Heidelberger Texte zur Mathematikgeschichte

Autor:	**Stäckel, Paul** (1862–1919)
Titel:	**Integration durch imaginäres Gebiet** Ein Beitrag zur Geschichte der Funktionentheorie
Quelle:	Bibliotheca mathematica 3. Folge, Band 1 (1900), Seite 109 – 128. *Signatur UB Heidelberg:* L 15-7::3.F: 1.1900

Der Verf. behandelt hier die Geschichte der Functionen einer complexen Veränderlichen bis zum Jahre 1825, in dem die grundlegende Abhandlung von *Cauchy* über bestimmte Integrale zwischen imaginären Grenzen erschien. Er erwähnt anfangs die betreffenden Untersuchungen von *Johann Bernoulli* und *Leibniz* (1702-1712) und von *d'Alembert* (1746), der zuerst den Satz aufstellte, dass jede Function einer complexen Grösse sich unter der Form $A + Bi$ darstellen lässt. Dann berichtet er über die Arbeiten auf diesem Gebiete von *Euler* (1777, 1781), die zwar wichtig sind, aber keinen principiellen Fortschritt bezeichnen, weil *Euler* das Integral als Umkehrung des Differentialquotienten und nicht als Grenzwert einer Summe betrachtete, sowie von *Laplace* (1782, 1810), der die Frage über die Berechtigung des Ueberganges vom Reellen zum Imaginären streifte. Die letzte Frage wurde näher untersucht von *Poisson*, der dabei fand, dass ein solcher Uebergang in gewissen Fällen zu unrichtigen Resultaten führt, und dem das Verdienst zukommt, zuerst Integrationen durch imaginäres Gebiet ausgeführt zu haben. Zuletzt werden von *Stäckel* die einschlägigen Abhandlungen von *Cauchy* in Betracht gezogen, von denen die erste aus dem Jahre 1814 stammt. Ob der fundamentale Fortschritt in der Arbeit von 1825, nämlich die Einführung von Integrationen über die Begrenzung eines Rechtecks, als eine selbständige Erfindung von *Cauchy* betrachtet werden soll, lässt Stäckel unentschieden.

Als Anhang giebt der Verf. einen ausführlichen Litteraturnachweis, und nachträglich bemerkt er, dass ein erheblicher Teil der Ergebnisse seiner Abhandlung gleichzeitig von *I. Timtschenko* gefunden und in einer ausführlichen russischen Arbeit über die Geschichte der Functionentheorie veröffentlicht worden ist (vergl. F. d. M. **30,** 48, 1899).

(Rezension von Gustaf Eneström (1852–1923) im *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, Band 31, 1900, S. 43)

BIBLIOTHECA MATHEMATI

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE
DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTE

HERAUSGEGEBEN

VON

GUSTAF ENESTRÖM
IN STOCKHOLM.

DRITTE FOLGE. ERSTER BAND.

MIT DEM BILDNIS SOPHUS LIES IN HELIOGRAVURE ALS TITELBILD,
DEN IN TEXT GEDRUCKTEN BILDNISSEN VON K. I. GERHARDT, F. ROSENBERGE
UND E. WAPPLER, SOWIE 93 TEXTFIGUREN.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1900.

Integration durch imaginäres Gebiet.

Ein Beitrag zur Geschichte der Funktionentheorie.

Von

Paul Stäckel in Kiel.

1. Wenn man nicht mit Unrecht die Geschichte der Funktionen einer komplexen Veränderlichen mit dem Jahre 1825 zu beginnen pflegt, in dem CAUCHYS *Mémoire sur les intégrales définies, prises entre des limites imaginaires* erschienen ist, so bildete doch diese Abhandlung für CAUCHY selbst nur den Abschlufs von Untersuchungen, die er zwölf Jahre früher begonnen hatte und in deren Verlaufe er mit POISSON zusammengetroffen war, dessen Arbeiten sich in derselben Richtung bewegten, ohne freilich denselben Erfolg zu haben. Da POISSON von CAUCHY wiederholt angeführt wird, ist es auffallend, dafs weder VALSON[1]) noch BRILL[2]) seinen Anteil bei der Integration durch imaginäres Gebiet auch nur mit einem Worte erwähnen. Zu dieser Lücke in der Geschichte der Funktionentheorie tritt eine zweite. POISSON und CAUCHY hatten in LEIBNIZ, JOHANN BERNOULLI, D'ALEMBERT, LAPLACE, ganz besonders aber in EULER Vorgänger, deren Leistungen noch keine genügende Darstellung gefunden haben. Diesem Mangel abzuhelfen, also die Geschichte der Funktionentheorie bis in ihre keimhafte Entwickelung zurückzuverfolgen, ist der Zweck dieser Note.

2. Imaginäre Gröfsen treten in der Integralrechnung schon sehr früh auf, sie finden sich bereits in Briefen und Abhandlungen von LEIBNIZ und JOHANN BERNOULLI aus dem Jahre 1702. Am 10. Juni 1702 schreibt dieser an seinen Freund (4), er habe die Aufgabe gelöst, das Integral einer beliebigen rationalen Funktion zu ermitteln, vorausgesetzt, dafs man

---

1) C. A. VALSON, *La vie et les travaux du Baron CAUCHY* (Paris 1868), T. II. Chap. IV: Intégrales définies et résidus.

2) A. BRILL und M. NOETHER, *Bericht über die Entwicklung der Theorie der algebraischen Functionen in älterer und neuerer Zeit.* II. Abschnitt, bearbeitet von BRILL. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 3 (Berlin 1894).

ihm die Quadraturen des Kreises und der Hyperbel zugestehe. LEIBNIZ antwortet darauf am 24. Juni (1), mit solchen Integralen habe er sich schon in den ersten Jahren seiner höheren Geometrie beschäftigt und, um andre anzuregen, vor kurzem seine Resultate niedergeschrieben und zum Druck [an die Acta Eruditorum] abgesandt; in der That enthält das Maiheft der A. E. die betreffende Abhandlung (2). Bei der Integration durch Partialbrüche, die LEIBNIZ nunmehr ausführlich entwickelt, meint er, daſs das Auftreten imaginärer Wurzeln unschädlich sei, denn man könne die betreffenden Brüche in einen reellen zusammenfassen, der sich mit Hilfe der Quadratur des Kreises integrieren lasse. Indessen walte hier ein noch gröſseres Mysterium. Imaginäre Gröſsen lassen sich nicht weniger als reelle in der Analysis der Gleichungen mit Recht und mit Nutzen verwenden. „*Ich habe die rationalen Quadraturen zurückgeführt auf Logarithmen, sei es wirkliche, sei es imaginäre, eben so die Quadratur des Kreises, und zwar nicht nur auf eine Art.*“ Wenn imaginäre Gröſsen in den Wert reeller Gröſsen scheinbar eingehen, so gleichen sie sich aus und zerstören sich, und daher könne man sogar mittelst imaginärer Rechnungen [geometrische] Konstruktionen ableiten.

Im Januarhefte der Acta Eruditorum vom Jahr 1703 gab LEIBNIZ eine Fortsetzung seiner Untersuchungen über die Integration rationaler Funktionen (3), woran sich eine Note von JOH. BERNOULLI über denselben Gegenstand schlieſst (5), ein Auszug einer gröſseren Abhandlung, die er der Pariser Akademie eingereicht hatte, in deren Memoiren für 1702 sie im Jahre 1704 erschienen ist (6). BERNOULLI bezeichnet diese Abhandlung als einem Briefe vom 5. August 1702 entnommen, ohne den Adressaten anzugeben; aus dem BERNOULLIschen Briefwechsel geht aber hervor, daſs es VARIGNON war.[1]) Am Schlusse bemerkt er, daſs ebenso wie das Differential $\frac{a\,dz}{b^2 - z^2}$ mittelst der Substitution $z = b\frac{t-1}{t+1}$ in das logarithmische Differential $\frac{a\,dt}{2bt}$ übergehe, auch das Differential $\frac{a\,dz}{b^2 + z^2}$ mittelst der imaginären Substitution $z = ib\frac{t-1}{t+1}$ in das Differential eines *imaginären Logarithmus* $-\frac{a\,dt}{ibt}$ verwandelt wird; hierbei ist $\sqrt{-1}$ durch i ersetzt worden, was der Kürze und Übersichtlichkeit wegen im folgenden stets geschehen soll. Durch die weitere imaginäre Substitution

1) JOHANN BERNOULLIS Brief an VARIGNON vom 5. Aug. 1702 ist verloren gegangen, aber VARIGNONS Antwort vom 15. Aug. 1702 befindet sich in der Bibliothek der Akademie der Wissenschaften in Stockholm. (G. E.)

$$t = \frac{bi + \sqrt{\frac{1}{r} - b^2}}{bi - \sqrt{\frac{1}{r} - b^2}}$$

erhält er hieraus das Differential eines reellen Kreissektors: $d\left(\frac{a}{b} \arcsin b\sqrt{r}\right)$.

Der einfachere Ausdruck $d\left(\frac{a}{b} \operatorname{arctg} \frac{z}{b}\right)$ scheint ihm damals noch nicht, bekannt gewesen zu sein. Er findet sich jedoch in einer Abhandlung aus dem Jahr 1712 (7), in der die Aufgabe gelöst wird, $\operatorname{tg} nA$ durch $\operatorname{tg} A$ auszudrücken. Zu diesem Zwecke setzt Bernoulli $\operatorname{tg} A = x$, $\operatorname{tg} nA = y$ sodaſs $n \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} y$ und daher $\frac{n\,dx}{x^2+1} = \frac{dy}{y^2+1}$ oder

$$\frac{n\,dx}{x-i} - \frac{n\,dx}{x+i} = \frac{dy}{y-i} - \frac{dy}{y+i}$$

wird. Hieraus folgt durch Integration

$$n \log \frac{x-i}{x+i} = \log \frac{y-i}{y+i} + \text{const.},$$

und man erhält daher aus der Gleichung

$$\left(\frac{x-i}{x+i}\right)^n = \frac{y-i}{y+i},$$

in der das Imaginäre nur scheinbar vorkommt, durch Auflösung nach y, je nach dem n ungrade oder grade ist, die Tangente oder Kotangente von nA.

Man erkennt aus dem vorstehenden Berichte, daſs Leibniz und Johann Bernoulli fast gleichzeitig das Problem behandelt haben, Ausdrücke der Form $\frac{dx}{x \pm i}$ zu integrieren, und daſs für beide das Auftreten imaginärer Gröſsen unter dem Integralzeichen kein Hindernis gebildet hat, die Integration nach den formalen Regeln auszuführen, die für reelle Ausdrücke gelten. Bernoulli hat es sogar verstanden, auf diese Weise ein wichtiges Problem aus der Theorie der Kreisteilung zu lösen.[1])

1) Mit Absicht bin ich auf Leibniz und Joh. Bernoulli etwas ausführlicher eingegangen, da die Darstellung M. Cantors (*Vorlesungen über Geschichte der Mathematik,* Bd. III, Abteilung 2, S. 261—263 und 348—349) ungenau ist. Leibniz hat nicht, wie Cantor angiebt, „seinem Freunde mitgeteilt, was nachher in die Acta Eruditorum eingerückt wurde", vielmehr hatte er seinen Aufsatz damals schon abgesandt, denn er sagt ausdrücklich (*Commercium* S. 80), „inque id expedieram breve schediasma aliis excitandis", und der Brief enthält sogar *mehr* als die Abhandlung, in der von imaginären Logarithmen nicht gesprochen wird. Ferner ist Bernoullis Aufsatz nicht „etwa gleichzeitig" mit dem von Leibniz erschienen, der betreffende Jahrgang der Pariser Memoiren für 1702 wurde vielmehr erst im Jahre 1704 veröffentlicht.

3. Nach Leibniz und Bernoulli ist d'Alembert zu nennen, der in einem Exkurse seiner Preisschrift über die allgemeine Ursache der Winde vom Jahre 1746 (8) die Behauptung aufstellte, jeder algebraische Ausdruck, der aus einer beliebigen Anzahl imaginärer Gröfsen gebildet ist, lasse sich auf die Form $A + iB$ bringen, wo A und B reelle Gröfsen bezeichnen. Dafs aus zwei Ausdrücken $a + ib$ und $g + ih$, wenn sie durch Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division verknüpft werden, immer ein Ausdruck der Form $A + iB$ hervorgehe, war leicht zu zeigen, schwieriger war dieser Nachweis bei der Potenzierung. Hier hilft sich d'Alembert in genialer Weise, indem er in $(a + ib)^{g+ih}$ die Basis $a + ib$ als veränderliche Gröfse ansieht, sodafs hier zum erstenmale eine komplexe Variable auftritt. Durch logarithmische Differentiation erhält er so aus der Gleichung

$$(a + ib)^{g+ih} = A + iB$$

die Relation

$$(g + ih)\frac{d(a + ib)}{a + ib} = \frac{d(A + iB)}{A + iB},$$

und indem er jetzt Reelles und Imaginäres trennt, gelingt es ihm $A^2 + B^2$ und $\operatorname{arctg}\frac{B}{A}$ in einfacher Weise durch g, h, $a^2 + b^2$ und $\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$ auszudrücken.

Noch weiter geht d'Alembert in einer Abhandlung aus demselben Jahre (9), die sich auf die Partialbruchzerlegung rationaler Funktionen bezieht und wegen des darin enthaltenen Versuches eines Beweises für die Existenz von Wurzeln bei algebraischen Gleichungen oft angeführt wird. Hier behauptet er, dafs man jede Funktion einer imaginären Gröfse $x + iy$, also nach dem damaligen Sprachgebrauche jeden analytischen Ausdruck, in dem mit einer imaginären Gröfse $x + iy$ operiert wird, stets auf die Form $p + iq$ bringen könne, „obwohl es oft unmöglich sein mag, die analytischen Werte von p und q wirklich zu bestimmen". Ja noch mehr, er spricht (S. 195) von dem *Integrale einer Funktion der Veränderlichen* $x + iy$ und behauptet, das Differential $f(x + iy)\,d(x + iy)$ lasse sich stets in der Form $dp + idq$ darstellen.[1])

Beweise für diese Behauptungen hat d'Alembert nicht gegeben; wenn er es versucht hätte, würde er auf grofse Schwierigkeiten gestofsen sein. Ebensowenig hat er seine für die damalige Zeit aufserordentlich

---

1) Vergl. auch M. Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, Bd. III, Abteilung 3, Leipzig 1898, S. 565—566. Bei Cantor fehlt jedoch die Bemerkung über $f(x + iy)\,d(x + iy)$, und auch die Stelle in den *Réflexions sur la cause générale des vents*, auf die schon Baltzer (Journal für Mathematik, Bd. **94**, Berlin 1883, S. 87) aufmerksam gemacht hatte, ist ihm entgangen.

kühnen Ansätze weiter verfolgt, und so zeigt sich auch hier die Erscheinung, dafs solche Keime sich nur dann entwickeln, wenn sie auf geeigneten Boden fallen.

4. In den Abhandlungen EULERS, über die im folgenden berichtet werden soll, findet man zwar D'ALEMBERT nicht ausdrücklich angeführt, allein Citate an andern Stellen seiner Schriften[1]) und Andeutungen in den betreffenden Abhandlungen selbst zeigen, dafs EULER D'ALEMBERTS Arbeiten gekannt hat und dafs sie auf seine Untersuchungen von Einflufs gewesen sind, die freilich in eine erheblich spätere Zeit, nämlich in die Jahre 1777 und 1781 fallen. Veröffentlicht worden sind sie noch viel später, nämlich erst nach EULERS Tode in den Jahren 1793 bis 1805.

Den Anfang bilden vier eng zusammengehörende Abhandlungen, die vom 20. und 21. März 1777 datiert sind (10)—(13). Unverkennbar an D'ALEMBERT anknüpfend sagt EULER, kein Geometer zweifle gegenwärtig mehr daran, dafs alle imaginären Gröfsen, woher sie auch ihren Ursprung nehmen, auf die Form $A + iB$ gebracht werden können, obwohl diese Wahrheit noch nicht auf genügend sichere und einleuchtende Art bewiesen worden sei, und als Fundament der Theorie der imaginären Gröfsen bezeichnet er den Satz, dafs jede Funktion Z von z, die, wenn $z = x + iy$ gesetzt wird, in $M + iN$ übergeht, sich für $z = x - iy$ in $M - iN$ verwandelt, wo M und N reelle Gröfsen bedeuten; Z wird hierbei stillschweigend als reell bei reellem z angenommen, genau wie das CAUCHY 48 Jahre später thut. Hieraus ergiebt sich folgendes Verfahren, aus einem in geschlossener Form ausführbaren Integrale

$$\int Z(z)\,dz = V(z)$$

neue Integrale herzuleiten, die sich häufig den gewöhnlichen Methoden der Integralrechnung entziehen. Setzt man $z = x \pm iy$, so gehe Z in $M \pm iN$, V in $P \pm iQ$ über. Man erhält daher die beiden Gleichungen

$$\int (M \pm iN)\,d(x \pm iy) = P \pm iQ,$$

aus denen die reellen Relationen

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} \int (M\,dx - N\,dy) = P, \\ \int (N\,dx + M\,dy) = Q, \end{cases}$$

folgen, die für $Z = z^m, \frac{1}{1+z^2}, \frac{1}{1+z^3}$ explicite hergestellt werden.

1) Mémoires de l'Académie pour l'année 1749 (Berlin 1751), S. 180, sowie *Opuscula analytica* t. II (Petersburg 1785), S. 76—79.

Die Thatsache, dafs die Differentiale $M\,dx - N\,dy$ und $N\,dx + M\,dy$ integrabel sind, obwohl sie die beiden Veränderlichen x und y enthalten, veranlafst EULER zu der wichtigen Bemerkung, dafs deshalb nach dem Kriterium der Integrabilität die Gleichungen:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{\partial N}{dx}, \quad \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial y}$$

identisch erfüllt sein müssen. „Mithin findet man", fügt er sichtlich verwundert hinzu, „durch eine solche Substitution immer zwei Funktionen M und N der beiden Veränderlichen x und y mit der ausgezeichneten Eigenschaft, dafs sowohl $\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{\partial N}{\partial x}$ als auch $\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial y}$ ist". *Dafs diese für die Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen fundamentalen Relationen bereits von EULER im Jahre 1777 gefunden worden sind, scheint bisher nicht beachtet worden zu sein.*

Die Integrale P und Q sind jedoch für EULER blofs eine analytische Kuriosität, er strebt nach Integralen mit Einer veränderlichen Gröfse und gelangt dazu, indem er davon ausgeht, dafs eine jede komplexe Gröfse $x + iy$ sich in der Form $v(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ darstellen lasse. Indem er also in Z und V für z den Ausdruck $v(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ einsetzt, wodurch sie in $M' + iN'$ und $P' + iQ'$ übergehen mögen, und dabei v als variabel, dagegen φ als konstant ansieht, erhält er die Relationen

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} \int M'\,dv = P'\cos\varphi + Q'\sin\varphi, \\ \int N'\,dv = Q'\cos\varphi - P'\sin\varphi, \end{cases}$$

die nun wieder für $Z = \frac{z^{m-1}}{1 \pm z^n}, \frac{z^{m-1}}{(a + bz^n)^\lambda}$ explicite hergestellt werden, wobei a und b Konstanten, m und n ganze Zahlen, λ eine gebrochene Zahl bedeuten.

In einer Abhandlung vom 3. November 1777 (14) kommt EULER auf diesen Gegenstand zurück, entwickelt die Relationen (B) von neuem und wendet sie auf Beispiele an, die bei der Integration einer rationalen Funktion $Z(z)$ auftreten, nämlich

$$V(z) = \log(1 \pm z), \quad \log(1 - 2\cos\alpha \cdot z + z^2), \quad \operatorname{arctg}\frac{z\sin\alpha}{1 - z\cos\alpha};$$

die Trennung des reellen und imaginären Bestandteiles erfordert hier „keinen geringen Scharfsinn".

Als besonders fruchtbar erweist sich EULERS Verfahren in der Theorie der Γ-Funktionen. In einer Abhandlung vom 30. April 1781 (15) substituiert er in der Gleichung

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\,dx$$

ky für x und erhält die Formel

$$\int_0^\infty y^{n-1} e^{-ky}\, dy = \frac{\Gamma(n)}{k^n},$$

in der jedoch die Konstante k nicht negativ sein darf, da sonst das Integral auf der linken Seite keinen Sinn haben würde. Man darf aber, bemerkt EULER, der Konstanten k auch einen imaginären Wert $p + iq = fe^{i\vartheta}$ beilegen, vorausgesetzt, dafs p positiv ist. Die Substitution

$$x = (p + iq) \cdot y = fe^{i\vartheta} \cdot y$$

ergiebt alsdann sofort die merkwürdigen Formeln:

$$\int_0^\infty y^{n-1} e^{-py} \cos qy\, dy = \frac{\Gamma(n) \cos n\vartheta}{f^n},$$

$$\int_0^\infty y^{n-1} e^{-py} \sin qy\, dy = \frac{\Gamma(n) \sin n\vartheta}{f^n},$$

aus denen durch Spezialisierung von p, q und n eine Reihe weiterer Relationen hervorgeht, darunter auch nach kühnen Grenzübergängen:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x\, dx}{x} = \frac{\pi}{2},$$

„was durch numerische Rechnung bestätigt wird".

Der vorstehende Bericht zeigt, dafs EULER, im hohen Greisenalter noch von jugendlicher Schaffenskraft beseelt, bereits den Boden der modernen Funktionentheorie betreten hatte. Indem er die Definition des Integrals als Umkehrung des Differentialquotienten formal auf Funktionen einer komplexen Veränderlichen $x + iy$ verallgemeinerte, hatte er sich ein Hilfsmittel zur Erlangung neuer Integrale geschaffen, das er mit eben so grofsem Erfolge wie die Methode der Differentiation und Integration nach einem Parameter zu handhaben verstand. Freilich lag in dieser Wahl des Ausgangspunktes zugleich der Grund, warum EULER nicht weiter vordringen konnte: nicht die eben angeführte Definition des Integrals, die andre, bei der es als Grenzwert einer Summe erscheint, hat für die Funktionentheorie die entscheidende Wendung herbeigeführt.[1])

---

1) BRILL (a. a. O. S. 167) bezeichnet zwar EULER als Vorgänger von CAUCHY, beruft sich jedoch hierfür nur auf die beiden Abhandlungen: *De formulis differentialibus angularibus maxime irrationalibus, quas tamen per logarithmos et arcus circulares integrare licet.* Acad. exhib. die 5. Maii 1777. *Institutiones calculi integralis*, t. IV, supplementum IV, Nr. 1 (Petropoli 1794), und: *Investigatio valoris integralis.*

5. Noch bevor EULERS Abhandlungen gedruckt worden waren, hatte LAPLACE, veranlaſst durch Untersuchungen aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung, bestimmte Integrale mit imaginären Grenzen betrachtet. In einer Abhandlung aus dem Jahre 1782 (16), deren Inhalt in sein groſses Werk über Wahrscheinlichkeitsrechnung vom Jahre 1812 (19) übergegangen ist, behandelt er die Aufgabe, Ausdrücke, die gewissen Differenzengleichungen genügen, für groſse Werte der Argumente näherungsweise zu berechnen. Zu diesem Zwecke zeigt er zuerst, wie man für bestimmte Integrale der Form

$$\int u_1^{s_1} u_2^{s_2} \cdots u_n^{s_n} \cdot \varphi(x)\, dx,$$

wo $u_1, u_2, \cdots, u_n$ und $\varphi(x)$ Funktionen von x und $s_1, s_2, \cdots, s_n$ groſse Zahlen bedeuten, brauchbare Näherungsformeln herstellen kann, und lehrt darauf, wie groſse Klassen von Differenzengleichungen durch Integrale solcher Gestalt integriert werden können. Dabei werden die Grenzen der Integrale durch eine aus der Differenzengleichung abzuleitende Gleichung, die „équation des limites", bestimmt. Wenn man die Koeffizienten dieser Gleichung variert, kann es sich ereignen, daſs sie statt der reellen imaginäre Wurzeln bekommt, und man erhält dann Integrale mit imaginären Grenzen, die LAPLACE durch kunstvolle Substitutionen auf Integrale mit reellen Grenzen zurückzuführen weiſs. Er bemerkt dazu: „Diese Übergänge vom Reellen zum Imaginären mag man als heuristische Methoden ansehen, die der von den Geometern schon lange gebrauchten Induktion zu vergleichen sind. Wenn man sie aber auch mit der gröſsten Vorsicht und Zurückhaltung anwendet, wird man doch immer verlangen müssen, daſs ihre Ergebnisse bewiesen werden."

Als „Übergang vom Reellen zum Imaginären" bezeichnet LAPLACE allgemeiner überhaupt imaginäre Substitutionen, von denen er auch in zwei späteren Abhandlungen aus dem Jahre 1810 (17), (18) häufig Gebrauch macht. Die Berechtigung hierfür sucht er in der Allgemeinheit der Analysis, das heiſst in der Überzeugung, daſs das Rechnen mit imaginären Gröſsen nach den Regeln, die für reelle Gröſsen gelten,

---

$$\int \frac{x^{m-1}\,dx}{1 - 2x^k \cos\vartheta + x^{2k}}$$

a termino $x = 0$ usque ad $x = \infty$ extensi. Ebendaselbst, t. IV, supplementum V, Nr. 6. In diesen beiden Abhandlungen benutzt EULER imaginäre Substitutionen, was er auch sonst nicht selten thut (vgl. etwa Nova acta Petrop., t. III, IX und X), und erhebt sich kaum über den Standpunkt JOHANN BERNOULLIS. Die sechs Abhandlungen EULERS, über die im Texte gehandelt wird, geben ein ganz andres Bild von EULERS Leistungen, wonach auch BRILLS Ansicht über EULERS Stellung zum Imaginären (S. 141) und zur Funktionentheorie (S. 163) zu berichtigen sein wird.

immer zu denselben reellen Ergebnissen führen mufs, die bei ausschliefslicher Benutzung reeller Gröfsen erhalten werden. Indem er jedoch stets darauf hält, dafs die mit Hilfe des Imaginären gewonnenen Relationen zwischen reellen Gröfsen nachträglich verifiziert werden, beweist er einen feinen mathematischen Instinkt, denn in der That kann die Einführung komplexer Veränderlichen in der modernen Ausdrucksweise zu einem andern Integrationswege führen und so einen „falschen" Wert des Integrals ergeben. Diese paradoxe Erscheinung tritt bei LAPLACE selbst noch nicht auf, sie findet sich erst bei POISSON, zu dessen Arbeiten wir jetzt übergehen.

6. Wenn die Theorie der bestimmten Integrale am Anfange des neunzehnten Jahrhunderts mit Vorliebe behandelt wurde und, um nur berühmte Namen zu nennen, CAUCHY, LAPLACE, LEGENDRE, POISSON ihr umfangreiche Abhandlungen gewidmet haben, so lag der Grund wohl darin, dafs man mit Hilfe dieser analytischen Gebilde die Integration der partiellen Differentialgleichungen zu erlangen hoffte, die in der damals mächtig hervorstrebenden mathematischen Physik auftraten. Ist diese Hoffnung auch nur in geringem Mafse in Erfüllung gegangen, so hat doch die reine Mathematik selbst grofsen Nutzen aus jenen Untersuchungen gezogen, die man als eine der Wurzeln der Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen bezeichnen darf.

POISSON, den die Frage nach der Verteilung der Elektricität auf der Oberfläche leitender Körper zu bestimmten Integralen geführt hatte, steht in zwei Abhandlungen aus dem Jahre 1813 (22), (23) noch auf dem Standpunkte EULERS, auf dessen Arbeit aus dem Jahre 1781 (15) er sich ausdrücklich beruft. Wie EULER ersetzt er eine reelle Konstante durch eine imaginäre und gewinnt so aus bekannten Integralformeln neue, deren Richtigkeit er durch direkte Methoden nachweist. Zwei Jahre später findet er, dafs der „Übergang vom Reellen zum Imaginären" unrichtige Resultate ergeben kann (24). Wird in dem Integrale

$$\int_0^\pi \frac{\sin^{2n} x\, dx}{(1 - 2a \cos x + a^2)^n},$$

das sich in geschlossener Form angeben läfst, $a = be^{i\alpha}$ substituiert, so ergiebt sich für $b = 1$ ein bestimmter Wert des Integrals, während in diesem selbst der Nenner für $x = \alpha$ unendlich wird. POISSON bemerkt hierzu nur ganz kurz, in diesem Falle „gebe der analytische Ausdruck des Integrals nicht mehr die Summe der Werte des Differentials". Allein in der Fortsetzung seiner Abhandlung, die im Januar 1820 erschienen ist, (25) bezieht sich ein besonderer, 22 Seiten langer Abschnitt auf „die

Integration von Funktionen, die zwischen den Grenzen der Integration durchs Unendliche gehen, und den Gebrauch imaginärer Gröfsen bei der Ermittelung bestimmter Integrale".

Was bedeutet, fragt Poisson, das Zeichen

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^2}.$$

Wollte man die übliche Gleichung

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a) \tag{J}$$

anwenden, so würde sich als Wert -2 ergeben, während doch der Integrand beständig positiv ist. Noch schlimmer steht es mit

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x},$$

wo man den Wert 0 erwarten müfste, da die positiven und negativen Bestandteile sich gegenseitig zerstören. Die Gleichung (J) ergiebt aber $-l(-1) = -(2n+1)\pi i$, sodafs eine Summe von reellen Gröfsen *mehrere* Werte und noch dazu imaginäre haben soll.

Den Grund dieser befremdlichen Erscheinungen findet er darin, dafs die Gleichung (J), nach welcher die Summe der Werte des Differentials $f'(x)\,dx$, wenn x von a bis b durch unendlich kleine Inkremente dx wächst, gleich $f(b) - f(a)$ ist, nur unter der Voraussetzung bewiesen wird, dafs $f'(x)$ in diesem Intervalle beständig endliche Werte habe. Wenn also $f'(x)$ unendlich wird, braucht die Gleichung (J) nicht mehr zu gelten, „was schon Lagrange in seinen Vorlesungen über Funktionenrechnung (Journal de l'École polytechnique, Cahier 12 [1804], S. 69) bemerkt hat."

Hierbei hätte auch Gauss angeführt werden sollen, der 1816 in seinem dritten Beweise für den Fundamentalsatz der Algebra (20) dieselbe Bemerkung gemacht und als Beispiel ebenfalls den Integranden $\frac{dx}{x^2}$ gewählt hatte. Wenn Gauss hinzufügte, „was aber diese und ähnliche analytische Paradoxa bedeuten, das soll bei einer andern Gelegenheit ausführlicher verfolgt werden", so hatte er dazu guten Grund: wie ein 1880 veröffentlichter Brief an Bessel vom 18. Dez. 1811 beweist (21), war er schon damals im Besitze von Sätzen über Integration durch imaginäres Gebiet, die Cauchy 1825 entwickelt hat.[1])

1) Brill (a. a. O. S. 155) giebt als Datum dieses Briefes den 12. Jan. 1812 an; in Wahrheit ist von diesem Tage Bessels Antwort an Gauss datiert.

Auch Poisson ist diesen Sätzen nahe gekommen, denn er fügt hinzu, man könne auch die Ausnahmefälle, in denen $f'(x)$ unendlich wird, auf die Gleichung (J) zurückführen. Diese Gleichung gelte nämlich auch dann noch, wenn das Differential $f'(x)dx$ durch imaginäre (komplexe) Werte hindurchgehe, und es genüge daher

«de faire en sorte que la variable x passe de la limite a à la li-«mite b par une série de valeurs imaginaires; alors $f'(x)$ ne devi-«endra plus infinie par aucune de ces valeurs intermédiaires, et l'inté-«grale définie reprendra sa signification ordinaire».

Als Beispiel nimmt Poisson zunächst

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x}$$

und setzt $x = e^{-iz}$, wo die reelle Gröfse z von $(2n+1)\pi$ bis 0 abnehmen soll. Auf diese Weise variiert x wieder von -1 bis $+1$, allein der Integrand bleibt jetzt endlich, und das Integral wird gleich $-(2n+1)\pi i$, ein Wert, der nicht mehr verwunderlich ist, da die Zwischenwerte des Integranden imaginär ausfallen. In entsprechender Weise wird dann auch

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^m}$$

behandelt.

Diese Betrachtungen erregen bei Poisson den Verdacht, *dafs ein bestimmtes Integral mit den Grenzen a und b, wenn man zuerst von a nach b durch eine Reihe reeller Werte und darauf durch eine Reihe imaginärer (komplexer) Werte geht, verschiedene Werte annehmen könne.* Dafs diese Erscheinung wirklich eintritt, zeigt er durch folgendes Beispiel. Setzt man in dem Integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax\, dx}{b^2 + x^2},$$

wo a und b positive Konstanten bedeuten mögen, $x = t + ik$ mit konstantem positiven k, so ergiebt sich als Wert des Integrals,

$$\text{wenn } k > b \text{ ist:} \quad \frac{\pi}{2b}\left(e^{-ab} - e^{+ab}\right),$$

$$\text{wenn } k < b \text{ ist:} \quad \frac{\pi}{b} e^{-ab};$$

der zweite Wert gilt auch für $k = 0$, also bei der Integration durch reelle Werte.[1])

1) Der Wert $\frac{\pi}{b} e^{-ab}$ war bereits 1810 von Laplace gefunden worden, vergl. (18) S. 293, sowie Bulletin de la Société philomatique Nr. 43 und 49.

In weiteren Fortsetzungen der Abhandlung (22), die im Juli 1823 und im Februar 1831 erschienen sind (26), (27), hat POISSON diese Gedankenreihe nicht weiter verfolgt. Er wendet auch hier mit Vorliebe imaginäre Substitutionen an und gelangt dabei zu einem Resultate [(26), S. 498], das erwähnt zu werden verdient. Er findet nämlich unter der Voraussetzung, daſs $\varphi(\alpha + e^{-ix})$ nach Potenzen von e^{-ix} entwickelt werden kann, die Identität

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi(\alpha + e^{-ix})\,dx = \varphi(\alpha),$$

also den folgenreichen Satz, den CAUCHY seinerseits 1840 entdeckt (37) und 1846 von der Integration über einen Kreis auf die Integration über eine beliebige geschlossene Kurve ausgedehnt hat (38). POISSON hat die prinzipielle Bedeutung jener Identität nicht erkannt; sie wird, um ein Wort GOETHES zu gebrauchen, „von der grenzenlosen Fülle seiner Formeln dünenartig zugedeckt".[1]) Indem hier ein ähnlicher Fall vorliegt, wie bei dem Satze aus der Mechanik, den man als POISSON-JACOBIsches Theorem zu bezeichnen pflegt, wird man einen tieferen Grund für solche Erscheinungen suchen. Er scheint uns darin zu liegen, daſs bei POISSON die Formeln selbst die Hauptsache sind, die durch Substituieren und Transformieren zu vervielfältigen er meisterhaft versteht, und daſs er darüber vergiſst, daſs auch in der Mathematik die Formel am Ende nur Mittel zum Zweck sein darf.

7. Auch CAUCHY ist durch Untersuchungen aus der mathematischen Physik, und zwar aus der Hydrodynamik (29), veranlaſst worden, sich mit der Theorie der bestimmten Integrale zu beschäftigen; seine erste Arbeit über diesen Gegenstand stammt aus dem Jahre 1814 (28). CAUCHYS Ausgangspunkt ist eine Methode zur Aufstellung von Relationen zwischen bestimmten Integralen, deren Keime sich bereits bei EULER finden[2]) und die LAPLACE seit 1782 (16), (18) und nach ihm POISSON und LEGENDRE mit Erfolg angewandt hatten. Sie beruht darauf, daſs bei manchen Doppelintegralen *mit konstanten Grenzen* die erste Integration sowohl nach der einen als nach der andern Veränderlichen in geschlossener Form ausgeführt werden kann und die beiden so entstehenden einfachen Integrale einander gleich gesetzt werden. CAUCHY fragt nun, unter welchen Bedingungen dieses Verfahren überhaupt anwendbar sei und wann es zu richtigen Re-

1) GOETHE, *Über Mathematik und deren Miſsbrauch.* GOETHES *Werke* (Berlin bei Hempel) Bd. 34, S. 130.

2) *De formulis integralibus duplicatis.* Novi Commentarii t. XIV [pro anno 1759] (Petropoli 1770); wieder abgedruckt: *Institutiones calculi integralis,* t. IV, S. 416—445.

sultaten führe. Die Antwort auf die erste Frage lautet im Wesentlichen folgendermafsen. In irgend einer Funktion $f(z)$ setze man $z = x + iy$, wodurch sie in $M + iN$ übergehe. Dann bestehen die Identitäten

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{\partial N}{\partial x}, \quad \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial y},$$

denen wir bereits bei EULER begegnet sind, und es haben daher die Doppelintegrale

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} \displaystyle\iint \frac{\partial M}{\partial y}\, dx\, dy = -\iint \frac{\partial N}{\partial x}\, dx\, dy, \\ \displaystyle\iint \frac{\partial M}{\partial x}\, dx\, dy = \iint \frac{\partial N}{\partial y}\, dx\, dy \end{cases}$$

die verlangte Eigenschaft. Sollen zweitens die durch Ausführung je einer Integration links und rechts entstehenden Ausdrücke einander gleich sein, so darf der Integrand in dem gesamten Integrationsgebiet, das als Rechteck in der xy-Ebene aufgefafst werden kann, niemals unbestimmt werden. CAUCHY zeigt darauf, wie man in gewissen Fällen, in denen diese Bedingung nicht erfüllt ist, den Unterschied der beiden Integrale finden kann.[1]) Dabei bespricht er auch den Fall, dafs bei einem einfachen Integrale der Integrand an einer Stelle, etwa $x = \xi$, unendlich wird, und bezeichnet als *singuläres Integral* den Grenzwert des Ausdruckes

$$\int_a^{\xi - \varepsilon} \varphi(x)\, dx + \int_{\xi + \varepsilon'}^{b} \varphi(x)\, dx,$$

wenn die positiven Gröfsen ε und ε' gegen Null abnehmen; der Wert eines solchen Integrales hängt im allgemeinen davon ab, in welcher Weise dies geschieht. Solche singuläre Integrale spielen bei der Berechnung des Unterschiedes jener beiden Integrale eine wesentliche Rolle; sie sind die Vorläufer der *Residuen*, von denen sie verdrängt wurden.

In der Einleitung seiner Abhandlung berichtet CAUCHY, dafs EULER und LAPLACE verschiedene Integrale durch den Übergang vom Reellen zum Imaginären gefunden hätten und verspricht, eine direkte und strenge Begründung zu geben. Er hat auch dem ersten Teile den Titel gegeben: Gleichungen, die den Übergang vom Reellen zum Imaginären begründen. Allein dieser Abschnitt enthält, wie schon LEGENDRE als Berichterstatter der Akademie verwundert bemerkt, nichts, was sich direkt auf diesen Gegenstand bezieht, und erst die Noten, die CAUCHY 1825 bei der Veröffentlichung der Abhandlung hinzugefügt hat, zeigen den Zusammenhang mit der Integration durch imaginäres Gebiet. Die beiden reellen Gleichungen

1) Vergleiche die ausführlichere Darstellung bei BRILL, a. a. O. S. 167—169.

(A) lassen sich nämlich zu der einen Gleichung mit komplexen Veränderlichen zusammenfassen:

$$(\mathrm{B})\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{y_0}^{Y} f(x_0+iy)\,i\,dy + \int_{x_0}^{X} f(x+iY)\,dx \\ \displaystyle = \int_{x_0}^{X} f(x+iy_0)\,dx + \int_{y_0}^{Y} f(X+iy)\,i\,dy, \end{cases}$$

die in der modernen Ausdrucksweise besagt, dafs das Integral von $f(x+iy)$, erstreckt über das eine Paar anstofsender Seiten des Rechteckes, das oben als Integrationsgebiet bezeichnet wurde, denselben Wert hat, wie das über das andere Paar erstreckte Integral, vorausgesetzt, dafs $f(x+iy)$ im Innern und auf der Begrenzung keine Unbestimmtheitsstelle besitzt.

Genau diese Auffassung der Gleichung (B) findet sich in CAUCHYS Abhandlung über bestimmte Integrale zwischen imaginären Grenzen vom August 1825 (35), die die erste Periode seiner Untersuchungen abschliefst. Die Gleichung (B) selbst hatte er schon früher angegeben, nämlich in einer am 28. Oktober 1822 der Pariser Akademie vorgelegten Note (32) und nachher in seinen 1823 veröffentlichten Vorlesungen an der Polytechnischen Schule (34).[1] Es scheint, als ob CAUCHY damals die eigentliche Bedeutung der Gleichung (B) noch nicht erkannt hatte, denn in dem Berichte über seine Note im Bulletin de la Société philomatique wendet sich CAUCHY mit grofser Energie gegen die Idee POISSONS, Integrale über eine Reihe imaginärer Werte zu erstrecken. Welches Gewicht er auf diese Ausführungen legte, zeigt der Umstand, dafs er sie als Postskriptum einer bald darauf erschienenen Abhandlung über partielle Differentialgleichungen im Journal de l'École polytechnique (33) angehängt hat. Ein Integral zwischen reellen Grenzen, erklärt CAUCHY, müsse man immer als Summe der Werte des Differentials auffassen, die den *reellen* Werten der Veränderlichen zwischen den Grenzen entsprechen. Auf diese Weise erhalte man stets bei reellem Integranden reelle Integrale und dürfe bei komplexen Integranden Reelles und Imaginäres trennen. Das würde aufhören, wenn man das Integral als Differenz der extremen Werte der primitiven Funktion ansehen oder die Variable von der einen Grenze zur andern durch eine Reihe imaginärer (komplexer) Werte übergehen lassen wollte, denn auf diese Weise erhielte man, wie bei POISSON, für Integrale reeller Funktionen imaginäre Werte. Was dessen Beispiel

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{x^2+b^2}\,dx$$

1) Hiernach ist BRILLS Angabe (a.a. O. S. 167), dafs CAUCHY die Gleichung (B) erst 1825 aufgestellt habe, zu berichtigen.

betreffe, so könne es sich sehr gut ereignen, dafs zu einem Integrale mehrere primitive Funktionen gehören, z. B. sei die primitive Funktion von

$$\int \frac{dx}{x}$$

sowohl $\log x$ als auch $\frac{1}{2}\log(x^2)$, sodafs bei den Grenzen -1 und $+2$ die Differenz der extremen Werte einmal den imaginären Wert $\log(-2)$ und dann den reellen Wert $\log(+2)$ habe.

Diese Ausführungen Cauchys beweisen aufs deutlichste, *dafs Poisson das Verdienst zukommt, zuerst Integrationen durch imaginäres Gebiet ausgeführt zu haben.* Hierdurch wird Cauchys Anspruch nicht berührt, er habe in seiner Abhandlung vom August 1825 zuerst „den Grad der Allgemeinheit festgestellt, den ein bestimmtes Integral zwischen imaginären Grenzen zuläfst, und die Zahl der Werte, die es annehmen kann" ((35), S. 2). Freilich überwog damals bei ihm das Interesse an den bestimmten Integralen, die sich mittelst Integrationen durch komplexes Gebiet auswerten lassen, und mit Recht hat Brill gegenüber den begeisterten Lobsprüchen Valsons bemerkt, Cauchy selbst scheine die Bedeutung seiner eigenen Schrift lange Zeit nicht gebührend gewürdigt zu haben, und erst durch spätere Anwendungen, zum Teil in den Händen andrer, sei sie in das richtige Licht gesetzt worden. Ein weiterer Beweis für diese Auffassung liegt darin, dafs Cauchy in einer Oktober 1825 bis Oktober 1826 in Gergonnes Annalen veröffentlichten Abhandlung (36) die in seiner Schrift vom August 1825 enthaltenen bestimmten Integrale unter Vermeidung der Integration durch imaginäres Gebiet mittelst der Methode der Doppelintegrale hergeleitet hat.

8. Cauchys Abhandlung vom August 1825 zeigt gegenüber seinem Standpunkte im Jahre 1822 den Fortschritt, dafs er die Gleichung (B) als Resultat von Integrationen über die Begrenzung eines Rechtecks auffafst. Nachdem er zuerst rein analytisch vorgegangen ist, erklärt er in § 9 kurz und bündig, dafs man die Wertereihe, die eine komplexe Veränderliche $x + iy$ durchläuft, wenn $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ gesetzt wird, durch die Punkte einer Kurve in der xy-Ebene darstellen könne, und macht von da ab von dieser geometrischen Darstellung beständig Gebrauch. In seinen vorhergehenden Arbeiten findet sich nirgends eine Spur davon; seine Beweisführung ist hier stets rein analytischer Natur.[1]) Das zeigt sich besonders bei seinem Beweise für die Existenz von Wurzeln algebraischer

1) Dafs dies für Cauchys *Cours d'Analyse* gilt, hat Brill (a. a. O. S. 163) betont, er hat es dagegen unterlassen, auf Cauchys spätere Stellung zu der geometrischen Repräsentation komplexer Gröfsen einzugehen.

Gleichungen aus dem Jahre 1820 (30), der auf demselben Prinzipe beruht, das Argand 1806 angewandt hatte.[1])

Wie ist Cauchy zu jener geometrischen Darstellung gekommen? Mir scheint es sehr wohl möglich, daſs er sie selbständig gefunden hat, denn erstens giebt er keine Quelle an, während er sonst im Citieren sehr gewissenhaft ist, und zweitens lag es für ihn nahe, die Gröſsen x und y als Koordinaten eines Punktes in der Ebene zu deuten, da sie ja bei den Doppelintegralen diese Bedeutung bereits gehabt hatten. Im Grunde findet sich diese Deutung, was bis jetzt noch nicht hervorgehoben worden zu sein scheint, bereits bei d'Alembert (9), der bemerkt, daſs man eine Gleichung $f(p+iq)=0$ stets durch reelle Werte von p und q erfüllen könne, denn auch wenn sich p und q nicht *analytisch* angeben lassen:

> «on pourra toujours avoir les quantités réelles p et q au moins «par une construction géométrique, puisqu'on a deux équations qui «renferment p et q».

Diese Äuſserung läſst sich kaum anders deuten, als daſs aus $f(p+iq)=0$ durch Trennung des Reellen und Imaginären zwei Gleichungen in p und q folgen, die, indem p und q als Koordinaten eines Punktes in der Ebene aufgefaſst werden, als Gleichungen von Kurven interpretiert werden können.[2])

Gegen Cauchys Selbständigkeit könnte man folgende Umstände anführen. In der Note I zu seinem *Cours d'Analyse* vom Jahre 1821 (31) sagt er, die Zeichen $+$ und $-$, die vor den Zahlen stehen, könne man nach einer Bemerkung, die darüber gemacht worden sei, mit den Adjektiven vergleichen, die neben ihren Substantiven stehen, und beruft sich dafür auf die Philosophical Transactions vom Jahre 1806. Diese enthalten aber eine Abhandlung von Buée, in der nicht nur die angegebene Auffassung des Positiven und Negativen entwickelt, sondern auch die Theorie der imaginären Gröſsen behandelt und das Zeichen $\sqrt{-1}$ als Symbol des Senkrechtstehens gedeutet wird.[3]) Ferner hat Cauchy

---

1) *Essai d'une manière de représenter les quantités imaginaires* (Paris 1806). Zweite Ausgabe (Paris 1874), S. 58—59; vergl. auch S. 118—122.

2) Daſs auch Euler eine allerdings unfruchtbare Konstruktion der imaginären Gröſsen versucht hat, zeigt seine Abhandlung: *Theoremata quaedam analytica, quorum demonstratio adhuc desideratur* (*Opuscula analytica*, t. II [Petersburg 1785], S. 80).

3) Auf dieses Citat Cauchys hat Hamilton in einem Briefe an de Morgan vom 13. Jan. 1852 aufmerksam gemacht (R. P. Graves, *Life of Sir William Rowan Hamilton*, Vol. III, S. 317. Dublin and London 1889). In einem Briefe von 14. Dez. 1857 (a. a. O. S. 535) behauptet Hamilton sogar, er sei überzeugt, daſs Cauchy im Jahre 1821 Argands Schriften gekannt habe. Es sei *half-confession*, wenn Cauchy sage, in der Gleichung

$$\alpha + i\beta = \varrho e^{i\vartheta}$$

selbst im Jahre 1847 die Frage der geometrischen Darstellung komplexer Gröfsen behandelt (39). Er führt hier die Arbeiten von Buée, Argand, François, Faure, Mourey, Vallès an und erklärt, einen grofsen Teil der Ergebnisse dieser Untersuchungen habe bereits im Jahre 1786 ein bescheidener Gelehrter, Henri-Dominique Truel, besessen, der sie im Jahre 1810 dem Schiffskonstrukteur Augustin Normand in Havre mitteilte. Leider sagt Cauchy nicht, wann ihm Normand von Truels Entdeckungen berichtet habe, ob etwa in der Zeit von 1810 bis 1813, während der Cauchy in Cherbourg als Ingenieur thätig war. Unerklärt bliebe jedoch in diesem Falle, warum er erst seit 1825 von der geometrischen Darstellung Gebrauch gemacht hat, sodafs gegenwärtig kein abschliefsendes Urteil möglich ist.

Litteraturnachweis.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646—1716).

(1) *Virorum celeberrimorum* G. Leibnitii *et* Joh. Bernoulli *Commercium philosophicum et mathematicum.* Vol. II (Lausannae 1745), S. 79—82.

(2) *Specimen novum analyseos pro scientia infiniti circa summas et quadraturas.* Acta Eruditorum (Leipzig), Mai 1702, S. 210—219. Wieder abgedruckt: Leibnizens *Mathematische Schriften, herausgegeben von* C. J. Gerhardt. Bd. 5 (Halle 1858), S. 350—361.

(3) *Continuatio analyseos quadraturarum rationalium edi captae in his Actis M. Majo 1702.* Acta Eruditorum, Januar 1703, S. 19—26. Wieder abgedruckt a. a. O. S. 361—366.

Johann Bernoulli (1667—1748).

(4) Brief an Leibniz vom 10. Juni 1702. Leibnizens *Mathematische Schriften, herausgegeben von* C. J. Gerhardt. Bd. 3 (Halle 1856), S. 697—702. Als Auszug aus diesem Briefe findet sich die *Nachschrift* auch in lateinischer Übersetzung im *Commercium* (S. 79).

(5) *Problema exhibitum a Jo. Bernoulli.* Acta Eruditorum, Januar 1703, S. 26—31.

(6) *Solution d'un problème concernant le calcul intégral.* Mémoires de l'Académie des Sciences pour l'année 1702 (Paris 1704), S. 289—297. Wieder abgedruckt: *Opera omnia,* t. I (Lausannae et Genevae 1742), S. 393—400.

(7) *Angulorum arcuumque sectio indefinita.* Acta Eruditorum, Juni 1712, S. 274—277. Wieder abgedruckt: *Opera omnia,* t. I (Lausannae et Genevae 1742), S. 511—514.

Jean le Rond d'Alembert (1717—1783).

(8) *Réflexions sur la cause générale des vents.* Prix de Berlin pour l'année 1746 (Paris 1747). Art. 79, S. 141—143.

---

sei ϱ: *ce qu'on appelle le module* ((31) Wiederabdruck S. 160), dagegen $e^{i\vartheta}$: *ce que nous nommerons l'expression réduite,* während in der That Argand das Wort „module", aber nicht das Wort „l'expression réduite" gebrauche. Mit Recht erwidert de Morgan darauf (S. 539), er halte Cauchy für einen Ehrenmann, und man dürfe aus so gebrechlichen Indicien nicht auf ein Plagiat schliefsen.

(9) *Recherches sur le calcul intégral.* Première partie: De l'intégration des fractions rationelles. Mémoires de l'Académie. Année 1746 (Berlin 1748), S. 182—200.

Leonhard Euler (1707—1783).

(10) *De integrationibus maxime memorabilibus ex calculo imaginariorum oriundis.* Conv. exhib. die 20. Mart. 1777. Nova Acta Petrop. t. VII [ad annum 1789] (Petropoli 1793), S. 99—133.

(11) *Supplementum ad dissertationem praecedentem circa integrationem formulae*

$$\int \frac{z^{m-1}\,dz}{1-z^n},$$

ebendaselbst, S. 134—148.

(12) *Ulterior disquisitio de formulis integralibus imaginariis.* Conv. exhib. die 21. Mart. 1777. Nova Acta Petrop., t. X [ad annum 1792] (Petropoli 1797), S. 3—19.

(13) *De integrationibus difficillimis quarum integralia tamen aliunde exhiberi possunt.* Conv. exhib. die 21. Mart. 1777. Nova Acta Petrop., t. XIV [ad annum 1798] (Petropoli 1805), S. 62—74.

(14) *De insigni usu calculi imaginariorum in analysi.* Conv. exhib. die 3. Nov. 1777. Nova Acta Petrop., t. XII [ad annum 1794] (Petropoli 1801), S. 3—21.

(15) *De valoribus integralium a terminis variabilis $x = 0$ usque ad $x = \infty$ extensorum.* Acad. exhib. die 30. April 1781. *Institutiones calculi integralis,* t. IV, supplementum V, no. 4. Petropoli 1794 (Editio tertia, Petropoli 1845, S. 337—345).

Pierre Simon Laplace (1749—1827).

(16) *Sur l'approximation des formules qui sont fonctions de très-grands nombres.* Mémoires de l'Académie des Sciences pour l'année 1782 (Paris 1785), S. 1—88.

(17) *Sur l'approximation des formules qui sont fonctions de très-grands nombres et sur leur application aux probabilités.* Lu le 9 avril 1810. Mémoires de la classe des sciences mathématiques et physiques de l'Institut de France, t. X [année 1809] (Paris 1810), S. 353—415, 559—565.

(18) *Mémoire sur les intégrales définies, et leur application aux probabilités.* Ebendaselbst, t. XI [Première partie de l'Année 1810] (Paris 1811), S. 279—347.

(19) *Théorie analytique des probabilités.* Partie I, Chap. II und III. Additions II und III. Paris 1812.

Carl Friedrich Gauss (1777—1855).

(20) Brief an BESSEL, Göttingen, den 18. Dezember 1811. *Briefwechsel zwischen* GAUSS *und* BESSEL (Leipzig 1880), S. 155—160. Wieder abgedruckt: C. F. GAUSS' *Werke,* Bd. VIII, S. 90—92.

(21) *Theorematis de resolubilitate functionum algebraicarum integrarum in factores reales demonstratio tertia.* Commentationes Societatis regiae Scientiarum recentiores. Vol. III [ad annum 1814—1815] (Göttingen 1816). Comment. classis math. S. 135—142. Wieder abgedruckt: C. F. GAUSS' *Werke,* Bd. III, S. 57—64.

Siméon Denis Poisson (1781—1840).

(22) *Mémoire sur les intégrales définies.* Journal de l'École polytechnique, Cahier **16** (Paris, Mai 1813), S. 215—246.

(23) *Mémoire sur la distribution de l'électricité à la surface des corps conducteurs.* Seconde partie. Digression sur les intégrales définies et sur la sommation de

quelques séries. Lu le 6 sept. 1813. Mémoires de la classe des sciences mathematiques et physiques de l'Institut de France. Année 1811. Seconde partie (Paris 1814), S. 212—230.

(24) *Suite du mémoire sur les intégrales définies.* Journal de l'École polytechnique, Cahier **17** (Paris, Janvier 1815), S. 612—631.

(25) *Suite du mémoire sur les intégrales définies.* Sur les intégrales des fonctions qui passent par l'infini entre les limites de l'intégration, et sur l'usage des imaginaires dans la détermination des intégrales définies. Ebendaselbst, Cahier **18** (Paris, Janvier 1820), S. 295—341.

(26) *Suite du mémoire sur les intégrales définies et sur la sommation des séries.* Ebendaselbst, Cahier **19** (Paris, Juillet 1823), S. 404—509.

(27) *Suite du mémoire sur les intégrales définies et sur la sommation des séries.* Ebendaselbst, Cahier **20** (Paris, Février 1831), S. 222—248.

Augustin Louis Cauchy (1789—1857).

(28) *Mémoire sur les intégrales définies.* Mémoires présentés par divers savants [lu à l'Institut le 22 août 1814, remis au sécretariat pour être imprimé le 14 sept. 1825]. Sciences mathématiques et physiques. Seconde série, t. I (Paris 1827), S. 599—799. Wieder abgedruckt in den *Oeuvres complètes* I[e] série, t. I, S. 319—506.

(29) *Théorie de la propagation des ondes.* Concours de 1815. Mém. prés. t. I (Paris 1827), S. 3—312. Wieder abgedruckt in den *Oeuvres complètes* I[e] série, t. I, S. 1—318.

(30) *Sur les racines imaginaires des équations.* Journal de l'École polytechnique, Cahier **18** (Paris, Janvier 1820), S. 411—416.

(31) *Cours d'Analyse de l'École royale polytechnique* (Paris 1821). Wieder abgedruckt in den *Oeuvres complètes* II[e] série, t. III, S. 1—476.

(32) *Sur les intégrales définies où l'on fixe le nombre et la nature des constantes arbitraires* (extrait d'un mémoire lu le 28 oct. 1822). Bulletin des Sciences par la Société philomatique de Paris, Année 1822, S. 161—174.

(33) *Mémoire sur l'intégration des équations linéaires aux différences partielles et à coefficiens constans.* Observations générales et additions. Journal de l'École polytechnique, Cahier **19** (Paris, Juillet 1823), S. 571—589.

(34) *Résumé des leçons données à l'École royale polytechnique* (Paris 1823). Wieder abgedruckt in den *Oeuvres complètes* II[e] série, t. IV, S. 5—261.

(35) *Mémoire sur les intégrales définies, prises entre des limites imaginaires* (Paris, Août 1825). 68 S. 4°.

(36) *Mémoire sur les intégrales définies où l'on donne une formule générale de laquelle se déduisent les valeurs de la plupart des intégrales définies déjà connues et celles d'un grand nombre d'autres.* Annales de mathématiques pures et appliquées publiées par Gergonne, t. XVI (Nismes, Oct. 1825), S. 97—108; t. XVII (Nismes, Sept. et Oct. 1826), S. 84—109.

(37) *Considérations nouvelles sur la théorie des suites.* Exercises d'Analyse et de Physique mathématique, t. I (Paris 1840), S. 269—287.

(38) *Considérations nouvelles sur les intégrales définies qui s'étendent à tous les points d'une courbe fermée, et sur celles qui sont prises entre des limites imaginaires.* Comptes Rendus de l'acad. d. sc. **23** (Paris 1846), S. 689.

(39) *Mémoire sur les quantités géométriques.* Exercises d'Analyse et de Physique mathématique, t. IV (Paris 1847), S. 157—180.

Nachtrag.

Nach Vollendung des Drucks dieser Abhandlung habe ich aus der Revue semestrielle des publications mathématiques 8:1 (1899, Avril à Octobre, Amsterdam 1900, S. 151) ersehen, dafs Herr I. TIMTSCHENKO in der Abhandlung: Основанія теоріи аналитическихъ функцій *(Grundlagen der Theorie der analytischen Functionen)*, die in den Записки математическаго отдѣленія новороссійскаго общества естествоиспытателей (Abhandlungen der mathematischen Abteilung der neurussischen Gesellschaft der Naturforscher) **19**, Odessa 1899, erschienen ist, die Arbeiten von EULER, LAPLACE, POISSON und CAUCHY über Integration durch imaginäres Gebiet behandelt hat. Der Freundlichkeit von Herrn G. ENESTRÖM verdanke ich es, dafs ich die Abhandlung selbst einsehen konnte, in der sich bereits ein erheblicher Teil meiner Ergebnisse findet. Im besonderen ist die Bedeutung der Untersuchungen EULERS und POISSONS von Herrn TIMTSCHENKO im Wesentlichen richtig erkannt und dargestellt worden, sodafs ihm in dieser Hinsicht, wie ich gern konstatiere, die Priorität zukommt.

Kiel, den 10. März 1900.

P. Stäckel.