^2=\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2,$$

seiner Untersuchungen, die er in den Jahren 1838 bis 1840 in CRELLES Journal veröffentlichte, ist in dem Laufe der Jahre immer mehr hervorgetreten[1]). Seine Vorlesungen sind denn auch die Veranlassung geworden, daſs PETERSON sich mit diesem Gegenstande beschäftigt und ihn zum Thema seiner Kandidatenschrift gewählt hat, die er am 23. Juli 1853 der Universität Dorpat einreichte.

PETERSONS Kandidatenschrift, der MINDING das Prädikat *ausgezeichnet* erteilte, ist noch in den Akten der Universität Dorpat erhalten. Herr KNESER hat die Freundlichkeit gehabt, mir über ihren Inhalt ausführliche Mitteilungen zu machen, denen ich Folgendes entnehme. In dem ersten vorbereitenden Teile behandelt PETERSON die Theorie der Kurven auf Flächen, und zwar hauptsächlich ihre geodätische und normale Krümmung mit besonderer Berücksichtigung der Krümmungslinien. Der zweite, nicht ganz durchgearbeitete Teil bezieht sich auf die Biegung der Flächen. Die Koeffizienten in dem Ausdrucke des Linienelementes E, F, G bestimmen die Gesamtheit der zu einer Linienelemente gehörigen Biegungsflächen. Nimmt man aber hinzu die beiden Hauptkrümmungsradien r_1, r_2 und den

---

$$\frac{\partial t}{\partial r}\frac{\partial t}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial s} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial s},$$

also genau dieselben Gleichungen, die GAUSS sechzig Jahre später in § 12 der *Disquisitiones generales circa superficies curvas* angegeben hat. „Quemadmodum autem per methodos cognitas iis satisfieri oporteat, neutiquam patet, opusque maxime arduum videtur." Er giebt alsdann ein Beispiel, das, wie man leicht erkennt, die Biegung von Kegeln in Kegel bedeutet, und schlieſst mit einer Bemerkung, die angeführt zu werden verdient. Eine überall geschlossene körperliche Figur lasse keine Veränderungen zu. Solange also die Kugelfläche oder überhaupt eine geschlossene Fläche unversehrt sei, lasse sie keine Veränderungen zu. Indessen sei klar, daſs die Figur der Halbkugel sicher veränderlich ist; was für Veränderungen sie aber erleiden könne, das zu ermitteln scheine eine schwierige Aufgabe zu sein. Dieselbe Behauptung, daſs geschlossene Flächen sich als Ganzes nicht biegen lassen, ist 1812 von LAGRANGE, 1838 von MINDING ausgesprochen worden, aber erst in neuester Zeit ist es Herrn LIEBMANN geglückt, ihre Richtigkeit für geschlossene Flächen positiven Krümmungsmaſses nachzuweisen (Mathem. Ann. **43** (1900), 81—112).

In Verbindung mit dieser Notiz EULERS möge noch bemerkt werden, daſs er in Briefen an LAGRANGE vom 16. Januar und 9. März 1770 (*Oeuvres de* LAGRANGE, t. XIV (Paris 1892), S. 217—218, 221—223, vgl. auch S. 234), erzählt, er habe mittels einer sehr sonderbaren Betrachtung das Problem gelöst, x, y, z als Funktionen von t und u so zu bestimmen, daſs die Gleichung

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dt^2 + du^2$$

besteht, d. h. alle auf eine Ebene abwickelbaren Flächen zu finden.

1) Vgl. auch A. KNESER, *Übersicht der wissenschaftlichen Arbeiten* FERDINAND MINDINGS *nebst biographischen Notizen*; Zeitschr. für Mathem. **45** (1900), Hist. Litt. Abt. 113—128.

Winkel φ, den die eine Krümmungslinie mit der einen Koordinatenlinie macht, so wird dadurch eine spezielle Fläche bis auf ihre Lage im Raum eindeutig festgelegt. Die Gröfsen r_1, r_2, φ dürfen aber nicht willkürlich angenommen werden, vielmehr bestehen zwischen E, F, G, r_1, r_2, φ und deren Ableitungen erster und zweiter Ordnung drei Gleichungen. Zum Schlufs giebt PETERSON einen Ansatz, wie man diese Gleichungen wirklich aufstellen kann.

Hierzu möchte ich einige Bemerkungen machen. Die Gröfsen r_1, r_2, φ sind den drei „Fundamentalgröfsen zweiter Ordnung" L, M, N äquivalent. Bezeichnet man nämlich die Winkel, welche die erste Krümmungslinie mit den beiden Koordinatenlinien macht, bez. durch φ und φ', so gelten die Relationen[1]):

$$L = E\left(\frac{\cos^2\varphi}{r_1} + \frac{\sin^2\varphi}{r_2}\right),$$

$$M = \sqrt{EG}\left(\frac{\cos\varphi\cos\varphi'}{r_1} + \frac{\sin\varphi\sin\varphi'}{r_2}\right),$$

$$N = G\left(\frac{\cos^2\varphi'}{r_1} + \frac{\sin^2\varphi'}{r_2}\right);$$

dabei ist

$$\cos(\varphi' - \varphi) = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

PETERSONS Behauptung läuft also darauf hinaus, dafs die Fläche, bis auf ihre Lage im Raume, durch die 6 Fundamentalgröfsen E, F, G; L, M, N eindeutig bestimmt ist, ein Theorem, das später von OSSIAN BONNET bewiesen worden ist[2]). Aber auch nach andrer Richtung sind PETERSONS Betrachtungen von Interesse. Für die Bestimmung von Biegungsflächen ist es vielfach vorteilhaft, die Gröfsen L, M, N durch andere, zweckmäfsig gewählte Gröfsen zu ersetzen. Im besondern hat Herr LIPSCHITZ hierfür die Gröfsen r_1, r_2 und den „Stellungswinkel" σ eingeführt, d. h. den Winkel den die Projektion der x-Axe auf die Tangentialebene mit der ersten Krümmungslinie bildet[3]). Man erkennt nun sofort, dafs der Winkel φ mit dem Winkel σ identisch wird, wenn die Koordinatenlinien $p = \text{const.}$ dadurch definiert werden, dafs ihre Tangenten aus der Tangentialebene der Fläche immer durch Normalebenen ausgeschnitten werden, die einer festen Richtung im Raume parallel sind. Was endlich die drei Gleichungen zwischen den 6 Gröfsen E, F, G; r_1, r_2, φ angeht, deren Existenz PETER-

1) Vgl. etwa KNOBLAUCH, *Einleitung in die allgemeine Theorie der krummen Flächen*, Leipzig 1888, S. 58—59.

2) Journ. Éc. Pol. Cah. **42** (1867), 31; vgl. auch RUNGE, *Dissertation*, Berlin 1880 und LIPSCHITZ, Sitzungsber. Berlin 1883, 541.

3) Sitzungsber. Berlin 1883, 169—188.

SON erkannt und die er aufzustellen versucht hat, so sind sie augenscheinlich äquivalent den drei Fundamentalgleichungen, die MAINARDI (1856) und nach ihm CODAZZI entdeckt haben. Man erkennt hieraus, daſs PETERSON bei seinen Untersuchungen sich auf dem richtigen Wege befunden hat, dessen weitere Verfolgung ihn zu den wichtigsten Sätzen der neueren Theorie der Biegungen geführt haben würde.

Der erste Teil der Kandidatenschrift enthält ein schönes Theorem, das noch nicht bekannt zu sein scheint. Es sei gestattet die betreffenden Ausführungen, zugleich als Probe von PETERSONS Schreibart, hier wiederzugeben.

„Der Satz, daſs eine Evolute in der Evolutenfläche kürzeste Linie ist, gestattet eine interessante Verallgemeinerung. Ist uns nämlich eine Curve auf einer developpablen Fläche gegeben, so können wir ihre Beziehung zur Fläche am einfachsten ausdrücken durch ihre Neigung φ gegen die Fläche[1]), ihr Azimuth ω gegen die Geraden der Fläche und ihre Entfernung l von der Repercussionscurve der Fläche. Eine Gleichung $f(l, \omega, \varphi, t) = 0$, wo t das gemeinsame Argument der gegebenen Curve und der Fläche oder ihrer Repercussionscurve ist, drückt daher im allgemeinen eine Eigenschaft der Curve auf der Fläche aus. Ist nun die Fläche gegeben und die Eigenschaft einer gesuchten Curve auf derselben, so hat diese Curve keine willkürliche Constante, wenn die Eigenschaft unabhängig von ω und φ ist, eine Constante, wenn sie unabhängig von φ ist (z. B. die Evolventen $\cos\omega = 0$), zwei Constanten, wenn sie von φ abhängt (z. B. die kürzesten Linien $\cos\varphi = 0$). Umgekehrt, wird eine Fläche gesucht, in der eine gegebene Curve eine gegebene Eigenschaft haben soll, so hat diese Fläche 0, 1 oder 2 Constanten, je nachdem die Eigenschaft unabhängig von l und ϑ, unabhängig von l oder allgemein (abhängig von l) gegeben ist. Ist also $f(\varphi, t) = 0$ gegeben, so läſst sich die Fläche ohne Constante (d. h. ohne Integration) bestimmen. Ist $f(\varphi, \omega, t) = 0$ gegeben, so hat die Fläche oder ihre Repercussionscurve eine Constante; wird diese eliminiert oder stetig geändert, so liegen diese Repercussionscurven in einer Fläche, deren Charakteristik bei constantem t sich in endlicher Form darstellen läſst. Sollen nun diese Repercussionscurven zu der Fläche, in der sie liegen, constante Neigung haben, so muſs

$$\cos\omega = \operatorname{tang}\left(\frac{\varphi}{c} + f(t)\right)$$

1) PETERSON versteht unter Neigung einer Kurve gegen eine Fläche, in der sie liegt, den Winkel, den die Schmiegungsebene der Kurve mit der Tangentialebene der Fläche in einem Punkte der Fläche bildet. „Ebene einer Kurve“ bedeutet ihre Schmiegungsebene.

die gegebene Eigenschaft sein (c ist die Tang. der constanten Neigung). Setzen wir z. B. $\frac{1}{c} = 0$, so folgt

$$\cos\omega = \text{tang}\,(f(t)),$$

oder

$$\omega = f(t)$$

ist die Bedingung, unter der die Repercussionscurven in ihrer Fläche kürzeste Linien werden (z. B. $\omega =$ const., wo die Repercussionscurven Evoluten der gegebenen Curve werden).

Bezeichnen wir nämlich die Cosinus der Winkel, welche die Erzeugungsgerade der developpablen Fläche mit Tangente, Normale und Radius der Curve bildet[1]), mit $\xi, \eta\ \zeta$, so ist

$$\xi = \cos\omega, \qquad \eta = \sin\omega\ \sin\varphi, \qquad \zeta = \sin\omega\ \cos\varphi,$$

und wir haben für die Coordinaten eines Punktes der Fläche:

$$u = \xi l, \qquad v = \eta l, \qquad w = \zeta l.$$

Differenzieren wir diese Gleichungen bei constantem t, so verhalten sich die Determinanten[2]) der Normale der gesuchten Fläche wie

$$(\eta dw - \zeta dv) : (\zeta du - \xi dw) : (\xi dv - \eta du)$$
$$= (\eta d\zeta - \zeta d\eta) : (\zeta d\xi - \xi d\zeta) : (\xi d\eta - \eta d\xi).$$

Die Determinanten der Ebene der Repercussionscurve sind 0, $\cos\varphi$, $-\sin\varphi$, folglich ist der Cos. ihrer Neigung gegen die Fläche

$$\text{(A)} \qquad \frac{(\zeta d\xi - \xi d\zeta)\cos\varphi - (\xi d\eta - \eta d\xi)\sin\varphi}{\sqrt{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}} = \frac{d\omega}{\sqrt{d\omega^2 + \sin^2\omega\, d\varphi^2}}$$

bei constantem t. — q. e. d.“

Ist nämlich, so meint PETERSON, $\omega = f(t)$, so folgt aus (A), daſs der Cosinus der Neigung gegen die Fläche verschwindet, und mithin ist die Reperkussionskurve (Rückkehrkante) eine kürzeste Linie der Fläche.

2.

Über PETERSONS späteres Leben läſst sich nur wenig berichten. Er ist von Dorpat nach Moskau übergesiedelt, wo er als Lehrer der Mathematik an der Peter-Paul-Schule der evangelischen Gemeinde eine Anstellung fand; er soll ein zurückgezogenes Leben geführt und wenig Verkehr ge-

1) Normale = Binormale.

2) Determinante = Richtungscosinus einer Geraden, Determinante einer Ebene = Richtungscosinus der Normale der Ebene nach BARTELS, *Vorlesungen über math. Analysis*, Dorpat 1837, S. 258.

habt haben. Wann er nach Moskau kam, hat sich nicht ermitteln lassen. Jedenfalls finden wir ihn im September 1864 erwähnt als Mitglied des „Mathematischen Vereins", der gröfstenteils aus Dozenten an der Universität bestand und dessen Vorsitzender Prof. BRASCHMANN (1796—1866) war. Als im Jahre 1867 aus dem Verein die Moskauer Mathematische Gesellschaft hervorging, die so grofse Verdienste um die Hebung der mathematischen Forschung in Rufsland hat, war PETERSON einer ihrer Begründer und ist auch stets ein eifriges Mitglied geblieben[1]). In der von der Gesellschaft herausgegebenen Zeitschrift Математическій Сборникъ (Mathematische Sammlung) finden sich im ganzen sechs Abhandlungen von PETERSON, von denen sich drei auf die Flächentheorie und drei auf die Theorie der partiellen Differentialgleichungen beziehen.

Ihre Titel lauten:

1) Объ отношеніяхъ и сродствахъ между кривыми поверхностями (Über Beziehungen und Verwandtschaften zwischen krummen Flächen), T. I (1866), 391—438.

2) О кривыхъ на поверхностяхъ (Über Kurven auf Flächen), T. II (1867), 17—44.

3) Объ изгибаніи поверхностей втораго порядка (Über Biegungen von Flächen zweiten Grades), T. X (1883), 476—523.

4), 5), 6) Объ интегрированіи уравненій съ частными производными (Über die Integration von partiellen Differentialgleichungen), T. VIII (1877), 291—361; T. IX (1878), 137—192; T. X (1882), 169—223.

Aufserdem hat PETERSON nur noch in deutscher Sprache die kleine Schrift veröffentlicht:

Ueber Curven und Flächen. Deutsch bearbeitet vom Autor. Erste Lieferung. Moskau und Leipzig 1868; 106 S. 8°.

Wenn noch berichtet wird, dafs PETERSON am 28. November 1879 von der Universität Odessa zum Doktor der reinen Mathematik honoris causa ernannt wurde und dafs er am 19. April (alten Stils) 1881 in Moskau gestorben ist, so ist damit alles erschöpft, was sich über den äufserlichen Verlauf seines Lebens sagen läfst.

Was PETERSONS mathematische Leistungen betrifft, so soll an dieser Stelle auf die Abhandlungen über partielle Differentialgleichungen nicht genauer eingegangen werden; es möge genügen, zu bemerken, dafs sie sich auf die Integration linearer Differentialgleichungen höherer Ordnungen beziehen. Einen Bericht darüber hat TICHOMANDRITZKIJ gegeben[2]), der auch erzählt, dafs sich im Nachlasse PETERSONS eine deutsche Abhandlung

---

1) Математическій Сборникъ, томъ **14** (1889), 471.

2) Jahrbuch über die Fortschr. d. Mathem. **14** (1882), 303—305.

über denselben Gegenstand gefunden habe; vielleicht geben diese Zeilen Veranlassung dazu, daſs sie veröffentlicht wird.

Der Inhalt der beiden ersten geometrischen Abhandlungen ist fast vollständig in die deutsche Schrift über Kurven und Flächen übergegangen, sodaſs es nicht erforderlich scheint, auf sie besonders einzugehen, während die dritte Abhandlung Nachträge zu dem vierten Kapitel dieses Werkes enthält, die am besten bei dessen Besprechung erwähnt werden.

Es ist hier nicht möglich, die reiche Fülle der von PETERSON behandelten Fragen aufzuzählen, die einen Wiederabdruck seines schwer zugänglichen Werkes empfehlenswert erscheinen läſst, es kann sich vielmehr nur darum handeln, in kurzen Umrissen den Inhalt zu skizzieren und auf einige besonders wichtige Stellen hinzuweisen. Nachdem er in den beiden ersten Kapiteln die allgemeine Theorie der Kurven im Raume und der Kurven auf Flächen behandelt hat, wobei sich manche originelle Bemerkungen finden, so z. B. über rechts- und linksgewundene Kurven und über Licht- und Schattenlinien, entwickelt er im dritten Kapitel den Plan seiner Untersuchungen über Beziehungen und Verwandtschaften von Flächen.

Betrachtet man irgend zwei krumme Flächen $f_1(x_1, y_1, z_1) = 0$ und $f_2(x_2, y_2, z_2) = 0$, so wird durch irgend zwei Gleichungen:

$$\Phi(x_1, y_1, z_1;\ x_2, y_2, z_2) = 0 \quad \text{und} \quad \Psi(x_1, y_1, z_1;\ x_2, y_2, z_2) = 0$$

jedem Punkte P_1 der ersten Fläche ein Punkt P_2 der zweiten Fläche zugeordnet, man erhält also eine *Abbildung* der beiden Flächen aufeinander, wofür PETERSON *Beziehung* sagt. Die Relationen $\Phi = 0$ und $\Psi = 0$ dürfen auch die Ableitungen von z_1 nach x_1 und y_1 und von z_2 nach x_2 und y_2 enthalten, nur definieren sie dann nicht eine bestimmte Abbildung, sondern eine Klasse von Abbildungen. Bei jeder solchen Beziehung giebt es, wie PETERSON beweist, stets auf jeder der beiden Flächen ein Netz konjugierter Kurven, dem wieder ein Netz konjugierter Kurven entspricht, und das er die Basis der Beziehung nennt.

Als Beziehungen, die er betrachten will, nennt PETERSON zunächst: 1) den *Parallelismus* (Abbildung durch parallele Normalen), 2) die *Perspektive* (Projektion mittels eines Strahlenbüschels), 3) die *Konjunktion* (die Verbindungslinie entsprechender Punkte berührt beide Flächen). Während diese Beziehungen sich mit der Lage der beiden Flächen im Raume ändern, sind davon unabhängig: 4) die *Konjugation*, bei der allen konjugierten Kurven auf der einen Fläche konjugierte Kurven auf der andern entsprechen und 5) die *graphische Beziehung*, womit die konforme Abbildung gemeint ist[1]).

1) In der schon genannten Abhandlung: *Über Abbildungen* habe ich vor-

Treten zu den Gleichungen $\Phi = 0$, $\Psi = 0$ weitere Gleichungen $X = 0$, $\Omega = 0$, u. s. w. neu hinzu, so darf die zweite Fläche nicht mehr beliebig gewählt werden, sie wird vielmehr, je nach der Natur der Funktionen Φ, Ψ, X, Ω, u. s. w., durch endliche Gleichungen oder durch Differentialgleichungen bestimmt, und es entsteht so die Aufgabe zu untersuchen, ob überhaupt und eventuell welche Flächen der ersten Fläche zugeordnet sind oder, wie PETERSON sich ausdrückt, mit ihr in *Verwandtschaft* stehen[1]).

An Verwandtschaften nennt PETERSON: 1) die *Biegung* (3 Gleichungen), 2) die *graphische Perspektive,* eine konforme Abbildung, die zugleich perspektiv ist (4 Gleichungen), 3) die *Abwicklung,* bei der die Verbindungslinie entsprechender Punkte die eine Fläche berührt und auf der andern senkrecht steht (3 Gleichungen), 4) die *parallele Perspektive,* bei der der vom Anfangspunkte der Koordinaten nach einem Punkte der einen Fläche gezogene Strahl der Normale in dem entsprechenden Punkte der andern Fläche parallel ist, und umgekehrt (4 Gleichungen), 5) die *Verwandtschaft der entsprechenden Ebenen,* d. h. die Kollineation (3 Gleichungen).

In der allein erschienenen ersten Lieferung seiner Schrift: *Ueber Curven und Flächen* hat PETERSON nur in Kapitel IV die Beziehung des Parallelismus, in Kapitel V die der Perspektive behandelt, wobei jedoch auch die soeben angeführten Verwandtschaften berücksichtigt worden sind. Hervorzuheben sind dabei seine Untersuchungen über Biegungen. Er entwickelt ein sehr fruchtbares Verfahren, aus einem bekannten Paare von Biegungsflächen unendlich viele neue Paare, ja sogar unter Umständen aus einer Familie von Biegungsflächen unendlich viel neue Familien herzuleiten, aus dem nicht nur die damals bereits bekannten Biegungen der *Rotationsflächen* (MINDING 1838), der *Gesims-* und der *Schraubenflächen* (BOUR 1861) hervorgehen, sondern auch eine Reihe neuer Biegungen, die zum Teil später von andern Forschern wieder entdeckt worden sind[2]).

Da sind zunächst die *Minimalflächen,* die PETERSON durch die Gleichungen:

$$x = a(p) + \alpha(q), \qquad y = b(p) + \beta(q), \qquad z = c(p) + \gamma(q)$$

mit den Bedingungen

---

geschlagen, dafs man die Beziehung 4), um ihre Analogie mit der konformen Abbildung hervortreten zu lassen, als *konjunktive Abbildung* bezeichnen sollte.

1) Man könnte auch umgekehrt verfahren und die Gleichung $\Psi = 0$ wegnehmen, sodafs nur eine Bedingungsgleichung $\Phi = 0$ besteht. Im Gebiete der Punkttransformationen hat diese Frägestellung freilich keinen Sinn, sie bekommt ihn aber, wenn man zu *Berührungstransformationen* übergeht.

2) Man vergleiche hierzu auch meine bereits angeführte Abhandlung: *Biegungen und conjugierte Systeme.*

$$da^2 + db^2 + dc^2 = 0, \qquad d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2 = 0$$

darstellt. Er findet dann als Biegungen einer solchen Fläche (S. 72, Gl. 75):

$$X = e^{i\nu} a + e^{-i\nu}\alpha, \qquad Y = e^{i\nu} b + e^{-i\nu}\beta, \qquad Z = e^{i\nu} c + e^{-i\nu}\gamma,$$

wo ν eine willkürliche Konstante bedeutet. Genau dieselben Formeln, abgesehen von der Wahl der Buchstaben, giebt Herr DARBOUX in seinen *Leçons sur la théorie générale des surfaces* (t. I, Paris 1887, S. 322, Gl. (3)). Wenn er dazu bemerkt: „Ce moyen si simple d'obtenir toute une famille de surfaces minima applicables sur une surface minima donnée est dû à M. SCHWARZ", so stehen allerdings Formeln, die mit den Formeln von PETERSON gleichbedeutend sind, in der bereits angeführten Abhandlung von Herrn SCHWARZ, der jedoch nicht verabsäumt hatte, unter der von ihm in der Einleitung zusammengestellten Litteratur über Minimalflächen auch PETERSONS Schrift zu nennen. Herr SCHWARZ wird daher gewifs der Letzte sein, der die Entdeckung dieses schönen Satzes über die Biegung der Minimalflächen für sich beanspruchte.

Ferner findet PETERSON eine Familie von Biegungen bei denjenigen *Translationsflächen*, die durch die Gleichungen

$$x = \alpha(p), \qquad y = \beta(q), \qquad z = c(p) + \gamma(q)$$

dargestellt werden, ein Resultat, das Herr BIANCHI im Jahre 1878 von sich aus gefunden hat (Giorn. di matem. **16** (1878), 467). Auch mit den merkwürdigen Flächen, denen die paradoxe Eigenschaft zukommt, sich selbst ähnlich zu sein, hat sich PETERSON bereits eingehend beschäftigt (S. 75—80); diese Flächen sind ebenfalls im Jahre 1878 fast gleichzeitig von SOPHUS LIE (Arch. for Mathem. **3** (1878), 460), der sie *Spiralflächen* nannte, und von MAURICE LÉVY (C. R. Paris **87** (1878), 788) wieder entdeckt worden, und haben in neuerer Zeit die Aufmerksamkeit der Geometer wiederholt auf sich gelenkt. PETERSON ist in seiner dritten geometrischen, 1883 veröffentlichten Abhandlung auf diese Flächen zurückgekommen. Er behandelt dort auch gewisse Biegungen von Paraboloiden, die sich den von ihm bereits 1868 betrachteten Biegungen von *Flächen zweiter Ordnung* (S. 72—75) anschliefsen. Sie gehen daraus hervor, dafs die Flächen zweiter Ordnung (mit Ausnahme der Paraboloide) durch Gleichungen der Form:

$$x = a(p)\ \alpha(q), \qquad y = a(p)\,\beta(q), \qquad z = b(p)$$

dargestellt werden können. Herr MLODZJEJOWSKIJ hat in den bereits angeführten Abhandlungen diese Biegungen genauer untersucht und in gewisser Weise verallgemeinert, ohne jedoch, wie mir scheint, den Gegenstand erschöpft zu haben.

Doch genug der Einzelheiten. Zum Schlufs noch eine Bemerkung von allgemeiner Bedeutung. Was PETERSON auszeichnet, ist schöpferische geometrische Phantasie verbunden mit tüchtiger analytischer Schulung; jene war ihm angeboren, diese verdankte er der guten Tradition der Universität Dorpat. Wesentliche Fortschritte in der Differentialgeometrie erreicht nur, wer beide Eigenschaften in sich vereinigt; Gewandtheit in der Handhabung der Formeln vermag, um einen Ausspruch von GAUSS zu benutzen, „für sich nichts zu leisten und treibt nur taube Blüten, wenn nicht die befruchtende, lebendige Anschauung des Gegenstandes selbst überall waltet.“

Kiel im Oktober 1900.

BIBLIOTHECA MATHEMATICA.

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE
DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN.

HERAUSGEGEBEN

VON

GUSTAF ENESTRÖM
IN STOCKHOLM.

DRITTE FOLGE. ZWEITER BAND.

MIT DEM BILDNISSE VON E. BELTRAMI IN PHOTOLITHOGRAPHIE ALS TITELBILD,
DEN IN TEXT GEDRUCKTEN BILDNISSEN VON K. PETERSON UND O. SCHLÖMILCH,
SOWIE 18 TEXTFIGUREN.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1901.