Heidelberger Texte zur Mathematikgeschichte

Autor: **Moritz Cantor** (1829–1920)

Titel: **Ueber ein weniger gebräuchliches Coordinaten-System**

Diss.-Vermerk: Heidelberg, Univ., Diss., 1851

Ueber

ein weniger gebräuchliches

Coordinaten-System.

Inaugural-Dissertation

von

Dr. **Moritz Cantor.**

Frankfurt am Main,

Druck von J. J. Schultheis & Comp.

1851.

Ueber ein weniger gebräuchliches Coordinatensystem.

§. 1.

Das Gesetz der Entstehung einer krummen Linie wird in der analytischen Geometrie durch eine Gleichung dargestellt zwischen gewissen Größen, deren gegenseitiges Abhängigkeitsverhältniß man bestimmt. Diese Vergleichungsgrößen nennt man Coordinaten der krummen Linie. Welche Größen als Coordinaten gewählt werden, ist in verschiedenen Fällen verschieden, je nach der Beschaffenheit und den Eigenschaften der krummen Linie, die sich durch eine Gleichung zwischen gewissen Größen einfacher und leichter darstellen lassen, als durch eine andere Gleichung zwischen andern Größen. Daß die einfachste Gleichung auch als die naturgemäßeste betrachtet werden müsse, leuchtet von selbst ein, und wenn man trotzdem die Gleichungen oftmals in andere complicirtere umwandelt, so geschieht dieses nur aus dem Grunde um Verwandtschaften und Aehnlichkeiten zu entdecken, deren Nachweisung nicht gut anders gelingen möchte. Das am Häufigsten angewandte Coordinatensystem ist das sogenannte rechtwinklige, wo die Gleichung zwischen zwei zu einander senkrechten Linien, der Abscisse und Ordinate gegeben ist; ferner das Polarcoordinatensystem u. s. w.

§. 2.

Einige Schriftsteller haben zwar allen diesen Coordinatensystemen den Vorwurf gemacht, sie seien mit der Mangelhaftigkeit behaftet, daß sie außerhalb der zu betrachtenden Curve eine oder mehrere Größen als fest im Raume voraussetzen und so einen Ueberfluß an willkürlichen Constanten in die Gleichung hineinbringen, was die eigentliche Natur der Curve nur verberge. Von dieser Willkürlichkeit müsse man sich befreien und als Vergleichungsglieder nur von der Curve selbst abhängige Größen nehmen. Um diesen Zweck zu erreichen schlug z. B. Carnot (géometrie de position. §. 430 fflgd.) ein neues

Coordinatensystem vor, wo als erste Coordinate der Krümmungshalbmesser angenommen ist, als zweite: der Winkel, welche die Tangente mit der Linie bildet, welche die in der Nähe des Berührungspunktes der Tangente parallel gezogene Secanten halbirt. So findet er z. B. als Gleichung der Parabel: $\varrho = -a\ (\text{cosec.}\ \phi)^3$.

Ein anderes Coordinatensystem, welches denselben Zweck erfüllen sollte, schlug Krause vor (Novae theoriae linearum curvarum originariae et vere scientificae specimina). Bei ihm sind die beiden Coordinaten: erstens die Länge eines Bogenstückes und zweitens der durch die Tangenten der Endpunkte dieses Bogenstückes gebildete Winkel, angulus flexus, bei Anderen Contingenzwinkel genannt.

Diese beiden Coordinatensysteme scheinen den von den Verfassern beabsichtigten Zweck zu erfüllen, und führen, wie wenigstens Krause gezeigt hat, zu neuen, mitunter nicht uninteressanten Linien, von denen ich nur die von Krause sogenannte „Antiloga" erwähnen will, die der Gleichung: $s = \frac{a}{\phi}$ entspricht.

Darin liegt indessen auch der Hauptwerth dieser Coordinatensysteme, indem die Umgehung der Willkürlichkeit nur eine scheinbare ist; denn die Construction einer zwischen Carnot'schen Coordinaten gegebenen Gleichung ist ohne Zurückführung auf ein anderes System wohl nicht möglich, und bei den Coordinaten Krause's kommt hinzu, daß er von vorn herein jeden Bogen als in Längeneinheiten gegeben annimmt, während die Länge eines Bogens unmittelbar gar nicht gemessen werden kann.

§. 3.

Wenn aber, wie schon bemerkt, eine verschiedene Wahl von Coordinatensystemen nur den Zweck hat gewisse Eigenschaften einfacher auszudrücken, dann ist auch jedes System gleich berechtigt, welches diese Forderung erfüllt und wurde durch ein solches System die Gleichung einer Linie leicht dargestellt, so ist es wenigstens des Versuches werth, nachzuforschen, was andere einfache Gleichungen desselben Systemes bedeuten.

Auf diese Betrachtungen mich stützend nehme ich zum Gegenstande dieser Abhandlung die Discussion von Gleichungen, die zwischen den Unbekannten s, x gegeben sind; wo s die Länge eines Bogens, x das zugehörige Abscissenstück bedeutet, beide von gegebenen Anfangspunkten an gerechnet. Die Wahl dieser Anfangspunkte und ob Abscissen und Bogenlänge nach einerlei oder verschiedener Richtung genommen werden, lasse ich unbestimmt, da jede feste Annahme in dieser Beziehung die Allgemeinheit der Betrachtungen sehr hemmt.

Würde z. B. angenommen, Bogen und Abscissenanfangspunkt lägen in einer Ordinate, und die Längen würden nach derselben Richtung gezählt, so wären alle Gleichungen von der Untersuchung ausgeschlossen, die nicht den zwei Bedingungen genügen, daß erstens s nie kleiner als x sein darf, und zweitens, daß bei $s = 0$ auch $x = 0$ werde und umgekehrt. Unstatthaft wären also Gleichungen wie: $x^s = a$; $s = \log x$; $x^n = a s^n$ bei $a > 1$ u. s. f.

§. 4.

Die Untersuchung soll so geführt werden, daß die Gleichungen zwischen s und x in solche zwischen rechtwinkligen Coordinaten verwandelt werden. Es wird daher zunächst darauf ankommen, Formeln zu finden um diese Umwandlung in allen Fällen vornehmen zu können. Als Anfangspunkt des rechtwinkligen Coordinatensystems nehme ich den Anfangspunkt der Abscissen im ersten Systeme, so daß die Abscisse x dieselbe bleibt, und nur der Bogen s durch die Ordinate y zu ersetzen ist. Ferner nehme ich beidemal, in der gesuchten wie in der gegebenen Gleichung, x als unabhängige, y und s als abhängige Veränderliche. Es soll die kürzere Bezeichnung stattfinden:

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = q, \quad \frac{ds}{dx} = \sigma, \quad \frac{d^2s}{dx^2} = \tau;$$

der Krümmungshalbmesser heiße ϱ, und α der Winkel, den die Berührungslinie mit der Abscissenachse bildet.

Bekanntlich ist: $ds^2 = dy^2 + dx^2$. Daraus folgt: $\sigma^2 = p^2 + 1$ und $p = \sqrt{\sigma^2 - 1}$, also die gesuchte Gleichung zwischen rechtwinkligen Coordinaten:

$$y = \int dx \sqrt{\sigma^2 - 1},$$

wo σ vermittelst der gegebenen Gleichung $F(s, x) = 0$ als Funktion von x darzustellen ist.

Wird die Gleichung $ds^2 = dy^2 + dx^2$ nochmals in Bezug auf x differentirt, so ist: $2\,ds.\,d^2s = 2\,dy.\,d^2y$, $\tau\sigma = pq$ und $q = \frac{\sigma\tau}{p}$ oder:

$$q = \frac{\sigma\tau}{\sqrt{\sigma^2 - 1}}$$

Ferner ist $\varrho = \frac{(p^2+1)^{3/2}}{q}$; die obigen Werthe dafür eingeführt giebt:

$$\varrho = \frac{\sigma^2\sqrt{\sigma^2 - 1}}{\tau}$$

Die geometrische Bedeutung des σ ist leicht einzusehen. Denn da $p = tg\,\alpha$, so ist: $p^2 + 1 = \sigma^2 = 1 + tg\,\alpha^2 = sec\,\alpha^2$ und $\sigma = sec\,\alpha$ d. h.

> Der erste Differentialquotient von s nach x ist die trigonometrische Secante des Winkels, den die Berührungslinie mit der Abscissenachse bildet.

Daraus folgt, daß sobald $\sigma < 1$ wird, die Gleichung keine geometrische Bedeutung mehr hat, ebensowenig wie eine algebraische Gleichung mit imaginären Größen.

§. 5.

Es sei die Gleichung des ersten Grades gegeben:

$$s = ax + b$$

$\sigma = a$, $\tau = 0$, $\varrho = \infty$ zeigen, daß die dadurch ausgedrückte Linie eine grade sein muß, die so gegen die Abscissenachse geneigt ist, daß die Secante des Neigungswinkels $= a$ ist.

Nun ist aber $sec\,\alpha = sec\,(360^0 - \alpha)$, die Gleichung $s = ax + b$ bezeichnet also zwei Linien AB, AB' die einen Winkel $BAB' = 2\alpha$ bilden, der durch die Abscissenachse AX in zwei gleiche Theile getheilt wird. Dasselbe zeigt sich bei Ableitung der Gleichung zwischen x, y:

$\sigma^2 = a^2$, $p^2 = a^2 - 1$, $y = \int \pm\sqrt{a^2 - 1}\,dx = \pm\sqrt{a^2 - 1}.\,x + C$

Aus dem Auftreten der willkürlichen Constante C zeigt sich überdies, daß nicht bloß die beiden graden Linien AB, AB' der gegebenen Gleichung entsprechen, sondern das ganze System von denselben parallelen Linien, indem der Anfangspunkt derselben in der nämlichen Ordinate liegt.

Soll die Linie $s = ax + b$ der Abscissenachse parallel, also $\alpha = 0^0$ sein, so muß $a = \sec 0^0 = 1$ sein, und

$$s = x + b$$

Soll die Linie hingegen auf der Abscissenachse senkrecht stehen, so ist $\alpha = 90^0$, $a = \sec 90^0 = \infty$ und

$$s = \infty \text{ oder } x = 0$$

Sind zwei Gleichungen:

$$s = ax + b;\; s = a_{,}x + b,$$

gegeben, und betrachten wir beidemal nur die Linie, deren Neigungswinkel gegen die Abscissenachse kleiner als 180^0 ist, so kann nach dem Winkel δ gefragt werden, den die beiden Linien mit einander bilden.

Ist $a = \sec\alpha$; $a_{,} = \sec\alpha_{,}$, so ist zunächst $\delta = \alpha - \alpha_{,}$, $\cos\delta = \cos\alpha \,.\, \cos\alpha_{,} + \sin\alpha \,.\, \sin\alpha_{,}$, oder:

$$\cos\delta = \frac{1}{aa_{,}} + \frac{\sqrt{(a^2-1)(a_{,}^2-1)}}{aa_{,}}$$

$\sin\delta = \sin\alpha \,.\, \cos\alpha_{,} - \cos\alpha \,.\, \sin\alpha_{,}$, oder:

$$\sin\delta = \frac{\sqrt{a^2-1} - \sqrt{a_{,}^2-1}}{aa_{,}}$$

und daraus:

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{a_{,}^2\sqrt{a^2-1} - a^2\sqrt{a_{,}^2-1}}{a^2 - a^2a_{,}^2 + a_{,}^2}$$

Soll $\delta = 90^0$ sein, so ist $\cos\delta = 0$ und $a^2 - 1 = \dfrac{1}{a_{,}^2-1}$

$$a_{,} = \frac{a}{\sqrt{a^2-1}}.$$

Die Gleichung einer zur Linie:

$$s = ax + b$$

senkrechten Linie ist also:

$$s = \frac{a}{\sqrt{a^2-1}}\, x + b_{,}$$

Gleichungen, die zwischen rechtwinkligen Coordinaten gegeben sind, pflegt man in der analytischen Geometrie häufig dadurch auf eine einfachere Form zu bringen, daß man den Anfangspunkt der Coordinaten verlegt. Auch hier wird dieses für den Abscissenanfangspunkt gestattet sein. So geht z. B. die Gleichung $s = ax + b$, indem

$x = x, -\frac{b}{a}$ gesetzt, d. h. der Anfangspunkt der x um $-\frac{b}{a}$ verlegt wird, in die Gleichung $s = a x,$ über. Die Verlegung des Anfangspunktes der s hingegen um ein Glied der Gleichung zu entfernen, kann nicht allgemein gestattet werden, indem sehr leicht der Fall eintreten kann, daß die betrachtete krumme Linie eine geschlossene ist, also von ganz bestimmter Länge, und daß diese Länge von der constanten Länge, um welche der Bogenanfangspunkt verlegt werden müßte, noch übertroffen wird.

§. 6.

Die Gleichung des zweiten Grades in ihrer allgemeinsten Form ist:

$$a s^2 + b x^2 + c x s + f s + g x + h = 0$$

wobei absichtlich durch keinen der Coefficienten, also etwa durch a durchdividirt wurde, um sie nachher nach Bedürfniß und zur näheren Specialisation alle gleich Null setzen zu können.

Durch Differentiation wird daraus:

$$2 a s d s + 2 b x d x + c x d s + c s d x + f d s + g d x = 0$$

und
$$\sigma = -\frac{2 b x + c s + g}{2 a s + c x + f}$$

$$\sigma^2 = \frac{c^2 s^2 + (4 b c x + 2 c g) s + 4 b^2 x^2 + 4 b g x + g^2}{4 a^2 s^2 + 4 a c x s + 4 a f s + c^2 x^2 + 2 c f x + f^2}$$

aber $4 a^2 s^2 + 4 a c x s + 4 a f s = 4 a(- b x^2 - g x - h)$ wird dieser Werth in den obigen Nenner eingeführt und bemerkt, daß $p^2 = \sigma^2 - 1$, so findet man:

$$p^2 = -1 + \frac{c^2 s^2 + (4 b c x + 2 c g) s + 4 b^2 x^2 + 4 b g x + g^2}{(c^2 - 4 a b) x^2 + (2 c f - 4 a g) x + f^2 - 4 a h}$$

Um s auch aus dem Zähler zu entfernen, setze man

$$s^2 + \frac{c x + f}{a} s = -\frac{b x^2 + g x + h}{a}$$ und daraus

$$s = \frac{-c x - f}{2 a} \pm \frac{1}{2 a}\sqrt{(c^2 - 4 a b) x^2 + (2 c f - 4 a g) x + (f^2 - 4 a h)}$$

Wird dieser Werth endlich in den für p^2 gefundenen substituirt, so zeigt sich nach leichter Reduction:

$$A)\; p^2 = \frac{c^2}{2a^2} - \frac{b}{a} - 1 + \frac{c^2h + ag^2 + bf^2 - cfg - 4abh}{a[(c^2-4ab)x^2+(2cf-4ag)x+(f^2-4ah)]}$$
$$\pm \frac{(4abc-c^3)x+(2acg-c^2f)}{2a^2\sqrt{(c^2-4ab)x^2+(2cf-4ag)x+(f^2-4ah)}}$$

welches also die Differentialgleichung zwischen rechtwinkligen Coordinaten ist, die der Gleichung vom zweiten Grade zwischen den hier betrachteten Coordinaten entspricht. Die Integration derselben kann jedoch nicht allgemein ausgeführt werden, und wir müssen uns damit begnügen, einzelne Fälle aufzusuchen, in denen sie möglich ist. Zu diesem Zwecke werden nach und nach alle Coefficienten gleich Null zu setzen sein. Wird $a = 0$, so geht die Gleichung A in die unbestimmte Form $p^2 = \infty - \infty$ über, deren wahre Bedeutung weit leichter gefunden wird, wenn vor der Differentiation schon $a = 0$ angenommen wird. Wir behalten uns daher diesen Fall noch vor und setzen:

1. $b = 0$

$$p^2 = \frac{c^2}{2a^2} - 1 + \frac{c^2h + ag^2 - cfg}{a[c^2x^2+(2cf-4ag)x+(f^2-4ah)]}$$
$$\pm \frac{2acg - c^2f - c^3x}{2a^2\sqrt{c^2x^2+(2cf-4ag)x+(f^2-4ah)}}$$

Die Integration ist hier möglich, wenn auch $c = 0$. Denn dann ist

$$p^2 = -1 + \frac{g^2}{f^2-4ah-4agx}$$

$$y = \int dx \sqrt{\frac{g^2+4ah-f^2+4agx}{f^2-4ah-4agx}}$$

und daraus:

$$y = \frac{g}{16a} \operatorname{Arc}\left(\cos = \frac{4f^2g^2+32af^2h-4f^4-g^4-16ag^2h-64a^2h^2}{g^4}\right.$$
$$\left. + \frac{32af^2-128a^2h-16ag^2}{g^3}x - \frac{64a^2}{g^2}x^2\right) -$$
$$- \frac{1}{4ag}\sqrt{\begin{Bmatrix}(f^2g^2+8af^2h-f^4-4ag^2h-16a^2h^2)+\\(8af^2g-32a^2gh-4ag^3)x-16a^2g^2x^2\end{Bmatrix}}$$

wenn die willkürliche Constante, die noch hinzuzusetzen wäre, gleich Null angenommen wird, was sich in Zukunft von selbst verstehen mag; und diese Gleichung entspricht der $as^2 + fs + gx + h = 0$.

Ist ferner auch noch $f = 0$, $h = 0$, $a = 1$ und wird g negativ genommen, also die Gleichung $s^2 = gx$ betrachtet so ist

$y = \int \frac{(g - 4x)\,dx}{\sqrt{4gx - 16x^2}}$ oder endlich:

$$y = \frac{g}{8} \operatorname{Arc}\left(\cos = 1 - \frac{8x}{g}\right) - \frac{1}{4}\sqrt{4gx - 16x^2}$$

Dabei darf, wie man sieht, niemals $x > \frac{g}{4}$ sein.

Bekanntlich ist aber die Gleichung der Cycloide $x = r \operatorname{Arc}\left(\cos = 1 - \frac{y}{r}\right) - \sqrt{2ry - y^2}$ wo r den Halbmesser des erzeugenden Kreises bedeutet; und diese Gleichung entsteht offenbar aus der unsrigen durch Vertauschung von x und y, wenn außerdem noch $g = 8r$ gesetzt wird. So erklärt sich auch, warum x höchstens $= \frac{g}{4}$, d. h. dem Durchmesser des erzeugenden Kreises gleich sein darf, ohne daß y imaginär wird. Bei $x = 0$ wird $y = \frac{ng\pi}{2}$, wo n jede beliebige positive oder negative ganze Zahl bedeutet.

2. $c = 0$

$$p^2 = -\frac{b}{a} - 1 + \frac{ag^2 + bf^2 - 4abh}{a(-4abx^2 - 4agx + f^2 - 4ah)}$$

oder zusammengezogen:

$$p^2 = \frac{g^2 + 4ah - f^2 + (4bg + 4ag)x + (4b^2 + 4ab)x^2}{f^2 - 4ah - 4agx - 4abx^2}$$

Außer dem Falle $b = 0$, der schon sub. 1. vorkam, kann die Integration auch noch ausgeführt werden, wenn $a = 0$; denn alsdann ist:

$$dy = \frac{dx}{f}\sqrt{g^2 - f^2 + 4bgx + 4b^2x^2}$$

$$y = \frac{2bx + g}{4bf}\sqrt{4b^2x^2 + 4bgx + g^2 - f^2}$$

$$- \frac{f}{4b}\log\left\{8b^2x + 4bg + 4b\sqrt{4b^2x^2 + 4bgx + g^2 - f^2}\right\}$$

Daß h in der Auflösung gar nicht vorkommt, rührt daher, daß in der Gleichung, welcher sie entspricht $(bx^2 + fs + gx + h = 0)$, s nicht mit x durch Multiplication verbunden ist, daß also, wenn x um eine Constante verändert wird, dieses auf s keinerlei Einfluß übt, noch auf die Gestalt der ganzen Gleichung; daß vielmehr nur die Coefficienten der Glieder, die kein s enthalten, verändert werden; und diese Coefficienten sind ja ganz allgemein angenommen; man kann sich dieselben daher durch eine derartige Veränderung des x entstanden denken, daß vorher schon das h wegfällt.

Ist außer $a = 0$ noch $g = 0$, ferner $b = 1$ und f negativ, also $x^2 + h = fs$, so wird

$$y = \frac{x}{2f}\sqrt{4x^2 - f^2} + \frac{f}{4}\log(8x + 4\sqrt{4x^2 - f^2})$$

Ist $g = 0$ während a nicht $= 0$, hingegen aber $f^2 = 4ah$ ist, so wird $p^2 = -\frac{b}{a} - 1$, wo nur dann kein imaginäres Resultat erscheint, wenn b und a verschiedene Zeichen haben, und b nicht kleiner als a ist. Es sei b negativ, also die Gleichung gegeben $as^2 - bx^2 + fs + \frac{f^2}{4a} = 0$, so entspricht ihr demnach $y = x\sqrt{\frac{b}{a} - 1}$; ist $a = b$ so bedeutet: $as^2 - ax^2 + fs + \frac{f^2}{4a} = 0$, woraus $p = 0$ folgt, eine der Abscissenachse parallele grade Linie.

3. $f = 0$

$$p^2 = \frac{c^2}{2a^2} - \frac{b}{a} - 1 + \frac{c^2h + ag^2 - 4abh}{a[(c^2 - 4ab)x^2 - 4agx - 4ah]}$$
$$\pm \frac{(4abc - c^3)x + 2acg}{2a^2\sqrt{(c^2 - 4ab)x^2 - 4agx - 4ah}}$$

Der Fall, daß auch $b = 0$, $h = 0$, $a = 1$ war, kam schon sub. 1. vor. Es ist noch der Fall zu berücksichtigen, wenn $c^2 - 4ab = 0$. Dann verwandelt sich die Gleichung in folgende:

$$p^2 = \frac{c^2}{4a^2} - 1 - \frac{g^2}{4agx + 4ah} \pm \frac{cg}{a\sqrt{-4agx - 4ah}}$$

Damit diese keine imaginären Größen enthalte, muß a, g oder h negativ sein. Es sei a negativ. die gegebene Gleichung also $as^2 + \frac{c^2}{4a}x^2 = cxs + gx + h$, und

$$p^2 = \frac{c^2}{4a^2} - 1 + \frac{g^2}{4agx + 4ah} \pm \frac{cg}{a\sqrt{-4agx + 4ah}}$$

Um die Integration auszuführen, setzt man am Bequemsten $4agx + 4ah = \frac{1}{z^2}$, folglich $z = \frac{1}{\sqrt{4agx + 4ah}}$ und $dx = -\frac{dz}{2agz^3}$

Durch diese Substitution findet man aber:

$$dy = \frac{-dz}{4a^2gz^3}\sqrt{c^2 - 4a^2 \pm 4acgz + 4a^2g^2z^2}\ .$$

und daraus:

$$y = \left(-\frac{1}{8a^2gz^2} \mp \frac{c}{4a(c^2 - 4a^2)z}\right)\sqrt{c^2 - 4a^2 \pm 4acgz + 4a^2g^2z^2}$$

$$-\frac{2a^2g}{(c^2 - 4a^2)^{3/2}}$$

$$\log\frac{2c^2 - 8a^2 \pm 4acgz - 2\sqrt{c^2 - 4a^2}\sqrt{c^2 - 4a^2 \pm 4acgz + 4a^2g^2z^2}}{z}$$

oder endlich nach Wiedereinführung des Werthes von z:

$$y = \left(-\frac{gx+h}{ag} \mp \frac{c\sqrt{agx+ah}}{2a(c^2 - 4a^2}\right)\sqrt{c^2 - 4a^2 + \frac{ag^2}{gx+h} \pm \frac{2acg}{\sqrt{agx+ah}}} -$$

$$-\frac{2a^2g}{(c^2 - 4a^2)^{3/2}}\log\Big\{\pm 4acg + (2c^2 - 8a^2)\sqrt{4agx + 4ah}$$

$$-2\sqrt{c^2 - 4a^2}\sqrt{4agx - 4ah}\sqrt{c^2 - 4a^2 + \frac{ag^2}{gx+h} \pm \frac{2acg}{\sqrt{agx+ah}}}\Big\}$$

wobei vorausgesetzt ist, daß $c^2 - 4a^2$ eine positive Größe. Ist hingegen $4a^2 > c^2$ so tritt bei der Integration, während der erste Theil, den die Wurzelgröße bildet, unverändert bleibt, im zweiten an die Stelle des Logarithmus ein Arcus Tangens:

$$y = \left(-\frac{gx+h}{ag} \pm \frac{c\sqrt{agx+ah}}{2a(4a^2 - c^2)}\right)\sqrt{c^2 - 4a^2 + \frac{ag^2}{gx+h} \pm \frac{2acg}{\sqrt{agx+ah}}} -$$

$$-\frac{2a^2g}{(4a^2 - c^2)^{3/2}}\mathrm{Arc}\left(tg = \frac{\pm\frac{2acg}{\sqrt{agx+ah}} + 2c^2 - 8a^2}{\sqrt{4a^2 - c^2}\sqrt{c^2 - 4a^2 + \frac{ag^2}{gx+h} \pm \frac{2acg}{\sqrt{agx+ah}}}}\right)$$

4. $g=0$.

$$p^2=\frac{c^2}{2a^2}-\frac{b}{a}-1+\frac{c^2h+bf^2-4abh}{a[(c^2-4ab)x^2+2cfx+f^2-4ah]}\pm$$
$$\pm\frac{(4abc-c^3)x-c^2f}{2a^2\sqrt{(c^2-4ab)x^2+2cfx+f^2-4ah}}$$

Auch hier ist, wie sub. 3. die Integration ausführbar, wenn $c^2-4ab=0$ ist. In diesem Falle geht die Gleichung in folgende über:

$$p^2=\frac{c^2}{4a^2}-1+\frac{c^2f^2}{4a^2(2cfx+f^2-4ah)}\mp\frac{c^2f}{2a^2\sqrt{2cfx+f^2-4ah}}$$

Setzt man hier $2cfx+f^2-4ah=\frac{1}{z^2}$, folglich

$z=\frac{1}{\sqrt{2cfx+f^2-4ah}}$ und $dx=-\frac{dz}{cfz^3}$ so wird durch diese Substitution:

$$dy=-\frac{dz}{2acfz^3}\sqrt{c^2f^2z^2\mp 2c^2fz+c^2-4a^2}$$

und daraus:

$$y=\left(\frac{1}{4acfz^2}\mp\frac{c}{4a(c^2-4a^2)z}\right)\sqrt{c^2f^2z^2\mp 2c^2fz+c^2-4a^2}$$
$$+\frac{acf}{(c^2-4a^2)^{3/2}}\log\left\{\frac{2c^2-8a^2\mp 2c^2fz-2\sqrt{c^2-4a^2}\sqrt{c^2f^2z^2\mp 2c^2fz+c^2-4a^2}}{z}\right\}$$

oder durch Wiedereinführung des Werthes von z

$$y=\left(\frac{2cfx+f^2-4ah}{4acf}\mp\frac{c\sqrt{2cfx+f^2-4ah}}{4a(c^2-4a^2)}\right)$$
$$\sqrt{\frac{c^2f^2}{2cfx+f^2-4ah}\mp\frac{2c^2f}{\sqrt{2cfx+f^2-4ah}}+c^2-4a^2}+$$
$$+\frac{acf}{(c^2-4a^2)^{3/2}}\log\left\{\mp 2c^2f+(2c^2-8a^2)\sqrt{2cfx+f^2-4ah}-\right.$$
$$\left.-2\sqrt{c^2-4a^2}\sqrt{c^2-4a^2+\frac{c^2f^2}{2cfx+f^2-4ah}\mp\frac{2c^2f}{\sqrt{2cfx+f^2-4ah}}}\right\}$$

wobei wieder vorausgesetzt ist, daß $c^2>4a^2$, indem, wenn c^2-4a^2 eine negative Größe ist, wie sub. 3. statt des Logrithmus ein Arcus Tangens erscheint:

$$y = \left(\frac{2cfx + f^2 - 4ah}{4acf} \pm \frac{c\sqrt{2cfx + f^2 - 4ah}}{4a(4a^2 - c^2)}\right)$$

$$\mp \sqrt{c^2 - 4a^2 + \frac{c^2 f^2}{2cfx + f^2 - 4ah} \mp \frac{2c^2 f}{\sqrt{2cfx + f^2 - 4ah}}} +$$

$$+ \frac{acf}{(4a^2 - c^2)^{3/2}} \operatorname{Arc}\left(tg = \right.$$

$$= \frac{c^2 - 4a^2 \mp \dfrac{c^2 f}{\sqrt{2cfx + f^2 - 4ah}}}{\sqrt{4a^2 - c^2}\sqrt{c^2 - 4a^2 + \dfrac{c^2 f^2}{2cfx + f^2 - 4ah} \mp \dfrac{2c^2 f}{\sqrt{2cfx + f^2 - 4ah}}}}\Bigg)$$

Diese beiden Gleichungen entsprechen demnach der Gleichung:

$$a s^2 + \frac{c^2}{4a} x^2 + cxs + fs + h = 0.$$

Wird 5. $h = 0$ gesetzt, so findet sich Nichts Neues.

Es sei also endlich:

6. $a = 0$

d. h. die Gleichung $bx^2 + cxs + fs + gx + h = 0$ gegeben.

Es ergiebt sich:

$$\sigma = -\frac{2bx + cs + g}{cx + f} = -\frac{2bx + g - c\dfrac{bx^2 + gx + h}{cx + f}}{cx + f}$$

$$= -\frac{bcx^2 + 2bfx + fg - ch}{(cx + f)^2}$$

und daraus:

$$p^2 = \frac{(4b^2cf - 4c^3f)x^3 + (4b^2f^2 + 2bcfg 2bc^2h - 6c^2f^2)x^2}{(cx + f)^4} +$$

$$+ \frac{(b^2c^2 - c^4)x^4 + (4bf^2g - 4bcfh - 4cf^3)x + f^2g^2 + c^2h^2 - f^4 - 2cfg}{(cx + f)^4}$$

$$y = \int \frac{dx}{(cx + f)^2} \sqrt{\alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \varepsilon x + \varkappa}$$

wenn zur Abkürzung einfache Buchstaben für die Coeficienten gesetzt werden. Die Integration ist nur dann ausführbar, wenn $\alpha = \beta = 0$ ist. Dieses findet einmal statt bei $c = 0$, ein Fall, der sub. 2. discutirt wurde. Ferner wird aber auch $\alpha = 0$, $\beta = 0$ wenn $b = c$. Dann die geht Gleichung in folgende über:

$$y = \int \frac{dx}{(bx+f)^2} \sqrt{\left[(2b^2fg - 2b^2f^2 - 2b^3h)x^2 + (4bf^2g - 4b^2fh - 4bf^3)x + (f^2g^2 + b^2h^2 - 2bfgh - f4)\right]}$$

Wird jetzt $bx + f = z$ gesetzt, also $x = \frac{z-f}{b}$, $dx = \frac{dz}{b}$, so ist $y = \int \frac{dz}{bz^2} \sqrt{\frac{\gamma z^2 + (b\varepsilon - 2f\gamma)z + (f^2\gamma + b^2\varkappa - bf\varepsilon)}{b^2}}$,

Zur weiteren Abkürzung setze ich $\frac{\gamma}{b^2} = 2fg - 2f^2 - 2bh = \mu$ und ferner

$$\frac{f^2\gamma + b^2\varkappa - bf\varepsilon}{b^2} = f^4 - 2f^3g + 2bf^2h + f^2g^2 - 2bfgh + b^2h^2 = v;$$

und da $b\varepsilon - 2f\gamma = 0$ so heißt jetzt die Integralgleichung:

$$y = \int \frac{dz}{bz^2} \sqrt{\mu z^2 + v} = -\frac{\sqrt{\mu z 2 + v}}{bz} + \sqrt{\mu} \log\left\{z\sqrt{\mu} + \sqrt{\mu z^2 + v}\right\}$$

d. i. nach Wiedereinsetzung der Werthe von z, μ und v:

$$y = -\frac{\sqrt{(2b^2fg - 2b^2f^2 - 2b^3h)x^2 + (4bf^2g - 4b^2fh - 4bf^3)x + (f^2g^2 + b^2h^2 - 2bfgh - f^4)}}{b^2x + bf} +$$

$$+ \sqrt{2fg - 2f^2 - 2bh}.\log\left\{x\sqrt{2b^2fg - 2b^2f^2 - 2b^3h} + f\sqrt{2fg - 2f^2 - 2bh} + \sqrt{(2b^2fg - 2b^2f^2 - 2b^3h)x^2 + (4bf^2g - 4b^2fh^2 - 4bf^3)x + (f^2g^2 + b^2h^2 - 2bfgh - f^4)}\right\}$$

Ist in einem noch specielleren Falle $f = g$ und $h = 0$, so wird aus der gefundenen Gleichung die unbestimmte Form

$$y = 0.\log 0 = 0. - \infty.$$

Die Gleichung, von der ausgegangen wurde, war aber alsdann $bx^2 + bxs + fx + fs = 0$, welche durch $bx + f$ dividirbar ist, und dadurch in $x + s = 0$ übergeht, welches nach §. 5 die Abscissenachse und ihr parallele Linien bedeutet. Wird ohne vorherige Division differentirt, σ und daraus p gesucht, so gelangt man zu demselben Resultate; man findet nämlich $p = 0$.

Wird $f = g = 0$ gesetzt, also $b x^2 + b x s + h = 0$, so liefert die oben gefundene Formel ein imaginäres Resultat, welches durch Einführung eines Arcus Cosinus verschwindet. Alsdann entsteht nämlich die Gleichung

$$y = \frac{\sqrt{h^2 - 2 b h x^2}}{b x} + \sqrt{\frac{2 h}{b}}\, \mathrm{Arc}\left(\cos = \sqrt{1 - \frac{2 b x^2}{h}}\right)$$

Einen weiteren Fall, der die Integration gestattet, wird man nicht wohl finden können. Denn damit zu gleicher Zeit die Coefficienten von x^3, x^1, x^0, also β, ε, $\varkappa$ zu Null werden, worauf der Factor x^2 losgetrennt und unter dem Wurzelzeichen nur x^2 und x^0 blieben, müßte nothwendig $f = 0$ und $h = 0$ sein, dann ginge aber die Gleichung in die durch x dividirbare $b x^2 + c x s + g x = 0$ über, d. h. wäre keine Gleichung des zweiten Grades mehr. Und dafür, daß γ, ε, $\varkappa$ zu Null werden, so daß nach Lostrennung des x^2 unter dem Wurzelzeichen noch x^2 und x^1 blieben, giebt es ebenfalls keine Combination.

Selbst die einfache Form $c x s + h = 0$ giebt als ihr entsprechende Differentialgleichung zwischen rechtwinkligen Coordinaten $dy = \frac{dx}{c^2 x^2} \sqrt{c^2 h^2 - c^4 x^4}$, deren Integration in geschlossener Form nicht angeht.

§. 7.

Die Gleichung $s^2 = g x$ die im vorigen Paragraphe sub. 1. als Gleichung der Cycloide nachgewiesen wurde, und ferner die in demselben Paragraphen sub. 2. behandelte Gleichung $x^2 = f s$ sind nur specielle Fälle der reinen höheren Gleichung, die in ihrer allgemeinsten Form

$$x^{m} = a s^{m \pm n}$$

heißt; also diejenige Form, welche bei rechtwinkligen Coordinaten die parabolische Curven bezeichnet.

Es ist $m x^{m-1} dx = (m \pm n) a s^{m \pm n - 1} ds = (m \pm n) \frac{x^m}{s} ds$

also

$$\sigma = \frac{m}{m \pm n} \cdot \frac{s}{x} = \frac{m}{m \pm n} \cdot \frac{1}{a^{\frac{1}{m \pm n}} \, x^{\frac{n}{n \pm m}}}$$

$$p^2 = \sigma^2 - 1 = \frac{\left(\frac{m}{m \pm n}\right)^2 - a^{\frac{2}{m \pm n}} \, x^{\frac{2n}{n \pm m}}}{a^{\frac{2}{m \pm n}} \, x^{\frac{2n}{n \pm m}}}$$

und endlich

$$y = \int dx \sqrt{\left(\frac{m}{m \pm n}\right)^2 a^{-\frac{2}{m \pm n}} \, x^{-\frac{2n}{n \pm m}} - 1}$$

Es fällt augenblicklich auf, daß hier x einen Grenzwerth hat, den es nicht überschreiten darf, ohne daß y imaginär würde.

Dieser Grenzwerth ist durch die Gleichung

$\left(\frac{m}{m \pm n}\right)^2 a^{-\frac{2}{m \pm n}} \, x^{-\frac{2n}{n \pm m}} - 1 = 0$ gegeben; folglich

$$x = \left(\frac{m}{m \pm n}\right)^{\frac{n \pm m}{n}} a^{\mp \frac{1}{n}}$$

Es ist zu untersuchen, unter welchen Bedingungen die Integration ausführbar ist.

Zu diesem Zwecke werde $x^{\frac{n}{m \pm n}} = z$ gesetzt, folglich $x = z^{\frac{n \pm m}{n}}$ und $dx = \frac{n \pm m}{n} z^{\pm \frac{m}{n}} dz$; es wird durch diese Substitution

$$dy = \frac{\frac{n \pm m}{n}}{\frac{1}{a^{\frac{1}{m \pm n}}}} z^{\frac{-n \pm m}{n}} dz \sqrt{\left(\frac{m}{m \pm n}\right)^2 - a^{\frac{2}{m \pm n}} z^2}$$

Die Integration ist thunlich, so oft $z^{\frac{-n \pm m}{n}}$ eine rationale

Größe, d. h. so oft $-n \pm m$, und somit auch m ein Vielfaches von n ist. In diesem Falle wird man aber aus der Gleichung

$x^{m} = a\,s^{m \pm n}$ die n^{te} Wurzel ziehen können, und dadurch vereinfacht sich die Bedingung folgendermaßen:

Die Integration kann ausgeführt werden, wenn $n = 1$ ist, also die gegebene Gleichung

$$x^{m} = a\,s^{m \pm 1}$$

heißt, worauf dann wenn $z = x^{\frac{1}{1 \pm m}}$ ist,

$$dy = \frac{1 \pm m}{a^{\frac{1}{m \pm 1}}}\, z^{-1 \pm m}\, dz \sqrt{\frac{m}{m \pm 1}^{2} - a^{\frac{2}{m \pm 1}} z^{2}}\,.$$

Es mögen jetzt noch einige specielle Fälle untersucht werden.

Von den zwei schon besprochenen Fällen tritt der eine auf wenn $m = 1$ ist, der andere, wenn $m = 2$, während das negative Zeichen genommen wird. Wird bei $m = 2$ das obere Zeichen genommen, also;

$$x^{2} = a\,s^{3} \text{ so ist: } y = x\left(\frac{4}{9\,a^{2/3}\,x^{2/3}} - 1\right)^{3/2}$$

Ferner sei $m = 3$, also $x^{3} = a\,s^{2}$ und $x^{3} = a\,s^{4}$. Im ersteren Falle ist bei

$$x^{3} = a\,s^{2}, \quad y = \frac{8\,a}{27}\left(\frac{9\,x}{4\,a} - 1\right)^{3/2}$$

Wird hier der Abscissenanfangspunkt so verlegt, daß $x = x_{,} + \frac{4\,a}{9}$ so geht die Gleichung in folgende über:

$$x_{,}^{3} = a\,y^{2}$$

die der Neilischen Parabel angehört und sich von der anfänglichen Gleichung nur durch Vertauschung von y mit s und dann dadurch unterscheidet, daß die Abcissen von einem um $\frac{4\,a}{9}$ verrückten Anfangspunkte ausgerechnet werden, während zugleich die ganze Abscissenachse um eine willkürliche Constante parallel mit ihrer Anfangslage verschoben ist; denn genau genommen muß die Gleichung $x_{,}^{3} = a\,(y + C)^{2}$ heißen.

Im anderen Falle ist bei:

$$x^3 = a s^4,\ y = \left(\frac{x^{3/4}}{a^{1/4}} - \frac{9}{32}\frac{x^{1/4}}{a^{3/4}}\right)\sqrt{\frac{9}{16} - a^{1/2} x^{1/2}} + \frac{81}{512\,a} \operatorname{Arc\,cos} = \sqrt{1 - \frac{16}{9} a^{1/2} x^{1/2}}$$

Endlich sollen noch die Fälle $x^4 = a s^3$ und $x^4 = a s^5$ untersucht werden, wo $m = 4$ ist.

Man findet bei:

$$x^4 = a s^3,\ y = \left\{\frac{3}{4}\,x - \frac{27}{128}\,a^{2/3} x^{1/3}\right\}\sqrt{\frac{16}{9}\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} - 1} + \frac{81}{512}\,a \log\left[\frac{4}{3}\left(\frac{x}{a}\right)^{1/3} - \sqrt{\frac{16}{9}\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} - 1}\right]$$

und ferner bei

$$x^4 = a s^5,\quad y = \left\{\frac{2048}{9375\,a} + \frac{64}{125}\left(\frac{x^2}{a^3}\right)^{1/5}\right\}\left\{1 - \frac{25}{16}(a\,x)^{2/5}\right\}^{3/2}$$

Wir sehen, daß die Gleichung $x^m = a s^{m \pm 1}$ bei ihrer Verwandlung in rechtwinkliche Coordinaten entweder bloß Wurzelgrößen giebt, oder neben denselben noch ein zweites Glied, welches bald ein Logarithmus, bald ein Arcus Cosinus ist. Bei der Verwandlung von $s^m = a s^{m+1}$ kommen bloß Wurzelgrößen vor, so oft m gerade ist, bei der Verwandlung von $x^m = a s^{m-1}$ hingegen tritt dieses ein, so oft m ungerade ist; oder beide Fälle zusammengefaßt: wenn der niederere Exponent in der Gleichung $x^m = a s^{m \pm n}$ ein gerade Zahl ist, so treten bei der Umwandlung in rechtwinklige Coordinaten nur Wurzelgrößen auf.

§. 8.

Höhere unreine algebraische Gleichungen werden aus dem Grunde nicht zu betrachten sein, weil aus ihnen nicht allgemein s in Function von x dargestellt werden kann, was zur Umwandlung unentbehrlich ist; und selbst bei denen, wo dieses möglich ist, wie bei den Gleichungen des dritten Grades, scheint die Umwandlung nicht ausführbar zu sein.

Wir machen daher den Uebergang zur Betrachtung einiger transcendenten Gleichungen und machen den Anfang mit den Gleichungen $s = \log x$ und $x = \log s$. Aus

$$s = \log x$$

folgt $\frac{dx}{x} = ds$, $\sigma^2 = \frac{1}{x^2}$, $dy = \frac{dx\sqrt{1-x^2}}{x}$ und daraus endlich

$$y = \sqrt{1-x^2} \quad \log\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$$

Im zweiten Falle folgt aus

$$x = \log s$$

durch Differentiation $dx = \frac{ds}{s}$, $\sigma = s$. Die Integration läßt sich bequemer ausführen, wenn eine Gleichung zwischen y, s aufgestellt und dann erst $s = e^x$ substituirt wird; also

$dy = dx\sqrt{s^2-1} = \frac{ds}{s}\sqrt{s^2-1}$ und daraus

$y = \sqrt{s^2-1} + \mathrm{Arc}\,(\cos = \frac{1}{s})$ das ist:

$$y = \sqrt{e^{2x}-1} + \mathrm{Arc}\,(\cos = e^{-x})$$

Hieran knüpfe ich die Gleichung

$$s = a\,(e^{\frac{x}{2a}} - e^{-\frac{x}{2a}})$$

welche bekanntlich die Gleichung der Kettenlinie ist.

Denn $\sigma = \frac{e^{\frac{x}{2a}} + e^{-\frac{x}{2a}}}{2}$, $p^2 = \frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} - 2}{4} =$

$= \left(\frac{e^{\frac{x}{2a}} - 2^{-\frac{x}{2a}}}{2}\right)^2$; $dy = \frac{dx}{2}\left(e^{\frac{x}{2a}} - e^{-\frac{x}{2a}}\right)$ und

schließlich:

$$y = a\left(e^{\frac{x}{2a}} + e^{-\frac{x}{2a}}\right)$$

Von transcendenten Gleichungen mit trignometrischen Functionen ist die einfachste

$$x = \sin s$$

$$dx = \cos s\, ds,\ \sigma^2 = \frac{1}{\cos s^2} = \frac{1}{1-x^2},\ p^2 = \frac{x^2}{1-x^2},$$

$$dy = \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}};\ y = -\sqrt{1-x^2}$$

und wenn die willkürliche Constante, die bisher immer weggelassen wurde, gleich Null gesetzt wird: $x^2 + y^2 = 1$, das ist die Gleichung des Kreises. Dasselbe Resultat giebt die Gleichung:

$$x = \cos s$$

Hingegen haben die Gleichungen:

$$s = \sin x \text{ und } s = \cos x$$

keinen geometrischen Sinn, wie sich dadurch ergiebt, daß aus ihnen $p^2 = \cos x^2 - 1$ und $p^2 = \sin x^2 - 1$ folgt, welches nie stattfinden kann bei reellen x, y da sowohl $\cos x^2 - 1$ als $\sin x^2 - 1$ negative Größen sind, und als solche dem Quadrate p^2 nicht gleich können.

Ebensowenig läßt sich ein geometrischer Sinn der Gleichung:

$$x = \operatorname{tg} s$$

unterlegen, aus der man $p^2 = -\dfrac{x^4 + 2x^2}{x^4 + 2x^2 + 1}$ findet. Die Gleichung

$$x = \sin s . \cos s$$

aber giebt wieder der Kreisgleichung. Denn:

$$dx = (\cos s^2 - \sin s^2)\, ds,\ \sigma^2 = \frac{1}{\sin s^4 + \cos s^4 - 2 \sin s^2 \cos s^2};$$

nun ist $\sin s^4 + \cos s^4 - 2 \sin s^2 \cos s^2 = (\sin s^2 + \cos s^2)^2 - - 4 \sin s^2 \cos s^2 = 1 - 4x^2$ also $\sigma^2 = \dfrac{1}{1-4x^2}; p^2 = \dfrac{4x^2}{1-4x^2}$

$$dy = \frac{2x\,dx}{\sqrt{1-4x}},\ y = -\sqrt{1-4x^2}.$$

§. 9.

Eine Untersuchung, zu der unsere Coordinaten leicht führen, ist die Frage nach den Evoluten der Curven, Es sei die Gleichung der Curve $F(x, s) = 0$ gegeben, aus welcher durch Differentiation

σ und dann auch τ folgt; und somit auch ϱ, indem nach § 4:
$\varrho = \frac{\sigma^2 \sqrt{\sigma^2 - 1}}{\tau}$

Es ist aber bekanntlich der Krümmungshalbmesser nur um eine Constante von dem Bogen der Evolute verschieden. Nennen wir also diesen $s,$ so ist: $s, = \frac{\sigma^2 \sqrt{\sigma^2 - 1}}{\tau} + C$

Allein dabei ist zu bemerken, daß die in der Gleichung vorkommende Abscisse nicht die zu einem Punkte der Evolute gehörige ist, sondern zu dem Punkte der Evolvente, dessen Krümmungsmittelpunkt der betreffende Punkt der Evolute ist. Soll daher die Gleichung der Evolute zwischen ihrem Bogen und ihrer Abscisse aufgestellt werden, so muß man dieses berücksichtigen. Heißen also die Coordinaten der Evolvente s, x so mögen zur Unterscheidung die Coordinaten der Evolute durch $s,$ $x,$ bezeichnet werden.

Es heiße M ein Punkt der Evolvente und m dessen Krümmungsmittelpunkt, durch welchen wir uns die Abcissenachse gelegt denken, so daß also $A m = x,$ Die Abscisse von M sei $A P = A m - m P = x.$ Um $m P$ durch bekannte Größen auszudrücken, dient der Umstand, daß $m P$ mit $M P$, der Ordinate von M, und mit dem Krümmungshalbmesser ϱ ein rechtwinkliges Dreieck bildet, daß also
$m P = \varrho . \cos M m P$ ist, während $M m P$ dadurch bekannt ist, daß es der Complementwinkel desjenigen Winkels ist, den die Berührungslinie, die in M an die Evolvente gezogen wird, mit der Abscissenachse bildet, und dessen trigonometrische Tangenten also $\frac{dy}{dx}$ ist,

d. h. $M m P = 90^0 - \text{Arc} (\text{tg} = p)$ und $\cos M m P = \frac{\sqrt{\sigma^2 - 1}}{\sigma}$

folglich $m P = \varrho \frac{\sqrt{\sigma^2 - 1}}{\sigma}$; durch Einführung des Werthes von ϱ findet man demnach.

$$x, = x + \frac{\sigma^3 - \sigma}{\tau}$$

welches nebst den Gleichungen:

$$s_{,} = \frac{\sigma^2 \sqrt{\sigma^2 - 1}}{\tau} + C$$

und

$$F(x, s) = 0$$

genügt, um x, s zu eliminiren und so die Gleichung der Evolute zwischen $x_{,}$ $s_{,}$ aufzustellen.

Ist umgekehrt die Gleichung der Evolute

$$\Phi(x_{,}, s_{,}) = 0$$

gegeben, so wird aus ihr in Verbindung mit den Gleichungen

$$x_{,} = x + \frac{\sigma^3 - \sigma}{\tau}$$

$$s_{,} = \frac{\sigma^2 \sqrt{\sigma^2 - 1}}{\tau} + C$$

durch Elimination von $x_{,}$, $s_{,}$ die die Differentialgleichung der Evolvente zwischen x, s sich darstellen lassen.

§. 10.

Beginnen wir wieder mit der Betrachtung der einfachsten Gleichung, also der vom ersten Grad: $s = ax + b$, bei der $\sigma = a$, $\tau = 0$ ist, so finden wir $s_{,} = \infty$, $x_{,} = \infty$. In der That ist die Evolute der graden Linie eine unendlich entfernte Linie, die der ersteren parallel läuft.

Gehen wir zu der Gleichung des zweiten Grades $as^2 + bx^2 + cxs + fs + gx + h = 0$ über:

$$\sigma = -\frac{2bx + cs + g}{2as + cx + f}; \quad \tau = -\frac{2a\sigma^2 + 2c\sigma + 2b}{2as + cx + f}$$

aber

$$2a\sigma^2 = \frac{8ab^2x^2 + 8abcxs + 2ac^2s^2 + 8abgx + 4acgs + 2ag^2}{(2as + cx + f)^2}$$

$$2c\sigma = -\frac{4bc^2x^2 + (2c^3 + 8abc)xs + 4ac^2s^2 + (4bcf + 2c^2g)x}{(2as + cx + f)^2}$$

$$\frac{+ (4acg + 2c^2f)s + 2cfg}{(2as + cx + f)^2}$$

$$2b = \frac{2bc^2x^2 + 8abcxs + 8a^2bs^2 + 4bcfx + 8abfs + 2bf^2}{(2as + cx + f)^2}$$

Werden diese Werthe in die Gleichung für τ eingeführt und bei der Zusammenziehung berücksichtigt, daß

$$bx^2 + cxs + as^2 + fs + gx = -h$$

ist, so verändert sich jener Werth in folgenden:

$$\tau = \frac{8abh + 2cfg - 2c^2h - 2ag^2 - 2bf^2}{(2as + cx + f)^3}$$

Ferner ist:

$$\sigma^3 = -\frac{8b^3x^3 + 12b^2cx^2s + 12b^2gx^2 + 6bc^2xs^2 +}{(2as + cx + f)^3}$$

$$\frac{+(12bcgxs + 6bg^2x + c^3s^3 + 3c^2gs^2 + 3cg^2s + g^3}{(2as + cx + f)^3}$$

folglich sind die drei Gleichungen gegeben:

I

$$x_{,} = \frac{1}{8abh + 2cfg - 2c^2h - 2ag^2 - 2bf^2} \left(\begin{array}{l} (4a^2c - c^3)s^3 + (8a^2b + \\ + 4ac^2 - 6bc^2)xs^2 + \\ + (8abc + c^3 - 12b^2c)x^2s + \\ + (2bc^2 - 8b^3)x^3 + (4afc + \\ 4a^2g - 3c^2g)s^2 + (8abf + \\ + 2c^2f + 4acg - 12bcg)xs + \\ + (4bcf + c^2g - 12b^2g)x^2 + \\ + (4afg + cf^2 - 3cg^2)s + \\ + (8abh + 4cfg - 2c^2h - + \\ + 2ag^2 - 6bg^2)x + (f^2g + \\ + - g^3) \end{array} \right)$$

II

$$s_{,} - c = \frac{[4b^2x^2 + 4bcxs + c^2s^2 + 4bgx + 2cgs + g^2]}{8abh + 2cfg - 2c^2h - 2ag^2 - 2bf^2}$$

$$\sqrt{\begin{array}{l}(4b - c^2)x^2 + (4bc - 4ac)xs + (c^2 - 4a^2)s^2 + \\ + (4bg - 2cf)x + (2cg - 4af)s + (g^2 - f^2)\end{array}}$$

III.

$$as^2 + bx^2 + cxs + fs + gx + h = 0.$$

woraus x, s eliminirt werden sollen; eine Aufgabe die in dieser Allgemeinheit mit vielen Schwierigkeiten verknüpft ist. Wir begnügen uns damit, die Möglichkeit der Auflösung gegeben zu haben, und wollen noch einige specielle Fälle näher in's Auge fassen.

§. 11.

Wird $2a = 2b = c$, so verwandelt sich die Gleichung I. in:

$$x_{,} = \frac{1}{-2a(f-g)^2}\Big\{8a^2(f-g)s^2 + 16a^2(f-g)xs +$$

$$8a^2(f-g)x^2 + 2a(f^2+2fg-4g^2)s + 8ag(f-g)x + f^2g - g^3\Big\}$$

oder:

$$1.\ (g-f)x_{,} = 4as^2 + 8axs + 4ax^2 + 4gx + \frac{f^2+2fg-4g^2}{f-g}s + \frac{fg+g^2}{2a}$$

und die Gleichung III. in:

$$2.\ as^2 + ax^2 + 2axs + fs + gx + h = 0$$

während die Gleichung II. folgende Gestalt annimmt:

$$3.\ s_{,} - C = -\frac{2ax^2 + 4axs + 2as^2 + 2gx + 2gs + \frac{g^2}{2a}}{(f-g)^2\sqrt{(g-f)(4ax + 4as + g + f)}}$$

Aus 1. und 2. folgt indem 2. mit 4 multiplicirt, das Product von 1 abgezogen und die übrig bleibende Gleichung nach s gelöst wird:

$$s = \frac{(f-g)^2 x_{,}}{4g^2 + 3f^2 - 6fg} + \frac{(f-g)(fg + g^2 - 8ah)}{2a(4g^3 + 3f^2 - 6fg)}$$

Ferner ist aus 2.:

$$x = -s - \frac{g}{2a} \pm \sqrt{\frac{g-f}{a}s + \frac{g^2}{4a^2} - \frac{h}{a}}$$

also:

$$x + s = -\frac{g}{2a} \pm \sqrt{\frac{(g-f)^3 x_{,}}{a(4g^2 + 3f^2 - 6fg} + \frac{2g^4 - 4fg^3 + 5f^2g^2 - 2f^3g - 8afgh + 4af^2h}{4a^2(4g^2 + 3f^2 - 6fg)}}$$

worauf dieser Werth von $x + s$ in die Gleichung 3. eingeführt werden kann, welche dadurch die Gestalt erhält:

$$s_{,} - C = \left[\frac{4a(f-g)^3 x_{,} + 2g^4 - 2fg^3 - 2f^2g^2 + 2f^3g +}{2a(f-g)^2(4g^2+3f^2-6fg)}\right.$$
$$\left.\frac{+ 8afgh - 4af^2h - 4g^3 - 3f^2g + 6fg^2}{2a(f-g)^2(4g^2+4f^2-6fg)}\right] \cdot$$
$$\sqrt{-(f-g)^2 \pm 4a(g-f)\sqrt{\frac{(g-f)^3 x_{,}}{a(4g^2+3f^2-6fg)}} + \frac{2g^4 - 4fg^3 + 5f^2g^2 - 2f^3g - 8afgh + 4af^2h}{4a^2(4g^2+3f^2-6fg)}}$$

und damit die Gleichung der Evolute giebt, die bei Entfernung der Wurzelzeichen eine algebraische Gleichung des fünften Grades ist.

Ist $b = c = f = h = 0$, so wissen wir, daß die Gleichung $as^2 + gx = 0$ eine Cycloide bedeutet, deren Evolute wieder eine Cycloide ist.

Durch Einführung der betreffenden Werthe in unsere Gleichungen erhalten wir:

$$x_{,} = -\frac{1}{2ag^2}(4a^2gs^2 - 2ag^2x - g^3) = x + \frac{g}{2a} - \frac{2a}{g}s^2 = 3x + \frac{g}{2a}$$

also $x = \frac{x_{,}}{3} - \frac{g}{6a}$ ferner:

$$s_{,} - C = \frac{g^2\sqrt{-a^2s^2+g^2}}{-2ag^2} = -\sqrt{\frac{g^2}{4a^2} - \frac{s^2}{4}} = -\sqrt{\frac{agx+g^2}{4a^2}}$$
$$= -\frac{1}{12a}\sqrt{12agx_{,} + 30g^2}$$

welches wenn $C = 0$ gesetzt wird, nach Wegschaffung des Wurzelzeichens, die Gleichung $s_{,}^2 = \frac{g}{12a}x_{,} + \frac{5g^2}{24a^2}$ giebt.

Andererseits sei $a = c = g = h = 0$ d. h. die Gleichung $bx^2 + fs = 0$ gegeben. Hier wird $x_{,} = \frac{4b^2x^3}{f^2}$, $x^2 = \left(\frac{f^2x_{,}}{4b^2}\right)^{2/3}$ ferner $s_{,} - C = -\frac{2bx^2}{f^2}\sqrt{4b^2x^2 - f^2}$ und folglich: $s_{,} - C = \left(\frac{x^2}{2bf^2}\right)^{1/3}\sqrt{(4b^2f^4x_{,}^2)^{1/3} - f^2}$ oder $s_{,} - C = \sqrt{x_{,}^2 - \left(\frac{fx_{,}^2}{2b}\right)^{2/3}}$ die Gleichung der Evolute.

Ist $a = b = f = g = 0$ also die Gleichung $cxs + h = 0$ gegeben, deren Umwandlung in eine Gleichung zwischen rechtwinklichen Coordinaten (§ 6 am Ende) nur in so weit gelang, daß die entsprechende Differentialgleichung aufgestellt werden konnte, so folgt aus ihr:

$x_, = \frac{c}{2h}s^3 - \frac{c}{2h}x^2 s + x;\ s_, - C = -\frac{cs^2\sqrt{s^2-x^2}}{2h}$; wegen $s = -\frac{h}{cx}$ ist

$x_, = -\frac{2c^2x^4 - h^2}{2c^2x^3};\ s_,-C = -\frac{h}{2c^2x^3}\sqrt{h^2-cx^4}$ und durch Division der beiden letzten Gleichungen $\frac{s_,-C}{x_,} = \frac{\sqrt{h^4 - ch^2x^4}}{h^2-3c^2x^4}$ Wird diese Gleichung in's Quadrat erhoben, und zur kürzeren Bezeichnung $\left(\frac{s_,-C}{x_,}\right)^2 = \phi$ gesetzt, so ist: $\phi = \frac{h^4 - ch^2x^4}{h^4 - 6c^2h^2x^4 + 9c^2x^8}$ und daraus:

$$x^4 = \frac{h^2}{18c^4\phi}\left\{6c^2\phi - c \pm\sqrt{36c^4\phi - 12c^3\phi + c^2}\right\}$$

$$x^2 = \frac{h}{\sqrt{18c^2}}\frac{x_,}{s_,-C}\left\{6c^2\phi - c + \sqrt{36c^4\phi-12c^3\phi+c^2}\right\}^{1/2}$$

Aber es ist $(s_,-C)^2 = \frac{h^4 - ch^2x^4}{4c^4x^6}$, also durch Substitution der Werthe von x^4 und $x^6 = x^4x^2$:

$$(s_,-C)^2 = \frac{\sqrt{18}}{4}h\frac{s_,-C}{x_,}\frac{18^2c\phi - 6c\phi + 1 \mp \frac{1}{c}\sqrt{36c^4\phi - 12c^3\phi + c^2}}{\left\{6c^2\phi - c \pm\sqrt{36c^4\phi-12c^3\phi+c^2}\right\}^{3/2}}$$

oder

$$\frac{4x_,(s_,-C)}{\sqrt{18}\,h} = \frac{18c^2\left(\frac{s_,-C}{x_,}\right)^2 - 6c\left(\frac{s_,-C}{x_,}\right)^2 + 1 \mp\frac{1}{c}\sqrt{(36c^4-12c^3)\left(\frac{s_,-C}{x_,}\right)^2 + c^2}}{\left\{6c^2\left(\frac{s_,-C}{x_,}\right)^2 - c \pm\sqrt{(36c^4-12c^3)\left(\frac{s_,-C}{x_,}\right)^2+c^2}\right\}^{3/2}}$$

welches die Gleichung der Evolute ist.

§. 12.

Wir fragen weiter nach der Gleichung der Evolute derjenigen krummen Linie, welche (cf § 7) durch die Gleichung $x^{m} = a\, s^{m \pm n}$ ausgedrückt ist. Bei ihr ist $\sigma = \frac{m}{m \pm n} \frac{s}{x}; \tau = -\frac{n\sigma}{(n \pm m)\, x}$ daraus folgt ferner:

$$1.\quad x_{,} = \frac{(2n \pm m)(n \pm m)\, x^2 - m^2 s^2}{n(n \pm m)\, x}$$

und

$$2.\quad s_{,} - C = -\frac{m\, s}{n(n \pm m)\, x} \sqrt{m^2 s^2 - (m \pm n)^2 x^2}$$

Aus 1. ist $m^2 s^2 - (m \pm n)^2 x^2 = n(n \pm m)(x - x_{,})\, x$; wird dieser Werth in 2 substituirt, dann diese Gleichung quadrirt, der Kürze halber wieder $\left(\frac{s_{,} - C}{x_{,}}\right)^2 = \phi$ gesetzt, und die auf diese Weise entstehende Gleichung nach x gelöst, so ist

$$3.\quad x = \frac{m\, x_{,}\, s^2}{m^2 s^2 - (n \pm m)\, n\, \phi\, x_{,}^2}$$

Dieser Werth wird jetzt wieder in 1. eingeführt, wodurch nach einiger Umformung die Gleichung entsteht:

$$4.\quad s^4 - \frac{(2n\phi + n \pm m)(n \pm m)\, x_{,}^2}{m^2}\, s^2 = \frac{n^2 (n \pm m)^2 (\phi - \phi^2)\, x_{,}^4}{m^4}$$

daher ist:

$$s^2 = \frac{(n \pm m)\, x_{,}^2}{2m^2} \left\{ 2n\phi + n \pm m \pm \sqrt{4n\phi(2n \pm m) + (n \pm m)^2} \right\}$$

und durch Einführung dieses Werthes in 3. findet man sogleich:

$$x = x_{,} + \frac{2n\phi\, x_{,}}{n \pm m \pm \sqrt{4n\phi(2n \pm m) + (n \pm m)^2}}$$

und substituirt man endlich die so gefundenen Werthe von s, x in die gegebene Anfangsgleichung $x^{m} = a\, s^{m \pm n}$, so findet sich als Gleichung ihrer Evolute schließlich:

$$\left\{x_{,} + \frac{2n\phi x_{,}}{n \pm m \pm \sqrt{4n\phi(2n \pm m) + (n \pm m)^2}}\right\}^m = a\left\{\frac{(n \pm m)x_{,}^2}{2m^2}\left[2n\phi + n \pm m \pm \sqrt{4n\phi(2n \pm m) + (n \mp m)^2}\right]\right\}^{\frac{m \pm n}{2}}$$

Als specielle Fälle dieser Auflösung findet man einmal die im vorigen Paragraphen behandelten Gleichungen $as^2 + gx = 0$ und $bx^2 + fs = 0$.

Ist die gegebene Gleichung $x^2 = as^3$, so wird die Gleichung der Evolute:

$$\left(x_{,} + \frac{2\phi x_{,}}{3 \pm \sqrt{16\phi + 9}}\right)^2 = a\left(\frac{3}{8}x_{,}^2(2\phi + 3 \pm \sqrt{16\phi + 9})\right)^{3/2}$$

oder nach leichter Umformung:

$$\left\{3x_{,} \pm \sqrt{16(s_{,} - C)^2 + 9x_{,}^2}\right\}^4 = \frac{512}{9}\frac{x_{,}^2}{a^4} + \frac{1024}{27}\frac{(s_{,} - C)^2}{a^4} \pm \frac{512}{27}\frac{x_{,}}{a^4}\sqrt{16(s_{,} - C)^2 + 9x_{,}^2}$$

Ist die gegebene Gleichung $x^3 = as^2$, so wird die Gleichung der Evolute:

$$\left(x_{,} + \frac{2\phi x_{,}}{-2 \pm \sqrt{4 - 4\phi}}\right)^3 = -\frac{ax_{,}^2}{9}(2\phi - 2 \pm \sqrt{4 - 4\phi})$$

oder umgeformt:

$$81(s_{,} - C)^6 - (162x_{,}^2 - 36ax_{,} - 4a^2)(s_{,} - C)^4 + (81x_{,}^4 + 252ax_{,}^3)(s_{,} - C)^2 + 16a^2x_{,}^4 = 0$$

Ist die gegebene Gleichung $x^3 = as^4$, so wird die Gleichung der Evolute:

$$\left(x_{,} + \frac{2\phi x_{,}}{4 \pm \sqrt{20\phi + 16}}\right)^3 = a\left(\frac{4x_{,}^2}{18}(2\phi + 4 \pm \sqrt{20\phi + 16})\right)^2$$

oder:

$$x_{,}^3\left(\frac{2\phi + 4 \pm \sqrt{20\phi + 16}}{4 \pm \sqrt{20\phi + 16}}\right)^3 = \frac{4a}{81}x_{,}^4(2\phi + 4 \pm \sqrt{20\phi + 16})^2$$

daher:

$$2\phi + 4 \pm \sqrt{20\phi + 16} = \frac{4a}{81} x_{,} (4 \pm \sqrt{20\phi + 16})^3$$

oder endlich:

$$\frac{16a}{81}\left(2x_{,} \pm \sqrt{5(s_{,}-C)^2 + 4x_{,}^2}\right)^3 = (s_{,}-C)^2 + 2x_{,}^2 \pm x_{,}\sqrt{5(s_{,}-C)^2 + 4x_{,}^2}$$

welches durch Wegschaffung der Wurzelzeichen in folgende Gleichung des vierten Grades übergeht:

$$125(s_{,}-C)^4 + (s_{,}-C)^2\left\{\left(100 + \frac{12800}{81}a - \frac{25600}{729}a^2\right)x_{,}^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{320}{27}a - 50\right)x_{,} + 1\right\} = \frac{10240}{81}a\left(\frac{16a}{81} - 1\right)x_{,}^4 + \left(40 - \frac{128}{27}a\right)x_{,}^3 - x_{,}^2$$

Ist die gegebene Gleichung $x^4 = as^3$, so wird die Gleichung der Evolute:

$$\left(x_{,} + \frac{2\phi x_{,}}{-3 \pm \sqrt{9 - 8\phi}}\right)^4 = a\left(-\frac{3}{32}x_{,}^2(2\phi - 3 \pm \sqrt{9 - 8\phi})\right)^{3/2}$$

u. s. w., wobei die Umformung natürlich desto weitläuftiger und schwieriger wird, je größer die Werthe sind, die für m und n gesetzt werden.

§. 13.

Nun mögen noch bei den oben (§ 8) behandelten transcendenten Gleichungen die entsprechenden Gleichungen der Evoluten gesucht werden.

Die erste Gleichung ist $s = \log x$ daraus folgt:

$\sigma = \frac{1}{x}$, $\tau = -\frac{1}{x^2}$ und daher:

$$x_{,} = x + \frac{\sigma^3 - \sigma}{\tau} = \frac{2x^2 - 1}{x}$$

$$(s_{,} - C)^2 = \frac{\sigma^2\sqrt{\sigma^2 - 1}}{\tau} = -\frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$$

$$(s_{,} - C)^2 = \frac{1 - x^2}{x^2};\ x = \frac{1}{\sqrt{1 + (s_{,} - C)^2}}$$

und durch Einführung dieses Werthes von x in die Gleichung zwischen x und $x_{,}$:

$$x_, = \frac{1-(s_,-C)^2}{\sqrt{1+(s_,-C)^2}}$$

die gesuchte Gleichung der Evolute.

Ferner ist die Gleichung $x = \log s$ gegeben

Aus dieser folgt $\sigma = s$, $\tau = \sigma$ und daher:

$$x_, = x + s^2 - 1$$

$$(s_, - C) = s\sqrt{s^2-1}$$

$$(s_, - C)^2 = s^4 - s^2;\ s^2 = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1+4(s_,-C)^2}$$

$$\text{also } x = x_, + 1 - s^2 = x_, + \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{1+4(s_,-C)^2}$$

aber $2x = \log(s^2)$ also durch Einführung der betreffenden Werthe:

$$\log\left(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1+4(s_,-C)^2}\right) = 2x_, + 1 \mp \sqrt{1+4(s_,-C)^2}$$

die gesuchte Gleichung der Evolute.

Weiter wurde $s = a\left(e^{\frac{x}{2a}} - e^{-\frac{x}{2a}}\right)$ als Gleichung der Kettenlinie vorgeführt. Man hat: $\sigma = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{2a}} + e^{-\frac{x}{2a}}\right)$ und

$$\tau = \frac{1}{4a}\left(e^{\frac{x}{2a}} - e^{-\frac{x}{2a}}\right) = \frac{s}{4a^2}$$

daraus folgt:

$$1.\ x_, = x + \frac{\frac{1}{8}\left(e^{\frac{3x}{2a}} - e^{\frac{x}{2a}} + e^{-\frac{3x}{2a}} - e^{-\frac{x}{2a}}\right)}{\frac{1}{4a}\left(e^{\frac{x}{2a}} - e^{-\frac{x}{2a}}\right)} = x + \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

$$2.\ s_, - C = \frac{\frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} + 2\right)\sqrt{\frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} - 2\right)}}{\frac{1}{4a}\left(e^{\frac{x}{2a}} - e^{-\frac{x}{2a}}\right)} = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} + 2\right)$$

Aus der letzten Gleichung folgt:

$$e^{\frac{x}{a}} = \frac{(s_, - C) - a \pm \sqrt{(s_, - C)^2 - 2a(s_, - C)}}{a}$$

Dieses wird in die Gleichung 1. substituirt, und so der Werth von x gefunden:

$$x = x_, \mp \sqrt{(s_, - C)^2 - 2a(s_, - C)}$$

Wird dieser Werth jetzt wieder in die Gleichung 2. eingeführt, so erhält man folgende Gleichung zwischen $s_,$, $x_,$:

$$(s_, - C) = a + \frac{a}{2} e^{\frac{x_, \mp \sqrt{(s_, - C)^2 - 2a(s_, - C)}}{a}} + \frac{a}{2} e^{\frac{-x_, \pm \sqrt{(s_, - C)^2 - 2a(s_, - C)}}{a}}$$

welches demnach die Gleichung der Evolute der Kettenlinie ist.

$x = \sin s$ war die Kreisgleichung. Die Evolute desselben ist aber bekanntlich der Mittelpunkt selbst. Wenden wir unsere Formeln an, so findet sich: $\sigma = \frac{1}{\cos s}$ und $\tau = -\frac{\sin s}{\cos s^2}$ $\sigma = -\frac{\sin s}{\cos s^3}$

$$x_, = x + \frac{\frac{1}{\cos s^3} - \frac{1}{\cos}}{-\frac{\sin s}{\cos s^3}} = x + \frac{\cos s^2 - 1}{\sin s} = x - \sin s = 0$$

und

$$s_, - C = -1$$

§. 14.

Noch eine weitere Untersuchung findet hier einen geeigneten Platz, nämlich die Untersuchung über den Parallelismus krummer Linien. Für den Fall, daß die Gleichungen zwischen rechtwinkligen Coordinaten gegeben sind, ist die Untersuchung höchst elegant von Crelle geführt, im zweiten Bande seiner „Sammlung mathematischer Abhandlungen“

und diesem Aufsatze sind auch die hier zu benutzenden Prämissen entnommen.

Parallelismus nennt man bekanntlich die Eigenschaft, daß die Stücke der Normallinien, welche zwischen den gegebenen Linien liegen, einander gleich sind.

Ebenso bekannt ist der Satz, daß die Normale auf die eine Linie auch zur anderen normal steht; daß also, wenn eine Linie einer zweiten parallel ist, auch die zweite der ersten parallel sein muß; oder kurz ausgedrückt: der Satz von der Gegenseitigkeit des Parallelismus.

Wir wollen die gegebene Gleichung $f(x, s) = 0$ nehmen und daraus die Gleichung der ihr parallelen Linie $F(X, S) = 0$ suchen.

Analog mit der Bezeichnung $\frac{ds}{dx} = \sigma$ und $\frac{d^2 s}{dx^2} = \tau$, setzen wir $\frac{dS}{dX} = \Sigma$ und $\frac{d^2 S}{dX^2} = T$.

Nun wissen wir, daß, wenn eine Gleichung zwischen x, y gegeben ist, die Gleichung der Parallelen zwischen X, Y durch die Bedingungen

$$X = x + \frac{Cp}{\sqrt{1+p^2}}; \quad Y = y - \frac{C}{\sqrt{1+p^2}}$$

gefunden wird, wo C den Abstand der beiden parallelen Linien bedeutet.

Dieses ist auf unser Coordinatensystem zu übertragen. Nun ist:
$y = \int \sqrt{\sigma^2 - 1}\, dx$; $Y = \int \sqrt{\Sigma^2 - 1}\, dX$ ferner
$X = x + \frac{C\sqrt{\sigma^2 - 1}}{\sigma}$, $Y = \int \sqrt{\sigma^2 - 1}\, dx - \frac{C}{\sigma}$ also die drei Bedingungsgleichungen gegeben:

$$1.\ f(x, s) = 0$$

$$2.\ X = x + \frac{C}{\sigma}\sqrt{\sigma^2 - 1}$$

$$3.\ \int \sqrt{\Sigma^2 - 1}\, dX = \int \sqrt{\sigma^2 - 1}\, dx - \frac{C}{\sigma}$$

woraus x, s zu eliminiren sind.

Statt der Gleichung 3. können wir uns auch eine andere Bedingungsgleichung verschaffen.

Durch Differentiation von 3. wird nämlich:

$$dX = \frac{dx}{\sqrt{\Sigma^2 - 1}}\left[\sqrt{\sigma^2 - 1} + \frac{C\tau}{\sigma^2}\right]$$

Ferner wird durch Differentiation von 2.:

$$dX = \frac{dx}{\sqrt{\sigma^2 - 1}}\left[\sqrt{\sigma^2 - 1} + \frac{C\tau}{\sigma^2}\right]$$

Und bei Vergleichung der beiden Werthe von dX zeigt sich der wichtige Satz:

$$4.\ \Sigma = \sigma$$

§. 15.

Auch von diesen allgemeinen Formeln soll die erste Anwendung auf die Gleichung des ersten Grades gemacht werden.

$s = ax + b$; $\Sigma = \sigma = a$ folglich $a\,dX = dS$ und

$$S = aX + C$$

wieder eine grade Linie, wie bekannt.

Zur nächsten Anwendung diene die Gleichung des zweiten Grades. Dann sind die drei Bedingungsgleichungen, aus denen x. s eliminirt werden sollen:

$$\text{I. } as^2 + bx^2 + cxs + fs + gx + h = 0$$

$$\text{II. } \Sigma = -\frac{2bx + cs + g}{2as + cx + f}$$

$$\text{III. } X = x - \frac{C}{2bx + cs + g}\sqrt{\begin{array}{l}(c^2 - 4a^2)s^2 + (4bc - 4ac)xs + \\ + (4b^2 - c^2)x^2 + (2cg - 4af)s + \\ + (4bg - 2cf)x + (g^2 - f^2)\end{array}}$$

Aus I. ist:

$$s = -\frac{cx + f}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{(c^2 - 4ab)x^2 + (2cf - 4ag)x + (f^2 - 4ah)}$$

Ferner ist aus II.:

$$s = -\frac{(cx + f)\Sigma + 2bx + g}{2a\Sigma + c}$$

Durch Gleichsetzung dieser beiden Werthe von s folgt:

$$\pm(2a\Sigma+c)\sqrt{(c^2-4ab)x^2+(2cf-4ag)x+(f^2-4ah)}$$
$$=(ch+f)(2a\Sigma+c)-2af(cx+f)\Sigma+2bx+g)=(c^2-4ab)x+(cf-2ag)$$

Daher:

$$(4a\Sigma^2+4ac\Sigma+c^2)\,[(c^2-4ab)x^2+(2cf-4ag)x+$$
$$(f^2-4ah)]=[(c^2-4ab)x+(cf-2ag)]^2$$

und daraus:

$$x^2+\frac{2cf-4ag}{c^2-4ab}x=\frac{4ah-f^2}{c^2-4ab}+\frac{ag^2+c^2b+bf^2-4abh-fcg}{(c^2-4ab)(a\Sigma^2+c\Sigma+b}$$

folglich ist:

$$x=\frac{2ag-cf}{c^2-4ab}\pm\frac{1}{(c^2-4ab)(a\Sigma^2+c\Sigma+b^2)}\sqrt{\alpha\Sigma^4+\beta\Sigma^3+\gamma\Sigma^2+\varepsilon\Sigma+\varkappa}$$

wo $\alpha=4a^4g^2-4a^3cfg+4a^3c^2h-16a^4bh+4a^3bf^2$

$\beta=8a^3cg^2-8a^2c^2fg+8a^2c^3h-32a^3bch+8a^2bcf^2$

$\gamma=5a^2c^2g^2-5ac^3fg+4a^3bg^2-4a^2bcfg+5ac^4h-16a^2bc^2h+$
$+5abc^2f^2-16a^3b^2h+4a^2b^2f^2$

$\varepsilon=4a^2bcg^2-16a^2b^2ch+4ab^2cf^2-4abc^2fg+$
$+ac^3g^2-fc^4g+c^5h+bc^3f^2$

$\varkappa=abc^2g^2-4ab^2c^2h+bc^4h-bc^3fg+b^2c^2f^2$

und endlich die Gleichung der gesuchten Parallelen:

$$X=\frac{2ag-cf}{c^2-4ab}\mp\frac{1}{(c^2-4ab)(a\Sigma^2+c\Sigma+b)}\sqrt{\alpha\Sigma^4+\beta\Sigma^3+\gamma\Sigma^2+\varepsilon\Sigma+\varkappa}$$
$$+\frac{C\sqrt{\Sigma^2-1}}{\Sigma}$$

welches indessen eine Differentialgleichung ist, die sich in dieser Allgemeinheit nicht integriren läßt. Wollte man untersuchen in welchen besonderen Fällen die Integrirbarkeit stattfindet, so wären zunächst durch wiederholtes Quadriren die Wurzelzeichen wegzuschaffen, und dann noch weiter nachzusehen, unter welchen Bedingungen die höheren Potenzen von Σ verschwindende Coefficienten erhalten u. s. w.

Ist ferner die gegebene Gleichung:

$$l\;x^{m}=a\,s^{m\pm n}$$

so ist:

$$\text{II} \quad \Sigma = \frac{m}{m \pm n} \, \frac{s}{x} = \frac{m}{(m \pm n)\, a^{\frac{1}{m \pm n}} \, x^{\frac{n}{n \pm m}}}$$

und

$$\text{III} \quad X = x + \frac{C\sqrt{\Sigma^2 - 1}}{\Sigma}$$

Aus II findet man

$$x = \left(\frac{m}{m \pm n}\right)^{\frac{n \pm m}{n}} \frac{1}{a^{\pm\frac{1}{n}} \, \Sigma^{\frac{n \pm m}{n}}}$$

folglich durch Substitution dieses Werthes in III:

$$X\Sigma - \left(\frac{m}{m \pm n}\right)^{\frac{n \pm m}{n}} a^{\mp\frac{1}{n}} \, \Sigma^{\mp\frac{m}{n}} = C\sqrt{\Sigma^2 - 1}$$

und durch Quadrirung:

$$(X^2 - C^2)\,\Sigma^2 - 2\left(\frac{m}{m \pm n}\right)^{\frac{n \pm m}{n}} a^{\mp\frac{1}{n}} \, X \Sigma^{\frac{n \mp m}{n}} +$$

$$+ \left(\frac{m}{m \pm n}\right)^{\frac{2n \pm 2m}{n}} a^{\mp\frac{2}{n}} \, \Sigma^{\mp\frac{2m}{n}} + C^2 = 0$$

Ist wieder $n = 1$, so vereinfacht sich die Gleichung folgendermaßen:

$$(X^2 - C^2)\,\Sigma^2 - 2\left(\frac{m}{m \pm 1}\right)^{1 \pm m} a^{\mp 1} \, X \Sigma^{1 \mp m} +$$

$$+ \left(\frac{m}{m \pm 1}\right)^{2 \pm 2m} a^{\mp 2} \quad {}^{2m} + C = 0$$

Um auch m noch zu specialisiren sei zunächst $m = 1$ und die oberen Zeichen gelten, also $x = a s$ [illegible]; und die Parallele

$$(X^2 - C^2)\Sigma^2 - \frac{x}{2a} + \frac{1}{16a^2\Sigma^2} + C^2 = 0$$

oder

$$\Sigma^4 + \frac{C^2 - \frac{X}{2a}}{X^2 - C^2}\Sigma^2 = \frac{1}{16a^2(C^2 - X^2)}$$

und daraus:

$$\Sigma = \sqrt{\frac{2aC^2 - X \pm \sqrt{4a^2C^4 + C^2 - 4aC^2X}}{4a(C^2 - X^2)}}$$

Ist $m = 2$ und die unteren Zeichen gilten, also $x^2 = as$, so ist die Gleichung der Parallelen:

$$\Sigma^4 - \frac{4}{a}X\Sigma^3 + \frac{4}{a^2}(X^2 - C^2)\Sigma^2 + \frac{4C^2}{a^2} = 0$$

Gilten hingegen bei $m = 2$ die oberen Zeichen, also $x^2 = as^3$, so ist die Gleichung der Parallelen:

$$\Sigma^6 + \frac{C^2}{X^2 - C^2}\Sigma^4 - \frac{16}{27}\frac{X}{a(X^2 - C^2)}\Sigma^3 + \frac{64}{729a^2(X^2 - C^2)} = 0$$

u. s. w. Die Integration ist in allen diesen Fällen nicht auszuführen.

Auch zu den oben berücksichtigten transcendenten Gleichungen wollen wir die zugehörigen Gleichungen der Parallelen suchen.

Zunächst ist:

I. $s = \log x$

II. $\Sigma = \frac{1}{x}$

$$\text{III. } X = x + \frac{C\sqrt{\Sigma^2 - 1}}{\Sigma} = \frac{1 + C\sqrt{\Sigma^2 - 1}}{\Sigma}$$

folglich:

$$\Sigma = \frac{X}{X^2 - C^2} \pm \frac{1}{X^2 - C^2}\sqrt{C^4 + C^2 - C^2X^2}$$

und

$$S = \int \frac{X\,dX}{X^2 - C^2} \pm \int \frac{dX}{X^2 - C^2}\sqrt{C^4 + C^2 - C^2X^2}$$

Das erste dieser beiden Integrale ist:

$$\int \frac{X\,dX}{X^2 - C^2} = \frac{1}{2}\log(X^2 - C^2)$$

Um auch das zweite Integral aufzufinden, werde $X^2 - C^2 = z$ gesetzt; $2X\,dX = dz$, $dX = \frac{dz}{2\sqrt{z + C^2}}$ also:

$$\frac{C\sqrt{1+C^2-X^2}}{X^2 - C^2}dX = \frac{C\sqrt{1-z}}{z}\,\frac{dz}{2\sqrt{z+C^2}} = \frac{C(1-z)dz}{2z\sqrt{C^2+(1-C^2)z-z^2}}$$

und das Integral davon:

$$= \frac{1}{2}\log\frac{2C^2+(1-C^2)z+2C\sqrt{C^2+(1-C^2)z-z^2}}{z}$$

$$-\frac{C}{2}\text{Arc}\ \sin = \frac{2z+C^2-1}{\sqrt{C^4-2C^2+1+4C^2}}$$

daher:

$$S = \frac{1}{2}\log z \pm \frac{1}{2}\log\frac{2C^2+(1-C^2)z+2C\sqrt{C^2+(1-C^2)z-z^2}}{z}$$

$$\mp\frac{C}{2}\text{Arc}\left(\sin = \frac{2z+C^2-1}{C^2+1}\right)$$

oder wenn die logarithmischen Glieder zusammengezogen und für z wieder sein Werth gesetzt wird:

$$S = \frac{1}{2}\log\left\{X^2+C^2-X^2C^2+C^4+2CX\sqrt{C^2+1-X^2}\right\}$$

$$-\frac{C}{2}\text{Arc}\left(\sin = \frac{2X^2-C^2-1}{C^2+1}\right)$$

oder $S = \frac{1}{2}\log\left\{\frac{X^4+C^4-2C^2X^2}{X^2+C^2-X^2C^2+C^4+2CX\sqrt{C^2+1-X^2}}\right\}$

$$+\frac{C}{2}\text{Arc}\left(\sin = \frac{2X^2-C^2-1}{C^2+1}\right)$$

je nachdem das obere oder untere Zeichen genommen wird.

Die nächste Gleichung ist:

$$\text{I}\quad x = \log s$$

$$\text{II.}\quad \Sigma = s$$

$$\text{III}\quad X = x + \frac{C\sqrt{\Sigma^2-1}}{\Sigma} = \log\Sigma + \frac{C\sqrt{\Sigma^2-1}}{\Sigma}$$

wo keine Integration möglich ist.

Aus der weiteren Gleichung der Kettenlinie folgt als Differentialgleichung ihrer Parallelen

$$2\Sigma = e^{\frac{X\Sigma - C\sqrt{\Sigma^2 - 1}}{2a\Sigma}} + e^{-\frac{X\Sigma - C\sqrt{\Sigma^2 -}}{2a\Sigma}}$$

und aus der Kreisgleichung folgt als Differentialgleichung ihrer Parallelen

$$\Sigma = \sqrt{\frac{C^4 + 1 - 2C^2 - C^2X^2 - X^2 \pm 2CX^2}{C^4 + 1 - 2C^2 - 2C^2X^2 - 2X^2 + X^4}}$$

beides Differentialgleichungen, mit denen weiter Nichts anzufangen ist.

§. 16.

Zum Schluß soll noch angedeutet werden, welches Verfahren einzuschlagen ist, um eine zwischen s, x gegebene Gleichung in eine zwischen Polarcoordinaten umzuwandeln. Man nehme den Anfangspunkt der Abscissen zum Pole der Polarcoordinaten und zur Achse derselben die Abscissenachse. Ferner heiße der Radius vector u, der Winkel, den er mit der Achse bildet t, und t sei die unabhängige Veränderliche.

Zwei Formeln kommen hier in Betrachtung:

$$x = u . \cos t$$

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{u^2 + \frac{du^2}{dt^2}}$$

Aus der ersteren findet sich:

$$\frac{dx}{dt} = \cos t . \frac{du}{dt} - u . \sin t$$

und aus dieser in Verbindung mit der zweiten:

$$\sigma = \frac{\sqrt{u^2 + \frac{du^2}{dt^2}}}{\cos t . \frac{du}{dt} - u . \sin t}$$

Wird jetzt σ wieder vermöge der ersten Formel in Verbindung mit der gegebenen Anfangsgleichung als Function von t, u dargestellt so entsteht die Differentialgleichung zwischen t, u.