UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
HEIDELBERG

Heidelberger Texte zur
Mathematikgeschichte

Felix Klein

Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert

Ausgewählte Passagen bezüglich Heidelberger Mathematiker

zusammengestellt von

Gabriele Dörflinger

2013

Quelle:

Klein, Felix (1849–1925):
Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert. – Berlin : Springer
Band 1, 1926
Signatur UB Heidelberg: **L 234**::24,1.1926

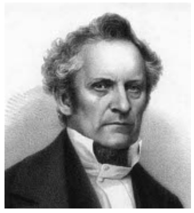
Nachdruck 1979 im Göttinger Digitalisierungszentrum:
http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN375425993

Felix Klein (1849–1925)
Mathematikprofessor in Erlangen, München, Leipzig und Göttingen. Befasste sich mit Geometrie, Funktionentheorie und Anwendungen der Mathematik. Außerdem beschäftigte er sich mit didaktischen Fragen sowie Mathematikgeschichte und war als Wissenschaftsorganisator tätig.

Heidelberger Mathematiker

August Leopold Crelle
(1780–1856)
1815 Promotion in Heidelberg bei *Franz Ferdinand Schweins.*

Julius Plücker
(1801–1868)
Studium der Kameralistik 1819 bis 1820 in Heidelberg.



Jakob Steiner
(1796–1863)
Studium der Mathematik 1818 bis 1820/21 in Heidelberg bei *Franz Ferdinand Schweins.*

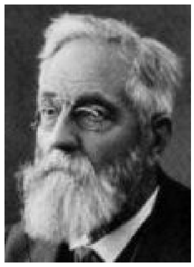
Otto Hesse
(1811–1874)
Mathematikprofessor von 1856 bis 1868 in Heidelberg. Schrieb hier seine „Vorlesungen aus der analytischen Geometrie."

Gustav R. Kirchhoff
(1824–1887)
Physikprofessor in Heidelberg 1854 bis 1875. Entdeckte 1859/60 hier gemeinsam mit *Robert W. Bunsen* die Spektralanalyse.

Hermann Helmholtz
(1821–1894)
Professor der Physiologie 1858 bis 1871 in Heidelberg. Beschäftigte sich hier mit den Grundlagen der Geometrie.

Sonja Kowalevsky
[Sof'ja V. Kovalevskaja]
(1850–1891)
1869/70 Gasthörerin in Heidelberg. *Leo Koenigsberger* empfahl sie an *Karl Weierstraß* in Berlin.

Heinrich Weber
(1842–1913)
Promotion (1863) und Dozent in Heidelberg von 1866 bis 1870. H. Weber leitete 1904 hier den 3. Internat. Mathematiker-Kongress.



Georg Landsberg
(1865–1912)
Dozent in Heidelberg von 1893 bis 1904. Publizierte hier 1902 seine „Theorie der algebraischen Funktionen e. Variablen" (Seite 52 [327]).

David Hilbert
(1862–1943)
Studierte im Sommersemester 1881 in Heidelberg bei *Lazarus Fuchs.*

Zu den Heidelberger Mathematikern siehe auch
Homo Heidelbergensis Mathematicus.
`http://ub-fachinfo.uni-hd.de/math/homoheid.htm`

Inhaltsverzeichnis

Den ausgewählten Passagen vorangehende Unterkapitel sind in *kursiver Schrift* angegeben. Weggelassene Textteile innerhalb der ausgewählten Abschnitte sind durch - - - - - gekennzeichnet. Am Rand neben den Überschriften sind die Originalseitennrn. vermerkt.

Einleitung.

Seite
1–6

Bei den mannigfachen Bestrebungen, das weitverzweigte geistige Leben unserer Tage zusammenzufassen und, wenigstens in seinen Haupterscheinungen, geschlossen und übersichtlich darzustellen, liegt es für jeden mathematisch Interessierten auf der Hand, daß in einer solchen Übersicht der kulturbildenden Faktoren der Jetztzeit unsere Wissenschaft nicht fehlen darf. Vielmehr muß versucht werden, auch der Mathematik die Stellung einzuräumen, die ihr als einer der ältesten und edelsten Betätigungen des menschlichen Geistes und als einer der richtunggebenden Kräfte in seiner Entwicklung gebührt, — die sie aber im Bewußtsein der Gebildeten, wenigstens in Deutschland, leider nur selten einnimmt. An diesem nicht erfreulichen Verhältnis trägt wohl vor allem ein Umstand Schuld, welcher auch der Lösung dieser Aufgabe große Schwierigkeiten entgegensetzt. Wie keine andere Wissenschaft, ist die Mathematik ein auf wenigen Grundprinzipien nach zwingenden Gesetzen aufgerichtetes Gebilde. Der Charakter der Ausschließlichkeit, der ihre Entwicklung vor der anderer Gebäude des Geistes auszeichnet und ihr die vielgerühmte ,,Klarheit" verleiht, bringt es mit sich, daß sie auch die am schwersten zugängliche aller Wissenschaften ist. Denn wer in sie eindringen will, muß in sich durch eigene Arbeit die ganze Entwicklung Schritt für Schritt wiederholen; es ist doch unmöglich, auch nur ***einen*** mathematischen Begriff zu erfassen, ohne all die davorliegenden Begriffe und ihre Verbindungen in sich aufgenommen zu haben, die zu seiner Erschaffung führten.

Diese schroffe Abgeschlossenheit der Mathematik macht sie begreiflicherweise sehr wenig geeignet für das nur aufs Allgemeine gerichtete Interesse des Laien; denn sein Ziel ist nichts weiter, als in großen Zügen das Wesen des ihm fremden Gebietes ungefähr zu erfassen und etwas von seiner Eigenart und Schönheit zu ahnen. Soll trotzdem etwas diesem Zwecke Dienendes zustande kommen, so muß jedenfalls eine starke Beschränkung des an sich Wünschenswerten eintreten. Es kann sich nur darum handeln, ein Bild von dem zu geben, was die Mathematiker etwa treiben, von der Unbegrenztheit der Probleme, die unsere Wissenschaft in stetem Vorwärtsschreiten allmählich in den Bereich ihrer Herrschaft einzubeziehen versucht. Ohne eine gewisse ,,pia fraus", möchte ich sagen, geht es dabei nicht ab. Alles Systematische, dessen Verständnis eigene Arbeit erfordern würde, muß auf ein Minimum beschränkt werden. Dagegen muß die historische Entwicklung in den Vordergrund gestellt werden. Denn durch das natürliche Interesse am Werden einer Sache wird der Leser unwillkürlich mitgezogen; daß er dabei den Dingen näher zu kommen glaubt, während er nur ihre äußere Form erfaßt, darin liegt eben jene ,,pia fraus", ohne welche eine populäre Darstellung dieses streng abgeschlossenen Gebietes kaum wird auskommen können. Schließlich wird die Betonung der Einwirkung der Mathematik auf ihre Nachbargebiete und eine lebendige Darstellung ihrer Beziehungen zu unserem gesamten Kulturleben für jeden gebildeten Leser irgend einen Anknüpfungspunkt bieten.

Eine Darstellung der Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert begegnet erheblich größeren Schwierigkeiten als dies etwa für Altertum und Mittelalter oder für das 16., 17. oder 18. Jahrhundert der Fall ist. Denn während eine Geschichte der Mathematik des Altertums und des Mittelalters noch relativ elementare Gegenstände zu behandeln hat und das 16., 17. und 18. Jahrhundert eine Epoche bildet, die im wesentlichen einheitlichen

Charakter trägt, und deren Ergebnisse durch ihre Beziehungen zu den Nachbargebieten der Mathematik auch den Außenstehenden leicht erfaßbar sind, so wird uns ein Vergleich mit dem 19. Jahrhundert sogleich lehren, wie sehr hier die Verhältnisse anders liegen.

Jene frühere Epoche umfaßt als Wichtigstes die um 1700 beginnende Entwicklung der Differential- und Integralrechnung, die ganz neue Möglichkeiten zur Beherrschung von Mechanik und Astronomie gewährt. Ihren Höhepunkt erreicht sie in zwei Werken französischer Mathematiker, die, obwohl erst im 19. Jahrhundert abgeschlossen, nach Inhalt und Form dem 18. Jahrhundert angehören. Es sind dies:

Lagrange: Mécanique analytique. 2 vol. 1811–15[1].

Laplace: Mécanique céleste. 5 vol. 1799–1825.

Jeder Mathematiker, der sich für die Entwicklung seiner Wissenschaft interessiert, muß noch heute diese Werke kennen. Vielleicht darf ich daneben noch nennen:

Legendre: Exercices de calcul intégral. 3 vol. 1811—19,
weil hier das Erträgnis der Untersuchung der Integrale, soweit sie damals gediehen war, zusammengestellt und vor allem nach Seite der numerischen Exekutive ausgeführt ist. (Tafeln der elliptischen und der Eulerschen Integrale; man erinnere sich, daß von 1500 an die Verbreitung der Dezimalbrüche Platz gegriffen hatte und um 1600 die Erfindung der Logarithmen erfolgt war.)

Neben diesen großen Leistungen der angewandten Mathematik fehlt natürlich auch im 18. Jahrhundert nicht die reine. Ich erinnere an Newtons Werk: Enumeratio linearum tertii ordinis, an Euler und Lagrange, denen wir große Fortschritte bei den algebraischen Gleichungen, sehr viel Zahlentheoretisches und das Additionstheorem der elliptischen Integrale verdanken, um nur einige wichtige Punkte hervorzuheben. Im ganzen tritt aber doch die unabhängige Bearbeitung der reinen Mathematik zurück hinter den gewaltigen Schöpfungen, mit denen die reine und die angewandte im Bunde den Forderungen der Zeit gerecht wurden.

Das 19. Jahrhundert zeigt nun einen gänzlich anderen Charakter. Die angewandte Mathematik bleibt zwar nicht in ihrer Entwicklung stehen. Vielmehr erfaßt sie immer weitere, neue Gebiete, wofür nur die Erinnerung an die Erschaffung der gesamten „mathematischen Physik", d. h. unseres theoretischen Rüstzeuges in allen physikalischen Gebieten außer der Mechanik, zeugen möge. Daneben tritt nun aber die reine Mathematik mächtig hervor, und zwar gleich bedeutsam in zweifacher Weise: Ganz neue Gebiete werden geschaffen, so die Theorie der Funktionen komplexen Arguments und die projektive Geometrie; die überkommenen wissenschaftlichen Güter aber werden einer kritischen Durchsicht unterzogen, wie es dem wiedererwachten Gefühl für Strenge entsprach, das in dem an neuen Erfindungen überreichen 18. Jahrhundert etwas zurückgedrängt war.

Neben diesen neuen Gedankenrichtungen machen ferner die starken sozialen Verschiebungen, wie sie die französische Revolution und die anschließenden geschichtlichen Ereignisse mit sich brachten, ihren Einfluß auf das wissenschaftliche Leben geltend. Die Demokratisierung aller Anschauungen führt zu einer Verbreiterung der Kultur und innerhalb derselben zur strengen Spezialisierung der einzelnen Zweige der Wissenschaft. Der Forderung der Zeit entsprechend gewinnt die Lehrtätigkeit eine große Bedeutung. Das nicht mehr durch Standes- und Klassenunterschiede gehemmte Berufsleben schafft einen Andrang zu wissenschaftlichen Studien, wie er früher undenkbar gewesen wäre, nämlich unter dem gänzlich neuen Gesichtspunkte der Ausbildung zu dem nun so bedeutungsvoll gewordenen Lehrerberuf. Damit beginnt eine Verschiebung des Hauptgewichts wissenschaftlichen Lebens; seine Träger sind nun nicht mehr die Akademien, sondern die Hochschulen. In Frankreich nimmt diese Entwicklung nach ersten Anfängen in der École normale ihren Ausgang von Monge und der Begründung der *École Polytechnique* (1794), in Deutschland von

[1]Erste Auflage in einem Bande 1788.

Jacobi, der 1827 in Königsberg Ähnliches ins Leben rief.

Unter dem Druck der an Ausdehnung so sehr gewachsenen und so mannigfaltigen Aufgaben beginnt nun die schon angedeutete Spezialisierung der Wissenschaften. Die Mathematik trennt sich von der Astronomie, der Geodäsie, der Physik, der Statistik usf. Die Zahl der Fach- und Spezialfachmathematiker wächst ins Ungemessene und verteilt sich über die entferntesten Nationen. In dieser überreichen Entwicklung der Einzelforschung ist es auch für den universalsten Kopf nicht mehr möglich, innerlich eine Synthese des Ganzen zu vollziehen und nach außen fruchtbar zu machen. An Stelle dieses lebendigen Zusammenhalts entstehen eine gewaltige Literatur — insbesondere Zeitschriften umfassend —, große internationale Kongresse und andere Organisationen, die mit Mühe einen äußeren Zusammenhang aufrechtzuerhalten streben.

Es unterliegt keinem Zweifel, daß dem wissenschaftlichen Leben in dieser gedrängten neuzeitlichen Entwicklung viele wertvolle Züge verloren gegangen sind. Welche Bewunderung erregt nicht in uns die kleine Schar auserlesener Männer, die im 18. Jahrhundert unsere Wissenschaft vertraten! In akademischer Stellung, ohne nationale Schranken, in ständigem Gedankenaustausch durch eine persönliche Korrespondenz verbunden, vereinigten sie das fruchtbarste wissenschaftliche Schaffen mit einer idealen, nach allen Seiten ebenmäßigen Ausbildung der eigenen Persönlichkeit. In diesem Bilde ist es nur ein Zug, daß der Gelehrte dieser Zeit die reichsten Kenntnisse auch außerhalb seines eigenen Gebietes besaß und sich ständig in lebendigem Zusammenhang mit der Entwicklung der Wissenschaft, als Ganzes gesehen, wußte. Man bedenke, daß Newtons Gravitationstheorie in Frankreich durch Voltaire zur Geltung gebracht wurde. Aber das universale Streben der Zeit geht auch über das Reich der Wissenschaft noch hinaus und sucht den Zusammenhang mit allen kulturellen Werten, mit Religion, Kunst und Philosophie. Die große Aufgabe der Menschheitsvervollkommnung ist überall durchzuspüren. Ein Zeugnis dafür ist die Tendenz, jede wissenschaftliche Einzelarbeit zusammenhängend und abgerundet darzustellen und so als ein in sich geschlossenes Ganzes dem gebildeten Publikum vorzulegen. Laplace begleitet seine „Mécanique céleste" durch die für das allgemeine Publikum bestimmte „Exposition du système du monde", seine „Théorie analytique des probabilités" durch seinen „Essai philosophique sur les probabilités". Freilich werden die großen Schönheiten dieser kristallklaren, abgeschlossenen, klassischen Darstellungsweise nicht ohne Einbuße erkauft. Es ist nämlich diesen Meisterwerken kaum mehr ihre Werdegeschichte zu entnehmen. Dadurch ist dem Leser die eigentümliche und für einen selbständigen Geist größte Freude versagt, unter der Führung des Meisters die gefundenen Resultate selbsttätig gleichsam noch einmal zu entdecken. In diesem Sinne mangelt den Werken der klassischen Zeit das eigentlich erzieherische Moment. Der Gedanke, den Leser nicht nur zu erfreuen und zu belehren, sondern in ihm über das Werk hinausgehende Kräfte zu wecken, zur eigenen Tätigkeit anzuregen — eine Wirkung, wie sie etwa von Monges, von Jacobis oder auch von Faradays Schriften ausgeht — gehört durchaus dem 19. Jahrhundert an[2].

Haben wir so aus vielen Gründen das Universalitätsideal des 18. Jahrhunderts verlassen und verlassen müssen, so scheint es doch angebracht, sich zuweilen an seine Vorzüge zu erinnern, wenn wir den heute üblichen Wissenschaftsbetrieb betrachten. Da gibt es in jedem Kulturland Hunderte von produzierenden Mathematikern, von denen jeder nur ei-

[2] Die in diesem Absatz geschilderten Verhältnisse treffen genau genommen nur für das Ende des 18. Jahrhunderts zu. So führt z. B. Euler den Leser genau den Weg, den er selber gegangen ist, warnt auch vor den Irrungen, die zu vermeiden sind und erzählt oft genug von den eigenen vergeblichen Versuchen, die er vor Auffindung des richtigen Weges unternommen hat. Auch von noch ungelösten Schwierigkeiten berichtet er und weist, soweit er vermag, den Weg, den man nach seiner Ansicht versuchen sollte, und bemüht sich eben dadurch, die eigene Tätigkeit des Lesers anzuregen. — Daß Klein diese Stellung Eulers nicht gewürdigt hat, erklärt sich einfach dadurch, daß er, wie er selbst gelegentlich sagte, niemals zu einer eingehenden Beschäftigung mit den Schriften Eulers gekommen ist. Anm. d. Herausg.[Richard Courant und Otto Neugebauer]

ne ganz kleine Ecke seiner Wissenschaft beherrscht, die ihm dann begreiflicherweise an Wichtigkeit alles andere zu überragen scheint. Die Früchte seiner Arbeit publiziert er in abgerissenen Einzelaufsätzen in mehreren, womöglich verschiedensprachigen, weitverstreuten Zeitschriften. Die Darstellung, nur für wenige Spezialkollegen berechnet, enthält sich jeder Andeutung eines Zusammenhangs mit größeren allgemeinen Fragen und ist dadurch vielleicht schon einem etwas anderweitig interessierten Kollegen schwer zugänglich, einem größeren Kreise aber gänzlich ungenießbar.

Nun, es kann hier nicht unsere Aufgabe sein, einmal Verlorenes zurückzuwünschen oder die Vorzüge aufzuzählen, die den Verlust etwa ausgleichen möchten. Auch um Besserungsvorschläge handelt es sich hier nicht. Vielmehr ergibt sich aus diesen Verhältnissen für uns nur die Frage: wie sollen wir uns durch diese verwickelten, unübersichtlichen Zustände durchfinden? Wie muß eine Darstellung angelegt sein, die eine solche, der Einheit und des Zusammenhangs mangelnde Entwicklung für ein weiteres Publikum klarlegen soll?

Ich möchte hier folgende Gesichtspunkte geltend machen. An sich ist es gewiß eine wichtige Aufgabe, das Wesentliche erst einmal zu sammeln. Das ist jedoch die Aufgabe unserer großen „Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften", gegen deren Arbeitsfeld wir uns hier von vornherein abgrenzen müssen. Denn das hier angestrebte Ziel wäre keineswegs erreicht, wenn wir etwa nur eine gekürzte Umarbeitung der Enzyklopädie geben würden. Aber auch den an sich naheliegenden Gedanken, die Hauptgebiete herauszugreifen und *systematisch* darzustellen, möchte ich ablehnen. Vielmehr will ich nur ausgewählte Skizzen aneinanderfügen, in denen ich bald das Lebenswerk einzelner hervorragender Persönlichkeiten, bald die Ziele und Ergebnisse bestimmter Schulen zur Darstellung bringe. Dabei erhebe ich keinen Anspruch auf Vollständigkeit irgendwelcher Art und verzichte von vornherein auf minutiöse vorbereitende Studien meinerseits. Nur darum wird es sich handeln, den allgemeinen Charakter und Sinn einer Leistung leidlich getroffen zu haben.

An den Beginn meiner Ausführungen habe ich jedenfalls einen ersten großen Abschnitt zu stellen, der sich ausschließlich mit Gauss beschäftigt. Gauß steht nicht nur zeitlich an der Spitze des 19. Jahrhunderts, sondern er bildet auch den Ausgangspunkt für die mannigfachen neuen Entwicklungen der Wissenschaft, die es umfaßt. Die Betrachtung der großen Persönlichkeit von Gauss ist um so mehr geeignet, in den hier darzulegenden Gegenstand einzuführen, als uns in diesem Manne eine einzigartige, sehr glückliche Verbindung des Geistes der beiden Epochen entgegentritt, an deren Wende er steht.

In seiner äußeren Erscheinung, d. h. in der Art seiner Einwirkung auf seine Zeitgenossen ist Gauß noch durchaus ein Typ des 18. Jahrhunderts. Gerade bei ihm findet sich der wissenschaftliche Verkehr in Form einer ausgiebigen Korrespondenz mit wenigen auserlesenen Männern; die klassische Form seiner Werke zeichnet ihn aus wie nur irgendeinen seiner Vorgänger. Mit diesen Zügen verbindet sich eine ausgesprochene Abneigung gegen den Lehrbetrieb, den er allerdings nur als Elementarunterricht verstand; gegen die Unterweisung einzelner hervorragend begabter Schüler und Jünger hat sich Gauß nicht ablehnend verhalten. Gerade hierin zeigt er sich aber konservativer als etwa der ältere Monge, der durch die schon erwähnte Begründung der École Polytechnique (1794) der Entwicklung des 19. Jahrhunderts Vorgriff. Während aber Monge in seinem mathematischen Ideenkreis noch mehr im Rahmen des 18. Jahrhunderts blieb, eröffnet Gauß durch seine ganz neuartigen Gedanken in Wahrheit die neue Zeit.

Kapitel 3

Die Gründung des Crelleschen Journals und das Aufblühen der reinen Mathematik in Deutschland.

Seite 93–96

Allerlei Pläne in Berlin

Das neue Deutschland des 19. Jahrhunderts, das sich allmählich aus den Napoleonischen Kriegen heraus entwickelt, ist in seinem Wesen bestimmt durch die von Frankreich kommenden Anregungen, die im Sinne des deutschen Geistes verarbeitet werden. Wie auf anderem Gebiet Goethe, so steht in unserer Wissenschaft Gauß außerhalb der von der Zeitströmung getragenen Entwicklung. Diese Entwicklung setzt in Berlin ein, aber, wie schon früher bemerkt, für die exakten Wissenschaften etwas später als auf anderen wissenschaftlichen Gebieten. Für die Geisteswissenschaften bildet die Gründung der Universität Berlin 1810 den Ausgangspunkt. Sie blühen auf, gestützt auf die neuhumanistische Lehre von der freien Bildung der Persönlichkeit, die sich vom Interesse für die exakten Wissenschaften direkt ab wandte.

Hier macht sich die neuzeitliche Regung erst von 1820 ab bemerkbar, wesentlich durch die Initiative Alexander von Humboldts, wie ich es früher ja bereits dargelegt habe. In enger Verbindung mit diesem anregenden, unternehmenden Geiste steht der General von Müffling, der seit 1820 Chef des Generalstabes war. Wir finden hier die Napoleonische Tradition einer Wertschätzung der Mathematik von militärischen Gesichtspunkten aus fortgesetzt, wie sie durch Scharnhorst für Preußen von Einfluß geworden ist. Aus diesen Kreisen entsteht nun, unabhängig von den gleichzeitigen Bestrebungen, die überall zur Hebung des Gewerbes einsetzen, und aus denen unser technisches Fach- und Hochschulwesen entstanden ist, der Gedanke, ein umfassendes polytechnisches Institut von vornehm-wissenschaftlichem Charakter nach dem Muster der École Polytechnique zu gründen. Man versuchte, Gauß als Direktor dieser Neuschöpfung zu gewinnen, der er ohne jede Lehrverpflichtung — abgesehen von der ihm selbst erwünschten Heranbildung von Spezialschülern — nur durch seine wissenschaftliche Persönlichkeit und seine organisatorischen Gaben dienen sollte. Alle wissenschaftlichen Institute (z. B. Sternwarten) des Staates sollten ihm unterstehen, und ein bestimmter Einfluß auf die Gesamtentwicklung des Unterrichtswesens in Preußen ward ihm eingeräumt (Bruhns: Briefe zwischen A. von Humboldt und Gauß. 1877). Aber Gauß lehnte den Vorschlag Ende 1824 ab. Von dieser Zeit an gerät der großzügige Plan ins Stocken. Auch die Militärbehörden ziehen sich zurück. Es wird der Versuch gemacht, das Projekt in die Gründung eines besonderen Oberlehrerbildungsinstituts umzuwandeln, und in dieser Form wird der Plan noch jahrelang vom Kultusministerium verfolgt. Als schließlich auch die Berufung von Abel 1829, die wenige Tage nach seinem Tode in Kristiania eintraf, zu keinem Erfolge führte, wurde der Plan endgültig fallen gelassen. Diesem Umstand ist es zuzuschreiben, daß die mathematisch-naturwissenschaftliche Lehrerbildung in Preußen schließlich doch den Universitäten als eine beträchtliche, für ihre Entwicklung sehr wesentliche Aufgabe zufiel. Der heutige Zustand, den man zuweilen als aus dem Begriff der Universität mit logischer Notwendigkeit folgend hinzustellen beliebt, verdankt also zufälligen Ereignissen seine Entstehung.

Crelle

Bei der Betrachtung dieser Entwicklung möchte ich eines Mannes gedenken, der zwar nicht selbst in produktiver Hinsicht von Bedeutung war, der Wissenschaft aber durch seine vielseitigen Interessen, seine vermittelnde Natur und seine organisatorischen Fähigkeiten große Dienste leistete, des Oberbaurats Crelle (1780–1855). Crelle ging von der Technik aus, für deren Unterrichtswesen er sich lebhaft interessierte. Von 1824 an wirkte er allgemein für die Hebung der exakten Studien, bis er 1828 als Referent in das preußische Kultusministerium eintrat. Auch zum Mitglied der Berliner Akademie wurde er gewählt. Seine eigenen mathematischen Arbeiten, die er neben vielen anderen Interessen nie ganz liegen läßt, sind zahlreich, aber nicht bedeutend. Sie tragen den damals in Deutschland vielverbreiteten enzyklopädischen Charakter — eine Tradition des 18. Jahrhunderts —, indem sie viele verschiedenartige Gebiete berühren, ohne irgendwo in die Tiefe zu gehen. Hervorragende Dienste aber leistete Crelle der Wissenschaft durch seine organisatorischen Gaben, durch seine liebenswürdige, vielseitige Persönlichkeit, die überall junge Talente erkannte und an sich zog. Vielen verhalf er durch Schaffung einer Universitätsstellung zu einem Wirkungskreis und zu freier Entfaltung ihrer Kräfte. Am meisten aber ist ihm unsere Wissenschaft verpflichtet für die Anregung und den Zusammenschluß, den er ihr gab durch die Gründung des *Journals für die reine und angewandte Mathematik* (1826).

Nimmt man heute einen Band dieser Zeitschrift zur Hand, so mag der Titel vielleicht Verwunderung erregen. Er erklärt sich zunächst historisch, denn er wurde von Gergonnes Annalen herübergenommen, wie er sich auch später noch, längst inhaltslos geworden, auf Liouvilles Journal (1836) übertrug. Es unterliegt aber keinem Zweifel, daß Crelle mit diesem Titel die ernste Absicht verband, eine die ganze Mathematik umfassende Zeitschrift ins Leben zu rufen. Wie die Vorrede zu Band I zeigt, beabsichtigte er nicht nur dem Wachstum, sondern auch der Verbreitung der Wissenschaft zu dienen. Er wendet sich darum an einen „ausgedehnten“ Leserkreis, nicht nur an die Spezialfachvertreter, den er durch Übersetzungen fremdsprachlicher Werke, durch Bücherbesprechungen, durch Aufgaben, in Zusammenhang mit allen Quellen wissenschaftlichen Lebens zu bringen beabsichtigt. So beginnt der erste Band des Journals mit der Bestimmung der Wassermenge eines Stromes durch Eytelwein, woran sich die erste Abhandlung von Abel schließt, eine Zusammenstellung, die den heutigen Leser des Journals wohl überraschen mag.

Daß die tatsächliche Entwicklung so ganz anders gegangen ist, als es in Crelles Absicht lag, hat seine Ursache in dem herrschenden Geist der Epoche. Der neuhumanistische Untergrund des neuen wissenschaftlichen Lebens, dessen vornehmstes Organ die Zeitschrift bald werden sollte, erwies sich stärker als das mehr schematische Denken ihres Begründers, der eher eine vermittelnde als eine führende Natur war. Das neuhumanistische Ideal der reinen Wissenschaft als Selbstzweck, das die Verachtung aller Nützlichkeit im gemeinen Sinne in sich barg, führte bald zu einer geflissentlichen Abkehr von allen der Praxis zugewandten Bestrebungen. Diese Geistesrichtung ergriff auch das ursprünglich allen Zweigen der Wissenschaft gewidmete Journal und stempelte es zu einem Organ abstrakter Spezialmathematik von strengster Ausprägung, die ihm den Scherznamen „Journal für reine, unangewandte Mathematik“ eingetragen hat.

Crelle, der dem Strom der Entwicklung nicht entgegenzutreten vermochte, ist darum doch sich selbst treu geblieben; es war ihm jedoch nur in der Form möglich, daß er die beiden Sphären, in denen er heimisch war, nach außen trennte. Von 1829 an gibt er, seinem technischen Interesse folgend, ein besonderes „Journal für Baukunst“ heraus. Was Crelle nach dieser Seite bedeutete, beleuchtet die Tatsache, daß der 1838–40 erfolgte Bau der wichtigen Eisenbahn Berlin–Potsdam nach seinen Plänen ausgeführt wurde. Die Mehrzahl der „Kunststraßen“ waren in Preußen schon in früheren Jahren ebenfalls auf Grund seiner Entwürfe entstanden.

Crelles Journal für Mathematik hingegen entwickelt sich, wie schon angedeutet, trotz aller anfänglichen finanziellen Schwierigkeiten zum wichtigsten Organ der fortschreitenden, reinen Mathematik, die nun in einseitiger aber glänzender Ausbildung an den deutschen Universitäten ihren Siegeszug antritt.

Der erste Band enthält nicht weniger als fünf Abhandlungen von Abel; daneben eine Abhandlung von Jacobi und verschiedenes von Steiner. In Band 3 (1828) erscheinen die Namen: Dirichlet, Moebius und Plücker.

Damit sind die Namen der sechs Forscher aufgezählt, die wir nun zunächst zu besprechen haben. Ich nehme die drei „Analytiker“ Dirichlet, Abel und Jacobi voran und lasse die drei „Geometer“ Moebius, Plücker und Steiner folgen.

Analytiker des Crelleschen Journals.

Geometer des Crelleschen Journals.

Seite 115–131

Gegensatz der Richtungen

Auch auf geometrischem Gebiete nimmt die modern-mathematische Entwicklung in Deutschland ihren Ausgang von dem Einfluß der Franzosen. Es ist aber nicht etwa die Differentialgeometrie, deren Fortbildung sie unternimmt — von Gauß’ grundlegenden „Disquisitiones circa superficies curvas“ 1827 soll hier abgesehen werden —; vielmehr richtet sich das Interesse auf die *algebraische Geometrie*, insbesondere die der linearen und quadratischen Gebilde.

Ehe ich des näheren auf diese Entwicklung eingehe, möchte ich zwei Gegensätze andeuten, die von entscheidender Bedeutung für sie gewesen sind.

Da ist erstens die Trennung der Auffassungen, die uns schon an der École Polytechnique entgegengetreten war, nach Seite der analytischen oder der synthetischen Behandlung der Geometrie. Dieser Gegensatz wird nun in der Folgezeit von schärfster prinzipieller Bedeutung; die Anhänger beider Richtungen suchen ihre Ehre darin, *nur* mit dem einmal erwählten Werkzeug zu arbeiten. Die Vorzüge und Nachteile zeigen sich um so prägnanter, je einseitiger die Methoden ausgebildet werden. Die analytische Geometrie hat den bequemen Algorithmus für sich, der die höchsten Verallgemeinerungen ermöglicht, der aber auch leicht dazu verführt, das eigentliche Objekt der Geometrie: die Figur und die Konstruktion, aus dem Auge zu verlieren. Bei der synthetischen Geometrie wiederum droht die Gefahr, daß der Geist am einzelnen angeschauten Fall oder doch nur einer beschränkten Zahl von Möglichkeiten haften bleibt; die Lage wird wenig gebessert, wenn, um ihr zu entgehen, ein neuer Algorithmus ad hoc erfunden wird, der schwerfällig bleibt, solange er sich nicht in die einfachsten Ansätze der analytischen Geometrie verwandelt. Zu begrüßen ist bei der synthetischen Behandlung das deutliche Bewußtsein der lebendigen Wurzel aller Geometrie, der Freude an der Gestalt.

Eine gesunde Entwicklung wird sich beider Methoden bedienen und die Früchte ihrer wechselseitig anregenden Einwirkung auf einander genießen.

Der zweite Gegensatz, von dem ich sprechen möchte, ist weniger sachlicher Natur, jedoch wegen der großen Bedeutung, die er in der Folgezeit gehabt hat, nicht zu übergehen. Wenn er auch im allgemeinen in der Kunst eine weitaus lebhaftere Rolle spielt, so hat sich doch selbst unsere, die „objektivste“ Wissenschaft, nicht frei davon halten können in dem Maße, wie sie an Verbreitung und Organisation zunahm. Ich meine den Gegensatz der Schulmeinungen, der Cliquen, das ganze große Gebiet der wissenschaftlichen Polemik, die denn oft ins Persönliche entgleitend zum Austausch stark subjektiv gefärbter Meinungen wird, die sich auf die folgenden Generationen weiter vererbt.

In unserem Falle handelt es sich um den Streit des von Jacobi und seinem Anhang gestützten Synthetikers Steiner gegen Plücker. Moebius steht in seiner stillen Art mehr außerhalb dieser Kämpfe, die zudem auch durch den Gegensatz von Hauptstadt und Provinz verschärft werden. Noch heute sind ihre Spuren nicht selten zu entdecken, so etwa, wenn noch bis vor kurzem in gewissen Kreisen Steiner als der unvergleichliche, größte Geometer der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts gefeiert wurde.

Es gibt ein gutes Mittel, um sich vor der Gewalt solcher Schulmeinungen, denen sich der einzelne, besonders als junger Mensch, schwerlich entziehen kann, zu schützen, und das mir einst der Leipziger Physiologe Ludwig empfahl: man entferne sich 600 km von ihrem Heimatsorte und sehe sich von dort die Verhältnisse an; gewiß wird man über das Wegfallen mancher bereits für selbstverständlich gehaltener Ansichten erstaunt sein.

Es ist kein Zweifel, daß die folgende Entwicklung, wie sie die persönlichen Verdienste vielfach an ihren rechten Platz hat rücken lassen, so auch den sachlichen Kampf entschieden hat, indem sie der analytischen Geometrie nach allen Richtungen das Übergewicht sicherte. Ich erinnere nur an die Beziehungen der Lehre der algebraischen Kurven zur höheren Funktionentheorie, an die Beziehung zur Mengenlehre, an den Ausbau der Differentialgeometrie, wo überall die „synthetische“ Richtung nicht mitgekommen ist. Im übrigen halte ich an der These fest, die Jacobi 1831 bei seiner Disputation zum Eintritt in die Königsberger Fakultät aufstellte: „Principium methodi geometricae et analyticae idem est“.

Nach der Zeit des Erscheinens ihrer ersten größeren Werke ordne ich die drei großen Geometer in der Reihenfolge: Moebius, Plücker, Steiner.

Moebius

August Ferdinand Moebius war wie Gauß und viele andere, denen die Mathematik in jener Zeit Förderung verdankt, ursprünglich Astronom. Die astronomische Stellung gab jenen Forschern die gesicherte Existenz, welche die Voraussetzung ihres mathematischen Schaffens war. Auch Hamilton wäre hier zu nennen. Moebius war in der Tat während des größten Abschnittes seines stillen Lebens astronomischer Direktor auf der Pleißenburg in Leipzig. Hier hat er ruhig seine Gedanken reifen lassen, um sie dann in vollendeter Klarheit vorzutragen, um nichts anderes bemüht, als um die Ausgestaltung der Ideen, die sich seiner geometrischen Erfindungsgabe beim Studium der verschiedenen an ihn herantretenden Gebiete aufdrängten.

Er wurde am 17. November 1790 geboren in der Fürstenschule zu Schulpforta. Wenn man den schlichten, stillen Mann vor Augen hat, muß es einen einigermaßen in Erstaunen setzen, daß sein Vater an der besagten Schule den Beruf eines Tanzlehrers ausübte. Um die Verschiedenheit der Generationen vollends vor Augen zu führen, erwähne ich, daß ein Sohn des Mathematikers der bekannte Neurologe ist, der Verfasser des vielbesprochenen Buches „Vom physiologischen Schwachsinn des Weibes“.

Moebius verbrachte 1813–14 eine längere Lehrzeit bei Gauß, der ihn aber, wie auch andere Schüler, wesentlich zu astronomischen Beobachtungen und Rechnungen anleitete. Damit sicherte er ihm zwar die spätere Anstellung, traf aber nicht den Kern seiner Begabung, die sich erst an dem Studium der französischen Geometer entwickelte. Seit 1816 war

Moebius erst Observator, dann Direktor auf der Pleißenburg, später auch Professor der Mathematik an der Universität. In diesen Stellungen blieb er bis zu seinem Tode (1868.)

Seine Werke wurden gesammelt herausgegeben seitens der Königl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaft in vier Bänden, 1885–87. Am Schlusse des vierten Bandes findet sich eine Besprechung des Nachlasses, aus welcher die ganze Genesis von Moebius' wissenschaftlichen Gedanken klar wird. Mehr persönliche Züge finden sich in der Schrift von Bruhns: Die Astronomen der Pleißenburg.

Unter den Werken von Moebius steht zeitlich und inhaltlich als sein Fundamentalwerk *„Der barycentrische Calcul"* von 1827 voran, eine wahre Fundgrube neuer Ideen in wunderbar abgeklärter Darstellung.

Der Name ist abgeleitet von der Grundidee des Buches, den Begriff des Schwerpunktes geometrisch zu verwerten. Um in der Ebene zu bleiben: als Koordinaten eines Punktes P werden diejenigen Gewichte p_1, p_2, p_3 gewählt, die man in die Ecken eines bestimmten festen Dreiecks legen muß, um den Schwerpunkt nach P fallen zu lassen. Es ist dies das erste Beispiel homogener Koordinaten, d. h. solcher, die ihr Objekt allein durch ihr Verhältnis bestimmen ($\lambda p_1, \lambda p_2, \lambda p_3$ geben denselben Schwerpunkt). Indes sind es noch nicht die homogenen Koordinaten allgemeinster Art, wie sie durch Plücker eingeführt wurden. Es ist dazu noch eine kleine Erweiterung nötig, die gewonnen wird, wenn man jede der Koordinaten mit einem willkürlichen Faktor $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ versieht, also etwa die Vorstellung einführt, daß die in den drei Eckpunkten lagernden Gewichte mit verschiedenem Maße gemessen werden. Die Gleichung der Ponceletschen unendlich fernen Geraden, die auch bei Moebius schon eine handgreifliche Realität bekommt durch die Darstellung $p_1 + p_2 + p_3 = 0$, lautet dann $\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3 = 0$, und es ermöglicht sich, durch Grenzübergang, den Fall des Parallel-Koordinatensystems als Spezialfall unter dem allgemeinen Fall der Dreieckskoordinaten zu begreifen, ein Gedanke, der Moebius noch ganz fern lag.

Ist nun dies neue Koordinatensystem schon viel schmiegsamer als das übliche, weil es sechs wählbare Konstanten besitzt (das Plückersche hat acht), so gewinnt es doch erst dadurch seinen Wert, daß Moebius nun mit seiner Hilfe eine ganze Reihe neuer Gedankengänge herausstellt.

1. Moebius benutzt als erster ganz konsequent das Prinzip der Vorzeichen in der Geometrie, und zwar nicht nur beim Messen von Strecken, sondern auch von Flächen- und Rauminhalten, bei deren Ausmessung er einen „,Umlaufungssinn" unterscheidet.

2. Indem die Koordinaten p_1, p_2, p_3, p_4 eines Punktes im Raum rationalen Funktionen von Parametern gleich gesetzt werden, gelingt Moebius eine neue Darstellung der Kurven und Flächen, die zu einer ganz anderen Anordnung der Gebilde führt als üblich war. Hierbei entdeckt Moebius die Raumkurve dritter Ordnung.

3. Moebius faßt klar den Gedanken einer Punkt für Punkt sich entsprechenden Beziehung von zwei Räumen und schafft damit den Begriff der einfachsten, systematisch abgestuften „Verwandtschaften": Gleichheit, von uns jetzt gewöhnlich Kongruenz genannt, Ähnlichkeit, Affinität (eine von Euler stammende Bezeichnung), Kollineation, mit welch letzterem Ausdruck er die allgemeinste Verwandtschaft bezeichnet, welche gerade Linien in gerade Linien überführt[1].

4. Mit dieser Klassifizierung verbindet er nun sogleich die Idee, nach den Ausdrücken oder Gebilden zu fragen, die bei irgend einer dieser Verwandtschaften ungeändert bleiben. Hier wird zum ersten Mal eine ausführliche Theorie des Doppelverhältnisses von vier Punkten auf einer geraden Linie gegeben, wie es nun erst nach Einführung der Vorzeichen möglich war.

5. Die Herstellung der Kollineation gelingt ihm ohne jede metrische Bestimmung allein

[1] Wenn auch Moebius noch nicht den modern formulierten Gruppenbegriff besitzt, so bietet doch der Begriff der „Verwandtschaft" ein Äquivalent; Moebius wird dadurch genau zu einem Vorläufer des „Erlanger Programms".

durch die Annahme von vier sich entsprechenden Punkten in den aufeinander zu beziehenden Ebenen (fünf im Raum) und ihre entsprechende Verknüpfung durch Geraden. An dieses sog. „Moebiussche Netz“ hat von Staudt später die Grundlage seiner synthetischen Entwicklung angeknüpft.

Diese Stichproben mögen die außerordentliche Bedeutung des Buches erweisen. Trotz seines Ideenreichtums ist es erst sehr langsam zu der ihm zustehenden Wirkung gekommen, teils weil viele neue, besonders geartete termini das Eindringen erschwerten, teils weil Moebius’ bescheidene Art ihm nicht den nötigen Nachdruck zu geben wußte. Nicht anders ging es mit seinem zweiten hochbedeutenden Werk, dem ***Lehrbuch der Statik***, das 1837 in zwei Bänden erschien (Wiederabdruck Werke Bd. 3, S. 1 ff. bzw. S. 272ff.).

Es enthält eine geometrische Entwicklung der vielen Beziehungen, die beim Zusammenwirken von Kräften an starren Körpern oder auch Körperketten statthaben, und bildet eine Weiterführung der Betrachtungen, die Poinsot von 1804 an in seinem bekannten Lehrbuch „‚Eléments de statique“ verfolgt hat, indem er neben die Einzelkraft das „Kräftepaar“ stellte. Dem Buch gehen einige einzelne Arbeiten (Crelle, Bd. 10, 1833 = Ges. Werke, Bd. 1, S. 489 ff.) voran, in denen Moebius den Begriff des „Nullsystems“ ausgestaltet, d. h. des Inbegriffs von Geraden im Raume, um welche ein gegebenes Kräftepaar das Moment Null hat. Durch die sich hier ergebenden dualistischen Beziehungen der „Null-Punkte“ und „Null-Ebenen“ gelangte Moebius zu sehr schönen Theoremen; so entdeckte er z. B. daß Tetraeder einander zugleich eingeschrieben und umgeschrieben sein können.

Die einzelnen, hervorragend schönen Entdeckungen, durch die Moebius’ Schaffen auf allen Gebieten ausgezeichnet ist, charakterisieren nun auch die vielen Einzelaufsätze, die er bis ins hohe Alter hinauf in den Berichten der Königl. sächsischen Gesellschaft veröffentlichte; Moebius „Gesammelte Werke“ umfassen vier Bände. Als Mann von 68 Jahren gelang ihm noch eine kapitale Entdeckung, die dann freilich, als Preisarbeit 1861 nach Paris gesandt, unter den Papieren der Akademie schlummerte, bis Moebius sie 1865 bekanntgab: von den einseitigen Flächen und Polyedern, für die das „Kantengesetz“ nicht gilt und die keinen definierbaren Inhalt haben[2]. Das ***„Moebiussche Band"***, für dessen Anstrich man doppelt soviel Farbe braucht, als man zunächst vermutet (diese Veranschaulichung steht bereits bei Moebius), ist ja jetzt hinlänglich bekannt. Merkwürdigerweise wurde es im selben Jahr 1858 auch von Listing entdeckt und 1862 im „Zensus räumlicher Komplexe“ bekanntgegeben — wieder ein Beispiel für den zwangläufigen Charakter der Entwicklung der Wissenschaft.

In Moebius begegnet uns ein seltenes Beispiel spät reifender Genialität — der barycentrische Calcul ist mit 37 Jahren geschrieben —, gesegnet mit einer, bis ins hohe Alter anhaltenden, ungebrochenen Produktivität. Wenn man der Ostwaldschen Einteilung der Mathematiker in Romantiker und Klassiker folgen soll, so muß man Moebius als den typischen Vertreter der zweiten Gruppe ansprechen.

Plücker

Mit Julius Plücker treten wir nun schon in die Periode ein, der wir selber durch viele Beziehungen verbunden sind. Ich selbst verehre in ihm meinen Lehrer, dessen physikalischer Assistent ich von 1866 bis 1868 gewesen bin, und dem ich auch durch Heimatsbeziehungen nahe stehe.

Plücker war eine viel weltläufigere Erscheinung als Moebius; er pflegte besonders lebhafte Beziehungen zu Frankreich und England, während sich das Verhältnis zu Berlin, wie schon angedeutet, unfreundlich gestaltete. Plücker bildet einen ungewöhnlichen Entwicklungstypus. Vom fünfunddreißigsten Lebensjahr ab vereinigte er die mathematische und physikalische Professur in Bonn und wurde durch diese Umstände allmählich seiner

[2] Über die Bestimmung des Inhaltes eines Polyeders, Werke, Bd. 2, S. 472 ff.

bisherigen mathematischen Arbeit entzogen, um sich ganz experimentalphysikalischen Forschungen hinzugeben. Erst gegen Ende seines Lebens kehrte er zur Geometrie zurück, ein Umstand, der für meine eigene Entwicklung (Herausgabe der Plückerschen Werke) entscheidend wurde.

Die Familie Plückers, der niederrheinischen Industrie angehörig, war in der Zeit der Religionswirren aus Aachen verbannt und nach Elberfeld übergesiedelt. Hier wurde Plücker am 16. August 1801 geboren. Er besuchte das Düsseldorfer Gymnasium, studierte in Bonn und Paris 1823/24 und habilitierte sich 1825 in Bonn, wo er 1828 außerordentlicher Professor wurde. 1832–34 war er außerordentlicher Professor in Berlin, zugleich am Friedrich-Wilhelm-Gymnasium tätig. Auch auf ihn fiel vorübergehend die Wahl zum zukünftigen Direktor des geplanten polytechnischen Instituts, das damals freilich schon als Oberlehrerbildungsanstalt gedacht war. Aus Plückers Berliner Zeit her schreibt sich wohl die Verschärfung des Konflikts mit dem Jacobi-Steinerschen Kreis. Steiner selbst kam 1835 als Extraordinarius an die Berliner Universität, als Plücker bereits seit einem Jahr Ordinarius in Halle war. 1836 wurde er nach Bonn berufen, wo durch von Münchows Tod drei Professuren: Mathematik, Physik und Astronomie verwaist waren. Die letztere fiel Argelander zu, die beiden anderen hatte Plücker bis zu seinem Tode (22. Mai 1868) inne.

Physik

Bei der Besprechung von Plückers Werken möchte ich zunächst auf seine physikalischen Leistungen eingehen wegen der persönlichen Beziehungen, die uns Göttinger damit verbinden. Plückers physikalische Abhandlungen sind zusammengefaßt im zweiten Band der von der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften gesammelten Abhandlungen, versehen mit einer Vorrede von Riecke.

Obwohl von der Mathematik ausgehend, war Plücker nichts weniger als ein mathematischer Physiker. Ihn reizte vielmehr die rein experimentelle Forschung, mit der er, dem Beispiel Faradays folgend, am liebsten in ganz unbekanntes Gebiet eindrang. So gelangen ihm eine ganze Reihe von Entdeckungen. 1847 bemerkte er die Erscheinung des Kristallmagnetismus an einer zwischen den Polen eines Elektromagneten aufgehängten Turmalinplatte, die sich, je nach ihrer Aufhängung axial oder transversal einstellt[3]. Von 1857 an beobachtete er die Einwirkung des Magneten auf die elektrische Entladung in verdünnten Gasen, insbesondere auf die positive Entladung und das negative Glimmlicht; bei diesen Beobachtungen gelangte er bis dicht an die Erkenntnis der Kathodenstrahlen heran, die dann sein Schüler Hittorf vollendete. Auch das Ausziehen der Geißlerschen Röhren zu Kapillaren und die dadurch ermöglichten ersten Beobachtungen der Entladungsspektra wurden 1857 (Bd. 2, S. 502) von Plücker ausgeführt. Er erkannte die Spektra als Attribute der Gase und beobachtete insbesondere die drei ersten Wasserstofflinien. 1864 erreichte er mit Hittorf (Bd. 2, S. 665 ff.) viel genauere Ergebnisse und entdeckte insbesondere die durch die Natur der elektrischen Entladung bedingten Doppelspektra (Linien resp. Bandenspektra). Die abschließenden Arbeiten über diese Dinge finden sich sämtlich in den Philosophical Transactions. Aber auch diese Dinge fanden in Deutschland, gehemmt durch den Berliner Einfluß, keine Anerkennung. In Heidelberg begannen Kirchhoff und Bunsen 1858 mit der Spektralanalyse, beobachteten aber zunächst nur die einfachen Spektra der Metalldämpfe. Eine verschiedene Natur des Spektrums ein und desselben Gases bei verschiedenen Bedingungen des Leuchtens ist ihnen nicht entgegengetreten. Beiläufig gedenke ich der Ablehnung, welche Hittorf noch später, als er seine großartigen Entdeckungen betreffend die Kathodenstrahlen den Berliner Physikern Magnus, Poggendorff u. a. vorführ-

[3]Diese Untersuchungen sind zu einem gewissen Abschluß gebracht in dem Buche von A. Beer: Einleitung in die Elektrostatik, die Lehre vom Magnetismus und die Elektrodynamik, Braunschweig 1865, herausgegeben von Plücker.

te, in Berlin erfuhr. Die Gegensätze, welche wir hiermit berühren, reichen ziemlich bis zur Gegenwart heran.

Geometrie

Ich komme nun zur Fortführung unseres eigentlichen Gegenstandes, indem ich mich Plückers geometrischen Arbeiten zuwende. Fünf große selbständige Publikationen verdanken wir ihm außer den in Bd. 1 der gesammelten Abhandlungen abgedruckten Arbeiten:

1. Analytisch-geometrische Entwicklungen, Bd. 1 u. 2. 1828, 1831.
2. System der analytischen Geometrie (der Ebene). 1834.
3. Theorie der algebraischen Kurven. 1839.
4. System der analytischen Geometrie des Raumes. 1846.
5. Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement. 1868, 1869 (Teil II posthum von mir herausgegeben).

Über das letzte Werk, das Plückers zweiter geometrischer Periode entstammt, werde ich erst im späteren Verlauf dieser Vorträge sprechen. Als einen bemerkenswerten Zug aber möchte ich anführen, daß der Wiederbeginn von Plückers geometrischen Arbeiten mit Steiners Todesjahr 1863 zusammenfällt. Ob hier ein Zusammenhang vorliegt, kann natürlich nicht entschieden werden.

Plückers Ziel in der Geometrie und seine Leistung ist der Neuaufbau der analytischen Geometrie. Er verfolgte dabei eine aus der Mongeschen Tradition weitergebildete Methode: das völlige Zusammenwachsen von Konstruktion und analytischer Formel. In der Vorrede seines ersten Werkes, S. IX, sagt er: „Ich möchte mich zu der Ansicht bekennen, daß die Analysis eine Wissenschaft ist, die, unabhängig von jeder Anwendung, selbständig für sich allein dasteht, und die Geometrie, so wie von einer anderen Seite die Mechanik, bloß als bildliche Deutung gewisser Beziehungen aus dem großen, erhabenen Ganzen erscheint." In diesen Worten klingen deutlich Auffassungen von Monge nach, die wir in anderer Form bei Gauß kennen lernten.

In der Plückerschen Geometrie wird die bloße Kombination von Gleichungen in geometrische Auffassung übersetzt und rückwärts durch letztere die analytische Operation geleitet. Rechnung wird nach Möglichkeit vermieden, dabei aber eine bis zur Virtuosität gesteigerte Beweglichkeit der inneren Anschauung, der geometrischen Ausdeutung vorliegender analytischer Gleichungen ausgebildet und in reichem Maße verwendet.

Zum Pascalschen Satz Als Beispiel für die Plückersche Denkweise gebe ich seinen Beweis des Pascalschen Satzes.

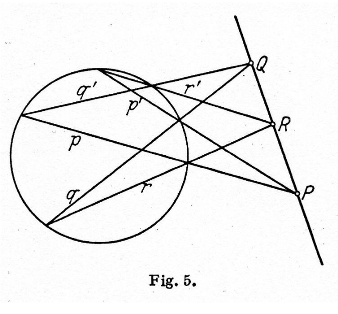


Fig. 5.

Es handelt sich um zwei Tripel von Geraden p, q, r und p', q', r', von deren neun Schnittpunkten sechs auf einem Kegelschnitt liegen (vgl. Fig. 5). Es wird behauptet, daß die übrigen drei auf einer geraden Linie liegen. Wir betrachten p, q, r, p', q', r' als lineare Ausdrücke, deren Nullsetzung die Gleichungen der sechs in Frage kommenden Geraden ergeben. Dann ist die Kombination $pqr - \mu p'q'r' = 0$ die Gleichung eines Büschels von Kurven dritter Ordnung, die sämtlich durch die neun Schnittpunkte der beiden Geradentripel gehen. Da nun von den neun Punkten sechs auf dem Kegelschnitt liegen und in dem μ noch eine Konstante zu freier Verfügung steht, so kann ich durch geeignete Wahl von μ eine Kurve herausgreifen, die noch einen siebenten Punkt mit dem Kegelschnitt gemein hat. Eine C_3 und eine C_2 haben aber im allgemeinen nur sechs Schnittpunkte. Besitzt die Gleichung sechsten Grades, die ihren Schnitt bedingt, mehr als sechs Wurzeln, so ist sie identisch Null. Folglich muß die C_3 zerfallen in den Kegelschnitt selbst und einen linearen Restbestandteil, der notwendig die drei anderen Schnittpunkte der beiden Geradentripel enthalten muß. Also liegen diese drei Punkte auf einer Geraden.

Dieser Beweis, der bei einiger Übung so einleuchtet, daß er sogar noch kürzer gefaßt werden könnte, zeigt gleich noch zwei andere Plückersche, sehr wertvolle Eigenheiten. Das eine ist die „abgekürzte Bezeichnungsweise", die sich mit der Benennung einer Gleichung begnügt, ohne sie explizite hinzuschreiben; das zweite ist der von Plücker bei jeder Gelegenheit verwendete unbestimmte Koeffizient, „das Plückersche μ". Dies μ findet sich hie und da auch schon in Gergonnes Annalen. (Auch Steiner war es bekannt, aber nur von Jacobis Seite, weshalb er das μ als „‚Judenkoeffizienten" bezeichnete.) Aber erst bei Plücker wurde es zu einem wesentlichen Werkzeug, das ihm große Hilfe leistete in seiner Kunst, „‚in den Gleichungen zu lesen".

Dreieckskoordinaten, beliebiges Raumelement

Zu der charakterisierten, allgemeinen Methode Plückers treten nun die Fortschritte im einzelnen. Von der Einführung der ***allgemeinsten homogenen Dreieckskoordinaten*** und ihrem Vorzug wurde bereits gesprochen — sie werden im „System" 1834 definiert als die mit willkürlichen Konstanten multiplizierten Abstände des Punktes P von den Dreiecksseiten; in Crelle, Bd. 5, 1830, sind noch die Abstände selbst als Koordinaten eingeführt, wodurch eine ähnliche Beschränkung resultiert wie bei Moebius. Durch diese Einführung werden nun sämtliche Gleichungen der geometrischen Gebilde homogen, was infolge des Eulerschen Theorems über homogene Funktionen sehr elegante Darstellungen ermöglicht, die von Plücker in der weitestgehenden Weise ausgebildet werden. Insbesondere die Tangenten- und Polarenlehre erfährt eine völlige Umbildung, Wenn $f = 0$ einen Kegelschnitt bedeutet, der den Punkt x, y, z enthält, so stellt nämlich die Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot x' + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y' + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot z' = 0,$$

je nach Auffassung der x', y', z' oder der x, y, z als laufende Koordinaten, entweder die Tangente der Kurve $f = 0$ in dem festen Punkte x, y, z dar, oder die Polare des festen Punktes x', y', z' in Bezug auf die Kurve $f = 0$. Der Wechsel dieser Auffassung wird bis zur Virtuosität ausgebildet und zu eleganten Beweisen aller Arten von Theoremen verwendet.

Durch die homogenen Koordinaten gelingt nun auch eine glänzende analytische Realisierung der kühnen Ponceletschen Konzeptionen der unendlich fernen Geraden, der Kreispunkte usw. Die Kreisgleichung $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ geht durch Einführung von

$$x = \frac{x_1}{x_3},\ y = \frac{x_2}{x_3} \text{ über in } (x_1 - ax_3)^2 + (x_2 - bx_3)^2 = r^2 x_3^2.$$

Die Gleichung der unendlich fernen Geraden $x_3 = 0$ ergibt nun in der Tat für jeden beliebigen Kreis das Durchschnittsgebilde $x_1^2 + x_2^2 = 0$, d. h. das Punktepaar, das durch die Koordinaten $x_1 : x_2 : x_3 = 1 : +i : 0$ und $x_1 : x_2 : x_3 = 1 : -i : 0$ gegeben ist; das sind aber gerade die sog. Kreispunkte.

Nicht minder wichtig als die Einführung der homogenen Koordinaten ist folgende neue Gedankenwendung. Die Gleichung der Geraden $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ ist in den Koeffizienten u und den Koordinaten x völlig symmetrisch. Plücker faßt nun die u als veränderliche Größen auf, deren jedes System eine Gerade durch den festgehaltenen Punkt x_1, x_2, x_3 bezeichnet. Er nennt die u_1, u_2, u_3 ***„Linienkoordinaten"***; in ihnen drückt die obenstehende

Gleichung das durch den Punkt gehende Strahlbüschel, d. h. diesen Punkt selber aus. So gut wie ich die lineare Relation als Gleichung einer Geraden in Punktkoordinaten auffassen kann, so berechtigt bin ich auch, die Gleichung eines Punktes in Linienkoordinaten in ihr zu sehen.

Mit diesem Gedanken des ***beliebigen „Raumelements"***, das zum Ausgangspunkt der Geometrie gewählt werden kann, ist nun eine völlige Klärung des Poncelet-Gergonneschen Prinzips der Dualität gegeben: Weil die Gleichung für die vereinigte Lage von Punkt und Gerade (im Raume von Punkt und Ebene) in den zweierlei Elementen symmetrisch ist, kann man in allen Sätzen, die auf bloße Verknüpfung der beiden Elemente begründet sind, die beiden Worte vertauschen!

Dies sind die wesentlich neuen Gedanken, die Plücker in das vielbebaute Gebiet der Geometrie der linearen und quadratischen Gebilde hineintrug. Darüber hinaus ergreift er nun ganz neue Objekte der Untersuchung. Während die französischen Geometer sich auf das angegebene Gebiet meist beschränkt hatten, Poncelet bei den ersten weitergehenden Versuchen auf Schwierigkeiten geraten war, gelingt nun Plücker der erste erfolgreiche Vorstoß auf die allgemeine ***Theorie der algebraischen Kurven der Ebene***.

Plückersche Formeln

Als Hauptleistung möchte ich hier die ***„Plückerschen Formeln"*** nennen, welche die Ordnung einer Kurve n (Grad der Gleichung in Punktkoordinaten) mit der Klasse k (Grad der Gleichung in Linienkoordinaten) und den einfachen (sog. notwendigen) Singularitäten verknüpfen[4]. Sie finden sich am Schluß des „Systems" von 1834. Zunächst fand Plücker die Beziehung $k = n(n-1) - 2d - 3r$, wo d die Anzahl der Doppelpunkte, r die der Rückkehrpunkte der Kurve bezeichnet. Diese Gleichung ließ sich nicht ohne weiteres, etwa durch Vertauschung von n und k dualisieren. Dem Prinzip der Dualität wurde erst Genüge getan durch die Entdeckung und Einführung der sog. „Liniensingularitäten". Den Doppelpunkten d entsprechen dualistisch die Doppeltangenten t, den Rückkehrpunkten r die oskulierenden; d. h. die Kurve durchdringenden Wendetangenten w, deren Berührungspunkte man als Wendepunkte bezeichnet. Für die Anzahl dieser Wendepunkte fand Plücker die Beziehung $w = 3n(n-2)$, die sich im Falle des Auftretens von Punktsingularitäten in

$$w = 3n(n-2) - 6d - 8r$$

verwandelt. Damit ist nun das Material gewonnen, aus dem durch Dualisieren das volle Formelnsystem der Singularitäten hervorgeht:

$$k = n(n-1) - 2d - 3r, \quad n = k(k-1) - 2t - 3w,$$

$$w = 3n(n-2) - 6d - 8r, \quad r = 3k(k-2) - 6t - 8w.$$

Im Falle $n = 3, d = 0, r = 0$ ergibt sich $w = 9$. Bis dahin waren nur drei Wendepunkte der allgemeinen Kurve dritter Ordnung C_3 bekannt gewesen, und Plücker beweist, daß sechs von den neun immer imaginär sein müssen. Es war nun schon im 18. Jahrhundert von Maclaurin bewiesen, daß die drei reellen Wendepunkte der C_3 auf einer Geraden, der „Wendelinie", liegen. Da die reellen Wendepunkte keine ausgezeichnete Eigenschaft vor den übrigen besitzen im Sinne der allgemeinen Lagengeometrie, muß dieser Satz auch für jedes andere Tripel von Wendepunkten gelten. Der Beweis läßt sich, ganz ähnlich wie oben der des Pascalschen Satzes, durch abgekürzte Bezeichnung führen. Die C_3 besitzt folglich zwölf Wendelinien, deren einfachstes Schema später von Hesse gegeben wurde. Dies Beispiel möge zeigen, welche Bereicherung die Geometrie der Kurven durch Plückers Entdeckung erfuhr.

[4] Poncelet hatte sich nicht erklären können, warum man nicht die Beziehung $k = n(n-1)$ in $n = k(k-1)$ dualisieren durfte („Ponceletsches Paradoxon").

S. VI des „Systems“ von 1834 äußert er sich selbst: „Es ist ein neuer Flug der Anschauung nötig, um das zu ergreifen, was in allen Fällen imaginär ist und imaginär bleibt.“

Daß die Trainierung der Anschauung nötig sei, um in dieser neuen Geometrie sicher zu gehen, zeigt Plückers Beispiel selbst, der sich bei der Anordnung der 28 Doppeltangenten der allgemeinen C_4 in Irrtümer verstrickte (Algebraische Kurven, 1839). Aus der Zahl der willkürlichen Konstanten der allgemeinen C_4 schließt er — auch eine spezifische Plückersche Schlußweise — mit Recht, daß ihre Gleichung sich in die Form $\Omega^2 - \mu pqrs = 0$ setzen läßt, wo $\Omega = 0$ einen Kegelschnitt, $p = 0, q = 0, r = 0, s = 0$ Geraden bedeuten, die dann Doppertangenten der C_4 sind. Aber irrtümlicherweise leitet er hieraus den Satz ab, daß die Berührungspunkte von je vier Doppeltangenten auf einem Kegelschnitt lägen, während die Behauptung nur für eine bestimmte Auswahl und Zusammenstellung von vier Tangenten richtig ist. Die p, q, r, s sind nämlich nicht alle vier frei wählbar, sondern nach Auswahl von zweien sind die beiden anderen auf fünffache Weise bestimmt. (Dieser Fehler wurde später von Steiner nachgewiesen.)

Nach einer Seite freilich lassen die Plückerschen Formeln trotz ihrer großen Leistungsfähigkeit noch Probleme offen; sie liefern nichts zur Trennung des Reellen und Imaginären. Wenn auch dem abstrakten Denken diese Fragen jahrzehntelang gleichgültig waren, so haben sie doch das größte Interesse für den, der die wahre geometrische Gestalt des Gebildes zu erforschen sucht, und es ist entschieden als ein Auswuchs der modernen Geometrie zu betrachten, wenn das Gewicht dieser Frage überhaupt geleugnet wird. Diese Probleme des Verhaltens geometrischer Gebilde nach Seite ihrer Realität liegen im allgemeinen sehr tief und fordern weit in die algebraische Natur der Gleichung eindringende Forschungen. Um so lieber nenne ich hier eine 1876 von mir gefundene Formel (Math. Ann. Bd. 10 = ges. Abh. Bd. 2, S. 78ff.), die allein mit den Plücker zu Gebote stehenden Mitteln auf elementarem Wege abzuleiten ist, und seine Formeln nach dieser Seite wenigstens zu einem gewissen Teil ergänzt. Bezeichnet w' die Zahl der reellen Wendepunkte, t'' die der reellen isolierten Doppeltangenten, r' und d'' entsprechend die der reellen Rückkehrpunkte und reellen isolierten Doppelpunkte, so ist

$$n + w' + 2t'' = k + r' + 2d''.$$

Durch diese Formel ist z. B. die Frage nach der Realität der Wendepunkte der C_3 erledigt. Aus

$$3 + w' + 0 = 6 + 0 + 0$$

ergibt sich $w' = 3$. Der Satz von der Realität der Wendepunkte der C_3 tritt also aus seiner isolierten Stellung heraus.

Daß Plücker diese Formel, die auf seinem Wege lag, nicht gekannt hat, ist um so bedauerlicher, als sie bei seinem großen Interesse an der wahren geometrischen Gestalt der Kurven ihm gewiß willkommen gewesen wäre. Plücker war bei all seinen Leistungen zum Ausbau der projektiven Geometrie kein Projektiviker im eigentlichen Sinne. Im Stile der alten Geometer des 18. Jahrhunderts haftete er am Konkreten, richtete sein Augenmerk auf das Verhalten der Kurve im Unendlichen, widmete z. B. ausführliche Untersuchungen der Frage nach den Asymptoten usw., alles Dinge, deren Bedeutung vom rein projektiven Standpunkt aus verschwindet. Die konsequente Durchbildung des projektiven Denkens und damit die Ausgestaltung der Invariantentheorie blieb einer späteren Generation vorbehalten.

Steiner

Ehe wir auf sie näher eingehen, haben wir uns nun mit dem Neubegründer der synthetischen Geometrie in Deutschland zu beschäftigen, mit Jacob Steiner.

Steiner, der Schweizer Bauernsohn, der bis zum 19. Jahr den Acker pflügte und sich dann, von seiner großen Sehnsucht nach dem Lehrerberuf getrieben, der Pestalozzischen Ausbildung widmete, ist, soviel ich weiß, das einzige Beispiel in unserer Wissenschaft für eine Heranbildung mathematischer Fähigkeiten erst im reifen Mannesalter, die trotzdem noch bis zur Meisterschaft führt; einzigartig dürfte er auch dastehen als ein führender Geist und bedeutender Universitätslehrer, der aus der methodischen Zucht des Volksschulbetriebes hervorgegangen ist.

Steiner wurde am 18. März 1796 in Utzendorf bei Solothurn geboren. Als Bauer aufgewachsen, trat er 1815 zunächst zur eigenen Weiterbildung, später als Lehrer in das pädagogische Institut ein, das Pestalozzi zu Iferten gegründet hatte, um seine reformatorischen Ideen auf dem Gebiet der Erziehungskunst in die Praxis umzusetzen. So schöpferisch und belebend auch Pestalozzis Ideen waren, wie ja ihre Nachwirkung nach vielen Seiten beweist, so fehlte es ihm offenbar selbst doch an Geschick, ihnen durch die Tat zum Durchbruch zu verhelfen. Sein Unternehmen in Iferten scheiterte, vor allem an finanziellen Schwierigkeiten. Steiner, den es mächtig nach wissenschaftlicher Weiterbildung verlangte, verließ ihn 1818, um bis 1821 in Heidelberg, kümmerlich durch Privatstunden seinen Unterhalt verdienend, sich vor allem durch eigene Studien der französischen Geometrie weiter zu entwickeln. Dennoch verhalf ihm seine frühere Lehrertätigkeit zuerst vorwärts. In Berliner ministerialen Kreisen war nämlich ein Interesse an der Pestalozzischen Methode lebendig, und so wurde Steiner nach Berlin gezogen, wo er zunächst verschiedene Lehrerstellungen inne hatte. Der Zutritt zum Hause Wilhelm von Humboldts, des früheren Ministers, dessen Sohn er unterrichtete, verhalf ihm zum Anstieg. 1834 wurde, als letzter Ausläufer der Bestrebungen nach Gründung einer polytechnischen Schule, ein Extraordinariat an der Berliner Universität für ihn errichtet; zugleich wurde er Mitglied der Akademie. Er starb am 1. April 1863.

Es mag auffallen, daß Steiner ein Ordinariat in Berlin versagt geblieben ist. Offenbar hielt man dafür, daß es ihm für eine solche Stellung an der gesellschaftlichen Befähigung mangele. Und in der Tat würde Steiner sich in die offiziellen Kreise auf eine seltsame Weise eingefügt haben, zumal in späteren Jahren, als der alternde Mann, mit Gott und der Welt zerfallen, seinen Argumenten im Gespräch häufig durch eine nicht leicht zu übertreffende, urwüchsige Grobheit Nachdruck zu verleihen pflegte. Über seine Persönlichkeit und seine Entwicklung finden sich viele interessante Notizen in der Schrift seines Neffen C. F. Geiser: Zur Erinnerung an Jacob Steiner (Verhandlungen der Schweizerischen naturforschenden Gesellschaft 1872–73, 56. Jahresversammlung. Schaffhausen 1873, S. 215ff.).

Nach allem, was Geiser über Steiners Entwicklung erzählt, und nach der Art, wie sich Steiners Gaben äußerten, müssen wir sein Talent, das von der anschauungsmäßigen Erfassung der Raumformen ausgeht, und eben darum die Analysis verschmäht, als ein durchaus ursprüngliches ansehen. Die Rückführung seiner Anschauungskraft auf Pestalozzischen Einfluß muß jedem als unhaltbar erscheinen, der einmal das in diesem Zusammenhang oft genannte Pestalozzische Buch „ABC der Anschauung“ in der Hand gehabt hat. Das Buch ist von einer inhaltlichen Armut, die einen wahrlich erschrecken und in dem Verfasser den Begründer der auf Anschauung gerichteten neuen Pädagogik nicht ahnen läßt. Einzig und allein die Zerlegung von Strecken in gleiche Teile, von Quadraten in gleiche Quadrate, wird in immer neuer ansteigender Anzahl bis zum Überdruß geübt. Welch sonderbare Vorstellungen diese ersten Pädagogen, die doch wirklich eine neue, äußerst fruchtbare Idee lebendig gemacht haben, von der Ausführung ihrer Pläne hatten, geht auch aus dem Kommentar hervor, den der große Philosoph und Pädagoge Herbart zu dem Pestalozzischen Werk verfaßte. Herbart entwirft für die Pflege der Anschauung eine Tafel mit lauter rechtwinkligen Dreiecken verschiedener Gestalt und Größe, durch deren ständigen Anblick er eine lebhafte Vorstellung der rechtwinkligen Dreiecksgestalt in seinen Zöglingen erwecken wollte; ja, zur dauernden, unvergeßlichen Einprägung empfiehlt er, diese Tafel bereits neben der Wiege des

Säuglings aufzuhängen! Um den richtigen Kern aus diesen pädagogischen Monstrositäten herauszuschälen und die Erziehungskunst in vernünftigere Bahnen zu lenken, bedurfte es erst eines FRÖBEL. Er, und mit ihm HARNISCH, stellte die körperliche Gestalt, also das Dreidimensionale, bei der Erziehung des Kindes voran. Bei beiden Pädagogen macht sich der eigene Bildungsgang, nämlich das Ausgehen von Mineralogie und Kristallographie, geltend.

Seine anschauliche Kraft hat also Steiner gewiß nicht aus dieser Quelle geschöpft; aber etwas anderes verdankte er für sein Leben der eigenartigen Ausbildung: die Kunst des Unterrichtens. Die Pestalozzische Richtung pflegte das liebevolle, sorgfältige Eingehen auf den Standpunkt des Lernenden, zu dessen Förderung sie die sog. Sokratische Methode anwandte. Alle Erkenntnis soll von dem Schüler selbst erarbeitet, entdeckt, produziert werden; nur eine Anleitung für die einzuschlagende Richtung soll der Lehrer dem selbstdenkenden Schüler geben. Steiner verwendete aus diesem Prinzip, das er mit großem Geschick und Erfolg ausbaute, in seinen Vorlesungen keine Figuren; das lebendige Mitdenken des Hörers sollte ein so deutliches Bild in seiner Vorstellung erzeugen, daß er das sinnlich Angeschaute entbehren könnte. (Noch weiter geht später, beim Unterricht seiner Seminarkandidaten in Mörs, Diesterweg, indem er beim Geometrieunterricht die Stube auch noch ausdrücklich verfinsterte!)

Steiners Arbeiten sind als gesammelte Werke in zwei Bänden von der Berliner Akademie herausgegeben (1880/82). Sie zerfallen in zwei recht scharf getrennte Gruppen.

Die erste umfaßt die Periode von 1826 (Crelle, Bd. 1) bis etwa 1845. Sie enthält die eigentlich originalen Konzeptionen Steiners, freilich an relativ elementaren Gebilden durchgeführt.

Die zweite Periode enthält Arbeiten über höhere algebraische Gebiete, oft nur Ankündigungen von Resultaten ohne Beweis. Leider geht aus dem von Graf 1896 herausgegebenen Briefwechsel Steiners mit SCHLÄFLI aus den Jahren 1848 bis 1856 mit Deutlichkeit hervor, daß Steiner sich hier in ausgiebiger Weise englischer (und anderer) Quellen bedient hat, die er nicht zu kennen vorgab. Es ist die Tragik dieses an sich gewiß ungewöhnlichen Mannes, daß er nach einem selten ruhmvollen Aufstieg, von seiner Umgebung mit Verehrung und Bewunderung überschüttet, das Schicksal der im Alter versiegenden Produktivität nicht ertrug und, verbittert, wie er war, sich mit verzweifelten Mitteln dagegen wehrte, indem er vor sich selbst und anderen den Glanz früherer Tage zu erhalten suchte. Wieweit hier wirkliche Täuschung vorliegt, wieweit Steiner selbst das Opfer einer durch lebhaften Wunsch getrübten Beurteilung der eigenen Erfindungskraft war, wer will das entscheiden?

Jedenfalls beschränken wir uns hier im Zusammenhang mit den Betrachtungen, die uns z. Zt. beschäftigen, auf die früheren Steinerschen Arbeiten. Das Hauptwerk ist die *„Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander"*, von dem aber statt der geplanten fünf Teile nur der erste Teil, Berlin 1832, erschienen ist.

Projektive Erzeugung

Der Plan eines rein synthetischen Aufbaues der Geometrie ruht auf der Grundidee der *projektiven Erzeugung*. Ausgehend von der Projektivität der „Grundgebilde“ — in der Ebene: Gerade, Strahlbüschel, die Ebene selbst; im Raume: Gerade, ebenes Strahlbüschel, Ebenenbüschel, Strahlbündel und Ebenenbündel, der Raum selbst — soll das Lehrgebäude der Geometrie durch sukzessive Erzeugung höherer Gebilde aufgeführt werden. Die Grundgebilde werden projektiv aufeinander bezogen und die Erzeugnisse dieser Beziehungen als die nächstwichtigen höheren Gebilde untersucht.

Ausgeführt ist diese Untersuchung im vorliegenden Teil I nur für Kegelschnitte und einschalige Hyperboloide, die als Durchschnitt der entsprechenden Ebenen zweier projektiver

Ebenenbüschel erzeugt werden. Etwas weiter führen die von Schröter 1867 herausgegebenen Vorlesungen.

Das Neue und Wichtige an diesen Ausführungen liegt nach Seite der Systematik; stofflich ist in ihnen nicht wesentlich Neues enthalten. Die Strenge der Durchführung des einmal gefaßten Planes aber, die sich mit einer glänzenden Diktion verbindet, zwingt durch ihre Einseitigkeit und Originalität den Leser in ihren Bann. Es kommt bei Steiner neben dem Interesse der Forschung immer auch der Sinn für Darstellung und Unterricht zur Geltung. Welchen Wert er selbst seinen Untersuchungen beilegte, geht aus der Vorrede hervor:

„Gegenwärtige Schrift hat versucht, den Organismus aufzudecken, durch welchen die verschiedenartigen Erscheinungen in der Raumwelt mit einander verbunden sind ... Es tritt Ordnung in das Chaos ein, und man sieht, wie alle Teile naturgemäß ineinandergreifen, und verwandte zu wohlbegrenzten Gruppen sich vereinigen.“

Die Mittel, mit denen Steiner dieses Ziel erreichen wollte, sind heute bekannt genug, aber wir wissen auch, daß sie nur einen Ausschnitt der Geometrie beherrschen, und daß andererseits Steiner selbst sie nicht bis zur vollkommenen Durchführung brachte.

Das „Steinersche Prinzip“ der sukzessiven Erzeugung höherer Gebilde aus niederen entspricht analytisch der Nullsetzung von Determinanten gewisser Matrices. So wird etwa die projektive Erzeugung der Regelfläche zweiten Grades gewonnen durch Nullsetzung der aus den Ebenengleichungen gebildeten Determinante in zweifacher Anordnung:

$$\begin{vmatrix} p & q \\ p' & q' \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ergibt} \quad \begin{array}{rcl} p - \mu q & = & 0 \\ p' - \mu q' & = & 0 \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{rcl} p - \lambda p' & = & 0 \\ q - \lambda q' & = & 0 \end{array}$$

als die zwei Scharen von Erzeugenden. Ähnlich führt nun die Weiterbildung des Steinerschen Prinzips, wie sie von Reye, von Schur und Sturm vollzogen ist, auf die systematische Kombination von Determinanten aus einer Matrix,

$$\begin{vmatrix} \phi & \psi & \chi & . & . & . \\ \phi' & \psi' & \chi' & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \end{vmatrix}$$

durch deren Nullsetzung immer neue geometrische Theoreme entstehen. So übersichtlich dies Prinzip scheint, so trägt es doch nicht weit genug, um einem Aufbau der gesamten Geometrie als Grundlage zu dienen. Es erschöpft sich bereits bei den Problemen dritten Grades.

Steiner bleibt jedoch auch innerhalb des von ihm ausgeführten Gebietes hinter seinem Ziel zurück, indem er, Moebius' Fortschritt rückgängig machend, das Prinzip der Vorzeichen nicht in die synthetische Geometrie aufnimmt und sich dadurch einer Möglichkeit allgemeiner Formulierungen beraubt. So ist er gezwungen, bei dem Doppelverhältnis immer noch besonders die Reihenfolge der Elemente zu nennen; vor allem aber fehlte ihm die Handhabe, das Imaginäre zu bewältigen. Er hat sich nie damit auseinandergesetzt und es bei Bezeichnungen, wie „,das Gespenst“ oder „das Schattenreich der Geometrie“ bewenden lassen. Daß durch diese Selbstbeschränkung auch die Vollständigkeit seiner Systematik Mangel leidet, liegt auf der Hand[5]. So gibt es, projektiv gesehen, zwei Kegelschnitte, $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ und $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$; für die Einordnung des zweiten Falles ist in dem Steinerschen System kein Raum. Von diesen und anderen Unvollkommenheiten ist die synthetische Geometrie erst durch von Staudt befreit worden, wie wir noch ausführlich besprechen werden.

Neben Teil I der systematischen Entwicklungen stellt sich noch als selbständig erschienenes kleines Buch 1833: *„Die geometrischen Konstruktionen ausgeführt mittels*

[5]Weitere Unvollkommenheiten haften den Grunddefinitionen von Steiner an, so daß noch viel mehr Sätze Ausnahmen erleiden als ihm bewußt war. VgL darüber eine Arbeit von R. Baldus: Zur Steinerschen Definition der Projektivität, Math. Ann. Bd. 90 (1922/23), S. 86ff.

der geraden Linie und Eines festen Kreises (als Lehrgegenstand auf höheren Schulen und zur praktischen Benutzung)". Der Grundgedanke ist von Poncelet entlehnt, die Ausführung wieder besonders anregend. Der Untertitel verrät, daß Steiner sich damals (wie anderweitig bekannt) für die Leitung des geplanten polytechnischen Instituts empfehlen wollte. Es ist auch charakteristisch, daß Steiner sich nach 1835, wo er die ersehnte Anstellung an der Universität erreicht hatte, nicht mehr zur Fertigstellung der doch geplanten zusammenfassenden Darstellungen entschließen konnte.

Isoperimetrisches Problem

Von den verschiedenen Einzelabhandlungen der frühen Steinerschen Periode erwähne ich eine kleine Schrift, die durch ihren nach völlig anderer Seite liegenden Inhalt zeigt, wie umfassend Steiner trotz seiner Einseitigkeit im rein Geometrischen war, und die sich durch ihre hervorragend klare und glänzende Darstellungsweise auszeichnet: *Sur le maximum et le minimum des figures dans le plan, et sur la sphère dans l'espace en général* (Crelle, Bd. 34. 1842). Sie enthält eine Behandlung zahlreicher Probleme der Maxima und Minima mit elementargeometrischen Methoden. Bekannt ist z. B. die Aufgabe, einem Dreieck eine Figur von vorgeschriebenem Umfang (größer als der des einbeschriebenen Kreises) einzubeschreiben, so daß ihr Inhalt ein Maximum wird. Sie setzt sich aus drei Kreisbogen von gleichem Radius und Stücken der Dreiecksseiten zusammen. Besonders berühmt aber ist der darin enthaltene Beweis, daß beim Wegfall aller Nebenbedingungen der Kreis die ebene Figur sei, die bei kleinstem Umfang den größten Inhalt besitzt. Die mit elementaren Mitteln glänzend durchgeführten Untersuchungen über diese und andere Fälle der „isoperimetrischen" Aufgabe enthalten freilich eine logische Lücke, die erst eine spätere Zeit zu empfinden imstande war: den Existenzbeweis für die Auflösung der Aufgabe. Diese Lücke wurde von Weierstraß, bei den speziellen Beispielen von H. A. Schwarz ausgefüllt.

Fassen wir das über Steiner Gesagte zusammen, so müssen wir zu dem Schluß kommen, daß auch er noch nicht der einseitige und in sich systematische Projektiviker ist, auf den die Entwicklung dieser Jahre hinzielt. Wie in seinem Hauptwerk das Doppelverhältnis, ebenso wie bei Poncelet und Moebius, auf metrische Weise definiert wird, so bleibt auch in dem ganzen Gebäude die Beziehung der metrischen Geometrie zur projektiven unaufgeklärt.

Wie die Folgezeit dieses Problem löste, das wird uns die Betrachtung der Entwicklung nach 1830 lehren, der das folgende Kapitel gewidmet ist.

Kapitel 4

Die Entwicklung der algebraischen Geometrie über Moebius, Plücker und Steiner hinaus.

Seite 131–132

Einleitung

Unter „algebraischer Geometrie“ verstehe ich hier, wie es allmählich in dieser Zeit üblich geworden war, die Theorie der niedrigsten algebraischen Gebilde (zunächst die der Gebilde vom ersten und zweiten Grade), im Gegensatz zur Infinitesimalgeometrie. Es wird sich also um die von Monge und Poncelet begründete, von Moebius, Plücker und Steiner ausgebildete Disziplin und ihr Wachstum während der folgenden Zeit handeln. Dabei verzichte ich auf die übliche Trennung der Geometrie in analytische und synthetische, die, wie wir gesehen haben, eine unwesentliche Seite des methodischen Verfahrens zum wichtigsten Unterscheidungsmerkmal macht, und möchte vielmehr das Interesse auf die Frage lenken: Welche Förderung wurde bei Fortentwicklung dieser Disziplin einerseits den geometrischen, andererseits den algebraischen Grundgedanken zuteil, die in ihr enthalten sind? Es wird uns also, ohne damit eine erschöpfende Disposition geben zu wollen, beschäftigen:

1. Die Herausarbeitung einer rein *projektiven Geometrie*, die sich, auf die von Poncelet stammende projektive Denkweise gegründet, nachdem Steiner durch Einführung seiner Grundgebilde den Anfang einer Systematik gemacht hatte, zu einem völlig in sich geschlossenen, streng systematischen Bau entwickelt.

2. Die Ausbildung einer parallellaufenden algebraischen Disziplin: der *Invariantentheorie*, d. h. der Lehre von den Eigenschaften der homogenen, algebraischen Formen ersten, zweiten und höheren Grades, welche bei beliebiger linearer Substitution der Variabeln unverändert bleiben.

Die Herausarbeitung einer rein projektiven Geometrie.

Seite 155–161

Die parallellaufende Entwicklung der Algebra; die Invariantentheorie.

Anfänge und Hauptlinien der Entwicklung

In dem von uns verfolgten Zusammenhang stellt sich das Thema der Invariantentheorie dar in der Frage: wie finden die projektiven Eigenschaften der Figuren — die sich bei beliebiger Kollineation nicht ändern — ihr Gegenbild in der algebraischen Rechnung? Es handelt sich also nicht mehr, wie bei Plücker, um eine Vermeidung der Rechnung, sondern um ihre Durchführung in einer systematisierten Form, welche die Unabhängigkeit von beliebiger linearer Substitution der Variablen von vornherein hervortreten läßt. Wer aber den historischen Werdegang und schließlich auch die Bedeutung der Invariantentheorie allseitig erfassen will, muß sich auf einen weiterblickenden Standpunkt stellen. In ihrer präzisen, noch erst darzulegenden Gestalt ist die Invariantentheorie zunächst aus der Zahlentheorie entstanden. Von hier aus müssen wir in sie einzudringen suchen.

Um nicht noch weiter zurückzugehen, knüpfe ich an Gauß' Disquisitiones Arithmeticae an. Wie wir in Kap. 1 bereits gesehen haben, ist dort einer der Hauptgegenstände der Zahlentheorie das Studium der binären quadratischen Formen

$$f = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

und die Frage, wie sich f umsetzt, wenn x, y linear substituiert wird

$$x = \alpha x' + \beta y', \quad y = \gamma x' + \delta y', \quad \text{wo} \quad \alpha\delta - \beta\gamma = r,$$

Es entstehe

$$f' = a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2.$$

Die Frage nach den Größen, die sich bei dieser Umsetzung nicht oder in übersichtlicher Weise ändern, führt in erster Linie auf die Diskriminante — „Determinant“, wie Gauß sagte —:

$$D' = b'^2 - a'c' = r^2 \cdot D.$$

In der Zahlentheorie knüpft sich, wie wir gesehen haben, hieran das besondere Interesse, $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganzzahlig, $r = 1$ zu wählen und das Äquivalenzproblem zweier Formen zu studieren, für welche $D' = D$ eine notwendige, keineswegs hinreichende Bedingung ist.

Die Invariantentheorie, wie wir sie hier meinen, kehrt sich hingegen von der Zahlentheorie ab und stellt sich ein rein algebraisches Problem: wenn irgendwelche Formen

$$f = a_1x^n + b_1x^{n-1} + c_1x^{n-2} + \cdots + p_1,$$
$$g = a_2x^n + b_2x^{n-1} + c_2x^{n-2} + \cdots + p_2$$

gegeben sind, so sollen solche in $a_1, b_1, \ldots, p_1$ eventuell $a_2, b_2, \ldots, p_2$ homogene Polynome aufgestellt werden, die sich bei linearer Substitution der Variabeln bis auf eine Potenz der Substitutionsdeterminante reproduzieren. Um ein Beispiel zu nennen: Gegeben seien die Formen

$$a_1x_1 + b_1x_2, \quad a_2x_1 + b_2x_2.$$

Dann ist die Determinante $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ eine sog. simultane Invariante der beiden Formen. Der Quotient

$$\frac{|ab| \ |cd|}{|ad| \ |cb|}$$

wäre eine simultane Invariante von vier derartigen Formen, und zwar eine absolute Invariante, da sie sich bei der verlangten Substitution gar nicht ändert (das Doppelverhältnis von vier Punkten).

Es fragt sich nun, wie weit die Geometrie für diese Einengung des Anwendungsbereiches der Invariantentheorie, für ihre Abtrennung von der Zahlentheorie verantwortlich gemacht werden kann. An sich brauchte sie eine solche Entwicklung nicht herbeizuführen; denn wir sahen ja schon, wie man z. B. die Gaußsche Theorie der binären quadratischen Formen durch geometrische Betrachtungen von Gittern, weiterhin durch die Modulfigur, sehr schön stützen und erläutern kann. Die Zahlentheorie ist also gewiß nicht ungeometrisch. Insoweit sich aber die Geometrie auf Kurven, Flächen usw. im kontinuierlichen Raume beschränkte, mußte sie auch eine Einengung der Invariantentheorie herbeiführen.

Historischer Verlauf

Der historische Verlauf ist nun der, daß nur wenige Forscher imstande waren, die sehr umfassende Disziplin auch nach allen Seiten gleichmäßig zu verfolgen. Jacobi, der sich noch ganz im Gaußschen Geiste hält, gehört zu diesen, und nach ihm Eisenstein und Hermite. Dann aber tritt eine Spezialisierung ein; die folgenden Forscher sind durch die formal-algebraischen Probleme und ihre Benutzung in der Geometrie völlig hingenommen und kehren sich von der Zahlentheorie ab, dem Geist der Zeit folgend, der auf Spezialisierung drängt.

Weiter macht sich als neuer Zug im nun einsetzenden wissenschaftlichen Leben die durch die gebesserten Verkehrsmittel immer lebhaftere internationale Bezugnahme geltend, die sich zu fortwährender eifriger Zusammenarbeit steigert. Im Zeichen dieses Wissenschaftsbetriebes erfolgt 1868 die Gründung der ***Mathematischen Annalen***, die nun das Hauptorgan für die in dieser Richtung liegenden Arbeiten werden.

Von den Forschern, die hier hervortreten, möchte ich nennen:

a) Hesse, Aronhold, als hervorragende Vertreter der Königsberger Schule; etwas später
   Clebsch, Gordan usw.;

b) das englische Kleeblatt: Cayley, Sylvester, Salmon;

c) schließlich die Italiener: Brioschi (Lehrbuch der Determinanten) und die Geometer Cremona und Beltrami.

Die Entwicklung, welche die Theorie in den Händen dieser Forscher genommen hat, kann ich natürlich wieder nur an einzelnen Stichproben darlegen. Um so lieber verweise ich auf die von M. Nöther verfaßten Biographien, welche in den Annalen diesen Männern gewidmet sind.

Bd. 7 (1874) Clebsch (von einigen seiner Freunde),
Bd. 46 Cayley,
Bd. 50 Sylvester, Brioschi,
Bd. 55 Hermite,
Bd. 61 Salmon,
Bd. 53 Lie,
Bd. 59 Cremona,
Bd. 74 Gordan,

welch letztere freilich bereits weit über die hier behandelte Zeit hinausgreift. Diese Nötherschen Biographien bilden ein vortreffliches Hilfsmittel zum Studium der ganzen Epoche und dieser eigenartigen ausgedehnten Welt interessanter Beziehungen, die sie pflegt wie die schönen Blumen eines Gartens, nicht äußeren Nutzens wegen, sondern um ihrer selbst willen.

Jacobi

Die unmittelbare Vorstufe zu der modernen Invariantentheorie bildet die Lehre von den ***Determinanten***. Dieses ursprünglich von Leibniz ersonnene, im 18. Jahrhundert von Vandermonde, im 19. von Cauchy vervollkommnete mathematische Instrument, wurde von Jacobi zu voller Ausbildung gebracht und in alle Zweige der Wissenschaft, vor allem auch in den Unterricht überall eingeführt. Seine beiden hierhergehörigen Abhandlungen aus Crelle Bd. 22, 1841 sind:

De formatione et proprietatibus determinantium, Werke Bd. 3, S. 355–392.
De determinantibus functionalibus, Werke Bd. III, S. 393–438[1].

[1] Deutsch von P. Staeckel in Ostwalds Klassikern (Nr. 77 u. 78).

Heute gehören die Determinanten — die Jacobi durch $\sum \pm a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$ bezeichnet, wir heute kürzer durch $|a_{ik}|$ —, ihre einfachen Umformungen und die dabei auftretenden Rechenregein, in die man sich hineinarbeiten muß, um sie mit Vorteil zu gebrauchen, zu dem selbstverständlichen Besitztum jedes mathematisch Gebildeten. Ich brauche darum auf diese Dinge nicht näher einzugehen, und deute hier nur noch einmal das Auftreten der Determinanten bei der Lösung linearer Gleichungen an, wie ich es oben im Falle zweier Gleichungen mit zwei Unbekannten ausführte. Die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = |a_{ik}|$$

ist eine simultane Invariante der n Linearformen

$$\sum_{i=1}^{n} a_{1i}x_i,\ \sum_{i=1}^{n} a_{2i}x_i,\ \sum_{i=1}^{n} a_{3i}x_i,\ \dots, \sum_{i=1}^{n} a_{ni}x_i.$$

Das soll heißen: Setzt man hierin $x_k = \sum_{l=1}^{n} \alpha_{kl}y_l$, und verwandeln sich dadurch die n Linearformen in

$$\sum_{i=1}^{n} a'_{1i}y_i,\ \sum_{i=1}^{n} a'_{2i}y_i,\ \sum_{i=1}^{n} a'_{3i}y_i,\ \dots, \sum_{i=1}^{n} a'_{ni}y_i,$$

so ist die neue Determinante $D' = |a'_{ik}|$ mit der alten $D = |a_{ik}|$ durch die Gleichung verbunden: $D' = r \cdot D$, wo $r = |\alpha_{ij}|$ die Substitutionsdeterminante bedeutet, eine Beziehung, die sich aus dem fundamentalen Theorem der Determinantenlehre, dem Multiplikationssatz ohne weiteres ergibt.

Als Verallgemeinerung dieser Ansätze wird nun die sog. ***Funktionaldeterminante*** gewonnen. Hier handelt es sich nicht mehr um Linearformen und die Zusammenstellung ihrer Koeffizienten; vielmehr werden ganz beliebige Funktionen von $x_1, x_2, \dots, x_n$ — wie man früher zu sagen pflegte! Heute müßte ich wohl sagen: irgendwelche differenzierbare Funktionen — $f, g, h, \dots$ in Betracht gezogen und aus ihren partiellen Differentialquotienten $f_i = \frac{\partial f}{\partial x_1}$ wird die Determinante

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & \cdots & f_n \\ g_1 & g_2 & g_3 & \cdots & g_n \\ h_1 & h_2 & h_3 & \dots & h_n \\ . & . & . & \dots & . \\ . & . & . & \dots & . \end{vmatrix}$$

aufgebaut. Dies Gebilde ist dann in höherem Sinne invariant, nämlich gegenüber beliebigen Transformationen der Variabeln x_i — immer mit der, Jacobi noch unbewußten, Einschränkung, daß die Differentialquotienten der neuen Variabeln nach den alten, und umgekehrt, existieren —. Die Beziehungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y_1} &= f_1\frac{\partial x_1}{\partial y_1} + f_2\frac{\partial x_2}{\partial y_1} + f_3\frac{\partial x_3}{\partial y_1} + \cdots + f_n\frac{\partial x_n}{\partial y_1} \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{\partial f}{\partial y_n} &= f_1\frac{\partial x_1}{\partial y_n} + f_2\frac{\partial x_2}{\partial y_n} + f_3\frac{\partial x_3}{\partial y_n} + \cdots + f_n\frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial y_1} &= g_1\frac{\partial x_1}{\partial y_1} + g_2\frac{\partial x_2}{\partial y_1} + g_3\frac{\partial x_3}{\partial y_1} + \cdots + g_n\frac{\partial x_n}{\partial y_1} \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

$$\frac{\partial h}{\partial y_1} = h_1 \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + h_2 \frac{\partial x_2}{\partial y_1} + h_3 \frac{\partial x_3}{\partial y_1} + \cdots + h_n \frac{\partial x_n}{\partial y_1}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

und der Determinantenmultiplikationssatz liefern hier die erforderlichen Beweismittel. Wir gewinnen hier den Ausblick auf eine allgemeinere Invariantentheorie, welche die Gruppe **beliebiger** Substitutionen der Veränderlichen zugrunde legt. In sie gehört als ein anderes — wesentlich komplizierteres — Beispiel die Invarianz des Krümmungsmaßes hinein, die wir oben erwähnten.

Seite 159–161

Hesse

Diese Ansätze Jacobis hat nun Hesse insbesondere nach der analytisch geometrischen Seite ausgebaut. Wie schon früher bemerkt, wird nun der Zusammenhang mit der Zahlentheorie ganz aufgegeben.

Hesse wurde 1811 in Königsberg geboren. — Bei dieser Gelegenheit möchte ich nicht versäumen, auf eine merkwürdige Tatsache aufmerksam zu machen, das ist die außerordentlich große Zahl berühmter Mathematiker, die aus Königsberg stammen, wie denn überhaupt die ostpreußische Rasse mit besonderer Begabung in der Richtung unserer Wissenschaft gesegnet zu sein scheint. Rechnet man den Philosophen und Mathematiker Kant mit zu den Unsrigen, so ergibt sich folgende denkwürdige Liste: Kant 1724, Richelot 1808, Hesse 1811, Kirchhoff 1824, Carl Neumann 1832, Clebsch 1833, Hilbert 1862. —

Hesses Talent fand eine langsame Entwicklung an verschiedenen Schulen. 1840–55 war er Dozent in Königsberg, 1855–56 in Halle, 1856–68 in Heidelberg, schließlich 1868–74 in München an der technischen Hochschule. Die Königsberger Zeit bedeutet seine eigentliche Schaffensperiode. In Heidelberg schrieb er das weitverbreitete Lehrbuch: *Vorlesungen über analytische Geometrie*, durch welches der Sinn für elegante Rechnung mit symmetrischen Formeln in weite Kreise getragen wurde. Im übrigen war Heidelberg für Hesses Entwicklung nicht günstig. Er erlag dem Reiz der Neckarstadt, die zwar ein Platz geistiger Anregung, sehr viel weniger aber der angestrengten Arbeit ist. In dem durch den Dichter Viktor Scheffel bekannten Kreise verlebte Hesse wohl manche vergnügte Stunde — ist er doch in dem Gedicht „beide auf Nr. 8“ in „Gaudeamus“ verewigt worden —, aber seine mathematische Produktivität ging darüber in die Brüche. So fand Hesses Leben einen gewissermaßen tragischen Abschluß; in München wandte er sich wieder der schaffenden Tätigkeit zu, aber nur mit geteiltem Erfolg. Die Sicherheit, Richtiges und Falsches zu scheiden, war ihm abhanden gekommen.

Von Hesses Errungenschaften will ich hier nur diejenige nennen, durch die sein Name dauernd weiterlebt, das ist die sog. *Hessesche Determinante*, gebildet aus den zweiten Differentialquotienten einer homogenen Funktion f :

$$H = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & \cdots & f_{2n} \\ . & . & . & \cdots & . \\ . & . & . & \cdots & . \\ f_{n1} & f_{n2} & f_{n3} & \cdots & f_{nn} \end{vmatrix},$$

die in der Geometrie eine vielfache Anwendung gefunden hat. Bei linearer Transformation wird $H' = r^2 H$, wie sich ergibt, wenn man H einmal nach Horizontalreihen, einmal nach Vertikalreihen mit der Substitutionsdeterrninante r multipliziert. H ist also eine Invariante, oder — da es selbst die Variable noch enthält, sowie f von höherem als dem zweiten Grade ist — eine Kovariante von f.

Welchen Wert diese Kovariante bei geometrischen Betrachtungen besitzt und welcher Fortschritt für die Behandlung solcher Probleme über Plücker hinaus durch sie erreicht ist, das möchte ich an einem ganz einfachen Beispiel darlegen.

Beispiel: Wendepunkte einer ebenen Kurve $n-$ter Ordnung
Es handelt sich um die Bestimmung der *Wendepunkte einer ebenen Kurve n-ter Ordnung* mit der Gleichung $f(x, y) = 0$. Plücker hatte die Bedingung $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ in der in allen Lehrbüchern der Differentialrechnung auseinandergesetzten Weise in partielle Differentialquotienten von f umgesetzt. Er erhielt als Bedingung, in Jacobischer Schreibweise, das Nullsetzen der „geränderten“ Determinante

$$\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_x \\ f_{yx} & f_{yy} & f_y \\ f_x & f_y & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Dieser Ausdruck stellt eine Kurve $(3n - 4)$-ter Ordnung dar. Es könnte also scheinen, als ob die Kurve C_n gerade $n(3w - 4)$ Wendepunkte hätte. Plücker stellt nun die Überlegung an, daß die durch die Determinante gegebene Kurve mit jedem der n unendlichen Äste der vorgelegten C_n im Unendlichen eine Berührung habe, so daß also $2n$ Schnittpunkte, die keine Wendepunkte sind, abgezogen werden müssen; auf diese Weise erhält er die richtige Anzahl der Wendepunkte, nämlich $3n(n - 2)$.

Hier greift nun Hesse ein und zeigt, wie durch konsequenten Gebrauch homogener Variabler der Sachverhalt viel klarer herausgebracht werden kann.

Er setzt $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_3}$ und wandelt die von Plücker angewendete Determinante, die nun heißt:

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_1 \\ f_{2l} & f_{22} & f_2 \\ f_1 & f_2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

um, durch Anwendung des Eulerschen Theorems über homogene Funktionen:

$$f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 = n \cdot f,$$

$$f_{11}x_1 + f_{12}x_2 + f_{13}x_3 = (n - 1)f_1 \quad \text{usw.}$$

Die mit $(n - 1)$ multiplizierte Plückersche Gleichung wird nun :

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{11}x_1 + f_{12}x_2 + f_{13}x_3 \\ f_{21} & f_{22} & f_{21}x_1 + f_{22}x_2 + f_{23}x_3 \\ f_1 & f_2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Nun kann man die beiden ersten Vertikalreihen, mit x_1 resp. x_2 multipliziert, von der dritten subtrahieren. Dann hebt sich der Faktor x_3 heraus, und man erhält:

$$x_3 \cdot \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = 0.$$

In derselben Weise kann man jetzt mit der letzten Horizontalreihe verfahren. Nach Unterdrückung des Zahlenfaktors $\frac{1}{n-1}$ ergibt sich

$$x_3^2 \cdot \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} = x_3^2 \cdot H = 0.$$

Der Faktor $x_3^2 = 0$ bezieht sich nun auf die beim Plückerschen Ansatz künstlich durch Überlegung ausgeschiedenen, der vorliegenden Frage fremden Schnittpunkte, die Gleichung $H = 0$, die von $3(n-2)$-tem Grade ist, bestimmt hingegen die gesuchten Wendepunkte als vollständigen Schnitt mit der vorgelegten C_n.

Wir sehen aus diesem Beispiel den Fortschritt der Methode und begreifen nun, daß Hesse es sich als eine Art Ideal aufstellte, durch homogenen symmetrischen Ansatz von vornherein alle Rechnungen so anzulegen und zu einem solchen Ende zu führen, daß der algebraische Prozeß das reine Gegenspiel der geometrischen Überlegungen würde. Seine besondere Aufmerksamkeit wendete er der Theorie der ebenen C_3 und C_4 zu, worauf wir noch zurückkommen werden.

Kapitel 5

Mechanik und mathematische Physik in Deutschland und England bis etwa 1880.

Mechanik.

Mathematische Physik.

Seite 215–230

Allgemeines

Die Erörterungen über die analytische Mechanik in England und Deutschland haben uns bereits hinübergeleitet zum zweiten Teil des vorliegenden Kapitels, welcher die Entwicklung der mathematischen Physik in Deutschland und England von 1830 bis etwa 1880 umfassen soll.

Unter „mathematischer Physik" möchte ich hier möglichst das ganze Gebiet der mit Differentialgleichungen arbeitenden „phänomenologischen" Physik verstehen, wie sie durch Franz Neumann usw. und die Engländer entwickelt worden ist und in den Maxwellschen Gleichungen gipfelt, d. h. derjenigen Physik, die mit der Idee kontinuierlicher Medien arbeitet — im Gegensatz zu der neuerdings wieder in den Vordergrund getretenen atomistischen Physik. Sowohl über diese sachliche wie über die nationale Begrenzung des Themas werde ich aber hinausgreifen, wo der historische Zusammenhang es verlangt. Unter den übrigen Gebieten der Anwendung beansprucht die mathematische Physik insofern unser besonderes Interesse, als sie am meisten in lebhafter Wechselbeziehung zur reinen Mathematik geblieben ist.

Wir hatten schon die Entwicklung in Frankreich besprochen (bis etwa 1830), die allmählich aus der atomistischen Auffassung von Laplace (punktförmige Kraftzentren) zur phänomenologischen führte, wie Fourier und Cauchy sie vertraten (vgl. S. 69, 73). Das Ziel ist die Schilderung der Vorgänge durch Differentialgleichungen, die sich auf die als kontinuierlich vorausgesetzte Materie beziehen. Dann hatten wir die Weiterbildung in Deutschland betrachtet durch Gauss und Weber, welch ersterer mehr den Phänomenologen, letzterer — seines elektrischen Grundgesetzes wegen — mehr den Atomisten zuzuzählen ist (vgl. S. 23). Schließlich hatten wir die rein mathematische, ganz auf phänomenologischer Basis ruhende Betrachtungsweise verfolgt, die sich an Dirichlets Namen knüpft, und die wesentlich auf Klarstellung der mathematischen Schwierigkeiten und ihre Überwindung im einzelnen Fall gerichtet war (vgl. S. 98ff.).

Als Fortsetzer der hiermit gegebenen Anfänge hätten wir jetzt vor allen Dingen Riemann (1826–66) zu betrachten. Die hervorragenden Leistungen dieses außerordentlichen

Geistes auf allen Gebieten der Mathematik wollen wir jedoch erst später (Kap. 6) im Zusammenhang einer eingehenden Würdigung unterziehen. Hier wollen wir zunächst die Entwicklung ins Auge fassen, die mit der naturwissenschaftlichen Beobachtung in näherem Zusammenhang steht und die in erster Linie vertreten ist durch Franz Neumann und die Königsberger Schule.

Franz Neumann und die Königsberger Schule

Franz Neumann wurde 1798 auf einer Oberförsterei in der Uckermark geboren; er starb 1895, also im Alter von 97 Jahren. Schon in dieser Langlebigkeit erscheint er als der echte Vertreter der zähen preußischen Art, die er durch unentwegte Pflichterfüllung in seinem ganzen Leben betätigte und der er wohl in erster Linie seine große Wirkung und seine außerordentlichen Erfolge verdankt.

Einen lebhaften Eindruck der persönlichen Art Neumanns geben die Erinnerungsblätter, die ihm seine Tochter Luise Neumann 1904 gewidmet hat; seine wissenschaftliche Leistung findet in den Monographien von Volkmann (1896) und von Wangerin (1907) Würdigung.

Als Gymnasiast mit 17 Jahren trat Neumann in das Blüchersche Heer 1815 ein, voll Begeisterung für die Sache der Freiheitskriege. Am 16. Juni wurde er bei Ligny durch einen Kieferschuß schwer verwundet. Trotz der mangelhaften Wundpflege der damaligen Zeit und großen persönlichen Mißgeschicks setzte sich seine zähe Natur durch. Er wurde geheilt und kehrte auf das Berliner Gymnasium zurück, das er 1817 im Herbst erfolgreich absolvierte.

Neumanns Kristallographie, Optik und Elektrodynamik

Seine Studien in Jena und Berlin führten ihn zunächst zur Mineralogie, die in den 20er Jahren durch die Entwicklung der Kristallographie — die sich schließlich zu einer rein geometrischen Disziplin auswuchs — bei uns besonderen Aufschwung nahm. Den Anstoß zu dieser Entwicklung gab Hauy (geb. 1784) in Paris, dessen berühmte Kristallsammlung leider durch das Bombardement von 1870 zerstört worden ist. In Berlin wurde das Fach von Weiss vertreten, als dessen Assistent Neumann seine ersten, gleich sehr hervorragenden Entdeckungen machte. Von 1823 an beschäftigte ihn das sog. *Zonengesetz*, ein rein geometrischer Satz über die Stellung der bei einem Kristall auftretenden Begrenzungsebenen. Sind eine Reihe von Kanten und Ebenen des Kristalles bekannt, so sagt der Satz, daß jede zu zwei Kanten parallele Ebene ebenfalls als Grenzfläche des Kristalls auftreten kann. Aus vier bekannten Begrenzungsebenen und dem von ihnen gebildeten Tetraeder sind also alle weiteren durch progressive Konstruktion zu finden.

Der wesentliche Inhalt dieses Satzes — den Neumann wohl als selbstverständlich angenommen und nicht besonders betont hat — ist der folgende, daß unter den durch Konstruktion gefundenen Ebenen diejenigen am häufigsten in praxi auftreten, welche sich aus den vier Grundebenen — die selbst natürlich die am meisten beobachteten sein sollen — bei dem Prozeß zuerst ergeben. Ohne diesen Hinweis auf die Wahrscheinlichkeit des Auftretens einer Ebene hätte der Satz nämlich gar keine praktische Bedeutung, da die Konstruktion schließlich *alle* denkbaren Ebenen von „rationalem“ Index liefert. Nur durch die Reihenfolge sind gewisse Stellungen vor anderen ausgezeichnet. —

Dieses „Zonengesetz“ — die Gesamtheit paralleler Ebenen einer Stellung nennt Neumann eine Zone — wurde nun von seinem Entdecker in besonders hübscher Weise geometrisch interpretiert. Werden nämlich die Kristallkanten ersetzt durch ihnen parallele Gerade, die ein von O ausgehendes Büschel bilden, und wird nun die Konstruktion des Zonengesetzes in einer das Büschel schneidenden Ebene entsprechend wiederholt, so ergibt sich aus dem das Tetraeder abbildenden vollständigen Vierseit genau die bekannte

Moebiussche Netzkonstruktion! Es besteht hier also ein inniger Zusammenhang mit der projektiven Geometrie, und Neumann (1823) hat als direkter Vorläufer der Arbeiten von Moebius (1827) und Graßmann (1844) zu gelten, die beide ebenfalls auf die Bedeutung ihrer Theorien in der Kristallographie hinweisen (vgl. das Referat von Liebisch, Enzyklopädie V 7).

Wie hier auf der einen Seite mit der projektiven Geometrie, so berührt sich das Problem auf der anderen mit der Gittertheorie, wie sie auf Grund einer rein molekularen Auffassung des Kristalls angewendet werden kann. Hier würde der Satz besagen: jede Ebene ist möglich, die drei und damit unendlich viele Gitterpunkte enthält, wobei wiederum die sich zuerst ergebenden Ebenen den Vorzug der Wahrscheinlichkeit des Auftretens besitzen.

1826 begab sich Neumann nach Königsberg, zunächst als Privatdozent für Mineralogie und Physik, von 1828 ab als außerordentlicher Professor. Neumanns Tätigkeit in Königsberg erstreckte sich über 50 Jahre und verbindet sich mit der Jacobis (bis 1843), dann Richelots († 1875) zu ungewöhnlicher Wirksamkeit. 1875 zog sich Neumann vom Amte zurück; experimentelle Physik wurde nach ihm von Pape vertreten, die mathematische von seinem letzten Schüler W. Voigt, welcher von seinem Lehrer das besondere Interesse für Kristallographie und die (von ihm selbst weitergebildete) Art der Ansätze als Erbteil übernahm.

Bei Neumann erfolgte die Wendung zur mathematischen Physik unter dem Einfluß der Arbeiten Fouriers. insbesondere beschäftigte er sich von 1832 an mit der Optik, die er von der Elastizitätslehre ausgehend, zu beherrschen suchte, eine Theorie, die dann 60 Jahre lang bis zum Auftreten der elektromagnetischen Lichttheorie die herrschende blieb. Die Schwierigkeiten einer solchen Auffassung wurden gelegentlich der Cauchyschen Arbeiten bereits erwähnt. Die Frage nach der Existenz longitudinaler Wellen bei Brechung, nach der Ebene der Transversalschwingungen und ihrer Stellung zur Polarisationsebene konnte erst durch die elektromagnetische Theorie geklärt werden.

Zehn Jahre später erschienen Neumanns wichtige Arbeiten über das Gesetz der induzierten elektrischen Ströme, wobei das „Potential zweier Stromkreise aufeinander“:

$$\int\!\!\int \frac{ds\,ds'\,\cos(ds\,ds')}{r}$$

im Mittelpunkt des Interesses steht.

Neben diesen Publikationen hat aber Neumann durch eine intensive Lehrtätigkeit, die einen zahlreichen Kreis spezieller Schüler um ihn sammelte, nach allen Richtungen seiner Wissenschaft eine starke, anregende Wirkung ausgeübt. In seinen wiederholten, immer wieder neu ausgestalteten Vorlesungen ist durchweg ein inniges Zusammengehen der mathematischen Betrachtung mit der physikalischen Messung zu bemerken. In langer Liste liegen diese Darstellungen jetzt in der Bearbeitung vor, die sie seitens seiner Schüler gefunden haben. Da sind zu nennen: Magnetismus (C. Neumann 1881), Elektrische Ströme (von der Mühll 1884), Optik (Dorn 1885) Elastizität (O.E. Meyer 1885), Potential und Kugelfunktionen (C. Neumann 1887), Kapillarität (Wangerin 1894).

Die Gesamtwerke sollen drei Bände umfassen, von denen jedoch der erste nicht erschienen ist.

In diesem Lebenswerk zeigt sich Neumann als der vorzügliche uneigennützige Lehrer, der viele seiner Resultate den Schülern übergab, ohne sie selbst zu veröffentlichen. Er pflegte zu sagen, daß man die Schüler leiten müsse, ohne daß sie es merken, so daß sie das Ziel durch eigene Kraft erreicht zu haben glauben.

Die beiden von ihm gepflegten Richtungen — nach physikalischer und mathematischer Seite — finden jede unter den Schülern ihre besonderen Vertreter. Zur ersten Gruppe gehört als bedeutendste Erscheinung wohl Kirchhoff, zur zweiten sein Sohn Carl Neumann (geb. 1832), Clebsch (1833) und Heinrich Weber (1842). Clebsch und Weber kommen hier nur mit einzelnen Arbeiten in Betracht. Clebschs Dissertation 1852 über ein „Ellipsoid in einer Flüssigkeit“[1] gehört hierher, ferner sein Lehrbuch der Elastizität von 1862, das an den französischen Ingenieur SAINT-VENANT anknüpft. H. WEBER zeigt sich in der hier zu nennenden Arbeit über

$$\Delta + k^2 u = 0$$

(erste Abhandlung der mathematischen Annalen, Bd. 1, 1868) bereits wesentlich von Riemann mit beeinflußt.

Kirchhoffs Spektroskopie, Mechanik und Wärmestrahlungstheorie

Ausführlicher haben wir nun von Kirchhoff zu sprechen: GUSTAV ROBERT KIRCHHOFF gehört zu der großen Zahl der in Königsberg geborenen Mathematiker und Naturforscher (1824), mit welcher Stadt er durch seine Frau, eine Tochter Richelots, noch enger verknüpft war. Er habilitierte sich 1848 in Berlin, war 1850–54 in Breslau als außerordentlicher Professor, wo er mit dem Chemiker BUNSEN zusammentraf, der ihn dann 1854 nach Heidelberg nach sich zog. Bis 1875 war Kirchhoff dort ordentlicher Professor für theoretische und experimentelle Physik; dann wurde er Akademiker in Berlin, wo er sich nur mehr der mathematischen Physik zuwandte. Er starb 1887.

Der Name Kirchhoffs ist allgemein bekannt durch die glänzenden, mit Bunsen gemeinsamen Arbeiten über Spektralanalyse, die um 1860 beginnen und in der großen Abhandlung der Berliner Akademie 1861: *„Untersuchungen über das Sonnenspektrum und die Spektra der chemischen Elemente"* ihren Schwerpunkt haben.

Daneben ist Kirchhoff berühmt durch sein weitverbreitetes *Lehrbuch der Mechanik*, das 1874 zuerst erschien. Es zeichnet sich aus durch seine grundsätzliche Auffassung, nach der es das Ziel der Wissenschaft sei, „die Naturerscheinungen nicht zu erklären, sondern vollständig und in der einfachsten Weise zu beschreiben“, wie Kirchhoff in der Vorrede sagt. Diese Formulierung hat bis auf den heutigen Tag in ausgedehnten Kreisen, besonders bei den positivistisch gerichteten Philosophen, z. B. ERNST MACH, viel Beifall gefunden.

Zu dieser abstrakten, sich selbst beschränkenden Auffassung vom Wesen der Wissenschaft tritt als weiteres Charakteristikum des Buches eine bis zum äußersten getriebene Knappheit der Darstellung, die nur mit Raumgrößen und Zahlgrößen operiert unter Beiseitelassung aller die Anschauung ansprechenden, „anthropomorphen“ Vorstellungen. So wird etwa ein Appell an unser Muskelgefühl bei der Begriffsbildung „Kraft“ streng vermieden, die Masse als ein Zahlenfaktor definiert usw. Von Kirchhoff schreibt sich wesentlich der Stil her, der mehrere Jahrzehnte die mathematische Physik beherrschte: als vornehmstes Gesetz das Vermeiden voreiliger Hypothesen oder gar Fehler anzusehen und jede persönliche Anteilnahme, Entdeckerfreude oder staunende Bewunderung vor der unerschöpflich geheimnisvollen Welt der Erscheinungen zu unterdrücken. Wir würden Kirchhoff Unrecht tun, wenn wir ihm eine solche Beteiligung des Affekts und der Phantasie ganz absprechen wollten; dagegen zeugt seine geniale und erfolgreiche Forschertätigkeit. Der Lehrer durfte jedoch keine Überraschung oder Selbstbescheidung verraten, um seinem System nichts an Überzeugungssicherheit und Lückenlosigkeit zu rauben. Auch sein Vortrag entsprach diesem Ideal; das glatt ausgearbeitete Manuskript wurde von Kirchhoff auswendig vorgetragen, und eher hielt er mitten im Wort einen Augenblick inne, als daß er sich ein kleines Versprechen hätte zuschulden kommen lassen.

Sehr merkwürdige Beispiele für diese schroffe Haltung Kirchhoffs lassen sich im einzelnen anführen. So wurde ihm bei der Untersuchung über die Fortpflanzung der Elektrizität in Drähten (1857, Poggendorff Ann., Bd.100 = Ges. Abh. S. 131 ff.) beiläufig die Entdeckung zuteil, (Ges. Abh. S. 147), daß die Konstante c des Weberschen Grundgesetzes

[1] De motu ellipsoidis in fluido incompressibili viribus quibuslibet impulsis, Regiomonti 1854.

dividiert durch $\sqrt{2}$ die Lichtgeschwindigkeit ergibt! Aber kein Wort verrät die Möglichkeit eines ungeheuren Fortschrittes unserer Naturerkenntnis, wie er von hier aus durch Maxwell geleistet wurde. Ganz auf die Verwaltung des Vorhandenen gerichtet, scheinen Kirchhoff neue Entdeckungen unbequem oder doch von geringem Interesse gewesen zu sein. So erzählt man sich, daß er geäußert habe, als Kerr 1877 das nach ihm benannte Phänomen der Drehung der Polarisationsebene bei Reflexion des Lichtes an dem polierten Ende eines Magnetstabes entdeckte: Gibt es denn überhaupt noch etwas zu entdecken?

Ich kann nicht verhehlen, daß mir diese Auffassung der Naturwissenschaft äußerst antipathisch ist, weil sie die Freude des Lernens und den Trieb zur Weiterforschung unterbindet. Die jüngere Generation der Physiker hat sich denn auch davon abgewandt und eben durch ihre gänzlich anders gerichtete Arbeitsart ihre großen Erfolge erzielt. Es lag mir jedoch daran, die Richtung, deren typischer Vertreter Kirchhoff ist, hier zu kennzeichnen, um nun sagen zu können, daß die ***mathematische*** Behandlung der Physik jedenfalls nicht verantwortlich ist für diese zur Schau getragene Verstandeskälte; denn Mathematik ist nicht bloß Verstandessache, sondern ganz wesentlich eine Sache der Phantasie.

Wie schon bemerkt, ist aber diese unfruchtbare Einstellung für Kirchhoffs eigene wissenschaftliche Leistung nicht von Einfluß gewesen. Vielmehr schätzen wir in ihm einen derjenigen Forscher, die in der mathematischen Durchdringung der Physik die wichtigsten Fortschritte errungen haben.

Als größte Leistung in dieser Hinsicht hat wohl zu gelten, daß Kirchhoff — in Zusammenhang mit seinen spektralanalytischen Arbeiten — als erster die Gesetze der ***Wärmestrahlung*** mathematisch in Angriff nahm. Er stellte das Grundgesetz auf, daß das Verhältnis von Emission und Absorption für alle Körper gleich derselben Funktion der absoluten Temperatur sein muß, und bewies es auf Grund von Gedankenexperimenten und spezifisch mathematischen Schlüssen, wie z. B., daß das identische Verschwinden Fourierscher Integrale das Verschwinden des Integranden bedinge. An der hierin liegenden Leistung wird nichts geändert, wenn auch die heutigen Mathematiker zur Kritik an Kirchhoffs Schlüssen Anlaß fanden (Hilbert in Münster, Jahresbericht der D. Math. Ver., Bd. 22, S. 1 ff., 1912). Diese Arbeiten, in denen sich zuerst der Begriff des „schwarzen Körpers“ findet, wurden veröffentlicht in den Berliner Monatsberichten 1859 (= Ges. Abh. S. 571 ff.).

Neben dieser Fundamentalleistung findet sich die glänzende Erledigung wichtigster Probleme der Elastizitätslehre, der Hydrodynamik, der Elektrizitätslehre usw.

Wie tief Kirchhoffs mathematische Erfassung das bereits bekannte Material ergreift und umgestaltet, möge man an einem Beispiel sehen. In seinem Fundamentalwerk von 1827: „Die galvanische Kette, mathematisch bearbeitet“, hatte Ohm noch von einem unbestimmten Begriff der elektrischen Spannung Gebrauch gemacht, wobei er von der Vorstellung ausging, daß der ruhende Konduktor von Elektrizität konstanter Spannung, die er mit „Dichte“ proportional setzt, gleichmäßig erfüllt sei. Kirchhoff erst findet (Poggendorff Ann., Bd. 78, 1849 = Ges. Abh. S. 49), daß diese Spannung das elektrostatische Potential ist, und daß die ruhenden elektrischen Massen auch bei den galvanischen Ketten ihren Sitz nur an der Oberfläche, bezugsweise an den Trennungsflächen der Leiter haben.

Als eines der schönsten derartigen Ergebnisse ist mir immer Kirchhoffs Parallelisierung der Biegung und Drillung eines unendlich dünnen homogenen Drahtes mit der Rotation eines schweren Körpers um einen festen Punkt erschienen (Crelle, Bd. 56, 1858 = Ges. Abh. S. 285 ff.), ein selten wunderbares Beispiel, daß dieselben Formeln so ganz verschiedene Probleme zu beherrschen vermögen. Der Zusammenhang ist wohl am einfachsten einzusehen, wenn man beide Aufgaben als Variationsprobleme formuliert.

Die Entwicklung in Berlin

Allgemeines, die Physikalische Gesellschaft

Wir wenden uns nun einem neuen Zentrum mathematisch-physikalischer Entwicklung zu, das sich im Laufe der 40er Jahre in Berlin bildete.

Wie wir schon berichteten, begann das Leben unserer Wissenschaften in Berlin nicht gleich 1810 mit der Gründung der Universität. Vielmehr wurde es durch die herrschenden Strömungen des Neuhumanismus und der Hegeischen Philosophie zurückgehalten, und erst ALEXANDER VON HUMBOLDTS Tatkraft brachte es Anfang der 20er Jahre zur Entfaltung. Die Mathematik fand ihren umsichtigen Förderer in dem Baurat CRELLE; für die Naturwissenschaft, soweit sie uns hier interessiert, bildet die Übersiedlung des ostfriesischen Chemikers MITSCHERLICH nach Berlin, die 1822 erfolgte, den Ausgangspunkt. Seine bedeutsame Wirkung wurde von der Universität geehrt durch Errichtung seines. Standbildes im Universitätsgarten.

Mitscherlich arbeitete auf dem Grenzgebiet der Chemie und Physik. Aus seiner Schule stammen die ersten Berliner Physiker, die aber, in bewußtem Gegensatz zu der spekulativen Richtung der herrschenden Philosophie, bloße Empiriker sind. In erster Linie sind hier MAGNUS und POGGENDORFF zu nennen, beide außerordentliche Professoren seit 1834. Der Name des letzteren ist bekannt durch die von ihm herausgegebenen ***Annalen der Physik***. Poggendorff war ursprünglich Apotheker und ist seiner aufs Praktische gerichteten Natur immer treu geblieben. Magnus' Lehrtätigkeit kam vor allem in seinem „Kolloquium“ zum Ausdruck — dem auch ich noch 1869/70 angehörte —, das nun in der folgenden Zeit in hohem Maße Pflanzstätte für die nachfolgende physikalische Generation wurde. Auch für das Bedürfnis nach praktischer Betätigung seiner Schüler trug Magnus Sorge, indem er in dieser Zeit, die öffentliche physikalische Institute noch nicht kannte, sein Privatlaboratorium zu allgemeiner Verfügung stellte.

Der höhere Aufschwung der Naturwissenschaften in Berlin wurde indes doch von anderer Seite herbeigeführt, und zwar durch den rheinischen Physiologen JOHANNES MÜLLER, der nach seiner Bonner Tätigkeit 1824-33 in Berlin eine große Wirksamkeit entfaltete. Er war ein Forscher, der bei vorsichtiger Beschränkung des eigenen Arbeitsgebietes zahlreichen Schülern starke Anregungen zu geben verstand. Da er gegen eine rein empirische, nur am Experiment interessierte Richtung zu kämpfen hatte, so liegt seine Einwirkung wesentlich nach Seite der exakten, theoretischen Begründung.

Unter diesen Einflüssen wuchs nun eine neue Generation von Naturforschern heran, von denen sich sechs junge Leute 1845 in der ***Berliner Physikalischen Gesellschaft*** zu engerer Arbeitsgemeinschaft zusammenschlossen. Den Anstoß zu diesem Unternehmen gab der Physiologe EMIL DU BOIS-REYMOND (geb. 1818), organisiert wurde es durch G. KARSTEN (geb. 1820), Privatdozent der Physik in Berlin, der später (von 1848 ab) auch in Kiel durch Einrichten des Wetterdienstes und anderer Arbeitssysteme seine Fähigkeiten in dieser Richtung auswirkte.

Unter Karstens Leitung unternahm die junge Gesellschaft folgende Arbeiten: Zunächst die Herausgabe der ***„Fortschritte der Physik"***, d. h. von Jahresberichten über die physikalische Literatur, die als Repertorium seitdem unentbehrlich geworden sind; nach ihrem Vorbilde wurden später die „Fortschritte der Mathematik“ geschaffen. Dann die Ausarbeitung einer allgemeinen „Enzyklopädie der Physik“, die freilich nicht zu Ende geführt worden ist. Sie umfaßt Einzeldarstellungen von recht verschiedenem Wert, in denen aber u. a. auch Helmholtz' Physiologische Optik enthalten ist.

In diesen Kreis treten nämlich nun bald weitere junge Forscher ein, deren Namen in der Physik führend geworden sind. An erster Stelle ist HELMHOLTZ zu nennen, der, damals Militärarzt in Potsdam, 1847 zuerst in der physikalischen Gesellschaft seine Theorie von der Erhaltung der Kraft vortrug. Zu ihm gesellte sich der Ingenieuroffizier WERNER SIEMENS (geb. 1816 in Hannover), der 1848 den dänischen Krieg mitmachte und dabei durch das Aussetzen elektrischer Minen im Kieler Hafen hervortrat. 1849 begründete er mit Halske zusammen die elektrotechnische Firma, die nun bald zu Weltruf gelangte. Sehr interessant ist diese Entwicklung wiedergegeben in Siemens' lesenswerten „Lebenserinnerungen" (Berlin 1893). Von nicht minderer Bedeutung ist ein weiteres Mitglied der physikalischen Gesellschaft, der damalige Oberlehrer Clausius (geb. 1822 in Pommern), dessen Großtat, die Begründung des zweiten Wärmesatzes, wir bereits besprachen. In seiner Arbeit „Über die bewegende Kraft der Wärme" (Poggendorff Ann.,Bd. 79, 1850) trennte er die bei Sadi Carnot vorhandenen richtigen Ansätze von der falschen, unvollkommenen Einkleidung, eine Tat, die Mach in seiner Geschichte der Wärmelehre[2] als „bedeutende intellektuelle Leistung" rühmt. Clausius wurde ferner durch seine Arbeiten über kinetische Gastheorie ein Hauptvorkämpfer des Atomismus.

Auch Kirchhoff gehörte diesem Kreise aufstrebender Talente an, der durch die entschlossene Selbsthilfe eines freiwilligen Zusammenschlusses, in seiner weiteren Entwicklung getragen durch den Aufschwung der großstädtischen Umgebung, eine Stätte schuf, an der sich durch lebhafte, anregende Wechselbeziehung nun eine seltene Blüte geistigen Lebens entfaltete.

Als überragende Gestalt aus dieser Gemeinschaft tritt uns Helmholtz entgegen, von dem ich nun eingehender reden möchte. Seine außerordentliche Stellung in der Geschichte der Naturwissenschaften beruht auf einer ungewöhnlich vielseitigen, eindringenden Begabung, innerhalb deren die mathematische Seite eine wichtige, für uns natürlich in erster Linie in Betracht kommende Rolle spielt.

Helmholtz

Hermann Helmholtz wurde 1821 als Sohn eines Oberlehrers in Potsdam geboren. Auf Rat seines Vaters entschloß er sich, Arzt zu werden, um, möglichst bald zu einer selbständigen Lebensstellung zu kommen. Er studierte also an der sog. „Pepinière", der militärärztlichen Hochschule in Berlin, promovierte 1842 mit einer Arbeit „De fabrica systematis nervosi evertebratorum" und wurde, entsprechend der damit übernommenen Verpflichtung, Militärarzt in Potsdam. Alle mathematischen Kenntnisse erwarb sich Helmholtz durch privates Studium. Wie wenig Verständnis er mit diesen Neigungen in seiner beruflichen Umgebung fand, beleuchtet folgende kleine Geschichte, nach welcher ein Vorgesetzter, als er von Helmholtz' Schrift „Über die Erhaltung der Kraft" vernahm, zu diesem äußerte: Endlich einmal etwas Praktisches! Er hatte nämlich geglaubt, daß es sich um die Erhaltung der militärischen Leistungsfähigkeit seiner Mannschaften handelte.

Durch Humboldts Vermittlung wurde Helmholtz 1848 Assistent am anatomischen Museum in Berlin, ein Jahr später Professor der Physiologie und Anatomie in Königsberg, welche Fächer er auch in Bonn (1855) und Heidelberg (1858) vertrat. Die Heidelberger Zeit bedeutet vielleicht die Höhe des Helmholtzschen Schaffens. Hier wandte er sich mehr und mehr physikalischen Interessen zu, die ihn 1871, also mit 50 Jahren, als Hauptvertreter der Physik nach Berlin führten. 1888 trat er von seiner akademischen Tätigkeit zurück und verwaltete als Präsident die durch Siemens' Initiative gegründete Physikalisch-technische Reichsanstalt. Er starb 1894.

Schon diese äußere Laufbahn kennzeichnet Helmholtz' überragende, nicht auf ein einzelnes Fach beschränkte Bedeutung. Er war bis zu seinem Tode der eigentliche Repräsentant der exakten Naturwissenschaften vor der Öffentlichkeit, um so mehr, als es ihm gelang, auch gesellschaftlich eine einzigartige Stellung zu gewinnen. Seiner zentralen Bedeutung entsprechend, finden wir sein Denkmal als Mittelpunkt vor der Universität in Berlin auf-

[2] E. Mach: Die Principien der Wärmelehre, Leipzig 1896. — Poincaré, Thermodynamique p. 114, sagt übrigens, daß Clausius das Carnot'sche Prinzip unabhängig wiedergefunden habe.

gestellt, gegen die Straße zu flankiert von Wilhelm und Alexander von Humboldt, weiter rückwärts von Mommsen und Treitschke.

Ein lebendiges Bild von Helmholtz' Wesen und Wirken gibt die große Biographie von Leo Koenigsberger, erschienen in drei Bänden bei Vieweg (1902-03). Seine wissenschaftliche Leistung liegt vor in den gesammelten wissenschaftlichen Abhandlungen in drei Bänden, 1882–95 herausgegeben bei Barth.

Das Charakteristische in Helmholtz' wissenschaftlicher Begabung ist ihre Mannigfaltigkeit bei großer Intensität nach jeder Seite. Eine besondere Gabe des quantitativen Experiments, des Beobachtens und Messens, die er durch selbständige Arbeit bis zur Virtuosität entwickelte, verband sich bei ihm mit einer ebenfalls aus eigener Kraft geschulten Fähigkeit der mathematischen Formulierung. Beides errang ihm die Herrschaft über die aus einem ungewöhnlichen Schatz eindringender Kenntnisse im Gebiet der gesamten Naturwissenschaft geschöpften Probleme. Darüber hinaus aber ermöglichte ihm die Fähigkeit philosophischen Denkens und die Empfänglichkeit für alle Gebiete des Lebens die Erschaffung eines umfassenden, zum Ganzen gerundeten Weltbildes, in das sich die Resultate seiner Forschung organisch einordnen. Im ganzen überwiegt das begriffliche Denken gegenüber anschaulicher Erfassung oder schöpferischer Phantasie. Helmholtz ist kein Biologe, der die breite Mannigfaltigkeit der Lebewesen umspannt und in eine Ordnung zwingt, wie Darwin; er ist kein Entdecker physikalischer Erscheinungswelten wie Faraday, auch kein Mathematiker um der Mathematik selbst willen. Alle Dinge reizen sein Interesse nur im Rahmen des großen naturwissenschaftlichen Ganzen.

Dementsprechend verzehrt sich sein Talent nicht in stürmischer Jugendproduktion; nur auf reicher Erfahrung und in langsamer Entwicklung konnte es reifen, erhält sich dann aber frisch und lebendig bis ins hohe Alter hinein. In anderem Sinne wie Franz Neumann möchte ich auch Helmholtz als einen durchaus preußischen Typ bezeichnen, der in deutlichem Gegensatz steht zu dem süddeutschen oder auch niedersächsischen, wie ihn Gauß, Riemann, Weierstraß vertreten.

Wir können hier nur Helmholtz' mathematische Arbeiten verfolgen und auch bei ihnen nur das Wichtigste hervorheben. Dem Gesagten entsprechend, liegt Helmholtz' Leistung auch hier nicht im Erwerb neuer mathematischer Gedankenansätze, sondern in der Ausdehnung der Herrschaft schon vorhandener auf neue Gebiete. Besonders dankbar wollen wir betonen, daß Helmholtz, gegenüber anderen Strömungen seiner Zeit, die außerordentlichen Leistungen hervorgekehrt hat, welche das mathematische Denken im Dienste allgemeiner Fragen vollbringen kann.

Naturphilosophie, Satz von der Erhaltung der Energie

An erster Stelle nenne ich die kleine Schrift von 1847, die Helmholtz' Ruhm begründete: *Über die Erhaltung der Kraft*,

Mit heutiger Terminologie würden wir von einer „Erhaltung der Energie“ reden. Helmholtz entwickelt den Gedanken, daß eine Größe, eben die von uns jetzt als „Energie“ bezeichnete, erhalten bleibe, daß darum ein perpetuum mobile —welches durch bloße Anordnung seiner Teile Arbeit aus „Nichts“ erzeugt — undenkbar sei. Dieser Gedanke lag damals in der Luft. Ich will die geschichtlichen Verhältnisse, die wir an vielen Stellen besprochen finden, hier nicht ausführen, sondern nur dies sagen, daß es sich, wenn wir uns auf Mechanik beschränken, um den Satz $T + U = h =$ const. handelt, wo T die kinetische, U die potentielle Energie eines betrachteten mechanischen Systems ist. Nimmt man nun an, wie es zuerst bei Boscovich 1758, bzw. Laplace ca. 1820, und noch in den 40er Jahren allgemein geschah, daß schließlich alle Naturerscheinungen auf dem Spiel punktförmiger Massen beruhen, die sich wechselseitig in Richtung ihres Abstandes r nach irgend einer Funktion $f(r)$ anziehen, so ist die Allgemeingültigkeit eines entsprechenden Theorems für das gesamte Gebiet der Naturgeschehnisse selbstverständlich.

Es war also Helmholtz' Aufgabe weniger, diesen allgemeinen Gedanken zu finden, als vielmehr ihn durch alle ihm zugänglichen Naturerscheinungen hindurch, soweit Messungen vorlagen, mathematisch zu verfolgen. Diese Aufgabe löste er in der Schrift von 1847 insbesondere für die Phänomene der Wärme, der Elektrostatik und Magnetostatik, sowie der Elektrodynamik; er schloß mit Andeutungen über die Geltung desselben Gesetzes für die Lebenserscheinungen.

Später (1887) hat Helmholtz im Anschluß an die noch erst zu nennenden Arbeiten der Engländer dem ganzen Gedankenansatz eine viel weitere Form gegeben. In der Arbeit ***„Über die physikalische Bedeutung des Prinzips der kleinsten Wirkung"*** spricht er die Behauptung aus, daß nicht nur das eine Integral $T + U = h$, sondern die gesamten Entwicklungen, die sich an die Differentialgleichungen der Mechanik anschließen, auch für alle Erscheinungen der Natur verbindlich sein müssen. Offenbar war diese Erweiterung der schon 1847 begonnenen Übertragung mechanischer Betrachtungen auf physikalische Erscheinungen für Helmholtz kein erzwungener oder auch nur deduzierter Gedanke. Wie er mir in persönlichem Gespräch versicherte — die Reise zur Weltausstellung in Chicago 1893 führte mich auf Hin- und Rückweg für längere Zeit mit ihm zusammen —, war ihm der allgemeine Ansatz in beiden Fällen vollkommen selbstverständlich.

Dennoch ist auch schon in der „Erhaltung der Kraft“ dieser allgemeine Ansatz eine große spezifische Gedankenleistung. Vor Helmholtz schrieb man nämlich (obwohl dies bereits Lagrange in seiner mécanique analytique getan hatte) nicht

$$T + U = h,$$

sondern $T = U + h$ oder $T - U = h$. Hierin war U die sog. „Kräftefunktion“, nicht aber T, sondern $2T$ — im elementaren Fall mv^2 — die „lebendige Kraft“. Der Satz hieß also in Worten: Die halbe lebendige Kraft, vermindert um die Kräftefunktion bleibt konstant. Erst durch Helmholtz, der U an Stelle von $-U$ setzte, erhielt er die so viel mehr bedeutende, die Vorstellung fixierende und zugleich viel handlichere Form einer konstanten Summe, bei der die aufbauenden Teilgrößen T und U völlig symmetrisch und innerlich gleichwertig auftreten. Erst jetzt kann man von dem „Satz der Erhaltung der Energie“ sprechen.

Der Erfolg der Helmholtzschen Schrift war durchaus nicht ein unmittelbarer. Die physikalische Zeitströmung, die im Widerspruch gegen die vorschnellen Schlüsse der Naturphilosophie entstanden war, hegte die stärkste Abneigung, ja selbst Mißtrauen gegen alles deduktive Denken. So lehnte Poggendorff die Aufnahme der Helmholtzschen Arbeit in die Annalen ab, und erst du Bois-Reymonds Bemühungen gelang es, ihr einen Verleger zu verschaffen. Von den Akademikern Berlins hat nur Jacobi sofort ihre Bedeutung erkannt. Dirichlet ist in allen diesen Auseinandersetzungen nicht hervorgetreten.

Die in den Zeitverhältnissen begründete Ablehnung wird auch den heutigen Leser der Schrift nicht wundernehmen. Schon die Terminologie ist uns befremdlich. Wir sind gewöhnt, nur das Produkt aus Masse und Beschleunigung als „Kraft“ zu bezeichnen. Helmholtz hingegen spricht von der „lebendigen Kraft“ T und der „Spannkraft“ U, woraus sich auch der Titel der Abhandlung erklärt. Ferner geht der eigentlichen Untersuchung eine apriorische Betrachtung voraus, die der strenge Naturforscher nur mit Widerstreben studiert und als zwingend gewiß nicht anerkennen kann. In ihr spiegelt sich Kantischer Einfluß, der Helmholtz das Ideal einer reinen Deduktion aus obersten Grundsätzen vorsetzte. Schließlich sind auch die Einzelausführungen vielfach tastend und unvollständig, dem lückenhaften Literaturstudium entsprechend, wie es sich Helmholtz in seiner Potsdamer Abgeschiedenheit ermöglicht hatte.

Diese Erstlingsarbeit läßt sich stilistisch also nicht etwa vergleichen mit der klassischen Vollendung und Unnahbarkeit, die Gauß von Anfang an besaß und die Helmholtz auch in seinen späteren Arbeiten, welche wir nun betrachten wollen, weder erreichte noch auch nur anstrebte. Es sind dies die großen, gerade für die Mathematik bedeutungsvollsten Schöpfungen der Heidelberger Zeit.

Sie beziehen sich in erster Linie auf die Lehre von den Sinnesempfindungen, auf Auge und Ohr, welche Helmholtz, unterstützt von einer selten feinen, künstlerischer Erfassung fähigen Sinnesorganisation und geleitet von starkem, erkenntnistheoretischem Interesse, zu schaffen ganz besonders befähigt war. Zwei große Werke kommen in Betracht:

1. 1863: *Die Lehre von den Tonempfindungen*, als „physiologische Grundlage für die Theorie der Musik";

2. 1867: *Handbuch der physiologischen Optik*, woran sich noch

3. 1865–70 die erste Ausgabe der weitverbreiteten *„populären wissenschaftlichen Vorträge"* schließt. Die letzteren, entstanden aus dem „naturhistorisch-medizinischen Verein", enthalten schwierigste Probleme in einer auch dem Nichtspezialisten verständlichen, durchsichtigen Form.

Hydrodynamik, Wirbeltheorie

Für uns ist das erstgenannte Werk besonders wichtig, aber mehr noch die mathematisch-physikalischen Arbeiten, die bei den Vorstudien dazu entstanden. Wir nennen die beiden Abhandlungen zur Hydrodynamik:

1. 1858, Crelle Bd. 55: *Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen.*

2. 1860, Crelle Bd. 57: *Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden.*

Die erste enthält die berühmten allgemeinen Sätze über Wirbelbewegung und die besondere Lehre von den Kreiswirbeln[3]. Während man sich bis dahin mit dem Studium sog. Potentialbewegungen begnügt hatte, bedeuten diese Sätze einen großen Fortschritt der hydrodynamischen Theorie der sog. idealen Flüssigkeiten in Richtung auf die Erfassung der wirklichen Erscheinungen hin. Länger als andere Gebiete ist ja die Hydrodynamik der mathematischen Behandlung unzugänglich gewesen, weil ihre Differentialgleichungen nicht linear sind. Auch die Helmholtzsche Behandlung ließ noch Verbesserung und Vervollkommnung zu. Wie ich gleich hier bemerken will, wurden seine Sätze weit einfacher abgeleitet von W. THOMSON 1868–69 in einer großen Abhandlung *„On Vortex Motion"*. In ihr tritt als neues wichtiges Moment der Begriff der Zirkulation der Flüssigkeit längs einer Kurve hervor. Auch in Hinsicht auf Strenge lassen die Helmholtzschen Ausführungen manches vermissen. Dieser Mangel jedoch, der vielen mathematischen Physikern eignet, soll hier nicht betont werden, da er gegenüber dem positiven Wert der Untersuchungen nicht ins Gewicht fällt.

Die zweite Helmholtzsche Abhandlung enthält die ersten, den Greenschen Entwicklungen zur Potentialtheorie entsprechenden Sätze über $\Delta u + k^2 u = 0$, — die Behandlung von Randwertaufgaben dieser Differentialgleichung, wie wir heute sagen würden. Auch diese Untersuchungen sind nicht etwa streng im Sinne der heutigen Mathematik, sondern durchsetzt mit ungeklärten Anschauungsmomenten, und — eben darum — bahnbrechend.

Im übrigen wurde Helmholtz Ende der 60er Jahre mit Riemanns Schriften bekannt, die sein lebhaftes Interesse erregten, so daß er sie auf allen Reisen mit sich zu nehmen pflegte. Sie waren es vor allem, die Helmholtz allmählich immer mehr von der Physiologie fortführten und für mathematisch-physikalische Fragen gewannen. Die beiden Veröffentlichungen von 1868 geben davon Zeugnis:

[3] Dieselben Wirbelsätze hat ungefähr gleichzeitig auch DIRICHLET gefunden. Dirichlets Untersuchungen wurden unmittelbar nach seinem Tode von Dedekind herausgegeben (vgl. Dirichlets Werke, Bd. 2, S. 363ff).

1. Berliner Monatsberichte: `Diskontinuierliche Flüssigkeitsbewegungen;`
2. Göttinger Nachrichten: `Über die Tatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen.`

Die erste Abhandlung bedeutet wiederum einen großen Fortschritt auf eine der Wirklichkeit entsprechende Hydrodynamik hin. Sie behandelt die freie Strahlbildung bei Potentialbewegungen und erledigt in der von Riemann eingeführten Weise die einfachsten Fälle des ebenen Problems durch die Mittel der konformen Abbildung. Das Problem wurde bald von Kirchhoff weitergeführt.

Auch zu der zweiten Abhandlung, die zwar, aus Helmholtz' philosophischem Bedürfnis entspringend, lange in ihm vorbereitet gelegen haben mag, gab Riemann den Anstoß; und zwar durch seine Untersuchungen „Über die Hypothesen, die der Geometrie zu Grunde liegen“, die 1854 bereits als Habilitationsvortrag gehalten, aber erst 1868 veröffentlicht wurden. Wie schon bei früherer Gelegenheit erwähnt, denkt sich Riemann das Bogenelement des Raumes durch eine quadratische Form $ds^2 = \sum a_{ik} dx_i dx_k$ gegeben, und schließt daran eine Klassifikation der verschiedenen quadratischen Differentialformen und der ihnen entsprechenden Geometrien. Helmholtz greift noch eine Stufe weiter zurück, indem er von der Existenz frei beweglicher starrer Körper ausgeht und zeigt, daß die Gleichsetzung des ds^2 mit einer solchen quadratischen Form — die dann aber gleich spezieller Art ist — bereits notwendig aus dieser Tatsache folgt.

Öffentliche Stellung

Wir haben uns nun schließlich mit Helmholtz' Tätigkeit als Physiker in Berlin zu beschäftigen. Wie wir bereits erwähnten, nahm Helmholtz dort eine große repräsentative Stellung ein. Seine wissenschaftlichen Verpflichtungen bestanden in der Leitung des nun erst eingerichteten physikalischen Instituts und in dem Halten der allgemeinen Vorlesung über Experimentalphysik nebst Spezialvorlesungen über die verschiedensten Teile der mathematischen Physik. Diese wurden später von König, Krigar-Menzel, Runge und Richarz herausgegeben und enthalten in vorzüglich lesbarer Darstellung fast alle Gebiete der theoretischen Physik: Dynamik diskreter Massenpunkte und kontinuierlich verbreiteter Massen, Akustik, Elektrodynamik und Magnetismus, elektromagnetische Lichttheorie, Wärme.

In dieser Form haben die Vorlesungen jedenfalls eine ihrem reichen Gedankeninhalt entsprechendere Wirkung als beim mündlichen Vortrag. Helmholtz behandelte nämlich diesen Teil seiner Lehrtätigkeit (überhaupt seine Vorlesungen) recht stiefmütterlich, indem er sich so gut wie gar nicht auf sein Kolleg vorbereitete, während er doch andererseits nicht zu improvisieren verstand. Der Grund für dies Verhalten ist in der ungeheuren Überlastung zu suchen, der er in Berlin mehr als je ausgesetzt war. Große repräsentative Pflichten nahmen ihn fortwährend in Anspruch. Er war Berater des Ministeriums in allen einschlägigen Fragen, hatte Vertretungen offizieller Art auf internationalen Kongressen zu übernehmen usw. und widmete nebenbei noch einen Teil seiner Zeit und Kraft populären Vorträgen, die ihn im In- und Ausland auf Reisen führten.

Dennoch gelang es Helmholtz durch private Anleitung in seinem Laboratorium eine ganze Reihe wirklich hervorragender Schüler zu erziehen mit freiem Umblick und experimenteller Selbständigkeit, unter denen als der Bedeutendste nur Heinrich Hertz genannt sein möge.

Von den großen Kongressen, auf denen Helmholtz eine Hauptrolle spielte, ist der berühmteste der wesentlich von ihm und William Thomson geführte „elektrische Kongreß“ 1881 in Paris, auf dem unter dem Vorsitz des Verkehrsministers Cochery die internationalen Maße: Volt, Coulomb, Ohm, Ampère, Farad festgelegt wurden. Sehr bedauernswert ist, daß Helmholtz hier die Namen Gauß und Weber, an die sich doch die Entstehung des absoluten Maßsystems auf elektromagnetischem Gebiete wesentlich anknüpft, nicht zu genügender Geltung hat bringen können. Die Bezeichnung „Gauß“ für die Einheit der magnetischen Feldstärke wurde erst später auf englischen Vorschlag durchgesetzt.

Neben den nationalen Gegensätzen mag hier noch ein anderer Umstand hemmend eingewirkt haben, das ist der schon mehrfach erwähnte große Streit um das Webersche elektrodynamische Grundgesetz, in den Helmholtz Anfang der 70er Jahre hineingezogen wurde. Die z. T. sehr heftige Polemik, die auf der Gegenseite von C. Neumann geführt wurde, hat — wie man jetzt wohl sagen darf — als einziges Ergebnis die nicht neue Einsicht gezeitigt, daß derartige Fragen nicht durch Dialektik entschieden werden können, sondern allein durch das Experiment. In dem Augenblick, wo Hertz durch den Versuch nachwies, daß die elektrische Kraft zur Fortpflanzung im leeren Raume Zeit gebraucht, daß sie sich in Wellen ausbreitet, war Webers Gesetz, welches instantane Fernwirkung voraussetzt, überwunden.

Helmholtz hat in seinen Berliner Jahren fast alle Gebiete der mathematischen Physik Revue passieren lassen und, indem er hier und dort eingriff, vielseitige Anstöße gegeben. Am merkwürdigsten in dieser Hinsicht ist mir immer seine 1882 in London gehaltene *„Faraday-Lecture“* erschienen, in der klar herausgearbeitet vorliegt, daß wir der Elektrizität — übrigens genau wie Weber es wollte — wegen der elektrochemischen Tatsachen atomistische Struktur beilegen müssen, und sie also nicht mit dem Äther, den wir uns kontinuierlich denken, identifizieren dürfen. Diese Leistung von Helmholtz, die den Ausgangspunkt der heutigen Elektronentheorie bildet, ist um so bewundernswerter, als Helmholtz in seinen ausgeführten Arbeiten immer Phänomenologe geblieben ist.

Ich kann diese hervorragende Persönlichkeit nicht verlassen, ohne auch ihrer Wirkung Grenzen abzustecken, indem ich wenigstens erwähne, daß selbst dieser vielseitigen Auffassung einiges versagt blieb. Ich nenne nur einen Punkt: Seiner begrifflichen, dem eigentlich technischen Geist abgewandten Natur entsprechend pflegte Helmholtz eine fast mißtrauische Zurückhaltung gegenüber jungem stürmischem Erfindergeist. Dieses Verhalten mußte bei seiner ungewöhnlichen Stellung und seinem Einfluß auf die leitenden sowohl als auf die finanziell leistungsfähigen Kreise von großer Wirkung sein. Und in der Tat hat der jüngste Zweig unserer Technik deutlich darunter zu leiden gehabt: die Fliegerkunst. In einer — übrigens in den Einzelresultaten selbstverständlich richtigen — Arbeit von 1873 war Helmholtz auf Grund von Betrachtungen über mechanische Ähnlichkeit zu einer geringen Einschätzung der Möglichkeiten des mechanischen Fluges gelangt. Entstellt durch die laienhafte Auslegung der Öffentlichkeit hat dieses Urteil ganz sicher die Entwicklung länger hintangehalten, als es ihr natürlicher Verlauf verlangt hätte.

Kapitel 6

Die allgemeine Funktionentheorie komplexer Veränderlicher bei Riemann und Weierstraß.

Gegenüberstellung

Seite 246

Wir kehren nun zur reinen Mathematik zurück und wenden uns der allgemeinen Theorie der Funktionen komplexer Veränderlicher zu. Die weitere Entwicklung und Förderung dieses Kernstückes unserer heutigen reinen Mathematik verdanken wir in erster Linie zwei deutschen Gelehrten, RIEMANN und WEIERSTRASS. Ihre Hauptwirksamkeit fällt in die Zeit von etwa 1850 bis 1880.

Indem wir die Theorie der komplexen Funktionen voranstellen, erschöpfen wir das Lebenswerk der beiden Forscher nicht im entferntesten. Wir werden auch in den folgenden Kapiteln wiederholt auf die beiden Männer zurückkommen, die auf den verschiedensten Gebieten grundlegend gearbeitet haben. Doch wird es richtig sein, gleich an dieser Stelle ihrer sehr verschiedenartigen Persönlichkeiten und ihrer allgemeinen Wirksamkeit in Umrissen zu gedenken.

RIEMANN ist der Mann der glänzenden Intuition. Durch seine umfassende Genialität überragt er alle seine Zeitgenossen. Wo sein Interesse geweckt ist, beginnt er neu, ohne sich durch Tradition beirren zu lassen und ohne einen Zwang der Systematik anzuerkennen.

WEIERSTRASS ist in erster Linie Logiker; er geht langsam, systematisch, schrittweise vor. Wo er arbeitet, erstrebt er die abschließende Form.

Was aber die äußere Wirksamkeit angeht, so ist zu bemerken: RIEMANN tritt nach stiller Vorbereitung wie ein heller Meteor hervor, um nur zu bald wieder zu erlöschen; beschränkt sich seine Wirksamkeit doch nur auf 15 Jahre: 1851 Erscheinen seiner Dissertation, 1862 Erkrankung, 1866 Tod.

Weierstraß konnte sich langsam auswirken. Er beginnt schon 1843 mit einigen Bemerkungen über die analytischen Fakultäten (Gymnasialprogramm, Deutsch-Crone); 1897 stirbt er hochbetagt nach einem reichen Leben.

- - - - -

Bernhard Riemann.

Karl Weierstraß.

- - - - -

Seite 290–291

Verbreitung der Weierstraßschen Theorie.

Nun will ich einiges von der Verbreitung und Wirkung der Weierstraßschen Funktionentheorie erzählen.

Wie wir schon sahen, wurden Weiesstraß' Ideen zunächst durch die nachgeschriebenen und abgeschriebenen Kollegheft seiner Hörer einer größeren, aber immerhin noch recht beschränkten Öffentlichkeit zugänglich. Erst ganz allmählich entstehen Lehrbücher, die aber nur z. T. von unmittelbaren, insbesondere deutschen Schülern von Weierstraß verfaßt wurden. Das erklärt sich so, daß Weieerstraß' unmittelbarer Unterricht die Spontanität der Hörer zu sehr unterdrückte und in der Tat nur für den voll verständlich war, der schon anderweitig mit dem Stoff sich vertraut gemacht hatte. Die größeren Werke sind von Ausländern geschrieben oder geradezu im Ausland erschienen. Dieselbe, auf den ersten Blick befremdliche Tatsache werden wir auch finden, wenn wir uns mit der Weiterbildung der von Weierstraß begründeten Theorie beschäftigen.

- - - - -

Seite 293–295

Sonja Kowalevsky.

Zuletzt möchte ich Weierstraß' vielgenannter Schülerin Sonja Kowalevsky ein paar Worte widmen.

Sie ist 1850 in Moskau geboren und studiert — wir können nur ihre mathematischen Schicksale verfolgen — zunächst als Privatschüler von Koenigsberger in Heidelberg, dann ebenso bei Weierstraß in Berlin, dem sie sehr nahe trat. An den öffentlichen Vorlesungen konnte sie aber nicht teilnehmen, weil die Anwesenheit von Hospitantinnen damals noch nicht erlaubt war. 1874 wird sie auf Empfehlung von Weierstraß in Göttingen in absentia promoviert auf Grund ihrer Arbeit über lineare partielle Differentialgleichungen: Crelle, Bd. 80; sie kommt da zu dem Resultat, daß eine lineare partielle Differentialgleichung mit analytischen Koeffizienten analytische Lösungen hat, eine Ausführung der Ideen, die Weierstraß in einer Jugendarbeit, welche jetzt in Bd. 1 der Werke veröffentlicht ist, niedergelegt hat[1]. 1883 wird sie auf Betreiben von Mittag-Leffler Privatdozent, 1884 Professor an der von Mittag-Leffler geleiteten Privatuniversität in Stockholm. Seitdem ist sie eine internationale Berühmtheit, die 1889, ebenfalls durch Verwendung von Mittag-Leffler, für ihre Untersuchung über die Rotation des schweren unsymmetrischen Kreisels den großen Preis der Pariser Akademie erhielt. Sie starb 1891 in Stockholm.

Ihrem Wesen nach ist sie durch ihre mathematischen Arbeiten keineswegs erschöpfend charakterisiert. Vielmehr schrieb sie u. a. Romane und erlebte sie; sie stand schließlich im Mittelpunkte des Interesses der Frauenemanzipation[2]. Es ist deshalb sehr schwer, ein klares Urteil über ihre wissenschaftliche Persönlichkeit zu gewinnen. Auf der einen Seite stehen die Enthusiasten, die ihre Heldin rühmen und preisen, auf der anderen Seite die Zweifler, die eher geneigt sind, ihr Leben und ihre Arbeiten zu verurteilen. Sicherheiten bietet uns keine der beiden Parteien, denn wir wissen ja alle, wie sehr Reklame und zu großes Lob und wieder zu herber Tadel das wahre Bild eines Menschen verzerren. Vielleicht ist am wertvollsten der Nachruf, den ihr Mittag-Leffler in den Acta math., Bd. 16, gewidmet hat.

[1]Dies ist nicht das erste Mal, daß eine Frau in Göttingen den Doktortitel erwarb; 100 Jahre vorher promovierte Dorothea Schlözer mit einer Arbeit über russische Finanzwirtschaft, betitelt De re metallica im Alter von 17 Jahren. — In dem Diplom der D. Schlözer finde ich die schöne Bezeichnung virgo erudita, die später leider durch das unsinnige domina doctissima abgelöst wurde.

[2]Über ihr Leben vgl. die in Reclams Universalbibliothek erschienene Biographie von A. Ch. Leffler, der Schwester Mittag-Lefflers.

Wir können uns hier natürlich nur mit einem kleinen Bruchstück ihrer Lebensschicksale, und mit diesen nur in aller Kürze befassen. Es handelt sich für uns um die Bedeutung ihrer mathematischen Arbeiten. Das erste, was uns auffällt, ist, daß ihre Arbeiten in enger Anlehnung und ganz im Stil von Weierstraß geschrieben sind, so daß man nicht sieht, wie weit sie unabhängige, eigene Gedanken enthalten[3]. Auch sind Zweifel an der Zuverlässigkeit ihrer späteren Resultate geäußert worden; vgl. Volterras Kritik der Arbeit über doppelt brechende Kristalle, ihrer Habilitationsschrift (veröffentlicht Acta math., Bd. 6, 1883), wo ihr ein prinzipieller Fehler nachgewiesen wird[4]; ebenso ist man mit der Arbeit über die Rotation nicht durchweg zufrieden.

Wie dem auch sei, eins ist sicher: Sonja Kowalevsky verband mit einem glühenden Interesse für die Mathematik eine große Auffassungsgabe und ebensolches Anpassungsvermögen. Es ist zu bewundern, daß sie trotz ihrer vielen Interessen auf andersgearteten Gebieten und trotz ihres wechselvollen Lebens so viel in der Mathematik geleistet hat. Und jedenfalls können wir ihr dafür dankbar sein, daß sie es vermocht hat, Weierstraß aus seiner Verschlossenheit, die er gegen jedermann sonst in menschlichen Dingen zeigte, herauszulocken und daß uns der Lehrer im Briefwechsel mit seiner vertrauten Schülerin persönlich nähertritt.

Nach diesem singulären Fall ist das Frauenstudium der Mathematik bei uns in Deutschland in sehr viel klarere Bahnen gelenkt worden, seit von Herbst 1893 an die preußische Regierung, zunächst in Göttingen, Hospitantinnen zuließ. Die erste Doktorin der Mathematik auf Grund regulären Examens 1895 war Grace Chisholm, jetzige Frau Young.

So haben wir nun mit der Darlegung der Theorie der komplexen Funktionen bei Riemann und Weierstraß und deren Weiterbildung einen Abschluß erreicht. Im übrigen wollen wir den letzten Bemerkungen entnehmen, wie die Mathematik in alle Probleme der modernen Kulturentwicklung hineingezogen wird. Wir hier in Göttingen sträuben uns nicht gegen das Moderne, aber wir wollen unseren Schwerpunkt in unserer eigenen Arbeit haben und festhalten.

[3]Die Briefe, welche Weierstraß anläßlich des Promotionsgesuches an die Göttinger Fakultät schickte, und in denen er sich näher über ihre damaligen mathematischen Leistungen äußerte, sind neuerdings von Wentscher und Schlesinger in Bd. 18 der Jahresberichte der D. M. V. (1909, S. 89 ff., S. 93ff.) abgedruckt worden.

[4]Acta math., Bd. 16 (1892/93), S. 153 ff.

Kapitel 7

Vertiefte Einsicht in das Wesen der algebraischen Gebilde.

Weiterführung der algebraischen Geometrie.

Seite 320–334

Theorie der algebraischen ganzen Zahlen und ihrer Wechselwirkung mit den algebraischen Funktionen.

Die Anfänge der Theorie, Einheiten, ideale Faktoren, Kummer

Unter einer ***algebraischen ganzen Zahl*** verstehen wir eine Wurzel x einer Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten, deren höchster Koeffizient 1 ist:

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} + a_n = 0.$$

Ist der letzte Koeffizient dieser Gleichung

$$a_n = \pm 1,$$

so ist auch $\frac{1}{x}$ eine ganze Zahl. Die Zahl x nennt man dann eine ***Einheit***.

Die „Einheitswurzeln" ζ (für die $\zeta^n = 1$ gilt) sind ganz spezielle Fälle dieser zahlentheoretischen Einheiten.

Es ist nun zweckmäßig, diejenigen algebraischen Zahlen zusammenzufassen, die sich durch einander rational (mit ganzzahligen Koeffizienten) ausdrücken lassen. Sie bilden einen Organismus, für den die Dedekindsche Benennung ***Körper*** allgemein geworden ist (es soll das an „Körperschaft" erinnern). Im Körper bilden dann die in ihm enthaltenen ganzen Zahlen einen „Integritätsbereich".

Diese ganzen Zahlen brauchen nicht äußerlich als solche zu erscheinen, z. B. sind $\zeta_1 = \frac{1+\sqrt{-5}}{\sqrt{2}}$, $\xi_2 = \frac{1-\sqrt{-5}}{\sqrt{2}}$ ganz, denn sie genügen der Gleichung

$$(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2) = \xi^2 - \sqrt{2} \cdot \xi + 3 = 0$$

und somit der ganzzahligen Gleichung vierten Grades

$$(\xi^2 + 3)^2 - 2\xi^2 = \xi^4 + 4\xi^2 + 9 = 0.$$

Ich werde nun dem historischen Entwicklungsgang folgen.

Den Grund zur Theorie der ganzen algebraischen Zahlen legte Gauss in seiner berühmten Abhandlung, ***Theoria residuorum biquadraticorum, Commentatio II***, die erst 1832 herauskam, in welcher er die Zahlen $a + bi$ ($i = \sqrt{-1}$) betrachtet (Werke, Bd. 2, S. 93 ff.).

In diesem Zahlkörper gibt es speziell vier Einheiten :

$$i^\lambda \qquad (\lambda = 0, 1, 2, 3),$$

welche ersichtlich Potenzen einer einzigen sind.

Gauß wendet sich gleich der Frage zu, welche für alles Folgende maßgebend geblieben ist: Gilt der Satz von der eindeutigen Zerlegung einer Zahl in Primfaktoren auch für den erweiterten Bereich? Das ist in der Tat der Fall, abgesehen davon, daß die einzelnen Faktoren mit beliebigen Einheiten multipliziert werden dürfen, falls nur das ganze Produkt ungeändert bleibt. Ist z. B. $A = A' \cdot A''$, so kann man auch schreiben $A = (iA') \cdot (-iA'')$.

Gauß verschmäht dabei nicht die geometrische Deutung durch das quadratische Zahlengitter, welche zugleich für den Zusammenhang mit den doppeltperiodischen Funktionen die Brücke schlägt. Auf dieses Zahlengitter bin ich schon in Kap. 1 (S. 35 ff.) eingegangen. Ich habe dort im Anschluß an Gauß gezeigt, wie sich die Zahlen des Körpers $\sqrt{-D}$ immer als Gitterpunkte eines Parallelogrammgitters interpretieren lassen, und wie diese Darstellung mit der sog. komplexen Multiplikation der elliptischen Funktionen zusammenhängt. Ich kann das leider hier nicht wieder aufnehmen, da ich zuerst eine Reihe von Hilfsvorstellungen erneut entwickeln müßte. Ich verweise lieber auf meine autographierten Vorlesungen über Zahlentheorie (1895/96), wo ich diese Darstellung genauer ausgeführt habe. Auch die höheren Fälle lassen sich so sehr anschaulich fassen. Vergleiche meine Andeutung von der Lübecker Naturforscherversammlung 1895 (Jahresberichte der DMV., Bd. 4[1]) und für kubische Irrationalitäten die Dissertation von Furtwängler, wo Gitter im dreidimensionalen Raume betrachtet werden und an ihnen alle Beweise geführt werden[2].

Hier liegt der Grund zutage, weshalb die höheren Zahlkörper mit den mehrfachperiodischen Funktionen zusammenhängen.

Doch ich kehre zurück zum historischen Berichte. Indem KUMMER sich mit dem ***Fermatschen Satze*** von der Unlösbarkeit der Gleichung

$$z^n = x^n + y^n \quad \text{für } n > 2$$

in ganzen Zahlen befaßte, den man auch schreiben kann

$$z^n \neq (x+y)(x+\varepsilon y)\cdots(x+\varepsilon^{n-1}y) \qquad \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}},$$

wurde er naturgemäß dazu geführt, sich mit der Faktorenzerlegung derjenigen Zahlen zu beschäftigen, die sich aus n-ten Einheitswurzeln aufbauen.

Er gelangt (Crelle, Bd. 35, 1847) zu dem Resultat, das seinen Ruhm begründete: Der Satz von der Eindeutigkeit der Zerlegung in Primfaktoren gilt für die Zahlen des Körpers $K(\varepsilon)$ nicht mehr; er kommt aber wieder zum Vorschein, wenn man geeignete algebraische Zahlen, die dem $K(\varepsilon)$ nicht angehören und die Kummer darum ***ideale Zahlen*** nennt, hinzunimmt.

Kummer selbst hat schon bemerkt, daß das gleiche bereits bei dem Körper $K(\sqrt{-D})$, d.h. bei einem quadratischen Körper der Fall ist.

Das niederste Beispiel dafür liefert der Körper $K(\sqrt{-5})$. Hier handelt es sich um die Zahlen $a + b\sqrt{-5}$. In ihrem Bereiche sind 2 und 3 unzerlegbar. Denn angenommen z. B. 2 wäre zerlegbar, also

$$2 = (a + b\sqrt{-5})(c + d\sqrt{-5});$$

dann wäre $4 = (a^2 + 5b^2)(c^2 + 5d^2)$ also $2 = a^2 + 5b^2$, d. h. 2 wäre quadratischer Rest modulo 5, was nicht der Fall ist. Also ist 2 (und ebenso 3) eine „Primzahl“; trotzdem ist

[1] Vgl. auch KLEIN: Ges. Abh. Bd. 3, Nr, XCIV.

[2] Vgl. auch KLEIN: Ges. Abh. Bd. 3, S. 8, sowie FURTWÄNGLER, Punktgitter und Idealtheorie, Math. Ann. Bd. 82 (1920).

die Zerlegung von 6 keine eindeutige, denn es ist

$$6 = 2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5}).$$

Dieses Paradoxon wird nun beseitigt, wenn man geeignete ideale Zahlen adjungiert. Man kann dies auf verschiedene Weisen machen, denn die Faktorenzerlegung läßt sich ja immer durch Einheiten modifizieren.

In meiner Gittertheorie adjungiert man $\sqrt{2}$. Wie wir gesehen haben (S. 320), ist $\frac{1 \pm \sqrt{-5}}{\sqrt{2}}$ eine algebraische ganze Zahl. Wir haben dann die Zerlegungen

$$2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}, \qquad 3 = \frac{1 + \sqrt{-5}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1 - \sqrt{-5}}{\sqrt{2}}$$

und es ist gar nicht mehr verwunderlich, daß

$$2 \cdot 3 = \left(\sqrt{2}\,\frac{1 + \sqrt{-5}}{\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{2}\,\frac{1 - \sqrt{-5}}{\sqrt{2}}\right)$$

ist!

In der Theorie der sog. **Klassenkörper**, wie sie Hilbert vertritt, adjungiert man statt dessen i. Es ist

$$2 = (1 + i)(1 - i), \qquad 3 = \frac{1 + \sqrt{-5}}{1 + i} \cdot \frac{1 - \sqrt{-5}}{1 - i},$$

was wieder zwei ganze Zahlen sind, an die sich dieselbe Überlegung wie vorhin knüpft.

Diese Adjunktionen können so verschieden sein, weil aus $\sqrt{2}$ eine Zahl des Körpers $K(i)$ wird, wenn man sie mit einer geeigneten Einheit, nämlich mit

$$\omega = \frac{1 + i}{\sqrt{2}}$$

multipliziert. Beiläufig bemerkt, ist dies sogar eine algebraische Einheitswurzel, indem $\omega^8 = 1$ ist.

Ich habe das so ausführlich erklärt, weil sich mit dem Begriffe der „idealen Zahl“ vielfach eine mystische Unklarheit verbindet. Kummer selbst ist daran schuld (so gut er die Sachlage kannte), da er sich an verschiedenen Stellen beinahe so ausdrückt, als handle es sich um Faktoren, die gar nicht in concreto vorhanden sind, sondern nur symbolisch gedacht werden. Er macht dabei ein unglückliches chemisches Gleichnis, indem er sich auf das Fluor beruft, welches die Chemiker als ein Gas bezeichnen, trotzdem es sich nie selbständig habe isolieren lassen. — Da sieht man, was es mit der dialektischen Logik auf sich hat. Längst ist Moisson gekommen und hat das Fluor in Flußspatgefäßen mit Platinelektroden wirklich isoliert!

Verallgemeinerung bei Kronecker und Dedekind, Ideale

Die Theorie der Zerlegung in Einheiten und reale oder ideale Primfaktoren wurde dann von Kronecker und Dedekind auf beliebige algebraische Zahlen ausgedehnt.

Es ist nun schwer, einen historisch zutreffenden Bericht zu machen, weil Kronecker seine Ideen oder doch das Vorhandensein seiner Resultate von 1858 an gesprächsweise verbreitete, aber seine Abhandlung darüber: **„Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Größen"**, erst 1881/82 in Crelle, Bd. 92, der Festschrift zu Kummers goldenem Doktor Jubiläum, veröffentlichte, während Dedekind die zweite Auflage der von ihm herausgegebenen Dirichletschen Zahlentheorie (1871) benutzte, um in einem Supplemente seine Theorie zu entwickeln.

Dedekind nimmt dabei eine Wendung zum Abstrakten, welche die Sache im Prinzip sehr vereinfacht und daher für die Denkweise und Darstellungsweise der Jüngeren vielfach vorbildlich geworden ist, während die älteren Forscher, z. B. Kronecker (in Crelle, Bd. 99, S. 336) sich damit nicht befreunden konnten.

Statt nämlich vom (realen oder idealen) Faktor zu sprechen, redet er von der ***Gesamtheit*** der ganzen Zahlen des vorgelegten Körpers, die durch den Faktor teilbar sind.

Statt des Faktors 2 würde er bei der natürlichen Zahlenreihe alle Zahlen $2m$ betrachten, statt des Faktors $\sqrt{2}$ oder $1+i$ im Körper $K(\sqrt{-5})$ die Zahlen $2\mu + (1+\sqrt{-5})\nu$, wo μ und ν selbst beliebige ganze Zahlen des Körpers $K(\sqrt{-5})$ sind.

Der Vorteil dabei ist, daß man von den willkürlichen arithmetischen Einheiten frei wird, der Nachteil, daß man sich daran gewöhnen muß, das Produkt zweier Zahlen durch das Verhalten der korrespondierenden Gesamtheiten auszudrücken.

Z.B. $2 \cdot 3 = 6$ heißt jetzt: die Gesamtheit der durch 2 und die Gesamtheit der durch 3 teilbaren Zahlen haben die Gesamtheit der durch 6 teilbaren Zahlen gemein.

Unangenehm ist mir nur immer Dedekinds Terminologie gewesen, welche aller Anschaulichkeit entbehrt. Er nennt diese Gesamtheiten ***Ideale***, und wenn ein „wirklicher" gemeinsamer Faktor vorhanden ist, ***Hauptideale***! (z. B. ist $2\mu + 2\nu\sqrt{-5}$ ein Hauptideal, da hier der wirkliche Faktor 2 auftritt). Er hätte von „Realen" sprechen sollen. Denn es handelt sich um Zahlenaggregate,. die in dem gerade vorgelegten Integritätsbereich tatsächlich vorhanden sind.

Es ist mir hier unmöglich, auf diese rein zahlentheoretischen Untersuchungen näher einzugehen. Zusammengefaßt, aber gleichzeitig außerordentlich weiterentwickelt und vereinfacht finden sich diese in Hilberts „Zahlbericht" in Bd. 4 der Jahresberichte der DMV. (1897): ***„Die Theorie der algebraischen Zahlkörper."*** Auf die Gesichtspunkte, welche Hilbert dabei leiteten, kommen wir noch später zurück. Diese Theorie ist auch wiedergegeben im zweiten Bande von Webers Algebra (2. Auflage 1899).

Analogie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen; Dedekind, Weber, Weierstraß

Nun kommt eine neue Gedankenwendung, die durch Kronecker vorbereitet und von Dedekind und Weber ganz klar herausgearbeitet wurde (Crelle, Bd. 92, 1882 „Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen"). Es zeigt sich nämlich, daß man eine weitgehende Analogie zwischen der zahlentheoretischen Betrachtung (der ganzen Zahlen eines Zahlkörpers) und der funktionentheoretischen (der algebraischen Funktionen auf einer über der z-Ebene ausgebreiteten Riemannschen Fläche) herstellen kann.

Am besten erkennt man die Vergleichspunkte an Hand einer Tabelle, während man wegen des daraus folgenden methodischen Verfahrens bei Dedekind-Weber nachsehen mag.

Arithmetisch	*Funktionentheoretisch*
Ausgangspunkt eine ganzzahlige irreduzible Gleichung $f(x) = 0$.	Ausgangspunkt eine irreduzible Gleichung $f(\zeta, z) = 0$, welche z rational enthält (deren Koeffizienten also nach Heraufmultiplizieren mit dem Generalnenner ganze rationale Funktionen von z sind, mit irgendwelchen Koeffizienten, die hier nicht interessieren).
Körper aller $R(x)$.	Körper aller $R(\zeta, z)$, d.h. aller algebraischen Funktionen, die auf der Riemannschen Fläche eindeutig sind.
Herausheben der ganzen algebraischen Zahlen des Körpers.	Herausheben der ganzen algebraischen Funktionen des Körpers, d. h. derjenigen Funktionen $G(\zeta, z)$, die nur für $z = \infty$ unendlich werden.
Zerlegung in reale und ideale Primfaktoren bzw. Einheiten.	Ideelle Zerlegung der Funktionen $G(\zeta, z)$ in solche Faktoren, deren jeder nur in einem Punkte der Riemannschen Fläche verschwindet bzw. in Bestandteile, die nirgends verschwinden.

Besonders deutlich tritt diese Analogie hervor, wenn wir die ***Diskriminanten*** betrachten. Diese zerfallen im funktionentheoretischen Falle in zwei Teiler, in einen „wesentlichen Teiler“, der den Verzweigungspunkten der Riemannschen Fläche entspricht, und einen „außerwesentlichen Teiler“, der solchen Stellen entspricht, wo die Kurve $f(\zeta, z) = 0$ einen Doppelpunkt hat (wo zwei Verzweigungspunkte sich aufheben). Dieser zweite Bestandteil heißt außerwesentlich, weil er sich ändert, wenn man das anfängliche ζ durch eine andere Funktion des Körpers ersetzt.

Genau so ist es im zahlentheoretischen Falle. Dabei sind es die Primfaktoren des ***wesentlichen*** Teilers der Diskriminante von $f(x) = 0$, die den Verzweigungspunkten von $f(\zeta, z) = 0$ entsprechend gesetzt werden können.

Ich will nun die ideelle Zerlegung einer $G(\zeta, z)$ entsprechend dem früheren arithmetischen Beispiel, an einem Beispiel erörtern, das uns unmittelbar zur Hand ist.

Wir nehmen als Ausgangsgleichung

$$\zeta^2 = 4z^3 - g_2 z - g_3 = 4(z - e_1)(z - e_2)(z - e_3).$$

Wir betrachten nun die ganze Funktion ζ, gewiß das einfachste Beispiel. Der wesentliche Teiler der Diskriminante (einen außerwesentlichen gibt es hier nicht) ist:

$$(z - e_1)(z - e_2)(z - e_3).$$

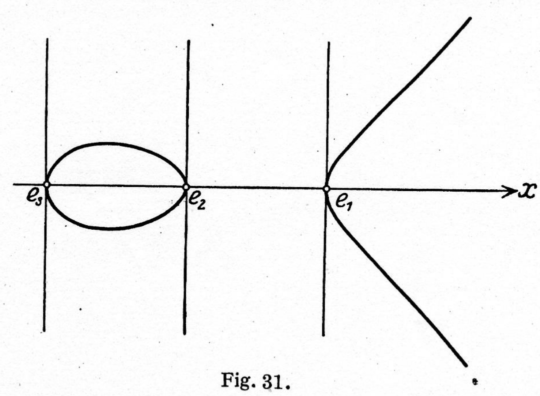


Fig. 31.

Die Punkte $z = e_1, e_2, e_3$ sind in der Tat die Verzweigungspunkte der Riemannschen Fläche, denn die Tangenten in diesen Punkten und nur in ihnen sind parallel zur Ordinatenachse (vgl. Fig. 31). Die ganze Funktion ζ verschwindet in e_1, e_2, e_3 je einfach. Wir können aber keine ganze Funktion des Körpers bilden, die nur in e_1 bzw. e_2 oder e_3 einfach verschwindet. Die ganzen Funktionen $z-e_1, z-e_2, z-e_3$ verschwinden dort nämlich, weil sie gleich Null gesetzt, Tangenten der Kurve vorstellen, doppelt. Wohl aber können wir den idealen Faktor realisieren, wenn wir aus dem Körper $R(\zeta, z)$ heraustreten; wir brauchen nur die auf der Riemannschen Fläche zweiwertigen „Wurzelfunktionen“, $\sqrt{z - e_t}$, $\sqrt{z - e_2}$, $\sqrt{z - e_s}$ ins Auge.zu fassen. Es ist dann

$$\zeta = 2\sqrt{z - e_1}\sqrt{z - e_2}\sqrt{z - e_3},$$

womit wir die idealen Faktoren von ζ vor Augen haben.

Eine noch weitergehende Adjunktion, die über die Analogie mit der Zahlentheorie hinausgeht, ist es, wenn ich das zugehörige Integral erster Gattung u heranziehe und mit seiner Hilfe mir die Funktion $\sigma(u-u_0)$ bilde, die auf der Riemannschen Fläche zwar unendlichwertig ist, aber nur an der einen Stelle, der die Parameterwerte $u_0+m_1\omega_1+m_2\omega_2$ zugehören, verschwindet. In demselben Sinne würden $\sigma(u-\frac{\omega_i}{2}) \quad (i=1,2,3)$ drei Primfaktoren sein, den Punkten e_1, e_2, e_s entsprechend. Aber da sie gar keinen Unendlichkeitspunkt haben, muß man jeden noch mit dem Nenner $\sigma(u)$ versehen, der bei $z=\infty$ einfach verschwindet. Solcherweise kommt

$$\wp'(u) = E\cdot\frac{\sigma(u-\frac{\omega_1}{2})\,\sigma(u-\frac{\omega_2}{2})\,\sigma(u-\frac{\omega_3}{2})}{\sigma^3(u)}$$

unter E eine nirgends verschwindende Funktion, d. h. eine „Einheit“ verstanden. Es erweist sich, daß diese Einheit gleich einem Ausdruck Ce^{cu} ist. Indem wir ihn auf die drei Faktoren des Zählers in geeigneter Weise verteilen, bekommen wir die übliche Produktformel:

$$\wp'(u) = 2\frac{\sigma_1(u)\,\sigma_2(u)\,\sigma_3(u)}{\sigma^3(u)}.$$

In dieser transzendenten Weise dachte sich Weierstrass die Übertragung der zahlentheoretischen Grundbegriffe.

Ich kann leider hier nicht ausführen, wie sich das für höhere Fälle gestaltet. Man vergleiche u. a. meine Arbeit in den Math. Ann., Bd. 36 (1889), wo die Sache für höheres Geschlecht auf ihren einfachsten Ausdruck gebracht ist[3]. An Stelle von $\sigma(u)$ tritt meine „Primform“. (Es ist das dieselbe Arbeit, die ich schon S. 312 zitiert habe.)

Weitere Schicksale der Theorie Dedekind-Weber

Ich habe nun den Bericht über die algebraischen Zahlkörper zu Ende zu führen, und zwar möchte ich wieder die Analogie, die zwischen Zahlkörper und Funktionenkörper besteht, besonders beleuchten, um dadurch die gegenseitige Stellung großer Gebiete der modernen Literatur klarzumachen und insbesondere, um das innere Verständnis für das ***Lehrbuch der Algebra*** von H. Weber (2. Auflage, drei Bände, 1898, 1899, 1908) in seinen Hauptzügen zu wecken.

Ich habe zunächst noch auf die grundlegende Arbeit von Dedekind und Weber in Crelle, Bd. 92, zurückzugreifen.

Man kann sich denken, wie auch hier der „ideale Faktor“, der nur in einem Punkte der Riemannschen Fläche (einfach) verschwindet, durch das korrespondierende „Ideal“ ersetzt wird, d. h. durch die Gesamtheit der ganzen Funktionen des Körpers selbst, die im betreffenden Punkte der Riemannschen Fläche verschwinden.

Die Einführung dieses Begriffes ist nur etwas Äußerliches. Viel wichtiger ist dagegen der Fortschritt, den die Verfasser machen, indem sie auch die Beweismethoden der Arithmetik auf die Behandlung des Körpers der algebraischen Funktionen übertragen. Da ist keine Rede mehr, wie bei Clebsch und seinen Schülern, von einer Kurve und allerlei geometrischen Hilfsvorstellungen, ebensowenig von einer Riemannschen Fläche oder auch nur von einer z-Ebene, sondern es wird rein arithmetisch mit einem Polynom $f(\zeta, z)$ operiert, das nach Potenzen von ζ und z geordnet ist. Mit Hilfe von arithmetischen Schlüssen gelingt es den Verfassern z. B. ziemlich rasch, bis zum Riemann-Rochschen Satze vorzudringen.

Der Fortschritt ist, daß diese Behandlungsweise, welche der Phantasie keinen unbestimmten Spielraum läßt, alle Fälle von Singularitäten, welche die Gleichung $f(\zeta, z) = 0$

[3] Klein: Ges. Abh. Bd. 3, S. 388 ff.

besitzen mag, mit Sicherheit berücksichtigt. Bei Riemann ist das im Prinzip auch so, und Noether insbesondere hat für die „Kurven“ $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ alle Mittel gegeben, um geometrisch-algebraisch dasselbe zu leisten, aber man muß bei diesen Autoren doch etwas zwischen den Zeilen lesen.

Nun hat in der Folge eine Teilung der Geister stattgefunden. Die einen, die wir oben genannt haben — insbesondere die Italiener —, halten an dem Bilde der algebraischen Kurve, oder der algebraischen Fläche, oder was es nach der Zahl der Parameter sein mag, fest und üben das geometrische Denken nach der méthode mixte bei beliebig vielen Dimensionen. Die anderen, wie Hensel und Landsberg und für zweidimensionale Gebiete Jung, ziehen das arithmetische Verfahren vor. Es geht dann wie bei dem Turmbau von Babel, daß sich die verschiedenen Sprachen bald nicht mehr verstehen. Und man *will*, weil es so unbequem ist sich umzugewöhnen, sich vielfach nicht mehr verstehen. Jedenfalls haben wir bei der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften zwei Referate neben einander ansetzen müssen. Das „geometrische“ Referat von Castelnuovo-Enriques liegt in Bd. III (C 6b) vor. (Die Bemerkungen über Jung in dem Inhaltsverzeichnis sind nur mit großer Mühe von mir durchgesetzt worden.) Das „arithmetische“ Referat ist von Hensel[4]; eine gute Einleitung ist das von Landsberg in Bd. 1 der Enzyklopädie (I B 1c).

Diese Tendenz, die Wissenschaft nicht nur in immer zahlreichere Einzelkapitel zu zerlegen, sondern Schulunterschiede nach der Art der Behandlung zu schaffen, würde, wenn sie einseitig zur Geltung käme, den Tod der Wissenschaft herbeiführen. Wir selbst haben immer das Umgekehrte angestrebt. In unserer Generation haben wir 1. Invariantentheorie, 2. Gleichungstheorie, 3. Funktionentheorie, 4. Geometrie und 5. Zahlentheorie mehr oder weniger in Kontakt gehalten, und das war unser besonderer Stolz.

Heinrich Weber, der seine besten Jahre (von 1875–83) in Königsberg verlebte, ist wohl der vielseitigste Vertreter dieser Tendenz. Und glücklicherweise findet sich um 1885 für fast wieder ein Jahrzehnt, eben auch wieder in Königsberg, ein Dreibund junger Forscher zusammen, welche diese Tendenz in neuer Weise in die Tat umsetzen und damit denjenigen Standpunkt schaffen, von dem aus die Neuzeit, wenn sie es vermag, weiterzugehen hat. Es sind dies Hurwitz, Hilbert und Minkowski.

Hurwitz, Hilbert, Minkowski

Hurwitz, geb. 1859, hat ursprünglich bei mir studiert, in München und Leipzig, dann in Berlin und sich in Göttingen habilitiert. Von 1884–92 war er in Königsberg Extraordinarius und dann Ordinarius in Zürich am Polytechnikum[5].

Hilbert, geb. 1862 in Königsberg, hat dort, mit kurzen Unterbrechungen, die wesentlichen Stufen seiner Entwicklung durchlaufen: Student, Dozent, Extraordinarius, bis er 1895 als Ordinarius nach Göttingen kam.

Auch Minkowski, geb. 1864, hat in Königsberg studiert und ist von 1888–96 dort Privatdozent und Extraordinarius gewesen. Dann war er in Zürich und von 1902–09 (bis zu seinem frühen Tode) in Göttingen.

Ich will meinen Bericht an die Hilbertschen Untersuchungen anschließen, die ich nicht nur deshalb bevorzuge, weil sie uns hier am nächsten liegen, sondern weil sie am durchgreifendsten sind. Schließlich gehören die Arbeiten der drei aber doch zusammen, und so möchte ich über Hurwitz und Minkowski hier vorweg ein paar Worte sagen, welche deren Arbeitsweise charakterisieren sollen.

Man hat Hurwitz einen Aphoristiker genannt. In voller Beherrschung der in Betracht kommenden Disziplinen sucht er sich hier und dort ein wichtiges Problem heraus, das er

[4] II C 5; erschienen 1921.
[5] Gest. 1919.

jeweils um ein bedeutendes Stück fördert. Jede seiner Arbeiten steht für sich und ist ein abgeschlossenes Werk.

MINKOWSKIs hier in Betracht kommende Arbeiten beruhen zumeist auf der Verbindung durchsichtiger geometrischer Anschauung mit zahlentheoretischen Problemen. Der Zusammenhang dieser Gebiete wird wieder durch das Zahlengitter hergestellt. Minkowski hat die Theorie der Raumgitter nach vielen Richtungen weiter ausgebildet. Es finden sich bei ihm eine innere Verwandtschaft mit Dirichletscher Denkweise. Vergleiche seine mehr pädagogisch gehaltenen Vorträge über „*Diophantische Approximationen*", 1908. Andererseits will ich hier erneut auf meine eigenen zahlentheoretischen Vorlesungen und auf das, was ich schon oben in Kap. 1, S. 35 ff., über Gitter in der Ebene sagte, verweisen. Ich selbst habe mich seinerzeit darauf beschränkt, gewisse schon bekannte Grundlagen geometrisch klarzustellen, während Minkowski Neues zu finden unternahm. Diese Untersuchungen zeigen deutlich, daß Geometrie und Zahlentheorie keineswegs einander ausschließen, sofern man sich in der Geometrie nur entschließt, diskontinuierliche Objekte zu betrachten.

HILBERTs rastloser Geist hat im Laufe der Jahre wechselnd sich auf den verschiedensten Gebieten der Mathematik betätigt. Die Arbeiten, die uns gegenwärtig interessieren, und die man die Gedichte erster Periode nennen könnte, gehen von 1883 bis etwa 1898. Hilbert hat, seitdem er in Göttingen wirkt, immer zahlreiche Schüler angezogen (in Königsberg war dazu noch wenig Gelegenheit, zumal in den damaligen Jahren die mathematische Frequenz unserer Universitäten auf ein Minimum herabgesunken war). Aber die Schüler beherrschen immer nur das eine Gebiet, das sie gerade bei Hilbert gelernt haben, und kennen wohl meist nicht die Zusammenhänge, die uns hier in erster Linie interessieren.

Hilbert, Theorie der algebraischen Formen

Wir werden hier zwei Arbeiten von Hilbert charakterisieren. Zunächst die Arbeit über die *Theorie der algebraischen Formen*, Math. Ann., Bd. 36 (1890), wo Kroneckersche Ansätze mit Dedekindscher Denkweise zum Abschluß gebracht und davon eine glänzende Anwendung auf die Probleme der Invariantentheorie gemacht wird.

Wir erwähnen vor allen Dingen den Satz, daß jedes algebraische Gebilde beliebiger Ausdehnung in einem Raume von beliebig vielen homogenen Variablen $x_1, \ldots, x_n$ immer so durch eine endliche Anzahl homogener Gleichungen

$$F_1 = 0, F_2 = 0, \ldots, F_\mu = 0$$

dargestellt werden kann, daß die Gleichung $F = 0$ jedes anderen durch das Gebilde hindurchgehenden Gebildes in der Gestalt angeschrieben werden kann:

$$M_1 F_1 + \ldots + M_\mu F_\mu = 0,$$

wo die M beliebige homogene (rationale, ganze) Formen sind, deren Grade nur so gewählt werden müssen, daß die linke Seite der Gleichung selbst wieder homogen ist.

Nach der in der Zahlentheorie von Gauß herrührenden Ausdrucksweise wird man sagen: Jede Form F, die unser Gebilde enthält, ist modulis $F_1, F_2, \ldots, F_\mu$ kongruent Null. — Im übrigen schließt sich Hilbert der Dedekindschen Denkweise so weitgehend an, daß er die Gesamtheit unserer Formen selbst einen *Modul* nennt! Der Hilbertsche Satz heißt dann: Jedes algebraische Gebilde des R_n bedingt das Verschwinden eines „*endlichen* Moduls“[6].

[6] In neuerer Zeit nennt man in Anlehnung an Dedekind die im Texte besprochene Gesamtheit ein *Ideal* und wendet die Bezeichnung „Modul“ für allgemeinere Gesamtheiten an. Anm. d. Herausg. [Richard Courant und Otto Neugebauer]

Beispiel: Raumkurve dritter Ordnung

Als Beispiel wähle ich die Raumkurve dritter Ordnung. Diese wird durch den partiellen Schnitt zweier F_2 erhalten. Man sieht das folgendermaßen ein: Wir denken uns die gegebene C_3 wieder auf einem einschaligen Hyperboloid liegen (vgl. oben S. 317 und Fig. 28, S. 319) und projizieren sie auf die Ebene. Die entsprechende ebene Kurve dritter Ordnung möge im Punkte O_2 einen Doppelpunkt haben (vgl. Fig. 32). Ziehen wir nun durch den anderen Fundamentalpunkt O_1 eine Gerade, so können wir diese Gerade und die C_3 zusammen als C_4 erster Spezies auffassen. Dieser C_4 entspricht im Raume der volle Schnitt einer F_2 mit dem Hyperboloid. Eine F_2, die das Hyperboloid in einer C_3 schneidet, hat also mit diesem außerdem noch eine Erzeugende gemein. Durch beide geht natürlich ein ganzes Büschel von Flächen zweiten Grades, nämlich $\lambda F_2 + \mu H = 0$ (unter $H = 0$ die Gleichung des Hyperboloids verstanden). Entsprechend dem Geradenbüschel durch O_1 gibt es eine einfach-unendliche Schar von Büscheln $\lambda F_2 + \mu H = 0$, die das Hyperboloid in der C_3 und je in einer Erzeugenden schneiden, womit ich ∞^2 Flächen zweiten Grades erhalte $\lambda F_2 + \lambda' F_2' + \mu H = 0$, die durch die C_3 gehen. Es fragt sich nun, wieviele Flächen $F_1, \ldots, F_\mu$ muß man durch die C_3 legen, damit jede andere durch die C_3 gehende Fläche F in der gewünschten Gestalt

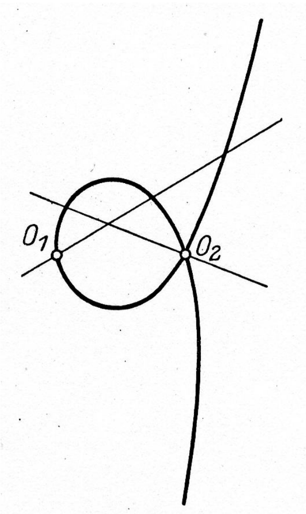


Fig. 32.

$$F = M_1 F_1 + M_2 F_2 + \ldots + M_\mu F_\mu = 0$$

erscheint? Es zeigt sich, daß dazu die **drei** Flächen zweiten Grades F_2, F_2' und H genügen.

Den zugehörigen dreigliedrigen Modul erhalten wir am einfachsten, indem wir die drei Unterdeterminanten einer Matrix von $2 \cdot 3$ linearen Formen gleich Null setzen. Diese Matrix sei

$$\begin{pmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{pmatrix}.$$

Dann sind

$$F_\kappa = q_\lambda r_\mu - r_\lambda q_\mu = 0 \quad (\kappa, \lambda, \mu = 1, 2, 3)$$

Flächen zweiten Grades, die nur eine C_3 gemein haben, und die zugleich den zugehörigen Modul definieren.

Der Beweis des Hilbertschen Satzes und anderer Sätze ist sehr abstrakt, aber an sich ganz einfach und darum logisch zwingend. Eben darum leitet diese Arbeit von Hilbert eine neue Epoche der algebraischen Geometrie ein.

Ebenso einfach ist dann auch die Anwendung auf die Invariantentheorie, die ich hier noch weniger zergliedern kann. Die ganze Frage der Endlichkeit der Invarianten, welche Gordan seinerzeit nur mit umfangreichen Rechnungen für binäre Formen hatte erledigen können (vgl. oben S. 308), wird hier mit einem Schlage für Formen mit beliebig vielen Veränderlichen gelöst.

Ihrer Eigenart entsprechend wurde diese Arbeit zunächst mit sehr verschiedener Stimmung aufgenommen. Mich hat sie damals bestimmt, Hilbert bei nächster Gelegenheit nach Göttingen zu ziehen. Gordan war anfangs ablehnend: „Das ist nicht Mathematik, das ist Theologie.“ Später sagte er dann wohl: „Ich habe mich überzeugt, daß auch die Theologie ihre Vorzüge hat.“ In der Tat hat er den Beweis des Hilbertschen Grundtheorems selbst später sehr vereinfacht (Münchener Naturforscherversammlung 1899).

Hilberts Zahlbericht

An zweiter Stelle nennen wir den schon (S. 324) angeführten ***Zahlbericht*** von 1897, der sich äußerlich als ein Referat über die vorhandene Literatur gibt, aber nicht nur diese überall auf einfachere Grundlagen zurückführt, sondern weitgehend in neue Fragestellungen vorstößt.

Ich möchte von dem inneren Gedanken, der Hilbert dabei geleitet hat, nämlich der Analogie der Zahlkörper mit den Funktionenkörpern, einen Begriff geben, und zwar um so lieber, als sich Hilbert selbst hierüber erst später und nur beiläufig ausgesprochen hat, nämlich in seinem Vortrag über „Mathematische Probleme“ auf dem Pariser Internationalen Mathematiker-Kongreß, 1900 (Bericht S. 58 ff.; Göttinger Nachrichten 1900; siehe Nr. 12 daselbst).

Exkurs über Galoissche Theorie

Aber um hier verständlich zu reden, muß ich (unter Berufung auf Kap. 2, S. 89 ff.) eine Einschaltung machen über die ***Galoissche Theorie*** der algebraischen Gleichungen. Ich resümiere die Hauptpunkte.

Die Grundlage der Galoisschen Theorie ist, wie ich damals schon ausführte, der Begriff des ***Rationalitätsbereiches***. — Als rational können angesehen werden: zunächst entweder nur die Zahlen $\frac{m}{n}$, wo m und n gewöhnliche ganze Zahlen sind, oder alle rationalen Funktionen irgendwelcher Parameter $r(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ mit rationalen oder auch beliebigen Koeffizienten. Ferner kann man den Rationalitätsbereich noch erweitern, indem man irgendwelche feste algebraische Irrationalitäten, z. B. bestimmte Einheitswurzeln, adjungiert und alle Funktionen, die aus solchen Irrationalitäten rational aufgebaut sind, zum Bereiche zählt. Endlich kann man noch den Rationalitätsbereich relativ zu einer über der z-Ebene ausgebreiteten Riemannschen Fläche definieren.

Der zweite Grundbegriff ist der der ***Irreduzibilität*** einer Gleichung. Es sei eine Gleichung

$$f(x) = 0$$

vorgelegt, deren Koeffizienten rationale Zahlen oder rationale Funktionen irgendwelcher Parameter oder auch adjungierter Irrationalitäten sein mögen. Die Gleichung ist „reduzibel“, wenn sie sich im vorgegebenen Rationalitätsbereiche in Faktoren spalten läßt. Z. B. ist die Gleichung

$$x^2 + 5 = 0$$

„irreduzibel“ im gewöhnlichen Rationalitätsbereiche der Zahlen $\frac{m}{n}$. Adjungieren wir $\sqrt{-5}$, so wird sie reduzibel:

$$x^2 + 5 = (x + \sqrt{-5})(x - \sqrt{-5}).$$

Die „Irreduzibilität“ einer Gleichung ist also ein relativer Begriff, sie ist immer bezogen auf den vorher definierten Rationalitätsbereich.

Die Gleichung $f(x) = 0$ sei nun im gegebenen Rationalitätsbereiche irreduzibel. Ihre Wurzeln seien $x_1, \ldots, x_n$.

Dann gibt es eine Gruppe von Vertauschungen der $x_1, \ldots, x_n$, welche die ***Galoissche Gruppe*** genannt wird und die folgenden zwei Eigenschaften hat:

a) Jede Funktion $R(x_1, \ldots, x_n)$, welche bei den Vertauschungen der Gruppe numerisch ungeändert bleibt, ist rational bekannt.

b) Umgekehrt bleibt jede rationale Funktion $R(x_1 t \ldots, x_n)$, die einen rationalen Wert hat, bei den Vertauschungen der Gruppe numerisch ungeändert.

Von der Struktur dieser Gruppe (ihren Untergruppen usw.) hängt es ab, was man über die Auflösbarkeit der Gleichung, über die Art ihrer Resolventen usw. sagen kann. —

Das Wesentliche für uns ist hier, daß die Galoissche Theorie sowohl für numerische Gleichungen $f(x) = 0$, die einen Parameter enthalten, als auch für Funktionenkörper gilt.

Betrachten wir zunächst den letzteren Fall. Rational soll also heißen, was eine rationale Funktion von z ist, wobei wir von der numerischen Natur der in diesen rationalen Funktionen vorkommenden Koeffizienten ganz absehen wollen. In diesem Falle haben wir eine anschauliche Art, den Begriffen „Irreduzibilität" und „Gruppe" nahezukommen :

Wir konstruieren uns zunächst über der z-Ebene die zu ζ gehörige Riemannsche Fläche. Wenn diese Fläche aus ***einem*** Stücke besteht, so ist die Gleichung irreduzibel und umgekehrt!

Wir wollen uns jetzt die Verzweigungsstellen $a, b, \ldots, k$ der Gleichung $f(\zeta, z) = 0$ in der z-Ebene markieren und durch eine beliebige Kurve ohne Doppelpunkte verbinden. Schneiden wir nun längs dieser Kurve alle Blätter der Riemannschen Fläche zugleich durch, so zerfällt diese in n getrennte Blätter, die wir mit $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ bezeichnen wollen. Über den Verzweigungspunkten können natürlich gewisse Blätter der Riemannschen Fläche schlicht verlaufen. Wir schreiben uns für jedes Stück des Schnittes zwischen zwei Verzweigungspunkten auf, wie dort die Blätter an einander geheftet sind, d. h. wir stellen eine Tabelle des Blätterzusammenhanges auf. So oft wir unseren Schnitt überschreiten, so findet eine Vertauschung der Blätter statt, die wir aus unserer Tabelle ablesen können.

Indem wir z alle möglichen geschlossenen Wege durchlaufen lassen, erhalten wir eine Gruppe von Vertauschungen, die wir sonst die ***Monodromiegruppe der Gleichung*** nannten. (Diesen Ausdruck gebrauchten wir schon in dem allgemeinen Falle der linearen Differentialgleichungen vgl. S. 268.) Diese Monodromiegruppe ist bei Zugrundelegung des von uns verabredeten Rationalitatsbereiches die ***Galoissche*** Gruppe der vorgelegten Gleichung. Denn es ist klar

1. daß jede Funktion $R(\zeta, z)$, die dabei ungeändert bleibt, eben deshalb, eine rationale Funktion von z allein ist (eine algebraische Funktion von z, die eindeutig ist, ist rational),

2. daß jede rationale Funktion $r(z)$, weil sie eindeutig ist, bei den Umläufen der z gewiß ungeändert bleibt.

Wir sehen, wie unsere Riemannsche Fläche, wenn eben wir den Parameter z der Definition des Rationalitätsbereichs zugrunde legen, mit den Galoisschen Ideen zusammenhängt, und wie diese wiederum mit Hilfe der Riemannschen Fläche veranschaulicht werden können: Statt die Riemannsche Fläche zu geben, kann ich die Verzweigungsstellen $a, b, \ldots, k$ vorschreiben und angeben, welche Vertauschungsgruppen durch deren Umlaufung zustande kommen. Damit gehen wir sozusagen von Riemann zurück zu Puiseux, der schon 1851 solche Gruppen aufgestellt hat[7].

Übertragung auf die Zahlkörper

Hierin aber liegt die wunderbare Möglichkeit, nicht die Riemannsche Fläche selbst, aber die aus ihrer Betrachtung folgenden Theoreme oder wenigstens die Fragestellungen auf ***Zahlkörper*** zu übertragen. Denn an Stelle der Verzweigungsstellen $a, b, \ldots, k$ treten, wie wir bereits wissen, die Primfaktoren des „wesentlichen" Teilers der Diskriminante, und der Galoisschen Gruppe im algebraischen Funktionenkörper entspricht natürlich die Galoissche Gruppe im Zahlkörper.

[7] Vgl. Enzyklop. I B 3c, d S. 487.

Dieses Entsprechen wird nun dadurch für die Zahlentheorie sehr fruchtbar, daß man für die Riemannsche Fläche Sätze kennt, die über unsere algebraischen Hilfsmittel hinausliegen, und deren Analogie für den Zahlkörper man nun suchen kann.

Da ist vor allen Dingen der Riemannsche Existenzsatz, den wir hier so aussprechen: Zu jeder über der z-Ebene vorgegebenen algebraischen Riemannschen Fläche gehört ein Körper $R(\zeta, z)$.

Ferner kann man fragen: Was entspricht im Zahlkörper den einfachen Formulierungen, die durch Betrachtung der Abelschen Integrale gewonnen werden, dem Abelschen Theorem usw. ?

Hiermit haben wir nun den eigentlichen Schlüssel zu den Neuentwicklungen in Hilberts Zahlbericht und seinen zugehörigen späteren Arbeiten resp. denjenigen seiner Freunde und Schüler. Hilbert wollte, die zahlentheoretischen Entwicklungen möglichst dahin bringen, daß der Zahlkörper durch seine Diskriminante und die zugehörige Galoissche Gruppe definiert erscheint und sämtliche in der Funktionentheorie bekannten Sätze sich wiederfinden! (vgl. das zwölfte der Probleme von 1900). Er hat dieses Ziel allerdings nur in einigen Fällen voll erreicht. Insbesondere beim sog. „`Klassenkörper`", der zu einem Rationalitätsbereich $K(\sqrt{-D})$ gehört. Die Galoissche Gruppe ist hier eine Abelsche Gruppe, d. h. sie besteht aus lauter vertauschbaren Operationen, und die Diskriminante (relativ zu dem Körper $K(\sqrt{-D})$ ist 1. Die vollen Beweise hat erst Furtwängler gegeben. Es ist unmöglich, daß ich hier mehr ins Einzelne gehe. Aber es ist doch, denke ich, einiges gewonnen, wenn wir solcherweise den leitenden Grundgedanken kennen.

Schluß, Ausblick auf weitere Aufgaben.

Nun ist es Zeit, unser Kap. 7 zu schließen. Ich beschränke mich darauf, noch einmal das allgemeinste Problem, welches hier vorliegt, im Anschluß an Kroneckers Festschrift von 1881 (Crelle, Bd. 92) zu charakterisieren. Es handelt sich nicht nur um die reinen Zahlkörper oder Körper, die von einem Parameter z abhängen, oder um die Analogisierung dieser Körper, sondern es handelt sich schließlich darum, für Gebilde, die gleichzeitig arithmetisch und funktionentheoretisch sind, also von gegebenen algebraischen Zahlen und gegebenen algebraischen Funktionen irgendwelcher Parameter algebraisch abhängen, das selbe zu leisten, was mehr oder weniger vollständig in den einfachsten Fällen gelungen ist.

Es bietet sich da ein ungeheurer Ausblick auf ein rein theoretisches Gebiet, welches durch seine allgemeinen Gesetzmäßigkeiten den größten ästhetischen Reiz ausübt, aber, wie wir nicht unterlassen dürfen hier zu bemerken, allen praktischen Anwendungen zunächst ganz fern liegt. Damit ist natürlich nicht gesagt, daß das immer so zu bleiben braucht.

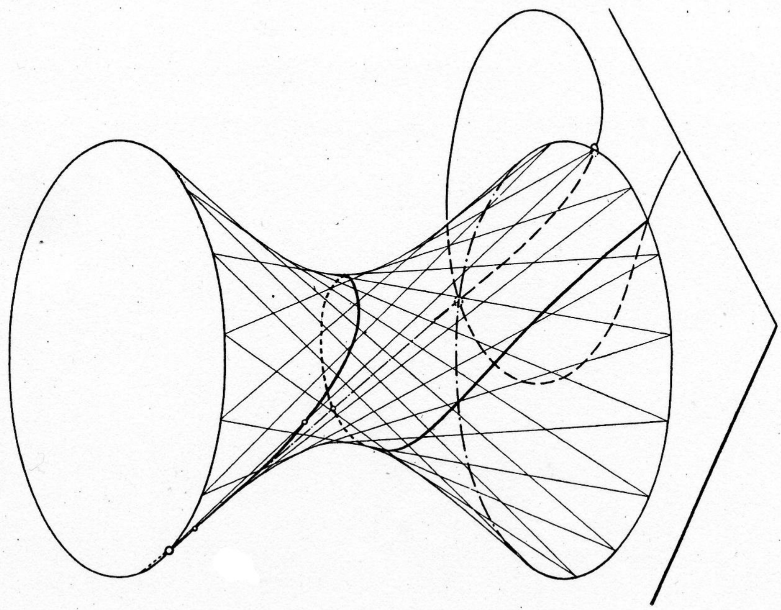


Fig. 28.
Kurve dritter Ordnung.

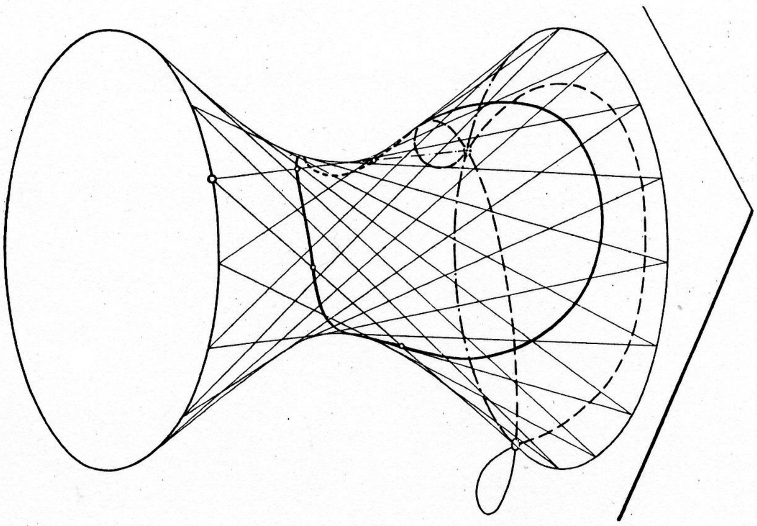


Fig. 29.
Kurve vierter Ordnung,
erste Spezies.

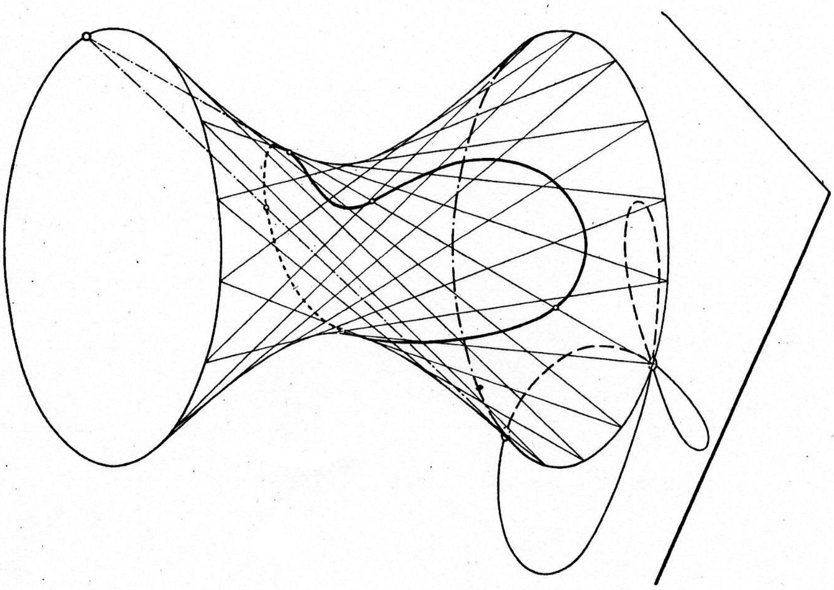


Fig. 30.
Kurve vierter Ordnung,
zweite Spezies.