Heidelberger Texte zur Mathematikgeschichte

III. Internationaler Mathematiker-Kongress

Heidelberg, 1904

Autor: **Hilbert, David** (1862 – 1943)

Titel: **Über eine Anwendung der Integralgleichungen auf ein Problem der Funktionentheorie**

Bereich: Wissenschaftliche Vorträge

Verhandlungen des 3. Internationalen Mathematiker-Kongresses : in Heidelberg vom 8. bis 13. August 1904 / hrsg von A. Krazer. – Leipzig, 1905. – S. 233–240

Problemstellung:
Es sei C eine geschlossene Randkurve in der xy-Ebene mit der Gesamtbogenlänge 2π; die Bogenlänge derselben, von einem bestimmten Anfangspunkte auf C an bis zu einem beliebigen Punkte auf C gerechnet, werde mit s bezeichnet. Endlich seien $a(s), b(s), c(s)$ stetig differenzierbare Funktionen von s mit der Periode 2π, von denen die beiden ersten Funktionen $a(s), b(s)$ keine gemeinsame Nullstelle haben sollen. Das Problem besteht dann darin, eine innerhalb C reguläre analytische Funktion

$$f(z) = u(xy) + iv(xy)$$

zu finden, deren Real- und Imaginärteil $u(s)$ bezw. $v(s)$ auf der Randkurve C der linearen Relation $$a(s)u(s) + b(s)v(s) + c(s) = 0$$ genügen.

Über eine Anwendung der Integralgleichungen auf ein Problem der Funktionentheorie.

Von

D. Hilbert aus Göttingen.

Unter einer „Integralgleichung" verstehe ich eine Gleichung von der Gestalt

$$f(s) = \int_a^b K(s, \sigma) \varphi(\sigma) d\sigma$$

oder

$$f(s) = \varphi(s) - \int_a^b K(s, \sigma) \varphi(\sigma) d\sigma.$$

Im Falle eines symmetrischen „Kernes" $K(s, \sigma)$ steht — wie ich in zwei Mitteilungen in den Göttinger Nachrichten dieses Jahres ausgeführt habe — die Theorie der Integralgleichungen im engsten Zusammenhange mit der „quadratischen Integralform"

$$Q(x) = \int_a^b \int_a^b K(s, \sigma) x(s) x(\sigma) ds d\sigma,$$

deren Theorie als das transzendente Analogon zu der bekannten algebraischen Theorie der quadratischen Form mit n Veränderlichen aufzufassen ist. Den besonderen Arten quadratischer Formen, z. B. denjenigen mit nicht verschwindender Diskriminante oder denjenigen, die für reelle Variable nur positive Werte annehmen, entsprechen gewisse besondere Arten quadratischer Integralformen, nämlich Integralformen, deren Kerne ich in den genannten Mitteilungen als „abgeschlossen", „allgemein" bezw. „definit" bezeichnet habe.

Die Theorie der algebraischen quadratischen Formen mit n Veränderlichen wird durch den Satz beherrscht, daß jede solche Form stets und nur auf eine Weise als Summe von n Quadraten linearer Formen darstellbar ist, wobei diesen letzteren noch die bekannten Orthogonalitätsbedingungen aufzuerlegen sind. Diesem Satze entspricht in der Theorie der quadratischen Integralformen ebenfalls ein Theorem von grundlegender Bedeutung, nämlich die Tatsache, daß die Integralform $Q(x)$ sich stets als unendliche Summe von Quadraten „linearer Integralformen" darstellen läßt, wie folgt:

$$Q(x) = \frac{1}{\lambda^{(1)}}\left\{\int_a^b \psi^{(1)}(s)\, x(s)\, ds\right\}^2 + \frac{1}{\lambda^{(2)}}\left\{\int_a^b \psi^{(2)}(s)\, x(s)\, ds\right\}^2 + \cdots,$$

wobei die von mir als „Eigenfunktionen" bezeichneten Funktionen $\psi^{(1)}(s)$, $\psi^{(2)}(s)$, $\cdots$ die „Orthogonalitätsbedingungen":

$$\begin{aligned}\int_a^b \psi^{(l)}(s)\, \psi^{(m)}(s)\, ds &= 0 \qquad (l \neq m)\\ &= 1 \qquad (l = m)\end{aligned}$$

erfüllen.

Die Anwendungen dieser Theorie der Integralgleichungen sind sehr mannigfaltige.

Wenn man eine Greensche Funktion einer gewöhnlichen oder partiellen Differentialgleichung $D(u) = 0$ zweiter Ordnung von elliptischem Typus als Kern einer Integralgleichung wählt, so folgt durch Auflösung dieser Integralgleichung die Greensche Funktion für die allgemeinere Integralgleichung $D(u) + u = 0$, d. h. *es sind einerseits die Integration einer Differentialgleichung zweiter Ordnung bei gegebenen Randbedingungen und andererseits die Lösung einer Integralgleichung äquivalente Probleme.*

Ist die zugrunde gelegte Differentialgleichung sich selbst adjungiert, so fällt die Greensche Funktion symmetrisch in den Parametern und Argumenten aus, und wegen dieser Symmetrie des Kernes der betreffenden Integralgleichung kommt alsdann das vorhin genannte Theorem über die Darstellung der quadratischen Integralform $Q(x)$ zur Geltung: *als Resultat erscheinen insbesondere die Entwickelungen willkürlicher Funktionen nach trigonometrischen, Besselschen, Kugel-, Laméschen, Sturmschen und allgemeinen Funktionen, wie sie in der mathematischen Physik auftreten.*

Die Variationsrechnung beschäftigt sich mit dem Problem, Integrale von der Gestalt

$$\int_a^b F\left(\frac{dy}{dx}, y\right) dx, \qquad \iint_{(J)} F\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, u\right) dx\, dy, \cdots$$

eventuell unter Hinzunahme von Nebenbedingungen zu einem Minimum zu machen. Wenn die Funktionen F in ihren Argumenten $\frac{dy}{dx}, y$ bezw. $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, u$ von nicht höherem als zweitem Grade ausfallen, so stellt sich die merkwürdige Tatsache heraus, daß jene Integrale in die Gestalt gewisser quadratischer Integralformen transformiert werden können. *Wir gelangen auf diese Weise zu der Lösung von Aufgaben der Variationsrechnung, die, soweit ich sehe, mit den in der bisherigen Variationsrechnung üblichen Mitteln nicht zu behandeln sind.*

Unter den *Anwendungen der Integralgleichungen auf die Theorie der analytischen Funktionen* möchte ich nur die Lösung eines Problems hervorheben, auf das mich meine Untersuchungen über das Riemannsche Problem der Konstruktion linearer Differentialgleichungen mit vorgeschriebener Monodromiegruppe führten.

Es sei C eine geschlossene Randkurve in der xy-Ebene mit der Gesamtbogenlänge 2π; die Bogenlänge derselben, von einem bestimmten Anfangspunkte auf C an bis zu einem beliebigen Punkte auf C gerechnet, werde mit s bezeichnet. Endlich seien $a(s)$, $b(s)$, $c(s)$ stetig differenzierbare Funktionen von s mit der Periode 2π, von denen die beiden ersten Funktionen $a(s)$, $b(s)$ keine gemeinsame Nullstelle haben sollen. Mein Problem besteht dann darin, eine innerhalb C reguläre analytische Funktion

$$f(z) = u(xy) + iv(xy)$$

zu finden, deren Real- und Imaginärteil $u(s)$ bezw. $v(s)$ auf der Randkurve C der linearen Relation

$$a(s)\,u(s) + b(s)\,v(s) + c(s) = 0$$

genügen.

Zur Lösung dieses Problems betrachten wir zunächst den Fall, daß eine innerhalb C reguläre und von Null verschiedene analytische Funktion

$$\gamma(z) = \alpha(xy) + i\beta(xy)$$

existiert, deren Real- und Imaginärteil $\alpha(s)$ bezw. $\beta(s)$ auf der Randkurve C der Bedingung

$$a(s)\,\alpha(s) + b(s)\,\beta(s) = 0$$

genügen; konstruieren wir alsdann eine innerhalb C reguläre Potentialfunktion $v^*(xy)$, deren Randwerte

$$v^*(s) = \frac{c(s)\,\beta(s)}{a(s)\,\{(\alpha(s))^2 + (\beta(s))^2\}} = -\frac{c(s)\,\alpha(s)}{b(s)\,\{(\alpha(s))^2 + (\beta(s))^2\}}$$

sind und bedeutet $-u^*(xy)$ eine zu $v^*(xy)$ konjugierte Potentialfunktion, so ist

$$f(z) = \{u^*(xy) + iv^*(xy)\}\,\{\alpha(xy) + i\beta(xy)\}$$

eine analytische Funktion, die das vorgelegte Problem löst.

Nunmehr nehmen wir an, daß es keine von Null verschiedene

Funktion $\gamma(z)$ von der genannten Beschaffenheit gäbe. Alsdann gibt es sicher auch keine von Null verschiedene analytische Funktion $\gamma^*(z)$, deren Real- und Imaginärteil $\alpha^*(s)$ bezw. $\beta^*(s)$ auf der Randkurve C der Bedingung

$$a(s)\,\alpha^*(s) - b(s)\,\beta^*(s) = 0$$

genügen; denn sonst wäre

$$\gamma(z) = \frac{1}{\gamma^*(z)} = \alpha(xy) + i\beta(xy)$$

eine analytische Funktion, von der wir sofort erkennen, daß ihr Real- und Imaginärteil auf C die Gleichung

$$a(s)\alpha(s) + b(s)\beta(s) = 0$$

befriedigen, was nicht sein sollte.

Wir bezeichnen mit $G(xy, \xi\eta)$ die zum Innern von C gehörige Greensche Funktion zweiter Art, d. h. diejenige Lösung der Differentialgleichung

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \text{const.},$$

die an der Stelle ξ, η in bekannter Weise logarithmisch unendlich wird und deren normale Ableitung auf C verschwindet. Lassen wir x, y in den Randpunkt s und ξ, η in den Randpunkt σ wandern, so entsteht aus $G(xy, \xi\eta)$ eine Funktion der zwei Variabeln s, σ, die wir mit $G(s, \sigma)$ bezeichnen wollen; man findet leicht:

$$\frac{\partial G(s,\sigma)}{\partial \sigma} = \frac{1}{2\pi}\left\{\operatorname{cotg}\frac{\sigma - s}{2} + A(s,\sigma)\right\},$$

wo $A(s, \sigma)$ eine durchweg stetig differenzierbare Funktion ist. Ist nun $u(xy)$ irgend eine innerhalb und auf C reguläre Potentialfunktion und sind $u(s)$ ihre Randwerte, so ergeben sich die Randwerte einer zu $u(xy)$ konjugierten Potentialfunktion $v(xy)$ durch die Formel

$$v(s) = \int_{-\pi}^{+\pi} u(\sigma)\frac{\partial G(s,\sigma)}{\partial \sigma}\,d\sigma = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} u(\sigma)\left\{\operatorname{cotg}\frac{\sigma - s}{2} + A(s,\sigma)\right\}d\sigma,$$

wo für das Integral der Cauchysche Hauptwert zu nehmen ist.

Das gestellte Problem läuft demnach auf die Aufgabe hinaus, eine Funktion $u(s)$ zu finden, die der Bedingung

$$L(s) \equiv a(s)\,u(s) + b(s)\int_{-\pi}^{+\pi} u(\sigma)\frac{\partial G(s,\sigma)}{\partial \sigma}\,d\sigma + c(s) = 0$$

oder

$$L(s) \equiv a(s)\,u(s) + \frac{1}{2\pi} b(s) \int_{-\pi}^{+\pi} u(\sigma) \left\{ \operatorname{cotg} \frac{\sigma - s}{2} + A(s, \sigma) \right\} d\sigma + c(s) = 0 \quad (1)$$

Genüge leistet. Wir denken uns in dieser Bedingungsgleichung (1) ϱ statt s eingesetzt, multiplizieren sie mit

$$\frac{\partial G(s, \varrho)}{\partial \varrho} = \frac{1}{2\pi} \left\{ \operatorname{cotg} \frac{\varrho - s}{2} + A(s, \varrho) \right\}$$

und integrieren alsdann nach ϱ zwischen den Grenzen $-\pi$ bis $+\pi$; dadurch erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{+\pi} L(\varrho) \frac{\partial G(s, \varrho)}{\partial \varrho}\, d\varrho &\equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} a(\varrho)\, u(\varrho) \left\{ \operatorname{cotg} \frac{\varrho - s}{2} + A(s, \varrho) \right\} d\varrho \\
&+ \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{+\pi}\!\int_{-\pi}^{+\pi} b(\varrho)\, u(\sigma) \left\{ \operatorname{cotg} \frac{\varrho - s}{2} + A(s, \varrho) \right\} \left\{ \operatorname{cotg} \frac{\sigma - \varrho}{2} + A(\varrho, \sigma) \right\} d\varrho\, d\sigma \\
&+ \int_{-\pi}^{+\pi} c(\varrho) \frac{\partial G(s, \varrho)}{\partial \varrho}\, d\varrho \\
&\equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} a(\varrho)\, u(\varrho) \operatorname{cotg} \frac{\varrho - s}{2}\, d\varrho \\
&+ \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{+\pi}\!\int_{-\pi}^{+\pi} b(\varrho)\, u(\sigma) \operatorname{cotg} \frac{\varrho - s}{2} \operatorname{cotg} \frac{\sigma - \varrho}{2}\, d\varrho\, d\sigma \\
&+ \int_{-\pi}^{+\pi} B(s, \varrho)\, u(\varrho)\, d\varrho + d(s) = 0;
\end{aligned}$$

dabei ist zur Abkürzung

$$\begin{aligned}
B(s, \varrho) &= \frac{1}{2\pi} a(\varrho)\, A(s, \varrho) \\
&+ \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{+\pi} b(\sigma) \left\{ A(\sigma, \varrho) \operatorname{cotg} \frac{\sigma - s}{2} + A(s, \sigma) \operatorname{cotg} \frac{\varrho - \sigma}{2} \right\} d\sigma \\
&+ \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{+\pi} b(\sigma)\, A(s, \sigma)\, A(\sigma, \varrho)\, d\sigma,
\end{aligned}$$

$$d(s) = \int_{-\pi}^{+\pi} c(\varrho) \frac{\partial G(s, \varrho)}{\partial \varrho}\, d\varrho$$

gesetzt, und da $A(\sigma, \varrho)$, $c(s)$ stetig differenzierbare Funktionen sind, so erweisen sich $B(\varrho, s)$, $d(s)$ als stetige Funktion der Argumente.

Setzen wir nunmehr

$$a(\varrho) = a(s) + a(\varrho, s) \operatorname{tang} \frac{\varrho - s}{2},$$

$$b(\varrho) = b(s) + b(\varrho, s) \operatorname{tang} \frac{\varrho - s}{2},$$

wo $a(\varrho, s)$, $b(\varrho, s)$ stetige Funktionen von ϱ, s bedeuten, so wird

$$\int_{-\pi}^{+\pi} a(\varrho) u(\varrho) \operatorname{cotg} \frac{\varrho - s}{2} d\varrho$$

$$= \int_{-\pi}^{+\pi} u(\varrho) \left\{ a(s) \operatorname{cotg} \frac{\varrho - s}{2} + a(\varrho, s) \right\} d\varrho,$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} b(\varrho) u(\sigma) \operatorname{cotg} \frac{\varrho - s}{2} \operatorname{cotg} \frac{\sigma - \varrho}{2} d\varrho\, d\sigma$$

$$= b(s) \int_{-\pi}^{+\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} u(\sigma) \operatorname{cotg} \frac{\varrho - s}{2} \operatorname{cotg} \frac{\sigma - \varrho}{2} d\varrho\, d\sigma + \int_{-\pi}^{+\pi} C(s, \sigma) u(\sigma)\, d\sigma,$$

wo $C(s, \sigma)$ wiederum eine stetige Funktion bedeutet.

Wegen der Identität (vgl. meine zweite Mitteilung über Integralgleichungen in den Göttinger Nachrichten, S. 253)

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{+\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} u(\sigma) \operatorname{cotg} \frac{\varrho - s}{2} \operatorname{cotg} \frac{\sigma - \varrho}{2} d\varrho\, d\sigma = -u(s) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} u(\sigma)\, d\sigma$$

folgt mithin

$$\int_{-\pi}^{+\pi} L(\varrho) \frac{\partial G(s, \varrho)}{\partial \varrho} d\varrho \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} u(\sigma) \left\{ a(s) \operatorname{cotg} \frac{\sigma - s}{2} + D(s, \sigma) \right\} d\sigma \qquad (2)$$
$$- b(s) u(s) + d(s) = 0,$$

wo $D(s, \sigma)$ wiederum eine stetige Funktion von s, σ bedeutet.

Wenn wir (1) mit $a(s)$, (2) mit $-b(s)$ multiplizieren und die erhaltenen Gleichungen addieren, so entsteht

$$a(s) L(s) - b(s) \int_{-\pi}^{+\pi} L(\varrho) \frac{\partial G(s, \varrho)}{\partial \varrho} d\varrho \equiv \{ (a(s))^2 + (b(s))^2 \} u(s)$$
$$+ \frac{1}{2\pi} b(s) \int_{-\pi}^{+\pi} u(\sigma) \{ a(s) A(s, \sigma) - D(s, \sigma) \} d\sigma \qquad (3)$$
$$+ a(s) c(s) - b(s) d(s) = 0,$$

d. h. die Randwerte $u(s)$ der gesuchten Potentialfunktion $u(xy)$ müssen notwendig der Integralgleichung

$$u(s)+\frac{1}{2\pi}\frac{b(s)}{(a(s))^2+(b(s))^2}\int_{-\pi}^{+\pi}u(\sigma)\{a(s)A(s,\sigma)-D(s,\sigma)\}\,d\sigma + \frac{a(s)\,c(s)-b(s)\,d(s)}{(a(s))^2+(b(s))^2}=0 \tag{4}$$

genügen. Nun verschwindet der Ausdruck $a(s)c(s)-b(s)d(s)$ sicher nicht identisch in s, da $c(s)$, $d(s)$ die Randwerte von Real- bezw. Imaginärteil einer analytischen Funktion sind und es bei der von uns gemachten Annahme eine analytische Funktion von dieser Beschaffenheit nicht geben konnte.

Die Anwendung der Fredholmschen Formeln (vgl. meine erste Mitteilung über Integralgleichungen in den Göttinger Nachrichten, S. 57–62) lehrt dann, daß es stets eine Lösung $u(s)$ dieser Integralgleichung gibt, — es sei denn, daß die Integralgleichung

$$u(s)+\frac{1}{2\pi}\frac{b(s)}{(a(s))^2+(b(s))^2}\int_{-\pi}^{+\pi}u(\sigma)\{a(s)A(s,\sigma)-D(s,\sigma)\}\,d\sigma=0 \tag{5}$$

eine von Null verschiedene Lösung $u(s)$ besitzt. Der letztere Fall ist aber unmöglich: denn wäre $u(s)$ eine Lösung von (5) und setzen wir

$$L^*(s)=a(s)u(s)+b(s)\int_{-\pi}^{+\pi}u(\sigma)\frac{\partial G(s,\sigma)}{\partial\sigma}\,d\sigma,$$

so würde aus (5)

$$a(s)L^*(s)-b(s)\int_{-\pi}^{+\pi}L^*(\varrho)\frac{\partial G(s,\varrho)}{\partial\varrho}\,d\varrho=0$$

folgen. Da nun

$$\alpha(s)=L^*(s)\quad\text{und}\quad\beta(s)=\int_{-\pi}^{+\pi}L^*(\varrho)\frac{\partial G(s,\varrho)}{\partial\varrho}\,d\varrho$$

die Randwerte von Real- und Imaginärteil einer analytischen Funktion sind, so müßte wegen der gegenwärtigen Annahme $L^*(s)$ identisch null sein, und hieraus wiederum folgt in gleicher Weise das identische Verschwinden von $u(s)$.

Es sei nun $u(s)$ die Lösung der Integralgleichung (4); bilden wir mittelst dieser Funktion $u(s)$ den Ausdruck $L(s)$, so stellen wegen (3)

$$\alpha(s)=L(s)\quad\text{und}\quad\beta(s)=\int_{-\pi}^{+\pi}L(\varrho)\frac{\partial G(s,\varrho)}{\partial\varrho}\,d\varrho$$

wiederum die Randwerte von Real- und Imaginärteil einer analytischen Funktion dar, die die Bedingung

$$a(s)\,\alpha(s)-b(s)\,\beta(s)=0$$

erfüllen. Da es eine solche analytische Funktion — von Null abgesehen — nicht geben sollte, so folgt notwendig

$$\alpha(s) = L(s) = 0,$$

d. h. die Funktionen $u(s)$ und

$$v(s) = \int_{-\pi}^{+\pi} u(\sigma) \frac{\partial G(s, \sigma)}{\partial \sigma} d\sigma$$

erfüllen die gegebene lineare Bedingung und stellen mithin die Randwerte von Real- und Imaginärteil der gewünschten analytischen Funktion dar.

Damit ist das vorgelegte Problem vollständig gelöst.