

INAUGURAL - DISSERTATION

zur
Erlangung der Doktorwürde
der
Naturwissenschaftlich - Mathematischen
Gesamtfakultät
der Ruprecht - Karls - Universität
Heidelberg

vorgelegt von
Dipl.-Phys. Nicolas Gerhard Roland Behl
aus Düsseldorf

Tag der mündlichen Prüfung: 25. November 2015

**Ein neuer Compressed-Sensing-basierter
Rekonstruktionsalgorithmus
mit einem angepassten Lexikon
für die ^{23}Na -Magnetresonanztomographie**

Gutachter: Prof. Dr. Peter Bachert
Prof. Dr. Dirk Dubbers

Ein neuer Compressed-Sensing-basierter Rekonstruktionsalgorithmus mit angepasstem Lexikon für die ^{23}Na -Magnetresonanztomographie

Das niedrige SNR der ^{23}Na -MRT hat eine geringe räumliche Auflösung und lange Messzeiten zur Folge. Um dem entgegenzuwirken wurde in dieser Arbeit ein Compressed-Sensing-basierter Rekonstruktionsalgorithmus (3D-DLCS) für die ^{23}Na -MRT bei $B_0 = 7\text{ T}$ entwickelt. Als Basis für die dünnbesetzte (*sparse*) Darstellung des zu rekonstruierenden Bildes dient ein an die vorliegenden Daten angepasstes Lexikon. Simulierte Daten des menschlichen Kopfes wurden zur Optimierung der Rekonstruktionsparameter und zur quantitativen Auswertung der Rekonstruktionsergebnisse verwendet. Der Algorithmus wurde zur Rekonstruktion von *In-vivo*-Daten verwendet und mit der nicht-uniformen schnellen Fouriertransformation (NUFFT) sowie mit nicht-adaptiven Compressed-Sensing-Rekonstruktionen verglichen. Das Bildrauschen wurde bei gleichzeitiger Erhaltung kleiner Strukturen im Bild am effektivsten bei zehnfach unterabgetasteten und zehnfach gemittelten Daten unterdrückt. Für Daten mit einer nominellen Auflösung von $(2\text{ mm})^3$ konnte das Spitzen-Signal-Rausch-Verhältnis der 3D-DLCS-Rekonstruktion gegenüber der NUFFT um 5,1 dB und die strukturelle Ähnlichkeit um 24% erhöht werden. Der Bildkontrast ist bei der 3D-DLCS-Rekonstruktion sehr gut erhalten. Durch eine asymmetrische Anordnung der Projektionen des 3D-radialen Datensatzes konnte die Messzeit der ^{23}Na -MRT um 30% reduziert werden. Hierzu wird die 3D-DLCS-Rekonstruktion mit den homodyn rekonstruierten asymmetrischen Daten initialisiert, so dass eine nahezu artefaktfreie Rekonstruktion von ^{23}Na -MRT-Daten mit einer nominellen Auflösung von $(1,7\text{ mm})^3$ bei einer Messzeit von 26 min erreicht wurde. Die erhöhte räumliche Auflösung bei akzeptabler Messzeit erleichtert den Einsatz der ^{23}Na -MRT in der diagnostischen Bildgebung.

A new Compressed-Sensing-based reconstruction algorithm relying on a learned dictionary for ^{23}Na magnetic resonance tomography

The low SNR of ^{23}Na MRI results in a low spatial resolution and long measurement times. In this work, a Compressed-Sensing-based reconstruction algorithm (3D-DLCS) for ^{23}Na MRI at $B_0 = 7\text{ T}$ was developed in order to counteract these effects. An adaptive dictionary was chosen as the basis for the sparse representation for the image to be reconstructed. Simulated data of the human head were used to optimize the reconstruction parameters and for the quantitative analysis of the reconstructions. The algorithm was applied to the reconstruction of *in vivo* ^{23}Na data and compared with the nonuniform fast Fourier transform (NUFFT) and with non-adaptive Compressed-Sensing reconstructions. Image noise was maximally reduced for tenfold undersampled and tenfold averaged data, while small structures were well preserved. For data with a nominal resolution of $(2\text{ mm})^3$, the peak signal-to-noise ratio of the 3D-DLCS reconstruction was enhanced by 5,1 dB, the structural similarity by 24%. The image contrast was well maintained in the 3D-DLCS reconstruction. The measurement time for ^{23}Na MRI could be reduced by 30% by an asymmetrical ordering of the projections in the 3D-radial dataset. For this purpose, the 3D-DLCS-reconstruction was initialized by a homodyne reconstruction of the asymmetrical data, resulting in the nearly artifact-free reconstruction of ^{23}Na MRI data with resolumboxtion of $(1,7\text{ mm})^3$ at a measurement time of 26 min. The increased spatial resolution at acceptable measurement times improves the applicability of ^{23}Na MRI to clinical imaging.

Inhaltsverzeichnis

| | |
|--|-----------|
| Abkürzungsverzeichnis | iii |
| 1 Einleitung | 1 |
| 2 Grundlagen | 3 |
| 2.1 Kernspinresonanz | 3 |
| 2.1.1 Kernspin und Zeeman-Effekt | 3 |
| 2.1.2 Makroskopische Magnetisierung | 5 |
| 2.1.3 Zeitliche Entwicklung der Magnetisierung | 6 |
| 2.1.4 Relaxation und Bloch Gleichungen | 7 |
| 2.2 Prinzipien der Magnetresonanztomographie | 7 |
| 2.2.1 Ortskodierung und Fourier-MRT | 7 |
| 2.2.2 Diskretisierung und Nyquist-Kriterium | 9 |
| 2.2.3 Nyquist-Kriterium bei radialer Datenaufnahme | 10 |
| 2.3 Natrium-MRT | 10 |
| 2.3.1 ^{23}Na im menschlichen Körper | 10 |
| 2.3.2 Relative Signalstärke | 11 |
| 2.3.3 Quadrupolmoment | 12 |
| 2.4 Compressed-Sensing-MRT | 13 |
| 2.4.1 Motivation der CS-MRT | 14 |
| 2.4.2 Sparsity | 15 |
| 2.4.3 Inkohärenz | 15 |
| 2.4.4 Nichtlineare Rekonstruktion | 16 |
| 2.5 Partial Fourier | 19 |
| 3 Material und Methoden | 21 |
| 3.1 Hardware | 21 |
| 3.1.1 Magnetresonanz-Tomograph | 21 |
| 3.1.2 RF-Spule | 21 |
| 3.1.3 Auflösungsphantom | 22 |
| 3.2 Sequenzen | 22 |
| 3.2.1 Dichteangepasste Radialsequenz | 22 |
| 3.2.2 Asymmetrische Verteilung der Projektionen | 23 |
| 3.3 NUFFT | 25 |
| 3.4 Iterative Rekonstruktion | 26 |
| 3.4.1 K-SVD-Algorithmus zur Anpassung des Lexikons | 27 |
| 3.4.2 3D-DLCS Algorithmus | 27 |
| 3.4.3 Regularisierung durch Totale Variation | 29 |
| 3.4.4 Homodyne Verarbeitung von asymmetrisch unterabgetasteten Daten | 31 |

| | | |
|------------------------------|---|-----------|
| 3.4.5 | Erweiterung der homodynen Verarbeitung auf 3D-radiale Daten . . . | 34 |
| 3.5 | Simulationen | 34 |
| 3.6 | Quantitative Auswertung der Rekonstruktionen | 35 |
| 3.6.1 | Strukturelle Ähnlichkeit | 35 |
| 3.6.2 | Spitzen-Signal-Rausch-Verhältnis | 36 |
| 3.6.3 | Kontrast zwischen Läsion und weißer Substanz | 36 |
| 4 | Ergebnisse | 37 |
| 4.1 | Rekonstruktionen mit dem 3D-DLCS Algorithmus | 37 |
| 4.1.1 | Optimierung der Rekonstruktionsparameter | 37 |
| 4.1.2 | Verhalten bei variierender Unterabtastung und Mittelung | 38 |
| 4.1.3 | Vergleich der unterschiedlichen Regularisierungen | 39 |
| 4.1.4 | Kontrastanalyse | 39 |
| 4.2 | Asymmetrische k-Raum-Abtastung | 48 |
| 4.2.1 | Quantitative Analyse anhand von simulierten Daten | 48 |
| 4.2.2 | Rekonstruktion von asymmetrischen In-vivo- ²³ Na-Daten | 48 |
| 5 | Diskussion | 51 |
| 5.1 | Gleichgewicht von Unterabtastung und Mittelungen | 52 |
| 5.2 | Angepasste Lexika und ihre Anwendung in der Rekonstruktion von radialen ²³ Na-Daten | 52 |
| 5.3 | Asymmetrische Unterabtastung | 53 |
| 5.3.1 | Vergleich zwischen homodyner Initialisierung und Zerofilling | 54 |
| 5.4 | Quantitative Auswertung der Bildqualität | 54 |
| 5.4.1 | PSNR und SSIM | 55 |
| 5.4.2 | Erhaltung des Bildkontrastes | 56 |
| 5.5 | Anatomisches Vorwissen und die Unabhängigkeit davon | 56 |
| 6 | Zusammenfassung | 58 |
| Anhang | | 61 |
| A | Rekonstruktionen von In-vivo- ²³ Na-MR-Daten | 61 |
| B | Veröffentlichungen | 65 |
| Abbildungsverzeichnis | | 66 |
| Tabellenverzeichnis | | 68 |
| Literaturverzeichnis | | 69 |
| Danksagung | | 74 |
| Erklärung | | 75 |

Abkürzungsverzeichnis

| | |
|---------|---|
| 3D-DAPR | 3D dichteangepasste Radialsequenz (engl. <i>3D density adapted projection reconstruction</i>) |
| 3D-DLCS | Compressed-Sensing mit gelerntem 3D-Lexikon (engl. <i>3D-dictionary learning compressed sensing</i>) |
| CS | Compressed-Sensing (engl. für „Komprimiertes Aufnehmen“) |
| CT | Computertomographie |
| DCT | diskrete Kosinustransformation (engl. <i>discrete cosine transform</i>) |
| DFT | diskrete Fouriertransformation |
| FFT | schnelle Fouriertransformation (engl. <i>fast Fourier transform</i>) |
| FT | Fouriertransformation |
| K-SVD | K-Singulärwertzerlegungen (engl. <i>K-Singular-Value-Decompositions</i>) |
| MRT | Magnetresonanztomographie |
| MS | Multiple Sklerose |
| NDFT | nicht-uniforme diskrete Fouriertransformation (engl. <i>nonuniform discrete Fourier transform</i>) |
| NMR | Kernspinresonanz (engl. <i>nuclear magnetic resonance</i>) |
| NUFFT | nicht-uniforme schnelle Fouriertransformation (engl. <i>nonuniform fast Fourier transform</i>) |
| ODCT | überkomplette diskrete Cosinus-Transformation (engl. <i>overcomplete discrete cosine transform</i>) |
| OMP | orthogonaler Verfolgungsalgorithmus (engl. <i>orthogonal matching pursuit</i>) |
| PSF | Punktantwortfunktion (engl. <i>point spread function</i>) |
| PSNR | Spitzen-Signal-Rausch-Verhältnis (engl. <i>peak signal-to-noise ratio</i>) |
| RF | Radiofrequenz |
| RMSE | quadratischer Mittelwert des Fehlers (engl. <i>root mean squared error</i>) |
| ROI | Bildregion (engl. <i>region of interest</i>) |
| SNR | Signal-Rausch-Verhältnis (engl. <i>signal-to-noise ratio</i>) |
| SSIM | strukturelle Ähnlichkeit (engl. <i>structural similarity</i>) |
| SVD | Singulärwertzerlegung (engl. <i>singular value decomposition</i>) |
| TE | Echozeit |
| TEM | transvers elektromagnetisch (engl. <i>transverse electromagnetic</i>) |
| TPSF | transformierte Punktantwortfunktion (engl. <i>transform point spread function</i>) |
| TV | totale Variation |
| USF | Unterabtastungsfaktor (engl. <i>undersampling factor</i>) |
| UTE | ultrakurze TE |

1 Einleitung

Die Magnetresonanztomographie (MRT) hat sich seit ihrer Entdeckung im Jahre 1973 durch Paul Lauterbur zu einem immer wichtigeren Pfeiler der diagnostischen Radiologie entwickelt [Lauterbur, 1973; Garroway et al., 1974]. Neben der anatomischen Bildgebung mit einem erhöhten Weichteilkontrast im Vergleich zu anderen Modalitäten wie der Computertomographie (CT), werden im klinischen Alltag auch Methoden wie beispielsweise die Diffusions-MRT und die spektroskopische Bildgebung angewandt und so die Diagnostik um eine physiologische Komponente erweitert. Ein bedeutender Vorteil der MRT ist außerdem, dass bei der Datenaufnahme keine ionisierende Strahlung appliziert wird.

Die klinische MR-Bildgebung beschränkt sich im Allgemeinen auf das von ^1H -Kernen stammende Signal. Die Gründe dafür sind die hohe natürliche Häufigkeit und die Tatsache, dass ^1H die höchste Kernspinresonanz (engl. *nuclear magnetic resonance*, NMR)-Sensitivität der im menschlichen Körper auftretenden stabilen Isotope aufweist. Mit der im Laufe der letzten Jahre ansteigenden Verfügbarkeit von Hochfeld- und Ultrahochfeldtomographen ($B_0 \geq 3\text{ T}$) rücken andere Kerne als alternative Signalquellen zunehmend in den Vordergrund. Nach ^1H liefert ^{23}Na das zweithöchste *In-vivo*-Signal unter den MR-detektierbaren Isotopen im menschlichen Körper. Die durch ^{23}Na -Bildgebung erhaltene Information unterscheidet sich grundsätzlich von der eines anatomischen ^1H -Bildes. ^{23}Na -Ionen spielen unter anderem für den Erhalt des Zellmembranpotenzials eine wichtige Rolle. Membrankanäle wie die Natrium-Kalium-Pumpe stellen sicher, dass die ^{23}Na -Konzentration außerhalb der Zelle um etwa einen Faktor 10 größer ist als im Zellinneren. Pathologische Veränderungen können zu einer Änderung dieses Konzentrationsgradienten führen [Cameron et al., 1980; Lehmann-Horn und Jurkat-Rott, 1999]. Aufgrund des niedrigen ^{23}Na -MR-Signals ist die Auflösung üblicherweise in der Größenordnung von einigen Millimetern und somit weit entfernt von den Dimensionen einer Zelle; es wird also ein über den Intra- und Extrazellulärraum gemittelt Signal gemessen. Dennoch wurde im Rahmen von Studien die klinische Relevanz der ^{23}Na -MRT untersucht, insbesondere bei der Diagnose von Tumoren [Thulborn et al., 1999; Ouwerkerk et al., 2003; Nagel et al., 2011b], Multipler Sklerose (MS) [Inglese et al., 2010; Zaaraoui et al., 2012; Paling et al., 2013] und Muskelkrankungen [Constantinides et al., 2000a; Nagel et al., 2011a; Weber et al., 2006].

Die geringe natürliche Häufigkeit von ^{23}Na im menschlichen Körper ist eine der größten Limitationen der ^{23}Na -MRT. Zusammen mit der niedrigeren NMR-Sensitivität ergibt sich für ^{23}Na -MR-Daten ein gegenüber ^1H um ca. vier Größenordnungen niedrigeres Signal-Rausch-Verhältnis (engl. *signal-to-noise ratio*, SNR). Das niedrige SNR führt zu deutlich erhöhten Messzeiten bei der Aufnahme von ^{23}Na -MR-Daten, selbst bei vergleichsweise geringen räumlichen Auflösungen. Hinzu kommt die durch den quadrupolaren Relaxationsmechanismus des Spin- $\frac{3}{2}$ -Kerns sehr kurze transversale Relaxationszeit T_2^* . Sie beträgt etwa 3 – 5 ms, so dass für die Auslese der Daten Sequenzen mit sehr kurzen Echozeiten

(TE) verwendet werden müssen. Die Datenaufnahme erfolgt dabei entlang von Projektionen mit Ursprung im k -Raum-Zentrum, die höchsten Frequenzen werden am Ende der Auslese aufgenommen [Nagel et al., 2009; Boada et al., 1997].

Ein wichtiger Schritt auf dem Weg zu kürzeren Messzeiten in der MRT war die erstmalige Anwendung der Compressed-Sensing (engl. für „Komprimiertes Aufnehmen“, CS)-Theorie durch Michael Lustig [Candes et al., 2006; Donoho, 2006; Lustig et al., 2007]. Hierbei wird die Dünnbesetztheit (engl. *sparsity*) der zu rekonstruierenden Bilder in einer geeigneten Transformationsdomäne genutzt, um die bei einer Reduktion der aufgenommenen Daten auftretenden Unterabtastungsartefakte zu reduzieren. Bei geeigneter Wahl der Abtastung des k -Raums, sowie der Transformation, in der das Bild als dünn besetzte Matrix dargestellt werden soll, kann das Bild, trotz einer Abtastungsfrequenz unterhalb der Nyquist-Grenze, artefaktfrei rekonstruiert werden.

Eine erste CS-basierte Rekonstruktion von ^{23}Na -MR-Daten wurde von [Madelin et al., 2012] am Beispiel des Knieknorpels gezeigt. Spätere Ansätze zur iterativen Rekonstruktion von ^{23}Na -Daten verwendeten zur Regularisierung auch *A-priori*-Wissen aus ^1H -Datensätzen [Gnahm et al., 2014; Gnahm und Nagel, 2015; Weingärtner et al., 2015].

Das Ergebnis einer CS-basierten Rekonstruktion hängt maßgeblich von der *sparsity* des zu rekonstruierenden Bildes in der verwendeten Transformation ab. Diese kann durch eine Anpassung der Transformation an das vorliegende Problem maximiert werden. In der MRT kam ein solches adaptives Lexikon erstmals bei der parametrischen Bildgebung zur Bestimmung der Relaxationszeiten T_1 und T_2 zum Einsatz [Doneva et al., 2010]. [Caballero et al., 2014] verwendeten ein aus angepassten Bildausschnitten bestehendes Lexikon bei der Rekonstruktion dynamischer Herzbildgebung.

Das Ziel dieser Arbeit war die Entwicklung eines iterativen, CS-basierten Rekonstruktionsalgorithmus für 3D-radiale ^{23}Na -Daten, um so eine Erhöhung der räumlichen Auflösung und des SNR der ^{23}Na -MRT zu erreichen. Für die Regularisierung wurde ein aus dreidimensionalen Blöcken bestehendes Lexikon verwendet, das durch den K -Singulärwertzerlegung (engl. *K-Singular-Value-Decompositions*, K -SVD)-Algorithmus an das zu rekonstruierende Bild angepasst wurde [Aharon et al., 2006]. Durch die Aufnahme mehrerer Mittelungen bei der Datenaufnahme konnte das SNR der Daten erhöht werden; bei konstanter Messzeit führte dies allerdings zu verstärkten Unterabtastungsartefakten. In dieser Arbeit wurde untersucht, wie sich das Zusammenspiel zwischen dem Grad der Unterabtastung und der Datenmittelung auf die Ergebnisse der Rekonstruktion auswirkt. Des Weiteren wurde untersucht, wie die Messzeit durch eine asymmetrische Unterabtastung des k -Raums weiter reduziert werden kann.

2 Grundlagen

2.1 Kernspinresonanz

Dieser Abschnitt beinhaltet eine kurze Einführung in die Grundlagen der NMR, für deren Entdeckung Felix Bloch und Edward Mills Purcell im Jahre 1952 den Nobelpreis erhielten [Bloch et al., 1946; Purcell et al., 1946]. Die Ausführungen basieren auf den Standardwerken [Slichter, 1990; Abragam, 2007; Levitt, 2008; Bernstein et al., 2004].

2.1.1 Kernspin und Zeeman-Effekt

Atomkerne sind aus Protonen und Neutronen zusammengesetzt. Diese sind wiederum Fermionen und haben einen halbzahligen Spin. Atomkerne, die eine ungerade Anzahl von Protonen und/oder Neutronen besitzen, haben einen von Null verschiedenen Gesamtspin I . Der Spin erfüllt die Eigenschaften eines quantenmechanischen Drehimpulses, d.h. die zugehörigen Operatoren kommutieren wie gemäß:

$$[\hat{I}_i, \hat{I}_j] = \epsilon_{ijk} \hbar \hat{I}_k \quad (2.1)$$

$$[\hat{\mathbf{I}}^2, \hat{I}_i] = 0 \quad (2.2)$$

Für die Eigenwerte $|I, m\rangle$ gilt bei einer Quantisierung entlang der z-Achse:

$$\hat{\mathbf{I}}^2 |I, m\rangle = I(I+1) \hbar^2 |I, m\rangle \quad (2.3)$$

$$\hat{I}_z |I, m\rangle = \hbar m |I, m\rangle \quad (2.4)$$

I ist die Kernspinquantenzahl, m die magnetische Quantenzahl mit den möglichen Werten $m = [-I, -I+1, \dots, I-1, I]$. Mit dem Kernspin ist ein magnetisches Dipolmoment $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ verbunden, das folgendermaßen definiert ist:

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \gamma \hat{\mathbf{I}} \quad (2.5)$$

γ ist das gyromagnetische Verhältnis, welches eine charakteristische Konstante für jeden Atomkern mit $\mathbf{I} \neq 0$ ist. Es setzt sich aus dem Kern-Landé-Faktor g_I und dem Kernma-

gneton μ_K zusammen:

$$\gamma = \frac{gI\mu_K}{\hbar} = \frac{gIe}{2m_p} \quad (2.6)$$

Für ^1H und ^{23}Na misst man gyromagnetische Verhältnisse $\gamma(^1\text{H})/2\pi = 42,6 \text{ MHz T}^{-1}$ und $\gamma(^{23}\text{Na})/2\pi = 11,3 \text{ MHz T}^{-1}$.

Die $(2I + 1)$ -fache Entartung kann durch Anlegen eines Magnetfeldes aufgehoben werden. Dieser Effekt wird nach Pieter Zeeman „Zeeman-Effekt“ genannt. Die Wechselwirkung eines magnetischen Moments $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ mit einem Magnetfeld $\mathbf{B} = (0, 0, B_0)$ wird durch den Hamilton-Operator \hat{H}_Z beschrieben:

$$\hat{H}_Z = -\hat{\boldsymbol{\mu}} \cdot \mathbf{B} = -\gamma \hat{I}_z \cdot B_0 \quad (2.7)$$

Die zeitunabhängige Schrödingergleichung mit den Eigenzuständen $|I, m\rangle$ und den Eigenwerten E_m lautet:

$$\hat{H}_z |I, m\rangle = E_m |I, m\rangle \quad (2.8)$$

Für die Eigenwerte E_m ergibt sich:

$$E_m = -\gamma \hbar m B_0 \quad (2.9)$$

$$\Delta E = E_{m+1} - E_m = \gamma \hbar B_0 \quad (2.10)$$

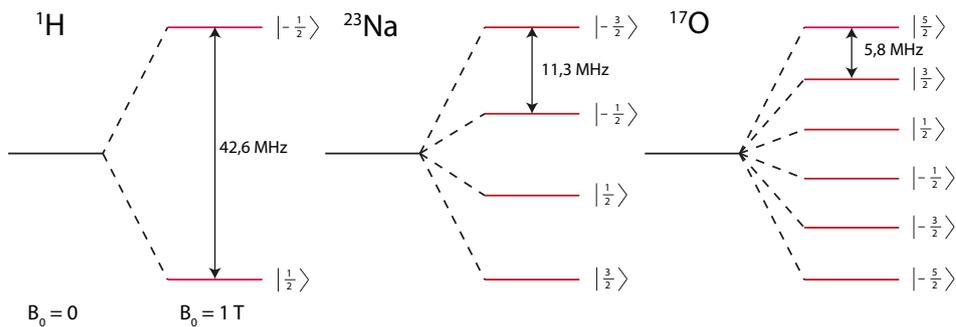


Abbildung 2.1: Zeeman-Aufspaltung für ^1H ($I = 1/2$), ^{23}Na ($I = 3/2$) und ^{17}O ($I = 5/2$). Bei Anlegen eines äußeren Magnetfeldes wird die Entartung der $2I + 1$ Zustände aufgehoben. Die Energiedifferenz ΔE zweier benachbarter Zustände ist proportional zur Stärke des Magnetfeldes B_0 .

2.1.2 Makroskopische Magnetisierung

Im NMR-Experiment wird nicht die Entwicklung einzelner Spins untersucht, sondern die Magnetisierung \mathbf{M}_0 einer makroskopischen Anzahl von Kernen. Die Magnetisierung ist bestimmt durch das Zusammenspiel der Spins im untersuchten Volumen und dem externen Magnetfeld B_0 . Im thermischen Gleichgewicht ist die Wahrscheinlichkeit p_m für die Besetzung eines Zustandes $|I, m\rangle$ durch die Boltzmann-Verteilung gegeben:

$$p_m = \frac{1}{Z} e^{-\frac{E_m}{k_B T}} = \frac{1}{Z} e^{-\frac{\gamma \hbar B_0}{k_B T}} \quad (2.11)$$

mit der kanonischen Zustandssumme:

$$Z = \sum_{m=-I}^I e^{-\frac{\gamma \hbar B_0}{k_B T}} \quad (2.12)$$

Für die quantenmechanische Beschreibung eines Spinensembles kann die Dichtematrix herangezogen werden:

$$\hat{\rho} = \sum_{i=1}^N p_i |\Psi_i\rangle \langle \Psi_i| \quad (2.13)$$

Die Dichtematrix ist eine quadratische Matrix mit Rang $(2I + 1)$, im Falle von ^{23}Na ($I = 3/2$) also eine (4×4) -Matrix. Mithilfe der Dichtematrix kann der Erwartungswert der Observablen $\langle \hat{\mathbf{I}}_{macro} \rangle$ berechnet werden:

$$\langle \hat{\mathbf{I}}_{macro} \rangle = \text{Tr} \left\{ \hat{\rho} \hat{\mathbf{I}} \right\} \quad (2.14)$$

Hiermit ergibt sich für die makroskopische Magnetisierung innerhalb eines Volumens V :

$$\mathbf{M}_0 = \frac{N}{V} \langle \hat{\boldsymbol{\mu}} \rangle = \frac{N\gamma}{V} \langle \hat{\mathbf{I}}_{macro} \rangle = \frac{N\gamma}{V} \text{Tr} \left\{ \hat{\rho} \hat{\mathbf{I}} \right\} \quad (2.15)$$

Die Spindichtematrix kann bei Raum- oder Körpertemperatur durch die Hochtemperaturnäherung vereinfacht werden:

$$\hat{\rho} \approx \frac{1}{2I+1} \left(\mathbb{I} + \frac{\hbar\gamma B_0}{k_B T} \hat{I}_z \right) \quad (2.16)$$

Die x - und y -Komponenten verschwinden im thermischen Gleichgewicht, sodass eine Reduktion auf die z -Komponente möglich ist. Mit $\text{Tr} \left\{ \hat{I}_z^2 \right\} = \frac{1}{3} I(I+1)(2I+1)$ ergibt sich für den Magnetisierungsvektor:

$$\mathbf{M}_0 = \frac{N}{V} \cdot \frac{\gamma^2 \hbar^2 I(I+1)}{3 \cdot k_B T} \cdot \mathbf{B}_0 \quad (2.17)$$

2.1.3 Zeitliche Entwicklung der Magnetisierung

Die zeitliche Entwicklung des Dichteoperators wird durch die von der zeitabhängigen Schrödingergleichung abgeleiteten von-Neumann-Gleichung beschrieben:

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho} = \frac{i}{\hbar} \left[\hat{\mathbf{H}}, \hat{\rho} \right] \quad (2.18)$$

Übertragen auf den Erwartungswert des magnetischen Moments ergibt sich also:

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{\boldsymbol{\mu}} \rangle = \frac{i}{\hbar} \left\langle \left[\hat{\mathbf{H}}, \hat{\boldsymbol{\mu}} \right] \right\rangle \quad (2.19)$$

Zusammen mit der Kommutatorrelation 2.1 erhält man die Bewegungsgleichung für die makroskopische Magnetisierung

$$\frac{d}{dt} \mathbf{M} = \gamma \mathbf{M} \times \mathbf{B}, \quad (2.20)$$

woraus sich ergibt, dass ein Magnetisierungsvektor $\mathbf{M} = (M_x, M_y, M_z)$ in einem konstanten externen Magnetfeld $\mathbf{B} = (0, 0, B_0)$ präzediert falls $M_x \neq 0$ und $M_y \neq 0$. Die Frequenz entspricht der Larmorfrequenz $\omega_0 = \gamma B_0$. In einem NMR-Experiment kann nur die transversale Komponente der Magnetisierung detektiert werden. Für das Kippen eines longitudinalen Magnetisierungsvektor in die Transversalebene wird ein Radiofrequenz (RF)-Magnetfeld \mathbf{B}_1 verwendet.

2.1.4 Relaxation und Bloch Gleichungen

Die Bewegungsgleichung 2.20 muss für eine korrekte Beschreibung der zeitlichen Entwicklung der Magnetisierung noch um Relaxationsterme erweitert werden. So strebt der Magnetisierungsvektor zurück in die Gleichgewichtslage, welche die parallele Ausrichtung zum statischen Magnetfeld B_0 ist:

$$\frac{d}{dt}M_z = \frac{1}{T_1}(M_0 - M_z) \quad (2.21)$$

Die Konstante T_1 wird Spin-Gitter-Relaxationszeit genannt und wird empirisch bestimmt, M_0 entspricht der longitudinalen Magnetisierung zum Zeitpunkt $t = 0$. Neben dem statischen Magnetfeld, erfährt jeder Atomkern mit einem von Null verschiedenen Kernspin innerhalb eines Volumens V auch die lokalen Felder benachbarter Kerne. Die lokale Varianz der Felder führt zu einem Verlust der Phasenkohärenz, was mit einem exponentiellen Abfall der transversalen Magnetisierung verbunden ist:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{M}_\perp = -\frac{1}{T_2}\mathbf{M}_\perp \quad (2.22)$$

Daraus folgen gemeinsam mit der ungestörten Bewegungsgleichung 2.20 die im Jahre 1946 von Felix Bloch aufgestellten Bloch-Gleichungen [Bloch et al., 1946]:

$$\frac{d}{dt}M_x = \omega_0 M_y - \frac{M_x}{T_2} \quad (2.23)$$

$$\frac{d}{dt}M_y = -\omega_0 M_x - \frac{M_y}{T_2} \quad (2.24)$$

$$\frac{d}{dt}M_z = \frac{1}{T_1}(M_0 - M_z) \quad (2.25)$$

2.2 Prinzipien der Magnetresonanztomographie

Im Folgenden wird erläutert wie mittels der NMR eine orts aufgelöste Darstellung der Magnetisierung erreicht werden kann. Für eine detaillierte Ausführung wird auf [Haacke et al., 1999; Bernstein et al., 2004] verwiesen.

2.2.1 Ortskodierung und Fourier-MRT

Wird zusätzlich zum statischen Magnetfeld B_0 ein linear von der Position abhängiges Magnetfeld angewendet, ändert sich die Resonanzfrequenz ω in Abhängigkeit von der Position des jeweiligen Spinpakets. Wird das Feld in z -Richtung angelegt, so ergibt sich für das Gesamt-Magnetfeld

$$B_z(z, t) = B_0 + zG(t) = B_0 + z \frac{\partial B_z}{\partial z}, \quad (2.26)$$

d.h. die Resonanzfrequenz wird um einen Betrag proportional zu $G(t)$ verschoben:

$$\omega(z, t) = \omega_0 + \gamma z G(t) \quad (2.27)$$

Mit der ortsabhängigen Variation der Frequenz ω geht eine ebenfalls ortsabhängige Phasenakkumulation proportional zur Position z einher:

$$\Phi_G(z, t) = - \int_0^t \omega_G(z, t') dt' = -\gamma z \int_0^t G(t') dt' \quad (2.28)$$

Mit der Ortsfrequenz $k(t)$

$$k(t) = \frac{\gamma}{2\pi} \int_0^t G(t') dt' \quad (2.29)$$

ergibt sich in einem um die z -Achse mit der Rotationsfrequenz ω_0 rotierenden Koordinatensystem (x', y', z) für das gemessene Signal $S(k)$ und die zugrundeliegende Verteilung der Magnetisierung $M_\perp(z)$ der Zusammenhang:

$$S(k) = \int M_\perp(z) e^{-i2\pi k z} dz \quad (2.30)$$

$$M_\perp(z) = \int S(k) e^{+i2\pi k z} dk \quad (2.31)$$

Das gemessene Signal $S(k)$ entspricht also der Fouriertransformierten der Spindichte $I(z)$, umgekehrt erhält man $I(z)$ aus der inversen Fouriertransformierten von $S(k)$. Die Gradientenfelder werden außer in z -Richtung auch in x - und y -Richtung angelegt, so dass eine dreidimensionale Ortskodierung ermöglicht wird. Für das gemessene Signal $S(\mathbf{k}) = S(k_x, k_y, k_z)$ und das MR-Bild $M_\perp(\mathbf{r}) = M_\perp(x, y, z)$ gilt dann:

$$S(\mathbf{k}) = \int M_{\perp}(\mathbf{r}) e^{-i2\pi\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3z \quad (2.32)$$

$$M_{\perp}(\mathbf{r}) = \int S(\mathbf{k}) e^{+i2\pi\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3k \quad (2.33)$$

2.2.2 Diskretisierung und Nyquist-Kriterium

Bei der MRT wird der k -Raum nicht kontinuierlich, sondern diskret abgetastet, so dass das aufgenommene Signal mit der Abtastfunktion

$$u(k) = \Delta k \sum_p \delta(k - p\Delta k) \quad (2.34)$$

multipliziert werden; Δk ist die Schrittweite der Abtastung. Die Messung ist aufgrund der endlichen Gradientenstärke außerdem im k -Raum beschränkt, so dass zusätzlich die Multiplikation mit einer Rechteckfunktion notwendig ist:

$$u(k) \cdot \text{rect}\left(\frac{k + 1/2 \cdot \Delta k}{2n\Delta k}\right) = \Delta k \sum_{p=-n}^{n-1} \delta(k - p\Delta k) \quad (2.35)$$

Für das gemessene diskrete Signal und die rekonstruierte Magnetisierung ergibt sich somit:

$$S_m(k) = \Delta k \sum_{p=-n}^{n-1} s(p\Delta k) \delta(k - pk) \quad (2.36)$$

$$M_{\perp,m}(x) = \Delta k \sum_{p=-n}^{n-1} s(p\Delta k) e^{i2\pi p\Delta k x} \quad (2.37)$$

Zur Rekonstruktion der Magnetisierungsverteilung aus diskreten gemessenen Daten im k -Raum wird die diskrete Fouriertransformation (DFT) verwendet. Eine rechnerisch effiziente Methode zur Berechnung ist durch die schnelle Fouriertransformation (engl. *fast Fourier transform*, FFT) gegeben.

Die Periodizität der Abtastfunktion $u(k)$ bleibt bei der Fouriertransformation erhalten. Im Bildraum entspricht sie der Kammfunktion

$$U(x) = \sum_q \delta\left(x - \frac{q}{\Delta k}\right). \quad (2.38)$$

Es ergibt sich also im Bildraum eine Periodizität $M_{\perp,m}(x) = M_{\perp,m}(x + L)$ mit $L = 1/\Delta k$. Ist das gemessene Objekt größer als L , so kommt es zu Überlappungsartefakten. Für ein Objekt der Größe R muss somit die als Nyquist-Kriterium bekannte Relation

$$\Delta k \leq \frac{1}{R} \quad (2.39)$$

eingehalten werden [Nyquist, 1928].

2.2.3 Nyquist-Kriterium bei radialer Datenaufnahme

Aufgrund der Kugelsymmetrie muss im Falle einer 3D-radialen Auslese der Daten das Nyquist-Kriterium sowohl für die Datenpunkte auf den einzelnen Speichen gelten, als auch für den Abstand der einzelnen Projektionen zueinander. Dieser Abstand ist auf der Oberfläche der aufgenommenen Kugel im k -Raum am größten. Für den Abstand Δk und die Zahl der aufgenommenen Projektionen N_p ergibt sich aus dem Nyquist-Kriterium für ein Objekt der Größe R :

$$\Delta k \leq \frac{1}{R} \quad (2.40)$$

$$N_p \geq 4\pi(k_{max} \cdot R)^2 \quad (2.41)$$

Im Gegensatz zur kartesischen Abtastung der Daten führt die Aufnahme von weniger Projektionen bei 3D-radialen Daten zu rauschartigen Unterabtastungsartefakten.

2.3 Natrium-MRT

2.3.1 ^{23}Na im menschlichen Körper

Na^+ ist eines der wichtigsten Kationen im menschlichen Körper. So wird beispielsweise das Ruhemembranpotential einer Zelle durch die Variation der Konzentrationen von Na^+ -, K^+ - und Cl^- -Ionen bestimmt. Die Konzentration von $^{23}\text{Na}^+$ -Ionen im Intrazellulärraum beträgt 5 - 15 mmol l^{-1} , sie ist damit um einen Faktor 10 - 30 geringer als die Konzentration im Extrazellulärraum (140 - 150 mmol l^{-1}) [Deetjen et al., 2005]. Die Konzentrationen von Kalium verhalten sich umgekehrt (intrazellulär: 120 - 150 mmol l^{-1} , extrazellulär: 4 - 5 mmol l^{-1}). Der Konzentrationsgradient wird durch die Natrium-Kalium-Pumpe aufrecht erhalten. Diese ist ein Membranprotein, das unter Einsatz von ATP drei Natriumionen vom Zellinneren in den Extrazellulärraum befördert. Gleichzeitig werden zwei Kaliumionen in die Zelle gebracht. Neben der Natrium-Kalium-Pumpe sind in der Zellmembran offene Kalium-Kanäle eingebaut, die die Diffusion der Kalium-Ionen aus der Zelle heraus ermöglichen. Dem wirkt das dadurch entstehende elektrische Potential entgegen, so dass sich letztendlich ein Gleichgewichtspotential, das Ruhemembranpotential, einstellt.

Das Potential kann aus den intrazellulären und extrazellulären Konzentrationen der Na^+ -, K^+ - und Cl^- -Ionen und der Permeabilitäten P_i der Membran für die jeweiligen Ionen anhand der Goldman-Hodgkin-Katz-Gleichung [Goldman, 1943; Hodgkin und Katz, 1949] berechnet werden:

$$U_M = \frac{RT}{F} \ln \frac{P_{\text{Na}} \cdot [\text{Na}^+]_e + P_K \cdot [\text{K}^+]_e + P_{\text{Cl}} \cdot [\text{Cl}^-]_i}{P_{\text{Na}} \cdot [\text{Na}^+]_i + P_K \cdot [\text{K}^+]_i + P_{\text{Cl}} \cdot [\text{Cl}^-]_e} \quad (2.42)$$

Die Variation des Membranpotentials ist insbesondere im zentralen Nervensystem bei der Bildung von Aktionspotentialen entscheidend. Eine Depolarisation hat dabei zur Folge, dass sich spannungsabhängige Na-Kanäle öffnen, Na^+ -Ionen können so dem Konzentrationsgradienten folgen und in das Zellinnere strömen.

2.3.2 Relative Signalstärke

Nach 2.17 gilt für die Gleichgewichtsmagnetisierung \mathbf{M}_0 :

$$|\mathbf{M}_0| \propto \gamma^2 \cdot I(I + 1) \quad (2.43)$$

Zusätzlich zu den isotopenabhängigen Größen γ und I sind die natürliche Häufigkeit des Isotops a und die relative Häufigkeit im Gewebe r von Bedeutung für die Stärke des gemessenen Signals. Zusammen mit dem Zusammenhang $\omega_0 = \gamma B_0$ erhält man für das relative Signal R eines Isotops mit Kernspin I im lebenden Gewebe:

$$R = a \cdot r \cdot |\gamma|^3 \cdot I(I + 1) \quad (2.44)$$

Für ^{23}Na ergibt sich mit $\gamma/2\pi \approx 11,3 \text{ MHz T}^{-1}$, $r \approx 9,1 \cdot 10^{-4}$ (graue Substanz), $a = 1$ und $I = 3/2$ für das relative Signal $R(^{23}\text{Na})/R(^1\text{H}) = 8,5 \cdot 10^{-5}$. Das Signal aus einem Voxel mit Kantenlänge 1 mm bei der ^1H -MRT entspricht also dem eines Voxels mit Kantenlänge 10,6 mm bei der ^{23}Na -MRT.

Für die MR-Bildgebung ist insbesondere das SNR von Bedeutung. Induktive Verluste im Gewebe führen zu einem linearen Anstiegs des Rauschens mit der Resonanzfrequenz [Hoult und Lauterbur, 1979]. Für das SNR gilt somit:

$$\text{SNR} \propto a \cdot r \cdot \gamma^2 \cdot I(I + 1) \cdot (\Delta x)^3 \cdot B_0 \quad (2.45)$$

2.3.3 Quadrupolmoment

^{23}Na -Kerne besitzen im Gegensatz zu ^1H -Kernen ein elektrisches Quadrupolmoment Q , da deren Spin $I > 1/2$ ist. Ursache ist die Abweichung der Kernladungsverteilung von der Kugelsymmetrie.

Da der Atomkern im Allgemeinen von Ladungen umgeben ist, die ein elektrisches Potential V erzeugen, besitzt der Kern in diesem eine potentielle Energie E :

$$E = \int \rho(\mathbf{r})V(\mathbf{r})d^3r \quad (2.46)$$

Nach einer Taylorentwicklung zweiter Ordnung um den Ursprung $\mathbf{r} = 0$ ergibt sich

$$E = V(0) \int \rho(\mathbf{r})d^3r + \sum_i \left. \frac{\partial V}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{r}=0} \int x_i \rho(\mathbf{r})d^3r + \frac{1}{2!} \sum_{i,j} \left. \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{\mathbf{r}=0} \int x_i x_j \rho(\mathbf{r})d^3r \quad (2.47)$$

mit $i, j = 1, 2, 3$. Der Term erster Ordnung entspricht der potentiellen Energie einer Punktladung im Potential V . Der Dipolterm verschwindet unter der Annahme, dass der Masse- und Ladungsschwerpunkt zusammenfallen. Der dritte Term entspricht dem Quadrupolbeitrag. Mit dem Quadrupoltensor

$$Q_{ij} = \int (3x_i x_j - \delta_{ij} r^2) \rho d^3r, \quad (2.48)$$

erhält man für den Quadrupolterm in Gleichung 2.47:

$$E^{(2)} = \frac{1}{6} \sum_{i,j} \left(V_{ij} q_{ij} + V_{ij} \delta_{ij} \int r^2 \rho d^3r \right) \quad (2.49)$$

Aus der Laplace-Gleichung für das Potential V

$$\nabla^2 V = 0 \quad (2.50)$$

ergibt sich, dass das Potential spurfrei ist:

$$\sum_i V_{ii} = 0 \quad (2.51)$$

Der zweite Term in 2.49 verschwindet also, sodass der Quadrupolterm auf

$$E^{(2)} = \frac{1}{6} \sum_{i,j} V_{ij} Q_{ij} \quad (2.52)$$

reduziert wird. Der für eine quantenmechanische Formulierung der Quadrupolwechselwirkung benötigte Quadrupoloperator ergibt sich aus dem Ladungsoperator

$$\hat{\rho}(\mathbf{r}) = e \cdot \sum_p \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_p). \quad (2.53)$$

wobei über die Protonen im Kern summiert wird, da nur diese eine von Null verschiedene elektrische Ladung haben. Durch einsetzen von $\hat{\rho}$ in den klassischen Ausdruck für das Quadrupolmoment Q_{ij} ergibt sich für den quantenmechanischen Quadrupoloperator \hat{Q}_{ij} :

$$\hat{Q}_{ij} = e \cdot \sum_p (3x_{ip}x_{jp} - \delta_{ij}r_p^2) \quad (2.54)$$

Der Hamilton-Operator für die Quadrupolwechselwirkung lautet somit:

$$\hat{H}_Q = \frac{1}{6} \sum_{i,j} V_{ij} \hat{Q}_{ij}. \quad (2.55)$$

Bei Quadrupolkernen trägt die zeitliche Variation der elektrischen Feldgradienten V_{ij} maßgeblich zur Dephasierung der Magnetisierung bei. Dies hat zur Folge, dass die Relaxationszeiten für Isotope mit $I \geq 1$ im Allgemeinen deutlich kürzer sind als für ^1H .

2.4 Compressed-Sensing-MRT

Die von David L. Donoho und Emmanuel J. Candès entwickelte Compressed Sensing (CS)-Theorie hat im Laufe der letzten Jahre die Messtechnik in einer Vielzahl von Bereichen beeinflusst [Donoho, 2006; Candes und Romberg, 2006]. Michael Lustig wandte erstmals CS zur Rekonstruktion unterabgetasteter MRT-Daten an [Lustig et al., 2007, 2008]. Im Folgenden wird sowohl die Motivation der Theorie, als auch die konkrete Anwendung in der MRT erläutert.

2.4.1 Motivation der CS-MRT

In den meisten Fällen können Daten im Anschluss an ihre Aufnahme komprimiert werden. Fotos, die mit einer Digitalkamera aufgenommen werden, können beispielsweise anhand der diskreten Kosinustransformation (engl. *discrete cosine transform*, DCT) im JPEG-Format nahezu verlustfrei auf einen Bruchteil der Datenmenge im Rohformat reduziert werden. Gerade bei zeitaufwendigen Messverfahren wäre es daher von Interesse bereits während der Aufnahme die Daten schon „komprimiert“ aufzunehmen. In der MRT lässt sich die Datengröße der erzeugten Bilder in den meisten Fällen stark reduzieren. Bei einer klassischen Rekonstruktion durch die Fouriertransformation der Daten führt eine Unterschreitung der Nyquist-Grenze zu Unterabtastungsartefakten (siehe Abschnitte 2.2.2 und 2.2.3). Mit der Anwendung der CS-Theorie auf MR-Daten können auch unterabgetastete Daten artefaktfrei rekonstruiert werden.

Ein gemessenes Signal \mathbf{y} ist im Allgemeinen durch das Produkt der Systemmatrix \mathbf{A} und dem ursprünglichen Signal \mathbf{x} gegeben:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (2.56)$$

Das Signal \mathbf{x} wird *S-sparse* genannt, wenn nur S der N Koeffizienten von Null verschieden sind. \mathbf{x}_S bezeichnet ein Signal, bei dem nur noch die von Null verschiedenen Koeffizienten beibehalten werden. In diesem Fall kann die Messmatrix \mathbf{A} auf eine Matrix \mathbf{A}_S von Rang S reduziert werden. Für das gemessene Signal gilt somit:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}_S\mathbf{x}_S \quad (2.57)$$

Da im Allgemeinen vor der Messung noch nicht bekannt ist, welche der Signalkoeffizienten von Null verschieden sind, werden für CS M Koeffizienten mit $S < M < N$ aufgenommen und durch eine Maximierung der *sparsity* unter den unendlich vielen Lösungen des Problems die richtige ausgewählt.

Damit die korrekte Rekonstruktion unterabgetasteter Daten mittels CS gewährleistet werden kann, müssen die folgenden drei Bedingungen erfüllt sein:

- Das zu rekonstruierende Bild muss in einer Transformationsdomäne eine *sparse* Darstellung haben. Damit ist gemeint, dass das Bild anhand einer Matrix mit wenigen von Null verschiedenen Koeffizienten beschrieben werden kann.
- Die durch eine Unterabtastung der Daten hervorgerufenen Artefakte müssen inkohärent, also rauschartig sein.
- Für die Rekonstruktion des Bildes muss ein nichtlinearer, iterativer Algorithmus verwendet werden. So kann gleichzeitig mit der Reduktion zur Minimierung der Abweichung von den Rohdaten auch die *sparsity* maximiert werden.

2.4.2 Sparsity

Die *sparsity* des zu rekonstruierenden Signals ist eine der Grundvoraussetzungen für die korrekte Rekonstruktion unterabgetasteter Daten. In der MRT ist das gemessene Objekt nur in den wenigsten Fällen direkt in der Bildebene *sparse*. Es reicht allerdings schon aus, wenn diese Bedingung in einer beliebigen Transformationsdomäne gegeben ist. Da die gemessenen k -Raum-Daten üblicherweise auch nicht *sparse* sind, muss dazu eine weitere, dritte Domäne verwendet werden. Für anatomische Aufnahmen bieten sich etwa die auch bei der Bildkompression eingesetzten Wavelet- oder DCT-Transformationen an, während bei einer Angiographie die erste Ableitung des Bildes *sparse* ist. Für die dynamische Bildgebung von Organen, die sich nach einem periodischen Muster bewegen, kann die zeitliche Komponente üblicherweise im Frequenzraum durch einige wenige Koeffizienten beschrieben werden. Ist Ψ die verwendete Transformation, gilt für die *sparse* Darstellung \mathbf{z} in dieser Domäne:

$$\mathbf{z} = \Psi \mathbf{x} \quad (2.58)$$

2.4.3 Inkohärenz

Die für eine korrekte Rekonstruktion mittels CS geforderte Inkohärenz der Unterabtastungsartefakte bedeutet, dass die Artefakte über das gesamte rekonstruierte Bild verteilt sein sollen, beispielsweise in Form von Rauschen. Ist $\mathbf{X}(i, j, k)$ ein dreidimensionales Bild und \mathbf{F}_{US} die Fouriertransformation mit einer Unterabtastung US , so gilt für die Punktantwortfunktion (engl. *point spread function*, PSF) $\mathbf{PSF}(i, j, k)$:

$$\mathbf{PSF}(i, j, k) = (\mathbf{F}_{US}^* \mathbf{F}_{US}) \mathbf{X}(i, j, k) \quad (2.59)$$

Bei voller Abtastung des k -Raums ist $\mathbf{PSF}(i, j, k)$ eine Diagonalmatrix. Sobald der k -Raum unterabgetastet wird, nehmen auch Punkte abseits der Diagonalen von Null verschiedene Werte an. Die Kohärenz entspricht dem Maximum der Einträge abseits der Diagonalen der PSF:

$$\mu = \max |\mathbf{PSF}(i, j, k)| \quad \text{für } i \neq j, i \neq k, j \neq k \quad (2.60)$$

Ist die Domäne, in der eine *sparse* Darstellung gefunden werden soll, vom Bildraum verschieden, so muss zur Abschätzung der Kohärenz die transformierte Punktantwortfunktion (engl. *transform point spread function*, TPSF) mit der Transformation Ψ verwendet werden:

$$\mathbf{TPSF}(i, j, k) = (\Psi^* \mathbf{F}_{US}^* \mathbf{F}_{US} \Psi) \mathbf{X}(i, j, k) \quad (2.61)$$

Je kleiner die Elemente der TPSF ist, desto besser können die Unterabtastungsartefakte mittels CS reduziert werden.

In Abbildung 2.2 ist die Auswirkung des Abtastungsschemas auf die Rekonstruktion im Bildraum dargestellt. Eine zweifache Unterabtastung durch das Weglassen jeder zweiten Zeile im k -Raum führt zu Einfaltungsartefakten, die auch in keiner Transformationsdomäne inkohärent sind. Eine zufällige Abtastung führt hingegen zu rauschartigen Artefakten.

Da eine vollkommen zufällige Abtastung in der MRT schwer realisierbar ist, wird CS üblicherweise in Kombination mit nichtkartesischen Radial- oder Spiral-Trajektorien angewandt. Eine Unterabtastung führt bei diesen Trajektorien insbesondere in geeigneten Transformationsdomänen zu inkohärenten Artefakten.

2.4.4 Nichtlineare Rekonstruktion

Nach der CS-Theorie ist unter den unendlich vielen möglichen Lösungen des unterbestimmten Problems

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (2.62)$$

für $(\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^m, m < n)$ diejenige korrekt, die maximal *sparse* in einer gegebenen Transformationsdomäne ist. Die Unterbestimmtheit des Problems macht eine Lösung durch einfache Inversion der $n \times m$ -Matrix unmöglich. Mithilfe einer iterativen Herangehensweise kann der Term $\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2$ minimiert werden und so zu einer Abschätzung für \mathbf{x} führen. Damit die *sparsity* bei der Rekonstruktion auch berücksichtigt wird, muss gleichzeitig auch eine Regularisierung verwendet werden, die die Zahl der von Null verschiedenen Koeffizienten in der Transformationsdomäne beschränkt. Eine solche Beschränkung der Zahl der Einträge in $\Psi\mathbf{x}$ kann anhand der l_0 -Pseudonorm erreicht werden. Für das Minimierungsproblem ergibt sich:

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 \quad \text{unter d. Bed.} \quad \|\Psi\mathbf{x}\|_0 \leq k_0 \quad (2.63)$$

Die l_p -Norm ist mathematisch für $(p \in \mathbb{R}, p \geq 1)$ wie folgt definiert:

$$\|\mathbf{x}\|_p := \left(\sum_i |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.64)$$

Die l_0 -Pseudonorm erhält man aus dieser Definition, indem man p gegen Null laufen lässt. Sie gibt die Zahl der von Null verschiedenen Einträge in \mathbf{x} an. In Gleichung 2.63 gibt k_0 somit die obere Grenze der von Null verschiedenen Einträge in $\Psi\mathbf{x}_i$ an. Da die Norm weder konvex, noch kontinuierlich ist, kann der Term nicht anhand eines auf Gradientenbildung basierenden Algorithmus minimiert werden. Hierzu werden üblicherweise Verfolgungsalgorithmen wie der orthogonale Verfolgungsalgorithmus (engl. *orthogonal matching pursuit*, OMP)-Algorithmus eingesetzt [Tropp und Gilbert, 2007].

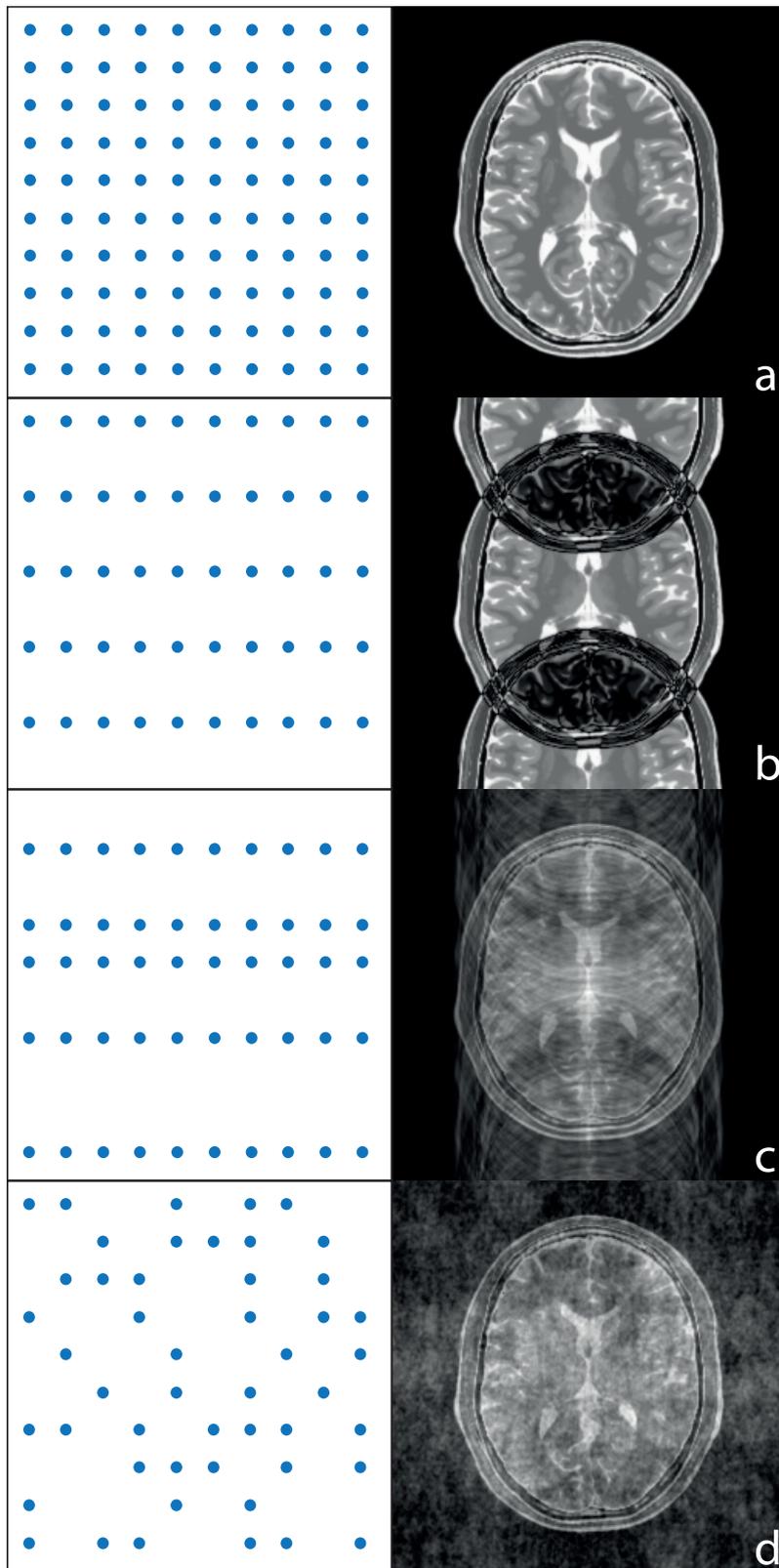


Abbildung 2.2: Bildartefakte für verschiedene, schematisch dargestellte k -Raum-Abtastungen. Die Aufnahme nur jeder zweiten Zeile im k -Raum führt zu Einfaltungsartefakten (a), bei einer zufälligen Datenaufnahme sind die Artefakte hingegen rauschartig (d).

2.5 Partial Fourier

Sofern das gemessene Objekt rein reell ist, weisen die Daten im k -Raum eine Punktsymmetrie auf. Der Wert von am k -Raum-Zentrum gespiegelten Daten entspricht dem komplex konjugierten des ursprünglichen Wertes:

$$S(-k_x, -k_y, -k_z) = S^*(k_x, k_y, k_z) \quad (2.65)$$

Diese Redundanz kann zur Beschleunigung der Datenaufnahme in der MRT verwendet werden. Theoretisch reicht es aus, nur den halben k -Raum zu erfassen und für die Rekonstruktion der restlichen Daten die k -Raum-Symmetrie zu nutzen.

Da das statische Magnetfeld B_0 allerdings nicht komplett homogen ist, hat das zu rekonstruierende Bild im Allgemeinen eine von Null verschiedene Phase, so dass die fehlenden Daten nicht durch die einfache Bildung des komplex Konjugierten erhalten werden können. Der Datensatz kann beispielsweise mit Nullen aufgefüllt und anschließend durch Fouriertransformation in den Bildraum überführt werden. Dabei ist es wichtig, dass das k -Raum-Zentrum gut erfasst ist, da der Bildkontrast zum größten Teil dort kodiert ist. Üblicherweise werden etwa 60% der Daten erfasst. Das Auffüllen mit Nullen führt zu einer Unschärfe in Richtung der Abtastungsasymmetrie, da die höheren Frequenzen unterrepräsentiert sind (Siehe Abbildung 2.3).

Die Symmetrie des k -Raums wird bei einer homodynem Verarbeitung der Daten genutzt, ohne dass das komplex konjugierte explizit berechnet werden muss [Noll et al., 1991]. Hierbei werden die Daten entsprechend der Asymmetrie der k -Raum-Abtastung vor der Rekonstruktion gewichtet, wobei allerdings die Phaseninformation des Bildes verloren geht. In Abschnitt 3.4.4 wird ausführlicher auf diese Methode eingegangen.

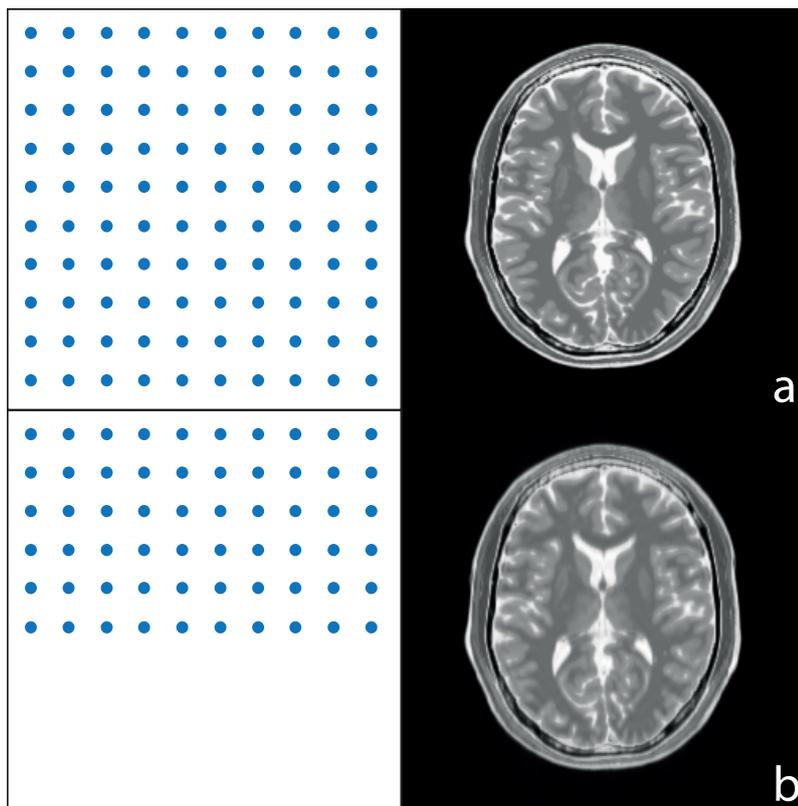


Abbildung 2.3: Partielle k -Raum-Abtastung. Das Auffüllen der fehlenden Daten einer unvollständigen Messung mit Nullen führt zu einer Unschärfe in Richtung der Asymmetrie der Abtastung.

3 Material und Methoden

3.1 Hardware

3.1.1 Magnetresonanz-Tomograph

Die Messungen dieser Arbeit wurden an einem 7-Tesla-Ganzkörpermagnetographen durchgeführt (Magnetom 7T; Siemens Healthcare, Erlangen, Deutschland). Um neben ^1H auch weitere Kerne, wie z.B. ^{23}Na , anzuregen, verfügt der Tomograph über einen Breitbandverstärker. Die Resonanzfrequenzen ω_0 bei einer Magnetfeldstärke von 7 T sind 297,16 MHz für ^1H und 78,60 MHz für ^{23}Na . Das Gradientensystem ermöglicht eine maximale Amplitude von 40 mT/m in x- und y-Richtung (maximale Anstiegsrate 180 mT/(m ms)) und 45 mT/m in z-Richtung (maximale Anstiegsrate 220 mT/(m ms)).

3.1.2 RF-Spule

Für die Phantom- und *In-vivo*-Messungen wurde eine doppelresonante ^1H - und ^{23}Na -Quadratur-Volumenspule verwendet. Der Protonenkanal ermöglicht neben der Aufnahme anatomischer ^1H -Bilder auch die Homogenisierung des statischen B_0 -Feldes durch die Justierung der sogenannten *Shim*-Ströme. Die Spule kombiniert eine *birdcage*-Spule mit einem auf transverse elektromagnetische (engl. *transverse electromagnetic*, TEM) Schwingungsmoden abgestimmten Resonator, um B_1 -Inhomogenitäten zu minimieren [Vaughan et al., 1994].

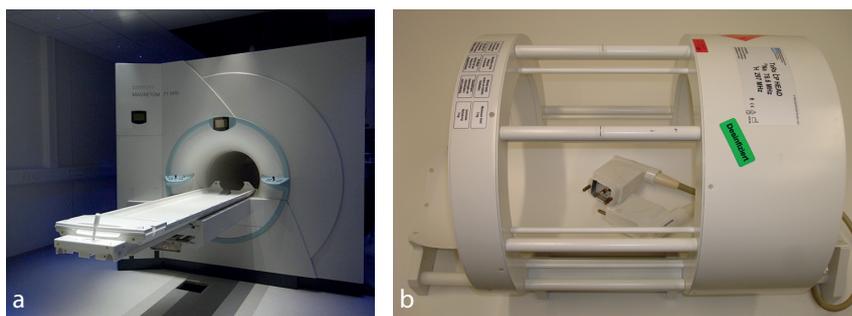


Abbildung 3.1: a: Verwendeter 7 T-Ganzkörpermagnetograph (Abbildung von www.dkfz.de), b: Für die Messungen verwendete doppelresonante ^{23}Na - ^1H -*birdcage*-Spule.

3.1.3 Auflösungsphantom

Die Evaluierung der in dieser Arbeit vorgestellten Rekonstruktionsergebnisse wurde unter anderem an von einem Messphantom stammenden Daten durchgeführt. Zum Einsatz kam hier ein Auflösungsphantom, dessen Strukturen aus Plexiglas geformt sind. Die Durchmesser der Plexiglasstäbe in dem Phantom reichen von 1 mm bis 10 mm (siehe Abbildung 3.2 und 4.5), der Hohlraum des Phantoms ist mit einer 80 mmol/l NaCl-Lösung gefüllt. Die Konzentration an Na entspricht somit dem Mittelwert zwischen den erwarteten Konzentrationen der Liquorflüssigkeit (120 mmol/l) und der weißen Substanz (40 mmol/l).



Abbildung 3.2: Auflösungsphantom für die ^{23}Na -MRT. Das Plexiglasgefäß ist mit einer 80 mmol/l NaCl-Lösung befüllt.

3.2 Sequenzen

3.2.1 Dichteangepasste Radialsequenz

Wegen der kurzen Relaxationszeiten von ^{23}Na muss die Zeitspanne zwischen der Anregung des Spinsystems durch einen RF-Puls und dem Anfang der Datenauslese möglichst kurz gehalten werden. In dieser Arbeit wurde zur Datenaufnahme eine 3D dichteangepasste Radialsequenz (engl. *3D density adapted projection reconstruction*, 3D-DAPR) Sequenz verwendet [Nagel et al., 2009]. Hierbei wird der k -Raum ausgehend vom Zentrum entlang radialer Projektionen abgetastet. Die nichtselektive Natur der Sequenz ermöglicht den Verzicht auf Schichtselektionsgradienten und Phasenkodierung; der Signalverlust durch Relaxation ist somit minimal. Der Sequenzablauf ist in Abbildung 3.3 gezeigt. Der parallel zur Auslese geschaltete Gradient kann in drei Abschnitte aufgeteilt werden: linearer Anstieg, konstantes Plateau und dichteangepasster Bereich.

Die dichteangepasste Auslese ermöglicht ein langsames Abtasten der hohen Frequenzen im k -Raum, welche aufgrund der Kugelsymmetrie bei radialer Auslese weiter auseinander liegen. Die zeitliche Abhängigkeit des Gradienten ist gegeben durch:

$$G(t) = k_0^2 G_0 \cdot \left(3 (\gamma/2\pi) \cdot k_0^2 G_0 (t - t_0) + k_0^3 \right)^{-\frac{2}{3}} \quad (3.1)$$

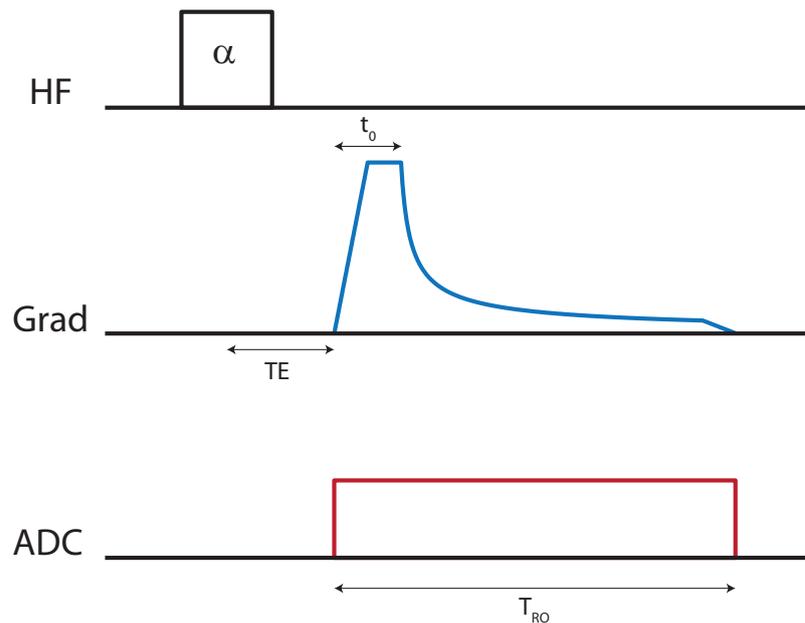


Abbildung 3.3: Sequenzschema der 3D-DAPR-Sequenz. Der Auslesegradient beginnt nach einer Zeit TE ausgehend von der Mitte des Anregungspulses ($TE = 0$). Der Gradient ist in drei Teile gegliedert: ein linearer Anstieg, ein konstantes Plateau und den dichteangepassten Teil.

3.2.2 Asymmetrische Verteilung der Projektionen

Um Messzeiten zu reduzieren kann, ähnlich wie für kartesische Trajektorien, die Symmetrie des k -Raums ausgenutzt werden. Anders als bei den meisten kartesischen Trajektorien beginnt die Auslese der einzelnen Speicher in der 3D-DAPR-Sequenz allerdings im k -Raum-Zentrum. So ist das Zentrum nicht vollständig erfasst, wenn nur ein Teil der Daten aufgenommen wird. In dieser Arbeit wurde zur Untersuchung asymmetrischer radialer Unterabtastung die positive z -Halbkugel vollständig erfasst, sowie 20% der negativen z -Halbkugel. In dem in Abbildung 3.4a auf zwei Dimensionen reduzierten Schema entspricht das den durchgezogenen roten Projektionen.

Das Problem des nicht vollständig erfassten k -Raum-Zentrums kann man umgehen, indem die fehlenden 30% nicht komplett ausgelassen, sondern um einen Faktor USF_{asym} stärker unterabtastet werden als die restlichen aufgenommenen Daten (in Schema 3.4b gelb dargestellt). Mithilfe dieser Projektionen kann das k -Raum-Zentrum bis zur Nyquist-Grenze durch nächste-Nachbarn (engl. *nearest neighbors*)-Interpolation aufgefüllt werden (in Schema 3.4 grün dargestellt) [Boada et al., 1997]. Das Fehlen der Projektionen auf der negativen z -Halbkugel wird anhand der in Abschnitt 3.4.4 beschriebenen homodynen Verarbeitung asymmetrisch aufgenommenen Daten, durch doppelte Wichtung der entsprechenden gespiegelten Speicher kompensiert (in Schema 3.4b blau eingefärbt).

Bei allen Datensätzen, die nicht rein reell sind, wird der Imaginärteil der doppelt gewichteten Daten überschätzt. Dieser Effekt kann durch eine Phasenkorrektur anhand der niedrig aufgelösten, dank der Interpolation aber bis zur Nyquist-Grenze symmetrischen Daten

behalten werden.

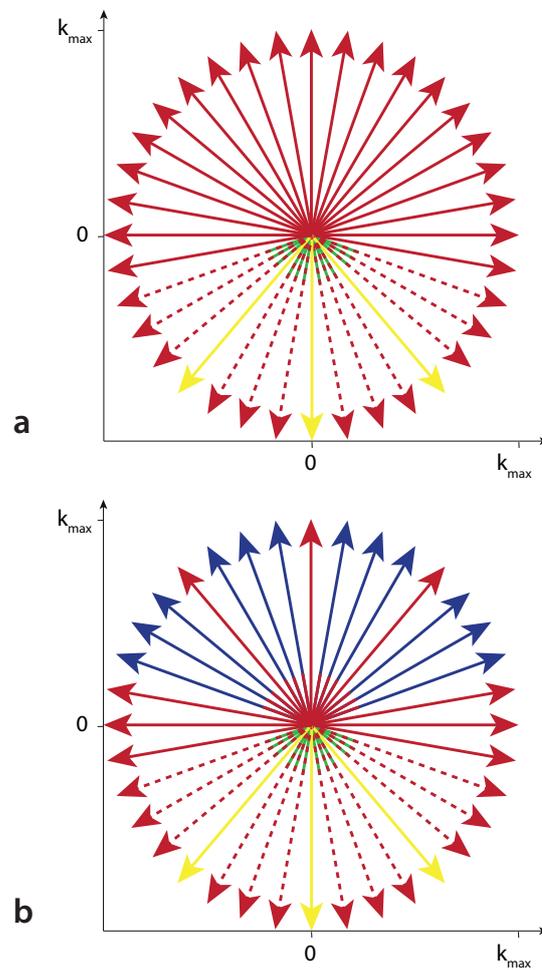


Abbildung 3.4: Asymmetrische radiale Datenaufnahme, reduziert auf 2D. Die durchgezogenen roten und gelben Projektionen in **a** werden bei der Messung tatsächlich aufgenommen, die gestrichelten roten Projektionen werden ausgelassen. Durch Interpolation können die fehlenden Datenpunkte bis zur Nyquist-Grenze aufgefüllt werden (grün gestrichelt). **b:** Für die homodyne Verarbeitung der Daten, werden die Punkte ohne punktsymmetrisch gespiegeltes Äquivalent doppelt gewichtet (blau durchgezogen).

3.3 NUFFT

Kartesisch aufgenommene k -Raum-Daten können ohne weitere Umrechnung mithilfe der inversen Fouriertransformation (FT), die üblicherweise als FFT implementiert ist, in den Bildraum überführt werden. Sind die aufgenommenen Daten allerdings nicht auf einem kartesischen Gitter angeordnet, wie das z.B. bei den in dieser Arbeit aufgenommenen 3D-radialen Daten der Fall ist, müssen die Daten zunächst auf ein kartesisches Gitter interpoliert werden, ehe sie mit der inversen FFT in den Bildraum überführt werden können. Das kann beispielsweise durch die nicht-uniforme schnelle Fouriertransformation (engl. *nonuniform fast Fourier transform*, NUFFT) erreicht werden [Fessler und Sutton, 2003].

Die direkte Lösung für die Überführung eines Bildes \mathbf{X} in das Signal \mathbf{S} im k -Raum ist durch die nicht-uniforme diskrete Fouriertransformation (engl. *nonuniform discrete Fourier transform*, NDFT) gegeben. Für den eindimensionalen Fall lautet sie:

$$\mathbf{S}(k_m) = \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{X}(x_n) \cdot e^{ik_m \cdot x_n}, \quad m = 1, \dots, M \quad (3.2)$$

k_m kann beliebige reelle Werte annehmen. Die Lösung dieses Problems benötigt $O(M \cdot N)$ Schritte und ist somit sehr rechenintensiv. Um den Aufwand zu reduzieren, wird in einem ersten Schritt eine FFT von \mathbf{X} mit $K \geq N$ berechnet.

$$\mathbf{Y}_k = \sum_{n=0}^{N-1} z_n \mathbf{X}(x_n) \cdot e^{ik \cdot x_n}, \quad k = 1, \dots, K \quad (3.3)$$

Das Signal $S(k_m)$ kann nun durch Interpolation mit geeigneten Wichtungsparemtern $\{u_j\}$ aus $\{Y_k\}$ approximiert werden:

$$\tilde{\mathbf{S}}(k_m) = \sum_{j=0}^{J-1} u_j \cdot \mathbf{Y}_j = \sum_{j=0}^{J-1} u_j \sum_{n=0}^{N-1} z_n \mathbf{X}(x_n) \cdot e^{ik_j \cdot x_n} \quad (3.4)$$

Die Variablen $\{u_j\}$ und $\{z_n\}$ werden dahingehend optimiert, dass der maximale Fehler der Näherung minimiert wird:

$$\min_{\{z_n\}} \max_{\{k_m\}} \min_{\{u(k_m)\}} \max_{\mathbf{X} \in \mathbb{C}^N: \|\mathbf{X}\| \leq 1} |\mathbf{S}(k_m) - \tilde{\mathbf{S}}(k_m)| \quad (3.5)$$

Der Vorgang kann ohne Weiteres auf höherdimensionale Fälle ausgeweitet werden. In Operatorschreibweise ergibt sich für die NUFFT und ihre Adjungierte letztendlich:

$$\mathbf{S} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{Z} \cdot \mathbf{X} \quad (3.6)$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}' \cdot \mathbf{S} = \mathbf{Z}' \cdot \mathbf{W}' \cdot \mathbf{V}' \cdot \mathbf{S} \quad (3.7)$$

\mathbf{Z} ist die diagonale Skalierungsmatrix mit Einträgen $\{z_n\}$, \mathbf{W} die als FFT implementierte DFT und \mathbf{V} die Interpolationsmatrix.

Die Tatsache, dass ein- und derselbe Operator sowohl für die Vorwärts- als auch für die Rücktransformation genutzt werden kann, ist besonders im Hinblick auf die Verwendung für iterative Rekonstruktionsmethoden ein großer Vorteil. Der Operator muss nur einmal im Vorfeld der Rekonstruktion erstellt werden und kann im Folgenden für jeden Iterationsschritt verwendet werden.

3.4 Iterative Rekonstruktion

Mit der NUFFT kann das inverse Problem der Rekonstruktion eines Bildes \mathbf{x} anhand der aufgenommenen Daten \mathbf{y}

$$\mathbf{y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \quad (3.8)$$

durch die Invertierung der Systemmatrix \mathbf{A} direkt gelöst werden. Ist das Problem allerdings unterbestimmt (z.B. durch das Auslassen von Messungen, um die Messzeit zu reduzieren), kann die korrekte Rekonstruktion nicht mehr sichergestellt werden. Artefakte im rekonstruierten Bild sind die Folge.

Eine iterative Rekonstruktion hat das Ziel aus der Menge aller möglichen Lösungen des unterbestimmten Problems die richtige zu isolieren. Das Problem 3.8 wird hierzu umgeformt und um Regularisierungsterme erweitert:

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x}} \left\{ \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 + \sum_i R_i(\mathbf{x}) \right\} \quad (3.9)$$

Eine Methodem um Gleichung 3.9 zu lösen, ist das Gradientenverfahren [Cauchy, 1847]. Bei jedem Iterationsschritt wird der Gradient $-\nabla f(\mathbf{x}_k)$ der Zielfunktion $f = \|\mathbf{A}\mathbf{x}_k - \mathbf{y}\|_2^2 + \sum_i R_i(\mathbf{x}_k)$ gebildet. In einem nächsten Schritt wird dieser Gradient mit einer Schrittweite α skaliert und zum Bild \mathbf{x}_k addiert, um das aktualisierte Bild \mathbf{x}_{k+1} zu erhalten. Für den nächsten Iterationsschritt dient dieses wiederum als Ausgangspunkt.

Ein Nachteil des Gradientenverfahrens ist, dass sämtliche Terme der Zielfunktion differenzierbar sein müssen. Dies ist für das Quadrat der l_2 -Norm gegeben, allerdings nicht für die *sparsity*-fördernden l_0 - und l_1 -Normen, wie sie bei den in Abschnitt 2.4 diskutierten CS-Verfahren verwendet werden.

3.4.1 K-SVD-Algorithmus zur Anpassung des Lexikons

Um eine möglichst *sparse* Darstellung \mathbf{x} des vorliegenden Signals oder Bildes \mathbf{y} zu ermöglichen, kann ein Lexikon \mathbf{D} , auf dessen Basis die Darstellung erfolgen soll, an das vorliegende Problem angepasst werden. Dies ist z.B. mit dem K-SVD Algorithmus möglich [Aharon et al., 2006]. Das dadurch definierte Problem lautet:

$$\min_{\mathbf{D}, \{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^M} \sum_{i=1}^M \|\mathbf{y}_i - \mathbf{D} \cdot \mathbf{x}_i\|_2^2 \quad \text{unter der Bedingung} \quad \|\mathbf{x}_i\|_0 \leq k_0 \quad (3.10)$$

Der Algorithmus durchläuft im Anschluss an eine Initialisierung in jedem Durchlauf zwei Schritte: Zunächst wird anhand des vorliegenden Lexikons eine *sparse* Darstellung des Signals gesucht. Im zweiten Schritt werden die Einträge des Lexikons (Atome) angepasst. Hierzu müssen für ein Lexikon mit k Atomen auch k Singulärwertzerlegungen durchgeführt werden. In unserem speziellen Fall entsprechen die Atome des Lexikons dreidimensionalen Blöcken (in \mathbf{D} als Spalten gespeichert), aus denen das zu repräsentierende Bild zusammengesetzt wird. Der genaue Ablauf ist in Algorithmus 1 dargestellt. Eine effiziente Implementierung des K-SVD Algorithmus wurde von [Rubinstein et al., 2008] vorgestellt. Diese wurde auch im Rahmen dieser Arbeit für die Anpassung des Lexikons verwendet.

3.4.2 3D-DLCS Algorithmus

Der Compressed-Sensing mit gelerntem 3D-Lexikon (engl. *3D-dictionary learning compressed sensing*, 3D-DLCS)-Algorithmus ist ein CS-Rekonstruktionsverfahren, das zur Regularisierung die *sparsity* des im Raum eines angepassten Lexikons dargestellten Bildes nutzt. Das Lexikon besteht aus isotropen dreidimensionalen Blöcken und wird in jedem Iterationsschritt mit dem K-SVD-Algorithmus aktualisiert. Das zugrundeliegende Minimierungsproblem lautet:

$$\left\{ \hat{\mathbf{D}}, \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{ijk}, \hat{\mathbf{X}} \right\} = \arg \min_{\mathbf{D}, \boldsymbol{\alpha}_{ijk}, \mathbf{X}} \left\{ \sum_{ijk} \boldsymbol{\mu}_{ijk} \|\boldsymbol{\alpha}_{ijk}\|_0 + \sum_{ijk} \|\mathbf{D}\boldsymbol{\alpha}_{ijk} - \mathbf{R}_{ijk}\mathbf{X}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{F}\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|_2^2 \right\} \quad (3.11)$$

In diesem Zusammenhang ist \mathbf{X} das rekonstruierte Bild, \mathbf{F} der NUFFT-Operator, \mathbf{Y} die aufgenommenen Rohdaten, $\boldsymbol{\alpha}_{ijk}$ die *sparse* Darstellung im Lexikon \mathbf{D} und \mathbf{R}_{ijk} eine Diagonalmatrix, die den Block an Position ijk extrahiert. Der Term $\sum_{ijk} \boldsymbol{\mu}_{ijk} \|\boldsymbol{\alpha}_{ijk}\|_0$ setzt die sparsity der Koeffizienten des Lexikons durch, der Term $\sum_{ijk} \|\mathbf{D}\boldsymbol{\alpha}_{ijk} - \mathbf{R}_{ijk}\mathbf{X}\|_2^2$ die Konsistenz zwischen dem rekonstruierten Bild und der Darstellung im Lexikon. Die Konsistenz mit den Rohdaten ist durch den Term $\lambda \|\mathbf{F}\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|_2^2$ sichergestellt, λ ist ein variabler Wichtungsparemeter. Für die Minimierung von 3.11 werden abwechselnd die zwei folgenden Unterprobleme gelöst:

Algorithmus 1 : K-SVD Algorithmus

Initialisierung:

Setze $k = 0$

Wähle $\mathbf{D}_{(0)} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ (zufällige Einträge oder diskrete Kosinustransformation)

Schritt 1:

Setze $k = k + 1$

Nutze einen Verfolgungsalgorithmus, um durch die Lösung von

$$\hat{\mathbf{x}}_i = \arg \min_{\mathbf{x}_i} \|\mathbf{y}_i - \mathbf{D}_{(k-i)} \cdot \mathbf{x}_i\|_2^2 \quad \text{unter der Bedingung} \quad \|\mathbf{x}_i\|_0 \leq 0$$

eine *sparse* Darstellung für alle $\{\hat{\mathbf{x}}_i\}_{i=1}^M$ zu finden.

Schritt2:

Nun wird das neue Lexikon $\mathbf{D}_{(k)}$ spaltenweise für alle $j_0 = 1, \dots, m$ zusammengesetzt:

- Wähle die Gruppe von Beispielen, die den Eintrag \mathbf{a}_{j_0} verwenden:

$$\Omega_{j_0} = \{i | 1 \leq i \leq M, \mathbf{X}_{(k)} [j_0, i] \neq 0\}$$

- Berechne die Residualmatrix

$$\mathbf{E}_{j_0} = \mathbf{Y} - \sum_{j \neq j_0} \mathbf{a}_j \mathbf{x}_j^T$$

\mathbf{x}_j bezeichnet hier die Zeile j von \mathbf{x} .

- Beschränke \mathbf{E}_{j_0} auf Ω_{j_0} , um $\mathbf{E}_{j_0}^R$ zu erhalten.
- Berechne die Singulärwertzerlegung (engl. *singular value decomposition*, SVD)

$\mathbf{E}_{j_0}^R = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^T$. Der neue Eintrag entspricht $\mathbf{a}_{j_0} = \mathbf{u}_1$; die zugehörigen Koeffizienten für die Darstellung von \mathbf{x}_{j_0} sind $\mathbf{x}_{j_0}^R = \mathbf{\Sigma} [1, 1] \cdot \mathbf{v}_1$.

Sofern das Abbruchkriterium noch nicht erreicht ist, gehe zu Schritt 1.

Abbruchkriterium:

Beende den Algorithmus, falls die Frobeniusnorm $\|\mathbf{Y} - \mathbf{A}_{(k)} \mathbf{X}_{(k)}\|_F^2$ einen gesetzten Schwellwert unterschreitet. Alternativ kann auch eine maximale Zahl an

Iterationsschritten definiert werden.

$$\{\hat{\mathbf{D}}, \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{ijk}\} = \arg \min_{\mathbf{D}, \boldsymbol{\alpha}_{ijk}} \sum_{ijk} \mu_{ijk} \|\boldsymbol{\alpha}_{ijk}\|_0 + \sum_{ijk} \|\mathbf{D}\boldsymbol{\alpha}_{ijk} - \mathbf{R}_{ijk}\mathbf{X}\|_2^2 \quad (3.12)$$

$$\hat{\mathbf{X}} = \arg \min_{\mathbf{X}} \sum_{ijk} \|\mathbf{D}\boldsymbol{\alpha}_{ijk} - \mathbf{R}_{ijk}\mathbf{X}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{F}\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|_2^2 \quad (3.13)$$

Das Problem 3.12 ist äquivalent zu 3.10. Das Lexikon \mathbf{D} und die zugehörigen Koeffizienten $\boldsymbol{\alpha}$ können also durch die Anwendung des K-SVD-Algorithmus erhalten werden. Die *sparse* Darstellung des komplexen Bildes \mathbf{X} im reellwertigen Lexikon \mathbf{D} wird durch eine getrennte Betrachtung des Real- und Imaginärteils bewerkstelligt. Beide werden anschließend wieder zu einer komplexen Darstellung zusammengefügt. Das aktualisierte Bild \mathbf{X} erhält man durch die Lösung von 3.13 mithilfe des Gradientenverfahrens. Die genaue Vorgehensweise ist in Algorithmus 2 beschrieben. Der Algorithmus wurde in MATLAB R2014a (The MathWorks, Inc., Natick, USA) implementiert.

Wird in Algorithmus 2 die Aktualisierung des Lexikons durch den K-SVD-Algorithmus ausgelassen, so bleibt das Lexikon, auf dessen Basis die *sparse* Darstellung des Bildes gebildet wird, für die folgenden Iterationsschritte so, wie es initialisiert wurde. Im Falle einer Initialisierung mit der überkompletten diskreten Cosinus-Transformation (engl. *overcomplete discrete cosine transform*, ODCT) sprechen wir im Folgenden von einem ODCT-CS Algorithmus.

3.4.3 Regularisierung durch Totale Variation

Die Regularisierung von CS-Algorithmus mittels der totalen Variation (TV) wird oft genutzt, um rauschähnliche Artefakte zu reduzieren [Rudin et al., 1992; Block et al., 2007]. Für ein dreidimensionales Bild ist die TV wie folgt definiert:

$$\mathbf{TV}(\mathbf{X}) = \sum_i [|d_x(X_i)| + |d_y(X_i)| + |d_z(X_i)|] \quad (3.14)$$

wobei d_x , d_y und d_z die Ableitungen des Bildes bezüglich der entsprechenden Dimensionen sind. Die Summe aus Gleichung 3.14 kann durch Umformung auch mit der l_1 -Norm beschrieben werden, die TV-Regularisierung ist also auch geeignet für die Maximierung der *sparsity* in CS-Rekonstruktionen.

$$\mathbf{TV}(\mathbf{X}) = \|\mathbf{d}_x(\mathbf{X})\|_1 + \|\mathbf{d}_y(\mathbf{X})\|_1 + \|\mathbf{d}_z(\mathbf{X})\|_1 \quad (3.15)$$

Für das Minimierungsproblem ergibt sich letztlich:

Algorithmus 2 : 3D-DLCS Algorithmus

Initialisierung:

Setze $l = 0$

Wähle $\hat{\mathbf{X}}_{(0)} \in \mathbf{C}^{m \times n \times o}$ (Nullen oder NUFFT-Rekonstruktion)

Schritt 1:

Setze $l = l + 1$

Verwende den K-SVD-Algorithmus, um durch die Lösung von

$$\left\{ \hat{\mathbf{D}}_{(l)}, \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{ijk,(l)} \right\} = \arg \min_{\mathbf{D}, \boldsymbol{\alpha}_{ijk}} \sum_{ijk} \mu_{ijk} \|\boldsymbol{\alpha}_{ijk}\|_0 + \sum_{ijk} \|\mathbf{D}\boldsymbol{\alpha}_{ijk} - \mathbf{R}_{ijk}\mathbf{X}_{(l-1)}\|_2^2$$

das Lexikon $\hat{\mathbf{D}}_{(l)}$ zu erhalten. Die *sparse* Darstellung des gesamten Bildes $\mathbf{X}_{(l-1)}$ wird für den Real- und Imaginärteil von $\mathbf{X}_{(l-1)}$ getrennt durch einen Verfolgungsalgorithmus ermittelt. Sie werden anschließend wieder zu einem komplexen Bild zusammengefügt.

Schritt 2:

Verwende das Gradientenverfahren, um durch die Lösung von

$$\left\{ \hat{\mathbf{X}}_{(l)} \right\} = \arg \min_{\mathbf{X}} \sum_{ijk} \|\mathbf{D}\boldsymbol{\alpha}_{ijk} - \mathbf{R}_{ijk}\mathbf{X}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{F}\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|_2^2$$

das aktualisierte Bild $\hat{\mathbf{X}}_{(l)}$ zu erhalten. Sofern das Abbruchkriterium noch nicht erreicht ist, gehe zu Schritt 1.

Abbruchkriterium:

Beende den Algorithmus, falls die Frobeniusnorm $\|\hat{\mathbf{X}}_{(l)} - \hat{\mathbf{X}}_{(l-1)}\|_F^2$ einen gesetzten Schwellwert unterschreitet oder der Iterationsindex l eine vorab definierte maximale Iterationszahl überschreitet.

$$\hat{\mathbf{X}} = \arg \min_{\mathbf{X}} \{ \|\mathbf{F}\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|_2^2 + \mathbf{TV}(\mathbf{X}) \} \quad (3.16)$$

TV-regularisierte CS-Rekonstruktionen dienen in dieser Arbeit als Referenz für die Maximierung der *sparsity* durch analytische Transformationen.

3.4.4 Homodyne Verarbeitung von asymmetrisch unterabgetasteten Daten

Sind die zu rekonstruierenden Daten im k -Raum asymmetrisch angeordnet, so müssen sie im Vorfeld verarbeitet werden, um die durch Asymmetrie bedingten Artefakte bei der Rekonstruktion zu verhindern. Im Falle rein reeller k -Raum-Daten können die fehlenden Daten durch Bildung des komplex-konjugierten der jeweils punktsymmetrisch gespiegelten Daten rekonstruiert werden. Sobald die Daten allerdings eine imaginäre Komponente besitzen ist, führt diese Methode zu Artefakten (siehe Abbildung 3.5). Dies kann z.B. durch die homodyne Rekonstruktion der Daten erreicht werden [Noll et al., 1991]. Das Wort *homodyn* stammt aus dem Griechischen und kann mit „selbstermächtig“ übersetzt werden. Der Name hat seinen Ursprung darin, dass nur die aufgenommenen Daten für die Rekonstruktion verwendet werden und somit ein Auffüllen mit dem komplex Konjugierten der im k -Raum gespiegelten Daten nicht notwendig ist. Im Folgenden wird das Verfahren, auf den eindimensionalen Fall reduziert, beschrieben.

In Abbildung 3.6 ist eine solche k -Raum Zeile dargestellt. Die durchgezogene blaue Linie symbolisiert den Teil der Daten, der tatsächlich aufgenommen wurde. Die gestrichelte Linie symbolisiert Daten, die für eine vollständige Rekonstruktion gemäß

$$\mathbf{X}(x) = \int_{-k_{max}}^{k_{max}} \mathbf{S}(k) e^{i2\pi kx} dk \quad (3.17)$$

notwendig sind. Sofern das Objekt $\mathbf{X}(x)$ rein reell ist können die Daten innerhalb des nicht erfassten Bereichs $[-k_{max}, -k_0]$ durch die Bildung der komplex konjugierten Daten aus $[k_0, k_{max}]$ aufgefüllt werden. Es ergibt sich also:

$$\mathbf{X}(x) = \int_{-k_{max}}^{-k_0} \mathbf{S}^*(-k) e^{i2\pi kx} dk + \int_{-k_0}^{k_{max}} \mathbf{S}(k) e^{i2\pi kx} dk \quad (3.18)$$

Eine einfache Variablentransformation $k' = -k$ innerhalb des ersten Terms von 3.18 wiederum führt zu:

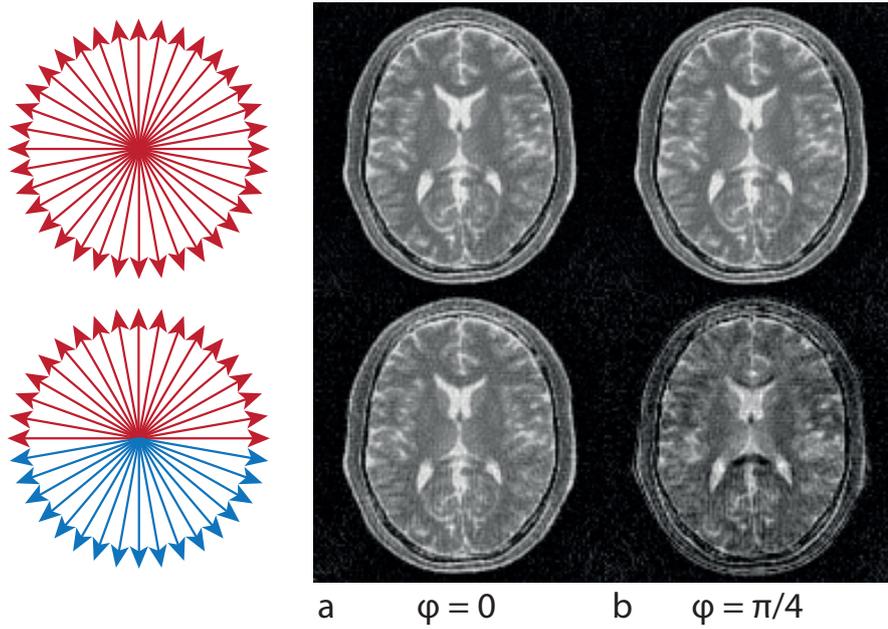


Abbildung 3.5: Rekonstruktion asymmetrischer simulierter Daten durch Bildung des komplex Konjugierten der im k -Raum gespiegelten Daten. Die Daten sind zehnfach unterabgetastet, es wurde kein gaußsches Rauschen hinzugefügt. In der oberen Zeile ist der volle Datensatz dargestellt, in der unteren Zeile ist die Hälfte der Daten durch die Bildung des komplex Konjugierten der punktsymmetrisch gespiegelten Projektionen erhalten. Die Rekonstruktion ist artefaktfrei, sofern das Bild rein reell ist (a). Ist die Phase $\phi \neq 0$, so ist die Symmetrie nicht mehr gegeben (b).

$$\mathbf{X}(x) = \left[\int_{k_0}^{k_{max}} \mathbf{S}(k') e^{i2\pi k'x} dk' \right]^* + \int_{-k_0}^{k_{max}} \mathbf{S}(k) e^{i2\pi kx} dk \quad (3.19)$$

Der zweite Term in 3.19 kann wiederum in zwei Bereiche aufgeteilt werden, $[-k_0, k_0]$ und $[k_0, k_{max}]$. Zusammen mit der Tatsache, dass für die Summe einer komplexen Zahl mit ihrem komplex konjugierten $z + z^* = 2 \cdot \text{RE}(z)$ gilt, ergibt sich die Form:

$$\mathbf{X}(x) = \int_{-k_0}^{k_0} \mathbf{S}(k) e^{i2\pi kx} dk + 2 \cdot \text{RE} \left[\int_{k_0}^{k_{max}} \mathbf{S}(k) e^{i2\pi kx} dk \right] \quad (3.20)$$

Unter der Annahme, dass das vorliegende Objekt $\mathbf{X}(x)$ reell ist, kann die Bildung des Realteils in 3.20 verlustfrei über den ganzen Term erfolgen:

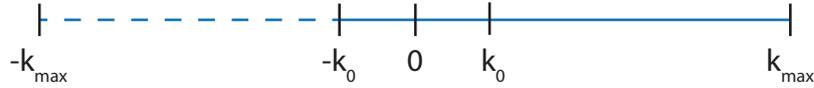


Abbildung 3.6: Eindimensionale, partiell aufgenommene k -Raum Zeile. Die Punkte auf der gestrichelten Linie werden bei der Aufnahme ausgelassen.

$$\mathbf{X}(x) = \text{RE} \left[\int_{-k_0}^{k_0} \mathbf{S}(k) e^{i2\pi kx} dk + 2 \cdot \int_{k_0}^{k_{max}} \mathbf{S}(k) e^{i2\pi kx} dk \right] \quad (3.21)$$

Das entspricht einer Wichtung der vorliegenden Daten $\mathbf{S}(k)$ mit einer Funktion $H(k)$, es gilt also

$$\mathbf{X}_H(x) = \int_{-k_{max}}^{k_{max}} \mathbf{H}(k) \mathbf{S}(k) e^{i2\pi kx} dk \quad (3.22)$$

mit:

$$\mathbf{H}(k) = \begin{cases} 0 & k < -k_0 \\ 1 & -k_0 \leq k < k_0 \\ 2 & k \geq k_0 \end{cases} \quad (3.23)$$

Da im Allgemeinen die von einem Magnetresonanztomographen erhaltenen Messdaten aufgrund von Inhomogenitäten des statischen Magnetfeldes B_0 auch einen Imaginärteil besitzen, muss $\mathbf{X}_H(x)$ phasenkorrigiert werden, ehe man den Realteil extrahieren kann. In den meisten Fällen genügt es, wenn die Phasenkarte $\Phi(x)$ eine niedrige Auflösung aufweist. Sie kann also aus dem symmetrisch erfassten Datenbereich $[-k_0, k_0]$ gewonnen werden. Letztendlich ergibt sich demnach für das rekonstruierte Signal:

$$\mathbf{X}(x) \approx \text{RE} \left[\mathbf{X}_H(x) \cdot e^{-i\Phi(x)} \right] \quad (3.24)$$

Hierbei ist zu beachten, dass die Phaseninformation des Bildes verloren geht. Durch die Multiplikation mit der zur Korrektur verwendeten niedrigaufgelösten Phase $\Phi(x)$ kann sie aber zumindest teilweise wiederhergestellt werden.

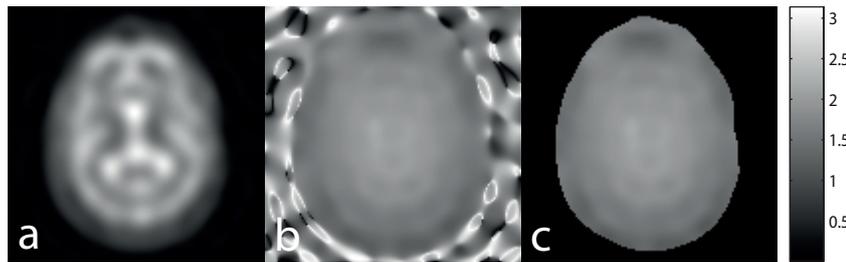


Abbildung 3.7: Niedrig aufgelöstes ^{23}Na -Bild und Absolutbeträge der Phasenkarten für die Korrektur der homodynen Verarbeitung asymmetrischer Daten. **a:** NUFFFT-Rekonstruktion der Daten eines gesunden Probanden bis zur Nyquist-Grenze, nominelle Auflösung: $\Delta x^3 = (11 \text{ mm})^3$, **b:** Phase des Bildes, **c:** maskierte Phase.

3.4.5 Erweiterung der homodynen Verarbeitung auf 3D-radiale Daten

Die homodyne Verarbeitung kann auch auf partiell aufgenommene dreidimensionale radiale Datensätze angewandt werden. Dabei erfahren diejenigen Projektionen des Datensatzes die Wichtung 2 aus Gleichung 3.23, die kein punktsymmetrisch gespiegeltes Äquivalent haben (in Abbildung 3.4b blau dargestellt). Die Daten auf diesen Projektionen, deren gespiegelte Äquivalente durch Interpolation gewonnen werden können, werden einfach gewichtet. Die für eine korrekte Rekonstruktion notwendige niedrigaufgelöste Phasenkarte wird aus den Datenpunkten bis zur Nyquist-Grenze, inklusive der interpolierten Daten, gewonnen.

Die niedrige Auflösung führt insbesondere außerhalb des gemessenen Objektes zu Phasenüberschlägen, die bei der iterativen Rekonstruktion zu Artefakten führen können. Um dies zu verhindern, wird die Phase mithilfe einer aus dem niedrigaufgelösten Bild erstellten Maske auf das gewünschte Objekt begrenzt. Die Maske wird durch Schwellwertbildung der Absolutbeträge im Bild gewonnen. Eine beispielhafte Anwendung ist in Abbildung 3.7 dargestellt.

Die 3D-DLCS-Rekonstruktion asymmetrisch unterabgetasteter Daten wird mit der homodynen Rekonstruktion dieser Daten initialisiert. Die in jedem Iterationsschritt durchgeführte Datenkonsistenz erfolgt allerdings mit den unverarbeiteten Daten. Neben dem zu rekonstruierenden Bild \mathbf{X} werden auch die Datenpunkte auf den Projektionen aktualisiert, die nicht durch Interpolation gewonnen werden können.

3.5 Simulationen

Eine fundierte Aussage über die Qualität einer Rekonstruktion ist nur dann möglich, wenn eine Referenz vorliegt. Diese entspricht im Idealfall einem perfekten Abbild der transversalen Magnetisierungsverteilung. Solch eine Referenz *in vivo* für ^{23}Na -Daten aufzunehmen ist aufgrund der geringen Konzentration und NMR-Sensitivität nur bei sehr langen Messzeiten möglich. Neben der Aufnahme einer Vielzahl von Mittellungen zur Minimierung des Datenrauschens muss darauf geachtet werden, dass das Nyquist-Kriterium erfüllt ist. Die Aufnahme einer ^{23}Na -Referenz mit einer isotropen Auflösung von 2 mm würde bei zehnfacher Mittellung fast fünf Stunden dauern.

Da eine solche Messzeit für keinen Probanden oder Patienten zumutbar ist, müssen die Rekonstruktionsalgorithmen anhand von simulierten Radialdaten verifiziert werden. Für die zu simulierende Trajektorie im k -Raum wird zunächst ein NUFFT-Operator erstellt. Der gewünschte radiale Datensatz wird durch Anwendung des Operators auf ein T_2 -gewichtetes ^1H -Bild der *Brainweb*-Datenbank erzeugt [Cocosco et al., 1997]. Der T_2 -Kontrast wurde gewählt, weil er dem eines ^{23}Na -Bildes ähnlich ist. Diesem Datensatz wird komplexes Gaußsches Rauschen hinzugefügt, dessen Amplitude, abhängig von der Zahl N_{av} der simulierten Messungen, um den Faktor $\sqrt{N_{av}}$ reduziert wird. Die Auflösung kann im Vorfeld durch Interpolation des zugrundeliegenden Bildes angepasst werden. Das interpolierte Bild dient als Referenz bei der Auswertung der Rekonstruktionen.

3.6 Quantitative Auswertung der Rekonstruktionen

Die quantitative Auswertung der Rekonstruktionsergebnisse erfolgt aufgrund der Verfügbarkeit eines Referenzbildes anhand von simulierten radialen Daten. Für die Auswertung werden drei Maße verwendet [Wang et al., 2004; Huynh-Thu und Ghanbari, 2008]:

- Die strukturelle Ähnlichkeit (engl. *structural similarity*, SSIM)
- Das Spitzen-Signal-Rausch-Verhältnis (engl. *peak signal-to-noise ratio*, PSNR)
- Der Kontrast zwischen einer Läsion und weißer Substanz C_L

3.6.1 Strukturelle Ähnlichkeit

Zur Bestimmung der strukturellen Ähnlichkeit werden das Bild und die Referenz mit einem gleitenden Fenster durchlaufen. Für jeden Punkt x im Bild und y in der Referenz wird der Wert

$$\text{SSIM}(x, y) = \frac{(2\mu_x\mu_y + C_1)(2\sigma_{xy} + C_2)}{(\mu_x^2 + \mu_y^2 + C_2)(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + C_2)} \quad (3.25)$$

anhand des die Bildpunkte umgebenden Fensters bestimmt. Hierbei sind μ_x und σ_x^2 der Mittelwert und die Varianz des Fensters um x , μ_y und σ_y^2 dasselbe für das Fenster um y . σ_{xy} ist die Kovarianz von x und y . C_1 und C_2 sind zwei Konstanten, die der Stabilisierung dienen für den Fall, dass $(\mu_x^2 + \mu_y^2) \approx 0$ oder $(\sigma_x^2 + \sigma_y^2) \approx 0$.

Die strukturelle Ähnlichkeit für das gesamte Bild ergibt sich aus:

$$\text{MSSIM}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \text{SSIM}(x_i, y_i) \quad (3.26)$$

Das gleitende Fenster, das zur Bildanalyse verwendet wird, ist mit einer dreidimensiona-

len Gaußfunktion gewichtet. Die Standardabweichung beträgt wie in [Wang et al., 2004] vorgeschlagen 1,5 Pixel für die drei Dimensionen.

3.6.2 Spitzen-Signal-Rausch-Verhältnis

Das in [dB] angegebene PSNR ist folgendermaßen definiert:

$$\text{PSNR} = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{X_{max}^2}{E} \right) \quad (3.27)$$

X_{max} ist die maximale Intensität in dem zu bewertenden Bild, E bezeichnet die mittlere quadratische Abweichung zur Referenz. Ein hoher PSNR-Wert ist in den meisten Fällen mit geringem Bildrauschen verbunden, wobei der Verlust von kleineren Strukturen nicht sehr stark ins Gewicht fällt.

3.6.3 Kontrast zwischen Läsion und weißer Substanz

Das für die Simulation radialer Daten verwendete Bild aus der BrainWeb-Datenbank beinhaltet MS-Läsionen. Durch die Definition zweier Bildregionen (engl. *region of interest*, ROI) in einer Läsion und in der weißen Substanz kann der Kontrast

$$C_L = (S_L - S_{WM}) / S_L \quad (3.28)$$

berechnet werden. S_L bezeichnet die mittlere Intensität der ROI in der Läsion, S_{WM} in der weißen Substanz. Die Erhaltung des Kontrasts ist insbesondere für eine mögliche Quantifizierung der Natriumkonzentration unabdingbar.

4 Ergebnisse

4.1 Rekonstruktionen mit dem 3D-DLCS Algorithmus

Im Folgenden wird das Leistungsvermögen des in Abschnitt 3.4.2 beschriebenen 3D-DLCS-Rekonstruktionsalgorithmus untersucht. Die Ergebnisse werden mit NUFFT-, TV-CS- und ODC-T-CS-Rekonstruktionen verglichen. Die Optimierung und die quantitative Evaluierung des 3D-DLCS-Algorithmus konnten aufgrund der Verfügbarkeit eines Referenzbildes an simulierten 3D-radialen Daten durchgeführt werden. Im Anschluss wurde das Ergebnis der Rekonstruktionen von Phantom und *In-Vivo*-Daten untersucht.

4.1.1 Optimierung der Rekonstruktionsparameter

Die Optimierung der Rekonstruktionsparameter wurde an einem simulierten, zehnfach unterabgetasteten und gemittelten Datensatz durchgeführt. Den Daten wurde eine Phase $\Phi = \pi/10$, sowie komplexes Gaußsches Rauschen mit einer Amplitude von 0,65% des Maximums im k -Raum hinzugefügt. Die Blockgröße, Probenzahl, Lexikongröße und der Wichtungsfaktor λ wurden zur Parameteroptimierung variiert. Die Resultate für PSNR und SSIM sind in Abbildung 4.1 dargestellt. Den größten Einfluss auf das Ergebnis der Rekonstruktion hat die Variation der Blockgröße. Eine Blockgröße von $B = 4 \times 4 \times 4$ ergibt Bilder mit maximaler SSIM, Blöcke der Größe $B = 3 \times 3 \times 3$ maximieren das PSNR. Die resultierenden Bilder sind in Abbildung 4.2a zu sehen. Desweiteren fällt auf, dass sehr kleine Lexika ($N_D < 100$) zu kleinen Werten für SSIM und PSNR führen. Der Grund hierfür ist, dass bei kleinen Lexika Linearkombinationen einer großen Anzahl von Einträgen notwendig sind, um eine gute Darstellung des Zielvolumens zu erreichen; eine *sparse* Darstellung, wie sie für korrekte und effiziente CS-Rekonstruktionen erforderlich ist, ist somit nicht möglich. Eine geringe Anzahl an Proben für den Lernprozess des Lexikons ($N_S < 10000$) führt zu einem vergleichbaren Effekt. Das Lexikon wird nur anhand der ausgewählten Proben und nicht auf Basis des gesamten Bildes angepasst, um den Rechenaufwand zu minimieren. Eine zu kleine Anzahl an Proben führt dazu, dass das Lexikon nicht für eine *sparse* Darstellung des gesamten Bildes geeignet ist. SSIM und PSNR sind für den Wichtungsparameter $\lambda = 0,3$ maximal; in Abbildung 4.2b ist allerdings erkennbar, dass diese geringe Wichtung der Rohdaten zu Überregularisierungsartefakten führt. Diese sind vor allem an verwaschenen Übergängen (engl.: *blurring*) zwischen grauer und weißer Substanz zu erkennen. Der beste Kompromiss zwischen visueller Wahrnehmung und der quantitativen Auswertung wird für $\lambda = 0,5$ erreicht.

Die für die folgenden Rekonstruktionen verwendeten optimierten Parameter lauten:

- Blockgröße: $B = 3 \times 3 \times 3$

- Lexikongröße: $N_D = 300$
- Probenzahl: $N_S = 500000$
- Wichtungsfaktor: $\lambda = 0,5$

4.1.2 Verhalten bei variierender Unterabtastung und Mittelung

Die Auswirkung von Unterabtastung und Mittelung auf die Ergebnisse der Rekonstruktionen wurde anhand von fünf simulierten Datensätzen mit variierendem Unterabtastungsfaktor (engl. *undersampling factor*, USF) untersucht. Die Anzahl der simulierten Mittelungen entspricht in jedem dieser Datensätze der Unterabtastung ($N_{av} = USF$). Die Ergebnisse der Rekonstruktionen für verschiedene Unterabtastungsfaktoren und Zahl der Mittelungen sind in Abbildung 4.3 dargestellt. Die 3D-DLCS-Rekonstruktion profitiert, verglichen mit den anderen Rekonstruktionsverfahren, am deutlichsten von moderater Unterabtastung ($USF = 5 - 10$). Das Ergebnis ist nahezu rauschfrei, kleine Strukturen sind nicht verwaschen. Zu starke Unterabtastung ($USF = 35$) führt zu einem erkennbar verwaschenen Bild, sowie dem Verlust von kleineren Strukturen. Die fehlende Mittelung der Daten bei $USF \leq 2$ und daraus folgende Rauschbehaftung der Rohdaten führt zu markantem Rauschen in den rekonstruierten Bildern. Der Qualitätsgewinn gegenüber NUFFT-Rekonstruktionen ist in diesem Fall minimal. Die resultierenden SSIM- und PSNR-Werte bestätigen diesen Eindruck, siehe Tabelle 4.1. Die ungemittelten Daten mit erfülltem Nyquist-Kriterium nach der 3D-DLCS-Rekonstruktion weisen die niedrigsten Werte für das PSNR und die SSIM auf (SSIM = 0,46, PSNR = 15,4). Der Gewinn an Bildqualität gegenüber der NUFFT-Rekonstruktion ist in diesem Fall minimal. Sie ist hingegen maximal für die 3D-DLCS-Rekonstruktionen zehnfach unterabgetasteter und gemittelter Daten (SSIM = 0,67, PSNR = 19,9). Einige MS-Läsionen sind in den NUFFT- und TV-CS-Rekonstruktionen nicht vom Bildrauschen zu unterscheiden, in den ODCT-CS- und 3D-DLCS-Rekonstruktionen hingegen deutlich erkennbar (siehe gelbe Pfeile in Abbildung 4.3).

Diese Ergebnisse wurden anhand von Phantommessungen mit $USF = N_{av} = 1/10/35$ verifiziert, die resultierenden Bilder sind in Abbildung 4.5 dargestellt. Die stark unterabgetasteten und gemittelten Daten ($USF = 35$) ergeben zwar quasi rauschfreie Bilder, sie sind aber deutlich verwaschen, sodass die kleinsten Zylinder (1 – 2 mm) nicht mehr zu erkennen sind. Dies wird durch den Intensitätsverlauf der in Abbildung 4.5 dargestellten Profile entlang einer Linie durch die 3-mm-Stäbe deutlich. Die Rekonstruktionen der Daten, die das Nyquist-Kriterium erfüllen, führen hingegen zu verrauschten Ergebnissen. Auch in diesem Fall sind die kleinsten Zylinder nicht zu erkennen. Die besten Ergebnisse liefern die ODCT-CS- und 3D-DLCS Rekonstruktionen des zehnfach unterabgetasteten und gemittelten Datensatzes: Das Rauschen ist sichtbar minimiert und die rekonstruktionsbedingte Unschärfe minimal.

Die Rekonstruktionen von zehnfach gemittelten und unterabgetasteten *In-vivo*-Daten des ganzen Kopfes gesunder Probanden sind in den Abbildungen 4.7, A.1, A.2 und A.3 dargestellt. Die Auswirkung variierender Unterabtastung und Mittelung wurde auch anhand eines weiteren *In-vivo*-Datensatzes untersucht. Hierzu wurden nacheinander eine Messung

mit $USF = N_{av} = 10$, sowie eine mit $USF = N_{av} = 1$ durchgeführt (Abbildung 4.6). Die Messzeit war in beiden Fällen gleich. Während die NUFFT-Rekonstruktionen beider Datensätze ähnlich verrauscht sind, liefern die CS-Rekonstruktionen deutlich bessere Ergebnisse, wenn die Daten unterabgetastet und gemittelt sind. In der TV-regularisierten Rekonstruktion ist noch residuales Rauschen vorhanden, die ODCT-CS- und 3D-DLCS-Rekonstruktionen sind hingegen fast rauschfrei.

Tabelle 4.1: Werte für die Strukturelle Ähnlichkeit (SSIM) und das Spitzen-Signal-Rausch-Verhältnis (PSNR) der NUFFT-, TV-CS-, ODCT-CS- und 3D-DLCS- Rekonstruktionen. Die besten Werte werden bei der 3D-DLCS-Rekonstruktion von zehnfach unterabgetasteten und zehnfach gemittelten Daten erreicht.

| | Unterabtastung | 35 | 10 | 5 | 2 | 1 |
|------|----------------|------|-------------|------|------|------|
| SSIM | NUFFT | 0,30 | 0,43 | 0,44 | 0,45 | 0,45 |
| | TV-CS | 0,46 | 0,54 | 0,53 | 0,49 | 0,46 |
| | ODCT-CS | 0,52 | 0,66 | 0,65 | 0,47 | 0,46 |
| | 3D-DLCS | 0,55 | 0,67 | 0,66 | 0,47 | 0,46 |
| PSNR | NUFFT [dB] | 12,1 | 14,8 | 15,2 | 15,3 | 15,2 |
| | TV-CS [dB] | 17,9 | 18,9 | 18,4 | 16,8 | 15,7 |
| | ODCT [dB] | 18,8 | 19,8 | 17,2 | 15,7 | 15,4 |
| | 3D-DLCS [dB] | 19,1 | 19,9 | 17,4 | 15,6 | 15,4 |

4.1.3 Vergleich der unterschiedlichen Regularisierungen

In Abbildung 4.7 sind Transversal-, Sagittal- und Coronarschnitte der verschiedenen Rekonstruktionen der Daten eines gesunden Probanden dargestellt. Die aufgenommenen Daten sind zehnfach unterabgetastet und gemittelt. Die aus den CS-Rekonstruktionen resultierenden Bilder weisen gegenüber der NUFFT-Rekonstruktion deutlich reduziertes Rauschen auf. Die Ergebnisse der ODCT-CS- und 3D-DLCS-Rekonstruktionen sind allerdings kaum voneinander zu unterscheiden. Der Vorteil der 3D-DLCS-Rekonstruktion wird insbesondere dann deutlich, wenn die Zahl der genutzten Mittelungen (und somit die Messzeit) reduziert wird. In Abbildung 4.8 sind die Rekonstruktionsergebnisse des Datensatzes aus Abbildung 4.7 mit $N_{av} = 5, 7$ und 10 dargestellt. Während für $N_{av} = 10$ die ODCT-CS-Rekonstruktionen äquivalent sind, werden kleine Strukturen vom 3D-DLCS-Algorithmus für $N_{av} = 5$ und 7 besser konserviert (siehe Pfeile in Abbildung 4.8).

4.1.4 Kontrastanalyse

Zusätzlich zu den PSNR- und SSIM-Werten wurde für die Rekonstruktionen der simulierten Datensätze aus Abbildung 4.3 auch der für Aussagen über absolute ^{23}Na -Konzentrationen essentielle Kontrast C_L einer MS-Läsion gegenüber weißer Substanz für sämtliche

verwendeten Rekonstruktionsalgorithmen und verschiedene Unterabtastungsfaktoren sowie Anzahl von Mittelungen berechnet. Die zur Bestimmung des Kontrastes genutzten ROIs sind in Abbildung 4.3e eingezeichnet. Die Ergebnisse sind in Tabelle 4.2 aufgelistet. Die Werte für die NUFFT-Rekonstruktionen sind aufgrund der großen rauschbedingten Fehler wenig aussagekräftig. Dies gilt ebenso für alle Rekonstruktionen der Datensätze mit $USF = 1$ und 2 . Dem Referenzwert ($C_{L,\text{ref}} = 0.48$) kommt die 3D-DLCS-Rekonstruktion des zehnfach unterabgetasteten und gemittelten Datensatzes ($C_L = 0.48 \pm 0,07$) am nächsten.

Tabelle 4.2: Werte für den Kontrast C_L zwischen einer MS-Läsion und weißer Substanz. Der entsprechende Wert für den Kontrast C_L im Referenzbild ist 0,48.

| USF | 35 | 10 | 5 | 2 | 1 |
|---------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| C_L NUFFT | $0,41 \pm 0,27$ | $0,47 \pm 0,19$ | $0,43 \pm 0,22$ | $0,46 \pm 0,24$ | $0,39 \pm 0,22$ |
| C_L TV-CS | $0,34 \pm 0,06$ | $0,47 \pm 0,10$ | $0,44 \pm 0,13$ | $0,46 \pm 0,19$ | $0,41 \pm 0,20$ |
| C_L ODCT-CS | $0,35 \pm 0,06$ | $0,47 \pm 0,07$ | $0,43 \pm 0,09$ | $0,47 \pm 0,23$ | $0,40 \pm 0,20$ |
| C_L 3D-DLCS | $0,36 \pm 0,06$ | $0,48 \pm 0,07$ | $0,43 \pm 0,09$ | $0,47 \pm 0,23$ | $0,40 \pm 0,20$ |

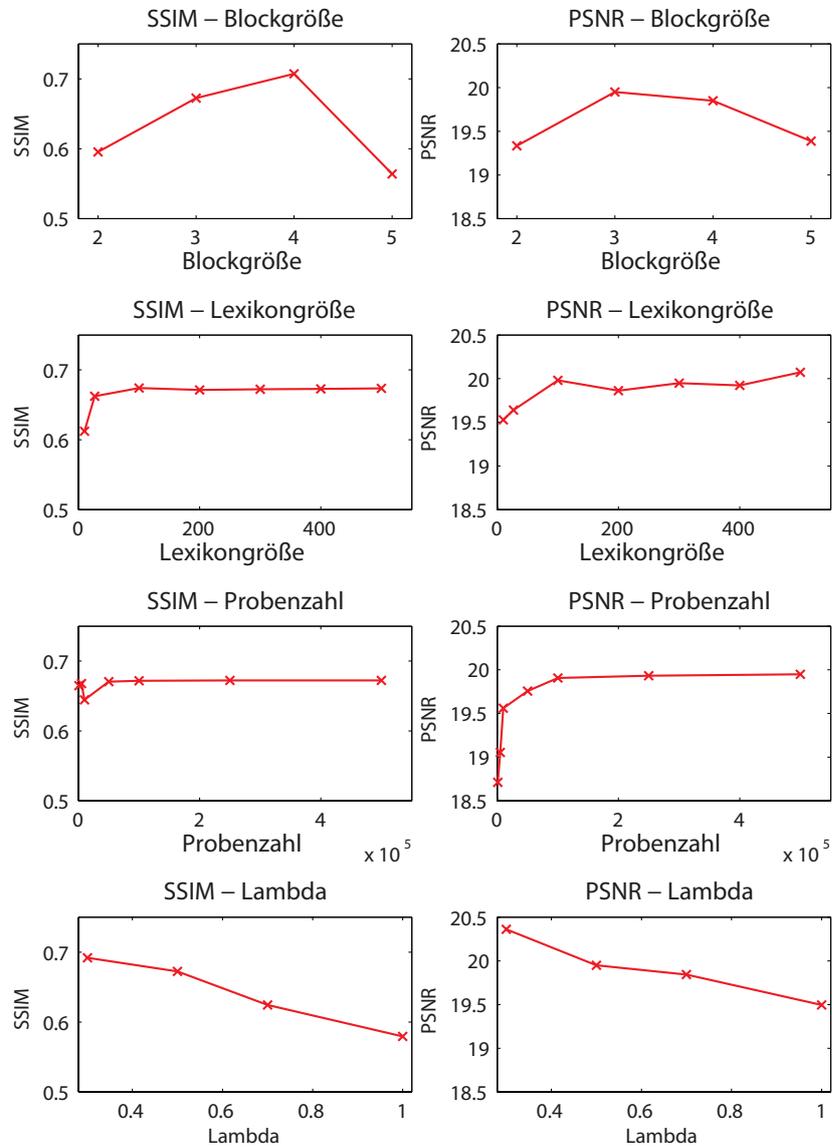


Abbildung 4.1: Variation der 3D-DLCS-Rekonstruktionsparameter. Die Änderung der Blockgröße hat den stärksten Effekt auf die Strukturelle Ähnlichkeit (SSIM) und das Spitzen-Signal-Rausch-Verhältnis (PSNR). Die besten Werte werden für die Blockgrößen 3 und 4 erreicht. Außerdem ist ein genügend großes Lexikon ($N > 100$) notwendig, sowie eine ausreichende Anzahl an Proben zur Anpassung des Lexikons ($N > 100000$).

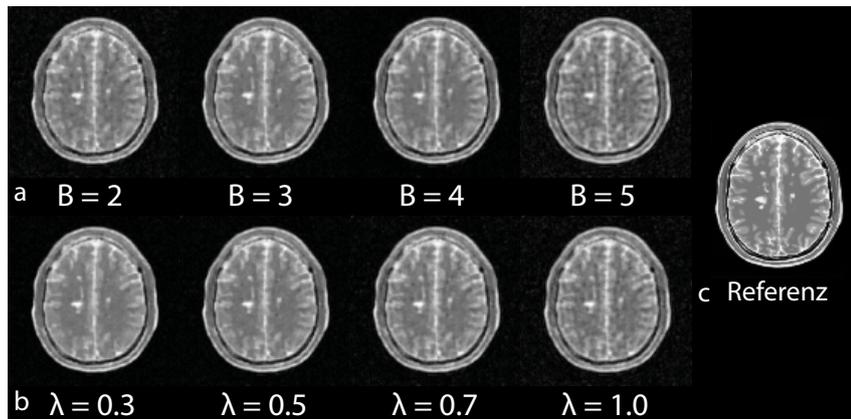


Abbildung 4.2: 3D-DLCS-Rekonstruktionen simulierter Daten mit $USF = 10$ und $N_{av} = 10$ bei Variation der Blockgröße (a) und des Wichtungsparemeters λ (b). Die Größe des Lexikons und die Zahl der Proben sind konstant $N_D = 300$ und $N_S = 500000$. Das Referenzbild ist in (c) zu sehen.

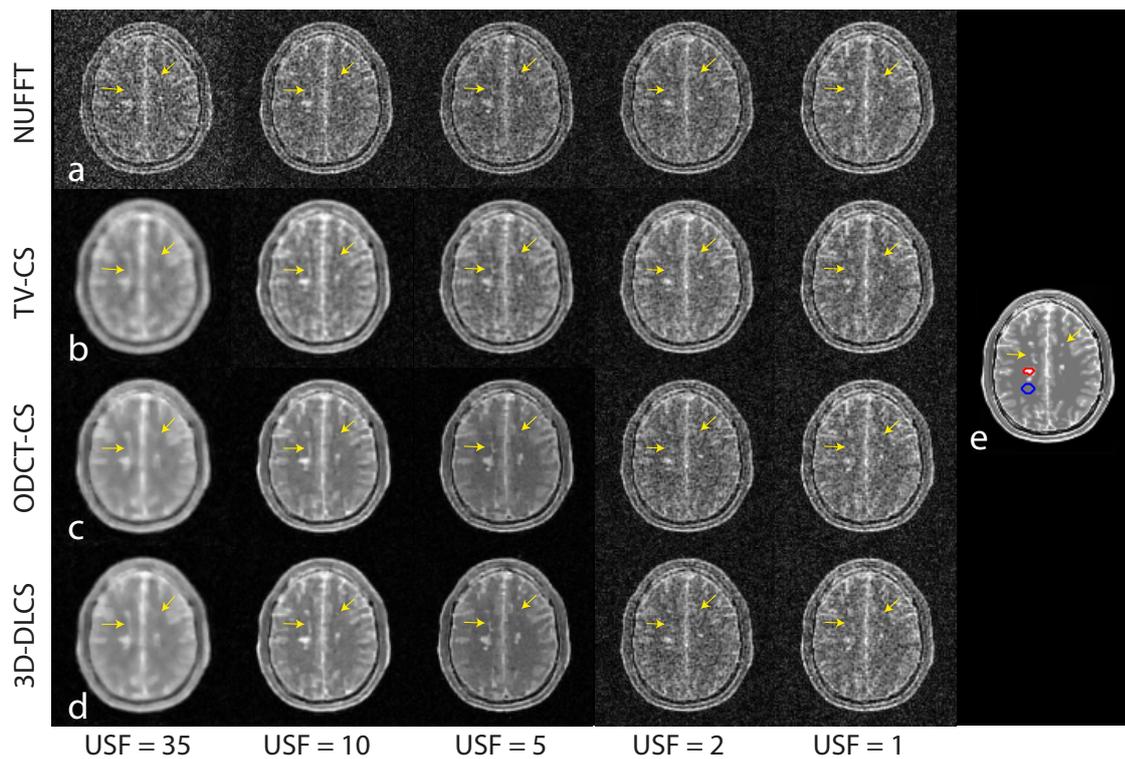


Abbildung 4.3: Rekonstruktion simulierter Daten mit einer nominellen Auflösung von $(2\text{ mm})^3$ bei variierender Unterabtastung und Mittelung. **a:** NUFFT-Rekonstruktionen. **b:** CS-Rekonstruktion mit TV-Regularisierung. **c:** CS-Rekonstruktionen mit ODCT-Regularisierung. **d:** 3D-DLCS-Rekonstruktionen. Das Referenzbild ist in **e:** abgebildet. Die ODCT-CS- und 3D-DLCS-Rekonstruktionen erzielen die besten Ergebnisse, insbesondere für moderate Unterabtastung ($USF = 5 - 10$).

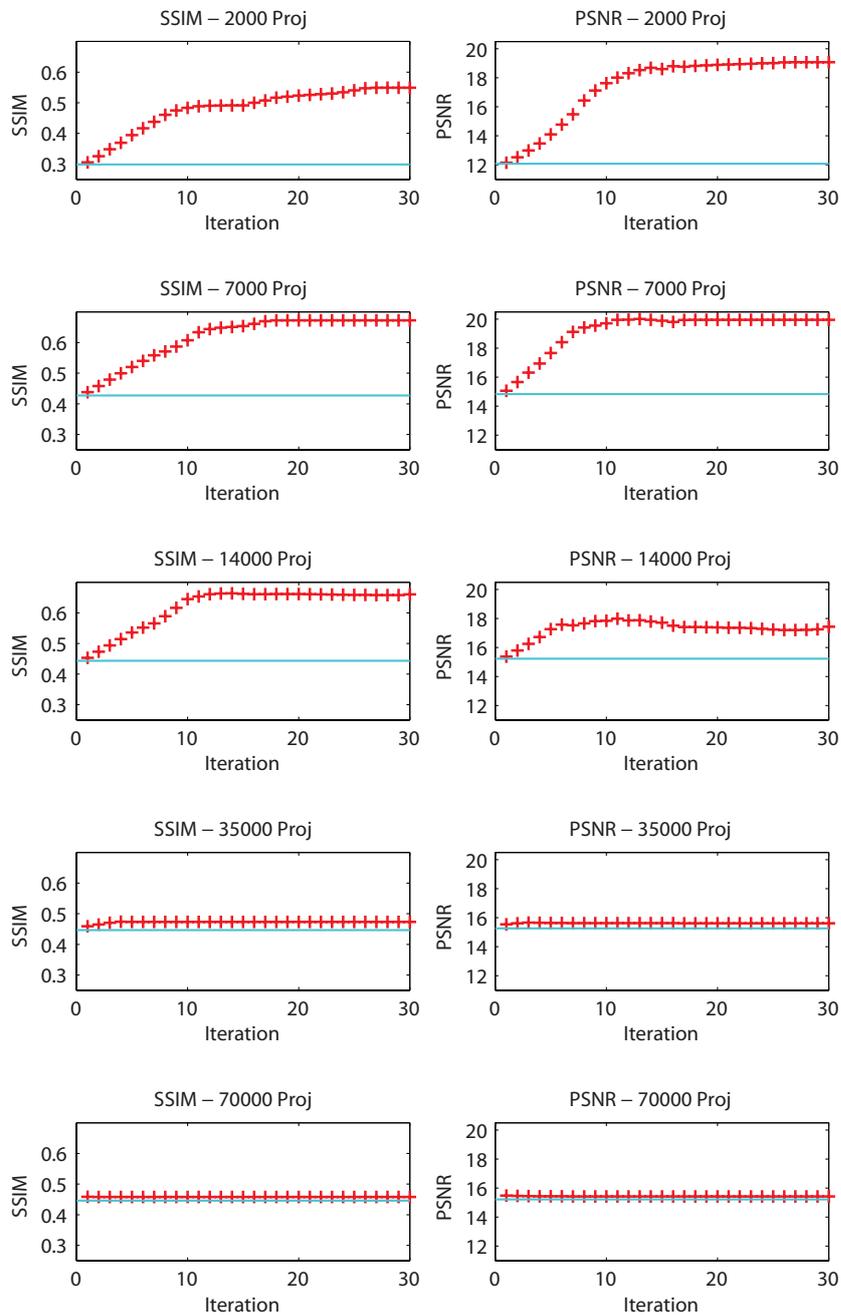


Abbildung 4.4: Konvergenzanalyse der 3D-DLCS-Rekonstruktionen von simulierten Daten mit variierender Unterabtastung und Mittelung. Für jeden Iterationsschritt wurden die SSIM und das PSNR berechnet. Die Werte der NUFFT-Rekonstruktion sind durch die blaue Linie angegeben. Bei stärkerer Unterabtastung sind mehr Iterationsschritte notwendig, um Konvergenz zu erreichen. Die höchsten PSNR- und SSIM-Werte werden bei zehnfacher Unterabtastung und Mittelung erreicht.

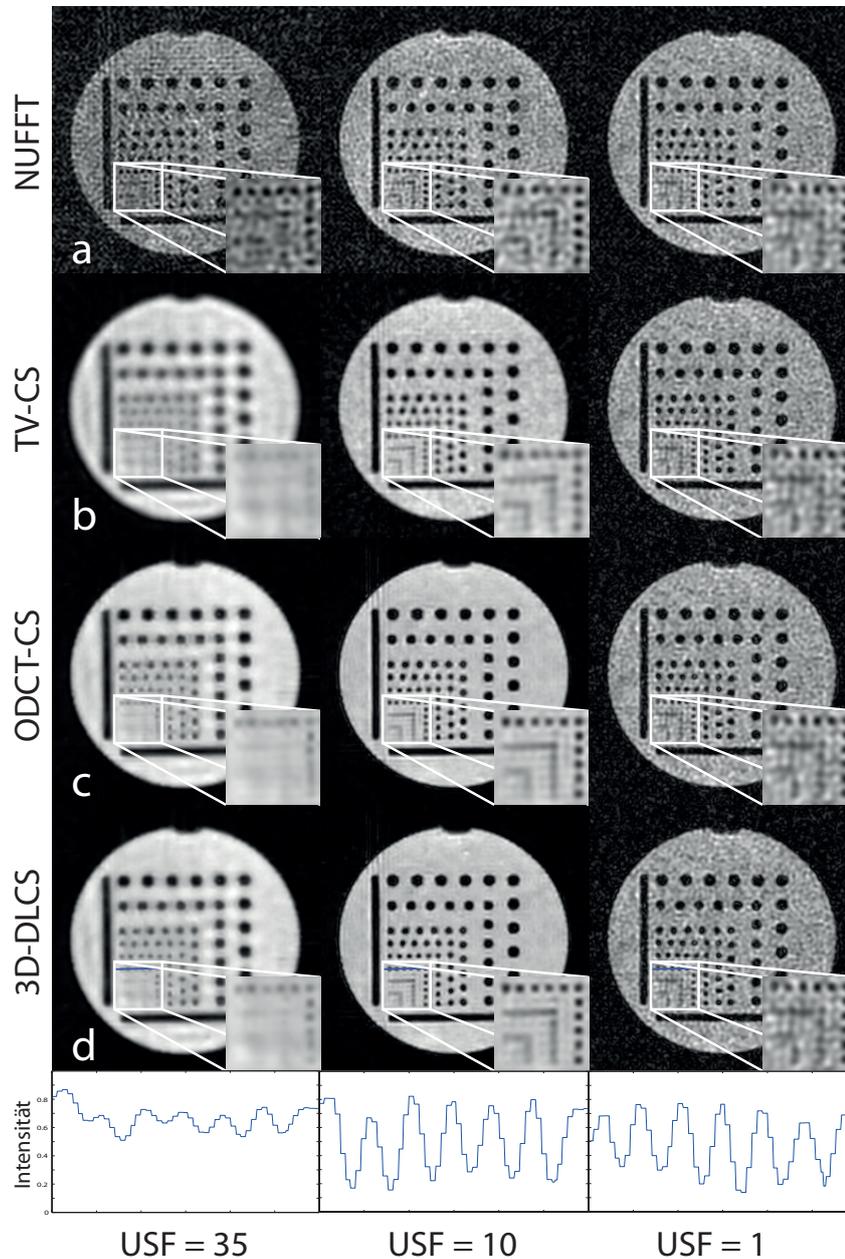


Abbildung 4.5: Rekonstruktion von ^{23}Na -Phantomdaten (nominelle Auflösung $(2\text{ mm})^3$). **a:** NUFFT-Rekonstruktionen. **b:** TV-CS-Rekonstruktionen. **c:** ODCT-CS-Rekonstruktionen. **d:** 3D-DLCS-Rekonstruktionen. Es wurden drei Datensätze rekonstruiert: $USF = 35 / N_{av} = 35$, $USF = 10 / N_{av} = 10$, $USF = 1 / N_{av} = 1$. Die Messzeit war für alle Messungen $TA = 30$ min. Die CS-Methoden profitieren von moderater Unterabtastung und Mittelung. Für die 3D-DLCS-Rekonstruktionen sind zusätzlich die Profile entlang der blau eingezeichneten Linie durch die 3-mm-Stäbe eingezeichnet.

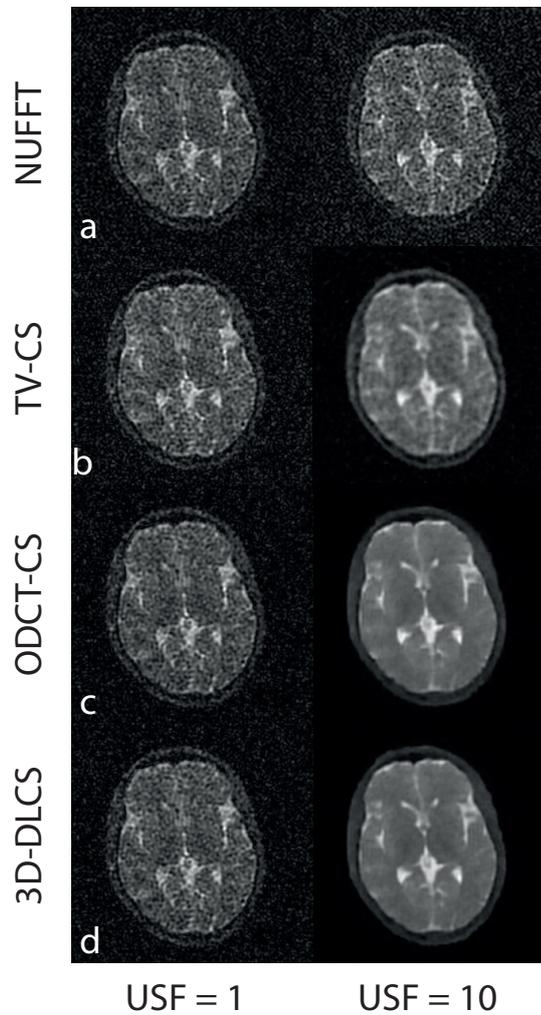


Abbildung 4.6: Rekonstruktion von in-vivo ^{23}Na -Daten eines gesunden Probanden (nominelle Auflösung $(2\text{ mm})^3$). **a:** NUFFT-Rekonstruktionen mit erfülltem Nyquist-Kriterium, sowie mit $USF = 10$ und $N_{\text{av}} = 10$. **b:** TV-CS-Rekonstruktionen. **c:** ODCT-CS-Rekonstruktionen. **d:** 3D-DLCS-Rekonstruktionen. Die Messzeit für beide Messungen war $TA = 30$ min. Die CS-basierten Rekonstruktionen profitieren von gemittelten und unterabtasteten Daten, die besten Ergebnisse liefern die ODCT-CS- und 3D-DLCS-Rekonstruktionen.

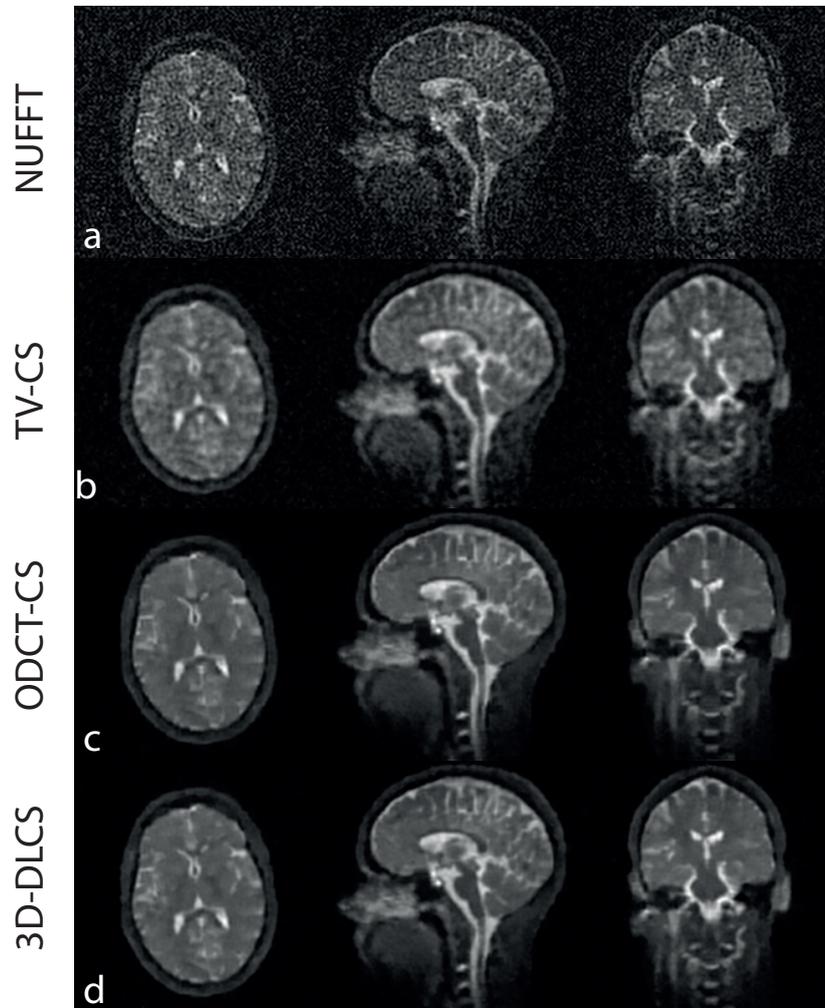


Abbildung 4.7: Transversal-, Sagittal-, und Coronarschnitte der Rekonstruktion von in-vivo ^{23}Na -Daten eines gesunden Probanden (nominelle Auflösung $(2\text{ mm})^3$). **a:** NUFFT-Rekonstruktionen. **b:** TV-CS-Rekonstruktionen. **c:** ODCT-CS-Rekonstruktionen. **d:** 3D-DLCS-Rekonstruktionen. Die Daten sind mit $USF = 10$ und $N_{av} = 10$ aufgenommen. Die Messzeit betrug $TA = 30$ min. Im Vergleich zu den NUFFT- und TV-CS-Rekonstruktionen kann bei der ODCT-CS und 3D-DLCS-Rekonstruktion eine erhebliche Reduktion des Bildrauschens beobachtet werden. Kleine Strukturen sind gut erhalten.

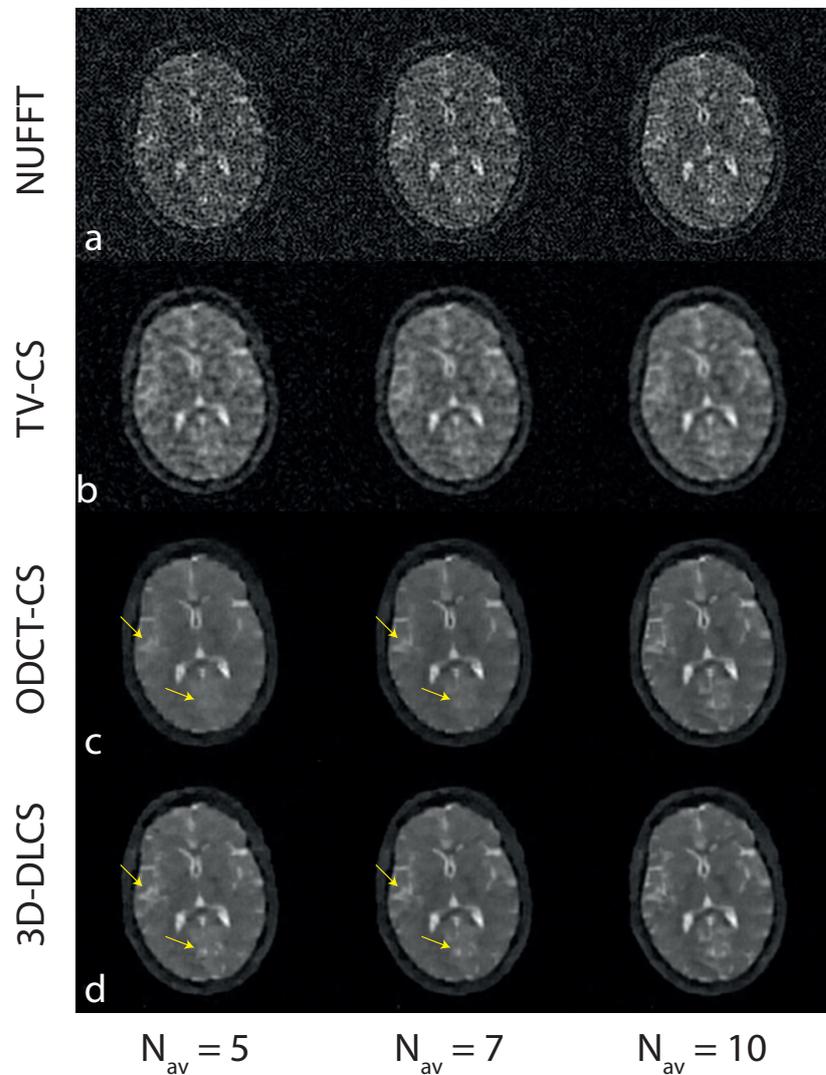


Abbildung 4.8: Rekonstruktion von *In-vivo*- ^{23}Na -Daten eines gesunden Probanden (nominelle Auflösung $(2\text{mm})^3$). Die Anzahl der verwendeten Messungen zur Mittelung wurde bei konstanter Unterabtastung ($USF = 10$) variiert ($N_{\text{av}} = 5 - 10$). Während die ODCT-CS- und 3D-DLCS-Rekonstruktionen für $USF = 10$ ($TA = 30\text{ min}$) vergleichbare Ergebnisse liefern, sind kleine Strukturen im Fall von $N_{\text{av}} = 5$ ($TA = 15\text{ min}$) bei der 3D-DLCS-Rekonstruktion besser erhalten.

4.2 Asymmetrische k-Raum-Abtastung

4.2.1 Quantitative Analyse anhand von simulierten Daten

Das Potential asymmetrischer Unterabtastung radialer Datensätze in Kombination mit einer 3D-DLCS-Rekonstruktion wurde anhand zweier simulierter Datensätze mit einer nominellen isotropen Auflösung von $(1,7\text{ mm})^3$ untersucht. Der erste Datensatz besteht aus 6300 gleichmäßig verteilten Projektionen, was einer Unterabtastung $USF = 14,4$ entspricht. Der zweite besteht ebenfalls aus 6300 Projektionen, allerdings sind diese so aufgeteilt, dass entsprechend Abbildung 3.4 für 5400 Projektionen $USF = 10$ gilt, für die restlichen 900 hingegen $USF = 40$. Beide Datensätze sind zehnfach gemittelt, was zu einer virtuellen Aufnahmezeit $TA = 26,2\text{ min}$ führt.

Die gleichmäßig unterabgetasteten Daten wurden sowohl mit der NUFFT, als auch mit dem 3D-DLCS-Algorithmus rekonstruiert. Für die 3D-DLCS-Rekonstruktion wurde das NUFFT-Bild zur Initialisierung verwendet. Die 3D-DLCS-Rekonstruktion der asymmetrisch unterabgetasteten Daten wurde für zwei verschiedene Initialisierungen durchgeführt. Einerseits wurden die im stärker abgetasteten Bereich fehlenden Projektionen jenseits der Nyquist-Grenze mit Nullen aufgefüllt (*zerofilling*). Die Punkte bis zur Nyquist-Grenze können durch Interpolation aus den aufgenommenen Speichen gewonnen werden. Die zweite untersuchte Methode, die 3D-DLCS-Rekonstruktion zu initialisieren, ist die in Abschnitt 3.2.2 beschriebene homodyne Initialisierung.

Die Ergebnisse der entsprechenden Rekonstruktionen sind in Abbildung 4.9 gezeigt, die sich ergebenden Werte für SSIM, PSNR und C_L listet Tabelle 4.3. Die ROIs zur Bestimmung von C_L sind in Abbildung 4.9e markiert. Es fällt auf, dass kleine Strukturen, wie die durch den gelben Pfeil hervorgehobene Läsion, bei der homodyn initialisierten 3D-DLCS-Rekonstruktion am besten erhalten sind. Dies wird durch den höchsten SSIM-Wert für diese Rekonstruktion bestätigt. Das PSNR ist für die 3D-DLCS-Rekonstruktionen des gleichmäßig unterabgetasteten Datensatz und die *zerofilling*-Initialisierung der asymmetrisch unterabgetasteten Daten maximal. Es fällt auch auf, dass von den iterativen Rekonstruktionen die homodyn initialisierte den Kontrast der Referenz am besten wiedergibt. Der Wert für C_L liegt dementsprechend auch am nächsten an dem der Referenz. Der Kontrast der NUFFT ist aufgrund des sehr großen, rauschbedingten Fehlers nicht aussagekräftig.

4.2.2 Rekonstruktion von asymmetrischen In-vivo- ^{23}Na -Daten

Das Verhalten asymmetrisch unterabgetasteter Daten bei der Rekonstruktion mit dem 3D-DLCS-Algorithmus wurde an zwei *In-vivo*-Datensätzen desselben gesunden Probanden untersucht. Wie die weiter oben beschriebenen simulierten Daten, bestehen sie aus 6300 Projektionen, zum einen gleichmäßig mit $USF = 14,4$, zum anderen asymmetrisch mit $USF = 10$ und $USF = 40$ unterabgetastet. Die gleichmäßig abgetasteten Daten wurden mit der NUFFT und mit dem 3D-DLCS-Algorithmus rekonstruiert, die 3D-DLCS-Rekonstruktion der asymmetrischen Daten wurde sowohl durch *zerofilling*, als auch homodyn initialisiert.

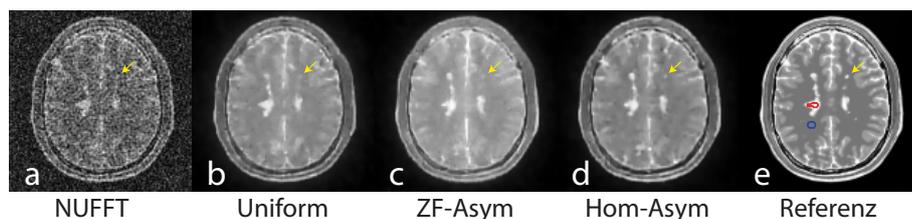


Abbildung 4.9: Vergleich der Rekonstruktionen von uniform und asymmetrisch unterabgetasteten simulierten Daten. **a** und **b**: NUFFT- und 3D-DLCS-Rekonstruktionen eines Datensatzes bestehend aus 6300 gleichmäßig verteilten Projektionen (nominelle Auflösung: 1,7 mm, $USF = 14,4$). **c** und **d**: 3D-DLCS-Rekonstruktionen von asymmetrisch unterabgetasteten simulierten Daten mit derselben Auflösung ($USF_1 = 10$, $USF_2 = 40$). In **c** dient die NUFFT-Rekonstruktion des mit Nullen aufgefüllten Datensatzes als Initialisierung, in **d** die homodyne Rekonstruktion. Das Referenzbild ist in **e** dargestellt. Sowohl der Kontrast, als auch kleinere Läsionen sind in der homodyn initialisierten 3D-DLCS-Rekonstruktion am besten erhalten.

Tabelle 4.3: SSIM- und PSNR-Werte der Rekonstruktionen aus Abbildung 4.9. in der unteren Zeile sind die Werte für den Läsion-zu-weißer-Substanz-Kontrast C_L angegeben. Die SSIM ist maximal für die homodyn initialisierte 3D-DLCS-Rekonstruktion, das PSNR für die Initialisierung durch Auffüllen mit Nullen. Der Kontrast C_L der homodynen Initialisierung kommt der Referenz am nächsten. Der Fehler ist für die NUFFT-Rekonstruktion zu groß, um einen aussagekräftige Wert zu ermöglichen.

| | NUFFT | 3D-DLCS | | | Referenz |
|-------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| | | Uniform | ZF-PF | Hom-PF | |
| SSIM | 0,35 | 0,55 | 0,56 | 0,60 | 1 |
| PSNR | 13,7 | 18,7 | 20,1 | 17,9 | / |
| C_L | $0,51 \pm 0,18$ | $0,40 \pm 0,04$ | $0,38 \pm 0,04$ | $0,45 \pm 0,03$ | $0,50 \pm 0,03$ |

Transversal-, Sagittal- und Koronarschnitte der Rekonstruktionen sind in Abbildung 4.10 gezeigt. Die gleichmäßige höhere Unterabtastung führt zu stärkerem *blurring* als bei den homodyn initialisierten asymmetrischen Daten, wo kleine Strukturen deutlicher zu erkennen sind. Bei der *zerofilling*-initialisierten Rekonstruktion fallen neben der reduzierten Auflösung in z -Richtung auch Streifenartefakte entlang der z -Achse, also der Richtung der Daten-Asymmetrie, auf. Bei Betrachtung der in Abbildung 4.10 dargestellten Profile entlang einer in der Transversalschicht eingezeichneten Linie, zeigt sich bei der homodyn initialisierten 3D-DLCS-Rekonstruktion, speziell an den Grenzen zur Gehirn-Rückenmarks-Flüssigkeit, eine verbesserte Kantenerhaltung gegenüber der 3D-DLCS-Rekonstruktion des Datensatzes mit gleichmäßiger Unterabtastung.

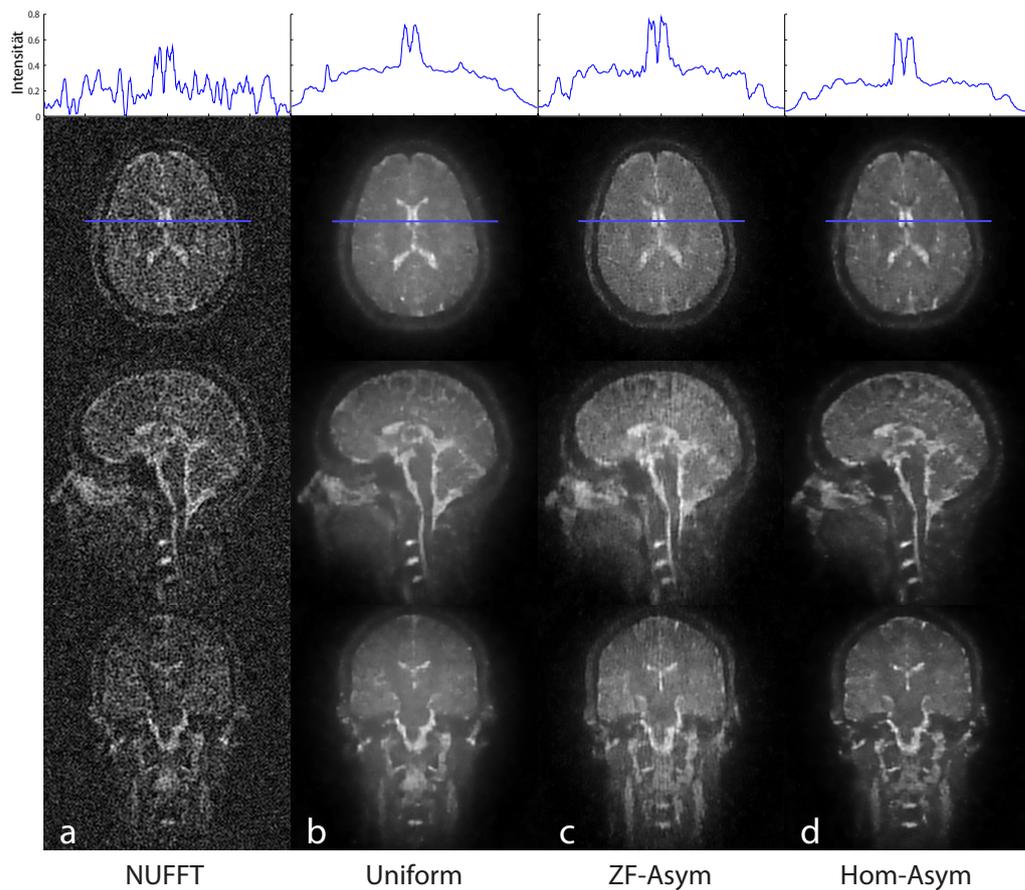


Abbildung 4.10: Vergleich der Rekonstruktionen von uniform und asymmetrisch unterabgetasteten In-vivo-Daten. **a** und **b**: NUFFT- und 3D-DLCS-Rekonstruktionen eines Datensatzes bestehend aus 6300 gleichmäßig verteilten Projektionen (nominelle Auflösung: 1,7 mm, $USF = 14,4$). **c** und **d**: 3D-DLCS-Rekonstruktionen von asymmetrisch unterabgetasteten simulierten Daten mit derselben Auflösung ($USF_1 = 10$, $USF_2 = 40$). In **c** dient die NUFFT-Rekonstruktion des mit Nullen aufgefüllten Datensatzes als Initialisierung, in **d** die homodyne Rekonstruktion. In der homodyn initialisierten 3D-DLCS-Rekonstruktion sind kleine Strukturen am besten erhalten, außerdem ist hier der Kontrast zwischen der Liquorflüssigkeit und weißer Substanz am stärksten ausgeprägt.

5 Diskussion

Die Einführung von CS-Rekonstruktionsalgorithmen in die MRT durch [Lustig et al., 2007] zielte auf einen der größten Nachteile der MR-Bildgebung: Die langen Messzeiten im Vergleich zu anderen medizinischen Bildgebungsverfahren, wie z.B. die CT oder Ultraschall. Neben einem besseren Patientenkomfort, eröffnet die um ein Vielfaches reduzierte Aufnahmezeit eine Vielzahl an neuen Methoden. Eine naheliegende und daher oft untersuchte Anwendung von CS ist die dynamische Bildgebung, insbesondere im Bereich der Kardio-MRT, wo Bewegungsartefakte eine klassische, voll abgetastete Aufnahme deutlich erschweren [Gamper et al., 2008; Jung et al., 2009; Uecker et al., 2010]. Insbesondere bei den früheren Ansätzen wurde nach einer *sparse* Darstellung in einer analytischen Transformation gesucht. Zur Erstellung von Parameterkarten verwenden [Doneva et al., 2010] hingegen ein Lexikon, in dem die Signale *sparse* dargestellt werden. Ein angepasstes Lexikon kommt auch bei [Caballero et al., 2014] für die Rekonstruktion dynamischer Herzbildgebung zum Einsatz, sowie bei [Ravishankar und Bresler, 2011] zur Rekonstruktion zweidimensionaler ^1H -Kopfdaten.

Da bei dynamischer ^1H -Bildgebung neben der örtlichen auch die zeitliche Auflösung im Vordergrund steht, ist die räumliche Darstellung auf zwei Dimensionen beschränkt, sodass sich zusammen mit der Zeit insgesamt ein dreidimensionaler Datensatz ergibt. Für eine *sparse* Darstellung des gesamten Datensatzes sind demnach zwei unterschiedliche Transformationen notwendig, beispielsweise eine Wavelet-Transformation für die räumlichen Dimensionen und eine Fourier-Transformation bei periodischen Variationen entlang der Zeitachse.

Das *In-vivo*-MR-Signal von ^{23}Na ist um einen Faktor $5 \cdot 10^{-5}$ kleiner als das von ^1H . Das ist zum Einen auf die geringe Konzentration von ^{23}Na im Gewebe zurückzuführen, zum Anderen auf die niedrigere MR-Sensitivität. Um trotz des geringen Signals ein akzeptables SNR zu erreichen, wird die räumliche Auflösung der ^{23}Na -MRT gegenüber der ^1H -MRT deutlich reduziert und die Messzeiten verlängert. CS-basierte iterative Rekonstruktionen von ^{23}Na -Daten können zu kürzeren Messzeiten oder einer besseren Auflösung führen, im Idealfall sogar zu beidem.

Die 3D-radiale Auslese der ^{23}Na -Daten bietet den Vorteil, dass die Unterabtastungsartefakte inkohärent, also rauschartig sind. Diese inkohärenten Artefakte können mittels CS-Rekonstruktionen sehr gut unterdrückt werden. Andererseits ist ein Teil des Bildrauschens auf das niedrige SNR der Rohdaten zurückzuführen. Strenggenommen müsste dieses Rauschen in einem korrekt rekonstruierten Bild auch vorhanden sein, es lässt sich aber durch die Toleranz einer Diskrepanz ϵ im Datenkonsistenzterm der Zielfunktion minimieren:

$$\|\mathbf{Ax} - \mathbf{y}\|_2^2 \leq \epsilon \quad (5.1)$$

In dem hier vorgestellten 3D-DLCS-Algorithmus wird ϵ indirekt durch die Wahl eines Wichtungskoeffizienten λ des Datenkonsistenzterms angepasst.

5.1 Gleichgewicht von Unterabtastung und Mittelungen

Damit ϵ möglichst klein gehalten werden kann, sind rauscharme Daten notwendig. Nach Gleichung 2.45 steigt das SNR in der MRT linear mit der Stärke des statischen Magnetfeldes B_0 . Die Messungen in dieser Arbeit wurden an einem 7 T-Ganzkörpertomographen durchgeführt. Das SNR ist somit um einen Faktor $\approx 4,7$ gegenüber Messungen an einem konventionellen 1,5 T-Tomographen erhöht. Aufgrund der niedrigen MR-Sensitivität von ^{23}Na und der geringen Konzentration im menschlichen Körper, müssen ^{23}Na -MRT-Daten zur Reduktion des Datenrauschens zusätzlich gemittelt werden. Da die Aufnahme von N_{av} Mittelungen das Rauschen nur um einen Faktor $\sqrt{N_{av}}$ reduziert, wird die Messzeit bei konventionellen NUFFT-Rekonstruktionen meist in die Aufnahme zusätzlicher Projektionen investiert, um Unterabtastungsartefakte zu minimieren. Werden die Daten hingegen mit einem CS-basierten Algorithmus rekonstruiert, so führt das Mitteln der Daten zu deutlich reduziertem Restrauschen im Bild. Um eine angemessene Messzeit zu ermöglichen, muss die Aufnahme von mehreren Mittelungen durch eine erhöhte Unterabtastung der Daten kompensiert werden. CS-Rekonstruktionen sind gut dazu geeignet, durch moderate Unterabtastung bedingte inkohärente Artefakte zu reduzieren. Eine zu hohe Unterabtastung führt allerdings zu *blurring* (siehe Abbildung 4.3 und 4.5).

Ein gutes Gleichgewicht der Zahl an Mittelungen und Unterabtastung führt zum besten Ergebnis: Die 3D-DLCS-Rekonstruktion von zehnfach unterabgetasteten und gemittelten Daten ist nahezu rauschfrei, kleine Strukturen wie MS-Läsionen sind dabei gut erhalten. Zu wenige Mittelungen bei niedriger Unterabtastung führen zu starkem, durch die Rohdaten bedingtem Restrauschen. Eine starke Unterabtastung führt jedoch zu *blurring*. Die Kanteninformation des Bildes ist in den hohen Frequenzen des k-Raums dargestellt. Diese sind aufgrund der radialen Datenauslese noch stärker unterabgetastet als das k-Raum-Zentrum.

5.2 Angepasste Lexika und ihre Anwendung in der Rekonstruktion von radialen ^{23}Na -Daten

Physiologische X-Kern-MR-Aufnahmen werden aufgrund der niedrigen natürlichen Häufigkeit oft nichtselektiv angeregt und dreidimensional ausgelesen. Dies führt zu einem höheren SNR der aufgenommenen Daten. In der Folge kann für die CS-Rekonstruktion dieser Daten auch eine dreidimensionale örtliche Regularisierung angewandt werden. Insbesondere für die Reduktion von Bildrauschen bietet deren Einsatz einige Vorteile. Bei der in dieser Arbeit verwendeten blockweisen Zusammensetzung des Bildes wird für eine vergleichbare Anzahl an Bildpunkten im 3D-Fall eine Kantenlänge $L_B = 3$ ($N_B = 3^3 = 27$) benötigt, im 2D-Fall hingegen $L_B = 5$ ($N_B = 5^2 = 25$). Die Effizienz bezüglich der Reduktion des Rauschens ist in beiden Fällen vergleichbar, ebenso wie der durch Näherung induzierte Fehler. Im Fall der 3D-Blöcke verteilt sich dieser Fehler allerdings auf drei Dimensionen, sodass der Auflösungsverlust innerhalb einer Schicht gegenüber der Verwendung von 2D-Blöcken

reduziert wird. Der zusätzliche rechnerische Aufwand, der sich durch den dreidimensionalen Ansatz ergibt, ist angesichts der vergleichsweise niedrigen Auflösung der ^{23}Na -MRT im Vergleich zur ^1H -MRT in jeder Hinsicht akzeptabel. [Caballero et al., 2014] verwenden für die dynamische ^1H -Herzbildgebung eine Kantenlänge $L_B = 4$, wobei die zeitliche Entwicklung in der dritten Dimension kodiert ist. [Ravishankar und Bresler, 2011] verwenden für die rekonstruktion zweidimensionaler ^1H -Kopfdaten eine Kantenlänge $L_B = 7$.

Für die Maximierung der *sparsity* kann das verwendete Lexikon an das vorliegende Problem angepasst werden. In dieser Arbeit wird dazu nach der Initialisierung des Lexikons mit einer ODCCT der K-SVD-Algorithmus verwendet, um die Atome, also die Blöcke aus denen die *sparse* Darstellung des Bildes erstellt wird, zu aktualisieren. Strukturen, die mit der ODCCT nur durch die Kombination einer großen Anzahl an Blöcken ausreichend genau beschrieben werden können, benötigen im angepassten Lexikon deutlich weniger Atome. Unkorreliertes Bildrauschen setzt sich hingegen nicht durch wiederkehrende Strukturen zusammen, sodass hierfür weiterhin die Kombination einer Vielzahl von Lexikoneinträgen notwendig ist. Die im 3D-DLCS-Rekonstruktionsalgorithmus erreichte Reduktion der l_0 -Norm der Lexikon-Darstellung, also die blockweise Minimierung der verwendeten Atome, führt somit zu einer raschen Reduktion des Bildrauschens. Die erfolgreiche Trennung zwischen Bildstruktur und Rauschen mit dem 3D-DLCS-Algorithmus hat zur Folge, dass selbst bei rauschbehafteten Rohdaten akkurate Rekonstruktionen möglich sind. Ein solches Beispiel ist in Abbildung 4.8 dargestellt, wo die 3D-DLCS-Rekonstruktion auch bei reduzierten Mittelungen - im Gegensatz zu den übrigen verwendeten Methoden - kleine Strukturen gut aus dem Bildrauschen hervorhebt. Der Einfluss des Lernprozesses auf die Rekonstruktionszeit spielt keine Rolle. Der rechnerische Aufwand durch das Anpassen mit dem K-SVD-Algorithmus wird durch die *sparsere* Darstellung kompensiert.

5.3 Asymmetrische Unterabtastung

Während die asymmetrische Unterabtastung für kartesische Trajektorien heutzutage in der klinischen Bildgebung weit verbreitet ist, werden nicht-kartesische Trajektorien in der Regel gleichmäßig im k -Raum gefahren, was auf einen höheren Rekonstruktionsaufwand zurückzuführen ist. Insbesondere bei ultrakurze TE (UTE)-Sequenzen, die die Datenaufnahme im Zentrum des k -Raums beginnen, fehlt bei asymmetrischer Abtastung ein Teil des für den Bildkontrast wichtigen k -Raum-Zentrums.

Um dem Kontrastverlust entgegenzuwirken, wird in dieser Arbeit eine asymmetrische radiale Unterabtastung vorgeschlagen. Anhand der aufgenommenen Projektionen im stärker unterabgetasteten Teil kann das k -Raum-Zentrum bis zur Nyquist-Grenze durch Interpolation wiederhergestellt und so der Kontrast erhalten werden. Zur Kompensation der Asymmetrie in den Rohdaten können die restlichen Datenpunkte jenseits der Nyquist-Grenze auf verschiedene Arten behandelt werden. Ein Auffüllen der fehlenden Daten mit dem komplex konjugierten der Werte auf den punktsymmetrisch gespiegelten Projektionen ist nicht ohne weiteres möglich, da die im Tomographen aufgenommenen Daten aufgrund von B_0 -Inhomogenitäten eine nicht-konstante Phase aufweisen. Die Alternativen sind ein Auffüllen der Daten mit Nullen (*zerofilling*) oder die homodyne Verarbeitung der Daten im Vorfeld der Rekonstruktion.

5.3.1 Vergleich zwischen homodyner Initialisierung und Zerofilling

Das Auffüllen der Projektionen mit Nullen führt allerdings zu unerwünschten Streifenartefakten in Richtung der Asymmetrie. Dies zeigen die in Abbildung 4.10 dargestellten Rekonstruktionen mit einer nominellen Auflösung von $(1,7 \times 1,7 \times 1,7\text{mm})^3$. Hingegen liefert die homodyne Wichtung der Daten nahezu artefaktfreie Ergebnisse. Außerdem sind die Übergänge zwischen unterschiedlichen Strukturen im menschlichen Gehirn durch die stärkere Wichtung hoher Frequenzen schärfer. Dasselbe gilt für feine Strukturen, wie sie z.B. im Kleinhirn vorkommen. Auch sie werden überwiegend durch höhere Frequenzen im k-Raum beschrieben, welche beim Auffüllen des Datensatzes durch *zerofilling* nur unzureichend repräsentiert sind. Die homodyn initialisierte 3D-DLCS-Rekonstruktion von asymmetrischen Daten ermöglicht es somit, das durch zu starke Unterabtastung verursachte *blurring* merklich zu reduzieren (Abbildung 4.3).

Ein Nachteil der homodynen Verarbeitung der Daten im Vorfeld einer klassischen Rekonstruktion (FFT für kartesische Daten, NUFFT für nichtkartesische) ist, dass die Phaseninformation des Bildes verloren geht. In Kombination mit einer iterativen Rekonstruktion führt der Datenkonsistenzterm allerdings dazu, dass die Phase im Verlauf der Rekonstruktion wiederhergestellt werden kann. Die Phase des Bildes wird unter anderem verwendet, um die Stärke des Radiofrequenzfeldes B_1 zu quantifizieren [Morrell, 2008; Allen et al., 2011; Lommen et al., 2015] und somit verlässlichere Aussagen zur ^{23}Na -Konzentration im Gewebe zu ermöglichen.

5.4 Quantitative Auswertung der Bildqualität

Das Fehlen eines einheitlichen, objektiven Maßes erschwert die Bewertung der Bildrekonstruktionen. Dies gilt insbesondere für iterative, nichtlineare Rekonstruktionen wie sie für CS-Verfahren benötigt werden. Sofern eine Referenz vorhanden ist - im Falle der MR-Bildgebung also die genaue Kenntnis der orts aufgelösten Magnetisierungsverteilung - liegt es nahe, die Abweichung eines rekonstruierten Bildes von der Referenz als Maß zu verwenden. Der quadratische Mittelwert des Fehlers (engl. *root mean squared error*, RMSE) und das PSNR können beispielsweise hierfür verwendet werden. Bei einer exakten Übereinstimmung von Referenz und Rekonstruktion gilt $\text{RMSE} = 0$. Weicht der Wert von 0 ab, so ist keine Aussage darüber möglich, welcher Natur die Abweichung von der Referenz ist (Abbildung 5.1). Ursachen für Abweichungen vom Referenzbild können beispielsweise Rauschen, *blurring* oder sonstige Artefakte sein. Trotz der objektiv gleichen „Qualität“ der Bilder, kann der Nutzen der Bilddaten für einen Radiologen stark variieren [Wang und Bovik, 2009].

Das SNR kann bei linearen Rekonstruktionen zur Abschätzung des Bildrauschens verwendet werden. Dazu werden zwei ROIs im Gewebe und im Bildhintergrund platziert [Constantinides et al., 1997]. Diese Methode zur SNR-Bestimmung kann allerdings nur für lineare Rekonstruktionen angewandt werden, da das Rauschen im Gewebe und im Bildhintergrund bei nichtlinearen Rekonstruktionen aufgrund der Regularisierung im Verlauf der Rekonstruktion unterschiedlich behandelt wird. Das Rauschen im Hintergrund ist leichter zu minimieren, was den erhaltenen Wert für das SNR nach oben verfälscht.

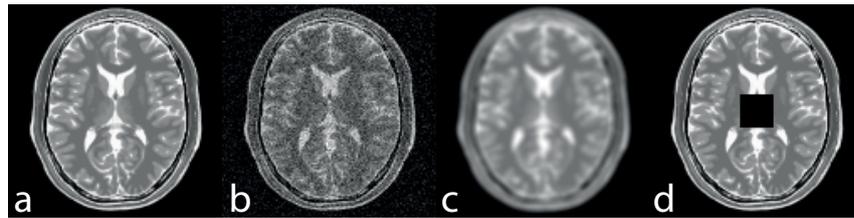


Abbildung 5.1: RMSE für unterschiedliche Bildartefakte. Im Bezug zur auf 1 normierten Referenz (a) weisen die modifizierten Bilder (b - d) alle den gleichen mittleren Fehler auf ($RMSE = 0,1$), obwohl die Abweichungen verschiedener Natur sind (b: Rauschen, c: Gaußfilter, d: Fehlen eines Teils des Bildes).

Um eine möglichst aussagekräftige Evaluation zu ermöglichen, wurde in dieser Arbeit neben dem globalen Maß PSNR zusätzlich die SSIM verwendet, um die lokalen Eigenschaften der Bilder zu berücksichtigen. Zur Evaluation des Kontrastes wurde in den Rekonstruktionen der Kontrast zwischen einer Läsion und weißer Materie C_L verwendet.

5.4.1 PSNR und SSIM

Die Maße PSNR und SSIM wurden aufgrund ihrer unterschiedlichen Sensitivität insbesondere gegenüber Bildrauschen gewählt [Hore und Ziou, 2010]. Die in Abbildung 5.1 dargestellten Artefakte führen zu ähnlichen Werten für das PSNR, was nicht verwunderlich ist, da es sich hierbei um eine logarithmische Darstellung des Kehrwerts des RMSE handelt (Abschnitt 3.6.2). Die Werte für das SSIM sind allerdings durchaus unterschiedlich. Der niedrigste Wert wird beim verrauschten Bild erreicht, der höchste bei einem fehlenden Bildteil (Tabelle 5.1). Die SSIM ist also ein guter Indikator für das Rauschniveau in den Rekonstruktionsergebnissen. Ein Artefakt wie in Abbildung 5.1d kommt in der MR-Bildgebung üblicherweise nicht vor. Die Insensitivität der SSIM diesbezüglich ist daher akzeptabel.

Tabelle 5.1: SSIM- und PSNR-Werte für die in Abbildung 5.1 dargestellten Bildartefakte.

| | Rauschen | Blurring | Fehlender Bildteil |
|------|-----------------|-----------------|---------------------------|
| PSNR | 20,0 | 19,9 | 19,9 |
| SSIM | 0,48 | 0,73 | 0,96 |

Das PSNR und die SSIM wurden auch verwendet, um die Rekonstruktionsparameter des 3D-DLCS-Algorithmus zu optimieren. Der starke Einfluss der Blockgröße auf die Rekonstruktionsergebnisse hat zwei Ursachen: Zum Einen sind zu kleine Blöcke nicht gut geeignet, um Bildstrukturen vom Rauschhintergrund hervorzuheben, da die Dimensionen der Blöcke in der Größenordnung des Rauschens sind. Rauschbedingte Intensitätsverteilungen können bereits durch die Kombination weniger Blöcke der Größe $B = 2 \times 2 \times 2$ akkurat beschrieben werden. Eine Maximierung der *sparsity* führt also nicht zu einer Reduktion des Rauschens. Im Gegenzug ist für die korrekte Darstellung der Bildstrukturen durch große Blöcke die Kombination vieler Blöcke notwendig. Die resultierende Abweichung führt

letztendlich zu *blurring*. Eine Möglichkeit, dem entgegenzuwirken, wäre die Nutzung eines deutlich größeren Lexikons, was allerdings zu erheblich längeren Rekonstruktionszeiten führt.

Während bei der Rekonstruktion von simulierten Daten das PSNR maximal bei einer Blockgröße von $B = 3 \times 3 \times 3$ ist, ist die SSIM maximal für $B = 4 \times 4 \times 4$. Die SSIM ist weniger sensitiv gegenüber dem verstärkten Blurring, wie in Abbildung 4.2 zu sehen ist.

5.4.2 Erhaltung des Bildkontrastes

Für die Quantifizierung von ^{23}Na in MS-Läsionen oder Tumoren ist die korrekte Wiedergabe der Bildintensitäten notwendig. Im Hinblick auf die klinische Anwendung von ^{23}Na -MRT ist der Erhalt des Bildkontrastes also von zentraler Bedeutung. Repräsentativ wurde in dieser Arbeit dazu der Läsion-zu-weißer-Substanz-Kontrast C_L ausgewertet. Die in Tabelle 4.2 wiedergegebenen Ergebnisse für simulierte Daten bestätigen, dass die 3D-DLCS-Rekonstruktion moderat unterabgetasteter und gemittelter Daten diesbezüglich die besten Ergebnisse liefert, während die Werte für C_L bei zu hoher Unterabtastung (USF = 35) insbesondere bei CS-Rekonstruktionen durch *blurring* merklich reduziert sind. Die NUFFT-Rekonstruktionen sind genauso wie die Rekonstruktionen für USF = 1-2 stark rauschbehaftet, was wiederum zu einem großen Fehler bei der Bestimmung von C_L führt. Diese Bilder sind für eine quantitative Auswertung nur eingeschränkt nutzbar.

Der negative Einfluss starker Unterabtastung auf die Kontrastbestimmung macht sich auch in den Rekonstruktionen aus Abbildung 4.9 bemerkbar: Die 3D-DLCS-Rekonstruktion der mit einer Unterabtastung USF = 14.4 gleichmäßig erfassten k-Raum-Daten weist einen gegenüber der Referenz merklich reduzierten Kontrast auf. Die homodyn initialisierte 3D-DLCS-Rekonstruktion asymmetrisch unterabgetaster Daten reduziert die Abweichung vom Referenzwert. Insbesondere bei hohen Auflösungen ist eine asymmetrische Aufnahme der Daten in Kombination mit einer homodyn Initialisierung von Vorteil für eine quantitative Auswertung. Zuverlässigere Ergebnisse sind dennoch bei niedrigeren Auflösungen zu erwarten.

5.5 Anatomisches Vorwissen und die Unabhängigkeit davon

Frühere iterative Verfahren zur Rekonstruktion von ^{23}Na -Daten verwenden anatomisches Vorwissen aus höher aufgelösten ^1H -Bildern [Gnahm und Nagel, 2015; Constantinides et al., 2000b; Halder et al., 2008]. Bei der Nutzung von Vorwissen aus anderen Datensätzen muss allerdings immer gewährleistet sein, dass das resultierende ^{23}Na -Bild auch vollkommen mit den aufgenommenen Daten übereinstimmt und nicht beispielsweise eine nur in den ^1H -Daten vorhandene Läsion letztendlich im ^{23}Na -Bild sichtbar wird. Sofern die Verwendung von ^1H -Daten sich auf die Erhaltung von Kanteninformation zur Reduktion von Partialvolumeneffekten beschränkt wird, ist dies sicherlich gegeben. Dennoch ist der Nachweis der Unabhängigkeit meist nicht ohne weiteres möglich.

Ein Vorteil des 3D-DLCS-Algorithmus ist, dass er ohne anatomisches Vorwissen auskommt und allein die aufgenommenen ^{23}Na -Daten sowie ein auf das zu rekonstruierende ^{23}Na -Bild

angepasstes Lexikon für die Regularisierung der Rekonstruktion verwendet. Eine Verfälschung durch *A-priori*-Information ist damit ausgeschlossen. Dennoch könnte die zu minimierende Zielfunktion auch um einen entsprechenden Term ergänzt werden und Vorwissen in geeigneter Form genutzt werden, zusätzlich zur Regularisierung durch das angepasste Lexikon.

6 Zusammenfassung

Das im Vergleich zur ^1H -MRT etwa um einen Faktor $2 \cdot 10^5$ niedrigere SNR der ^{23}Na -MRT hat zur Folge, dass die aufgenommenen Daten auch bei einer geringen räumlichen Auflösung stark rauschbehaftet sind. Um die Messzeiten in einem akzeptablen Rahmen zu halten, werden die Daten in der Regel zudem unterabgetastet aufgenommen. Bei der klassischen, linearen nicht-uniformen schnellen Fouriertransformation (NUFFT)-Rekonstruktion von 3D-radialen Daten führt eine moderate Unterabtastung zu rauschartigen Artefakten.

Der in dieser Arbeit vorgestellte Compressed Sensing mit gelerntem 3D-Lexikon (3D-DLCS)-Rekonstruktionsalgorithmus ermöglicht eine merkliche Reduktion des auf Unterabtastungsartefakte zurückzuführenden Rauschens. Die für eine korrekte Rekonstruktion notwendige *sparse* Darstellung wird hierbei durch ein an das vorliegende Bild angepasstes Lexikon erreicht. Das Spitzen-Signal-Rausch-Verhältnis (PSNR) ist bei der 3D-DLCS-Rekonstruktion von zehnfach unterabgetasteten und gemittelten Daten um 5,1 dB gegenüber der NUFFT-Rekonstruktion erhöht, die strukturelle Ähnlichkeit (SSIM) um 24%.

Die Einträge (Atome) des angepassten Lexikons bestehen aus dreidimensionalen Blöcken, aus denen jeweils die Schätzung des Bildes im aktuellen Iterationsschritt zusammengesetzt wird. Weil das Rauschen nicht aus wiederkehrenden Strukturen besteht, kann es nicht „gelernt“ werden und somit nicht *sparse* in der Basis des Lexikons repräsentiert werden. Um eine *sparse* Darstellung des gemessenen Objekts zu ermöglichen, muss das angewandte Lexikon aus einer genügend großen Zahl an Atomen bestehen und anhand von genügend vielen Proben aus dem Bild aktualisiert werden.

Während rauschartige Unterabtastungsartefakte gut mithilfe von CS-Rekonstruktionsalgorithmen reduziert werden können, trifft dies nicht für Rauschen zu, das aufgrund des niedrigen ^{23}Na -Signals in den Rohdaten vorhanden ist. Durch die Aufnahme mehrerer Mittelungen kann das Datenrauschen reduziert werden ($\text{SNR} \propto \sqrt{N_{av}}$). Die durch die Aufnahme mehrerer Mittelungen erhöhte Messzeit kann durch eine Unterabtastung der Daten kompensiert werden. Es gilt bei dem Zusammenspiel zwischen Mittelungen und Unterabtastung das richtige Gleichgewicht zu finden: Eine zu starke Unterabtastung bei der Aufnahme vieler Mittelungen führt zu verwaschenen Bildern (*blurring*), während zu wenige Mittelungen bei geringer Unterabtastung starkes Restrauschen zur Folge haben. Das beste Ergebnis wird bei moderater Unterabtastung und Mittelung erreicht ($USF = N_{av} = 10$). Bei dieser Kombination sind das PSNR und die SSIM maximal (SSIM = 0,67 und PSNR = 19,9 dB).

Die korrekte Wiedergabe des Bildkontrastes ist wesentlich für die klinische Anwendbarkeit eines Rekonstruktionsalgorithmus für ^{23}Na -MRT. Die Quantifizierung der ^{23}Na -Konzentration setzt einen korrekten Kontrast voraus. Der Wert für den Kontrast zwischen einer Läsion und weißer Substanz C_L ist für die 3D-DLCS-Rekonstruktion von zehnfach unter-

abgetasteten und gemittelten Daten ($C_L = 0,48 \pm 0,07$) identisch mit dem der Referenz, so dass die 3D-DLCS-Rekonstruktion für die Auswertung quantitativer Daten verwendet werden kann.

Der 3D-DLCS-Algorithmus wurde nach der Optimierung der Rekonstruktionsparameter anhand simulierter Daten auf Phantom- sowie auf *In-vivo*-Daten des ganzen Kopfes von fünf gesunden Probanden mit einer nominellen Auflösung von jeweils $(2 \times 2 \times 2)$ mm³ angewandt. Die Daten wurden bei $B_0 = 7$ T mit einer Messzeit $TA = 20$ min aufgenommen. Das Bildrauschen in der 3D-DLCS-Rekonstruktion von Phantomdaten war deutlich reduziert, sofern die Daten ausreichend gemittelt wurden. Während die Stäbe mit 2 mm Durchmesser in der NUFFT-Rekonstruktion nicht eindeutig vom Rauschen unterscheidbar sind, werden sie im Laufe der 3D-DLCS-Rekonstruktion vom Rauschen hervorgehoben. Wie auch bei der Rekonstruktion simulierter Daten führt eine übermäßige Unterabtastung zu *blurring*, während das durch eine unzureichende Zahl an Mittelungen bedingte Datenrauschen nicht durch die Rekonstruktion reduziert werden kann. Bei der Rekonstruktion von *In-vivo*-Daten ist zudem erkennbar, dass die Verwendung eines angepassten Lexikons bei höherem Datenrauschen einen besseren Erhalt kleiner Strukturen ermöglicht als die Rekonstruktion mit einem konstanten ODCT-Lexikon.

Es konnte im Rahmen dieser Arbeit außerdem gezeigt werden, dass die ²³Na-MRT insbesondere bei Aufnahmen mit hoher nomineller Auflösung von einer asymmetrischen Abtastung des k-Raums profitiert. Bei einer homogenen Verteilung der aufgenommenen Projektionen führt die notwendige Unterabtastung zu *blurring* im Rekonstruktionsergebnis. Die starke Unterabtastung ist notwendig, um trotz der notwendigen Datenmittelung akzeptable Messzeiten zu ermöglichen. Durch die Umverteilung der Projektionen kann der Unterabtastungsfaktor für einen Teil der aufgenommenen Daten und das damit einhergehende *blurring* im resultierenden Bild reduziert werden. Das Fehlen der Projektionen im stärker unterabgetasteten Teil kann mithilfe der Symmetrieeigenschaften des k-Raums kompensiert werden. Dazu wurde die homodyne Verarbeitung der Daten auf den 3D-radialen Fall ausgeweitet. Das für den Erhalt der Phaseninformation notwendige k-Raum-Zentrum wurde bis zur Nyquist-Grenze durch Interpolation anhand der aufgenommenen Daten rekonstruiert.

Die 3D-DLCS-Rekonstruktion homodyn initialisierter, asymmetrischer, simulierter Daten mit einer nominellen Auflösung von $(1,7 \times 1,7 \times 1,7)$ mm³ weist gegenüber der Rekonstruktion gleichmäßig aufgenommener Daten zwar ein niedrigeres PSNR auf, dafür aber ein höheres SSIM; kleine Läsionen sind zudem besser erhalten. Insbesondere ist für homodyn initialisierte, asymmetrische Daten die Abweichung des Kontrastes C_L von der Referenz deutlich reduziert.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass die hier vorgestellte 3D-DLCS-Rekonstruktion von ²³Na-Daten gegenüber der klassischen NUFFT-Rekonstruktion eine deutlich verbesserte Qualität ermöglicht. Das Bildrauschen im Rekonstruktionsergebnis ist merklich reduziert, kleine Strukturen werden dabei dennoch gut erhalten. Um eine akkurate Rekonstruktion zu erhalten, ist darauf zu achten, dass die verwendeten Daten nicht zu rauschbehaftet sind, so dass hauptsächlich Unterabtastungsartefakte das Bildrauschen bestimmen. Die höchsten Werte für PSNR und SSIM sowie die geringste Abweichung vom Kontrast der Referenz wurden bei zehnfacher Unterabtastung und Mittelung erzielt. Die Messzeit kann

durch eine asymmetrische Aufnahme der Daten um 30% reduziert werden. Bei der Datenrekonstruktion wird die Punktsymmetrie des k -Raums für die Initialisierung durch eine homodyne Rekonstruktion der Daten genutzt. Die homodyne Initialisierung asymmetrisch aufgenommener Daten führt zu einer besseren Darstellung kleiner Strukturen und einem besseren Erhalt des Bildkontrastes.

Anhang

A Rekonstruktionen von In-vivo-²³Na-MR-Daten

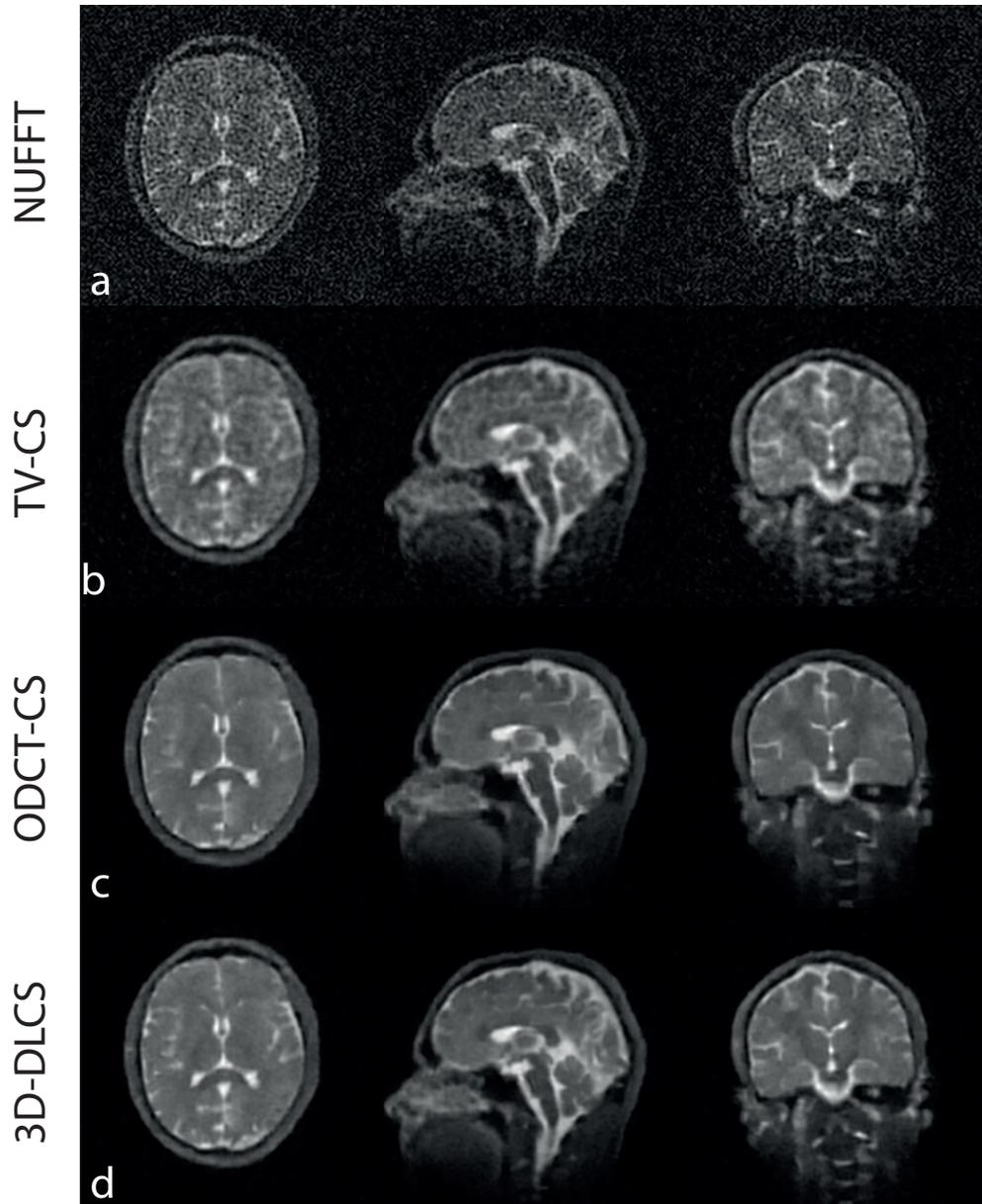


Abbildung A.1: Transversal- Sagittal- und Coronarschnitte der Rekonstruktion von in-vivo ^{23}Na -Daten eines gesunden Probanden (nominelle Auflösung: 2 mm. **a:** NUFFT-Rekonstruktionen. **b:** TV-CS-Rekonstruktionen. **c:** ODCT-CS-Rekonstruktionen. **d:** 3D-DLCS-Rekonstruktionen. Die Daten sind mit $USF = 10$ und $N_{av} = 10$ aufgenommen. Die Messzeit betrug $TA = 30$ min.

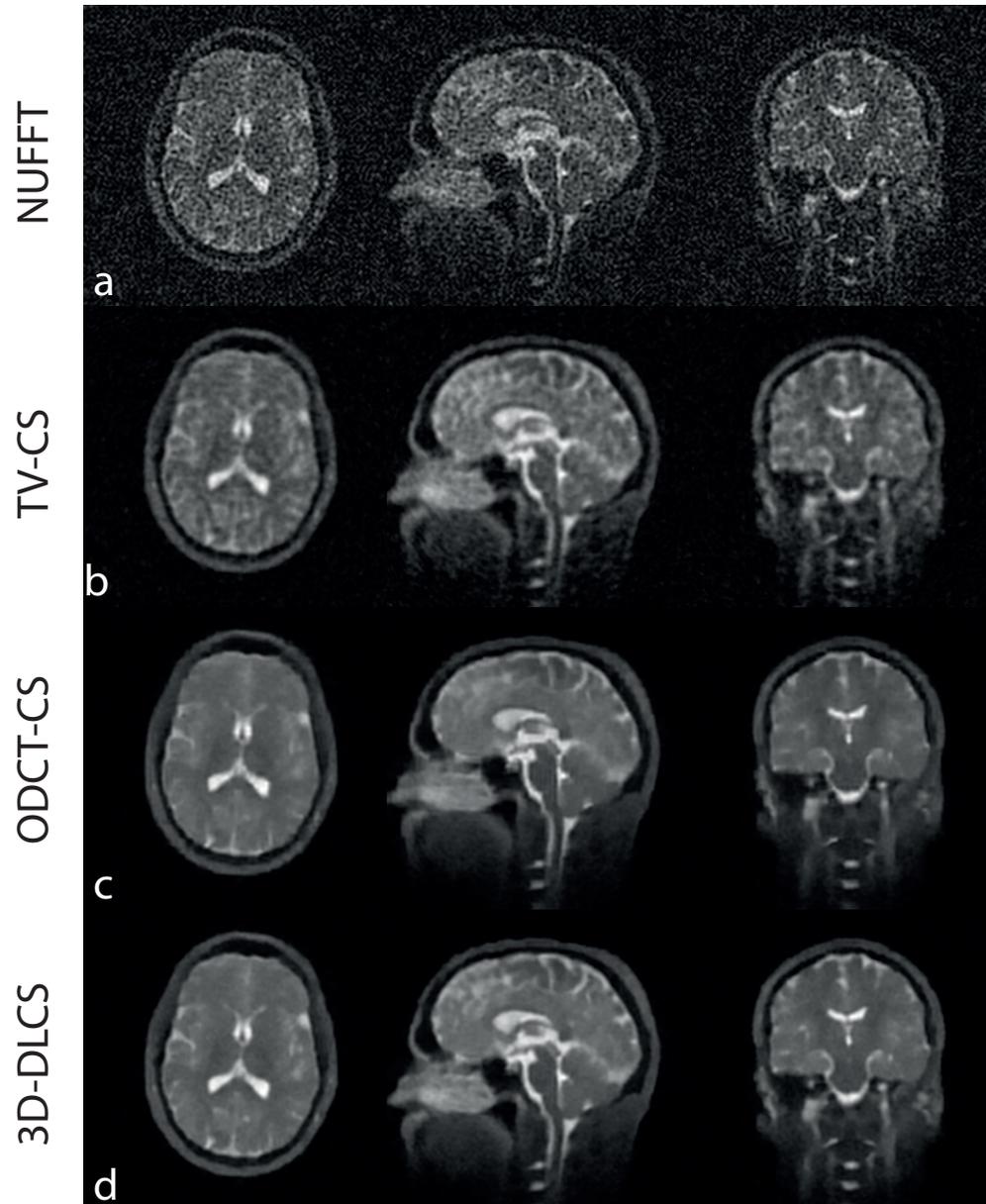


Abbildung A.2: Transversal- Sagittal- und Coronschnitte der Rekonstruktion von in-vivo ^{23}Na -Daten eines gesunden Probanden (nominelle Auflösung: 2 mm. **a:** NUFFT-Rekonstruktionen. **b:** TV-CS-Rekonstruktionen. **c:** ODCT-CS-Rekonstruktionen. **d:** 3D-DLCS-Rekonstruktionen. Die Daten sind mit $USF = 10$ und $N_{av} = 10$ aufgenommen. Die Messzeit betrug $TA = 30$ min.

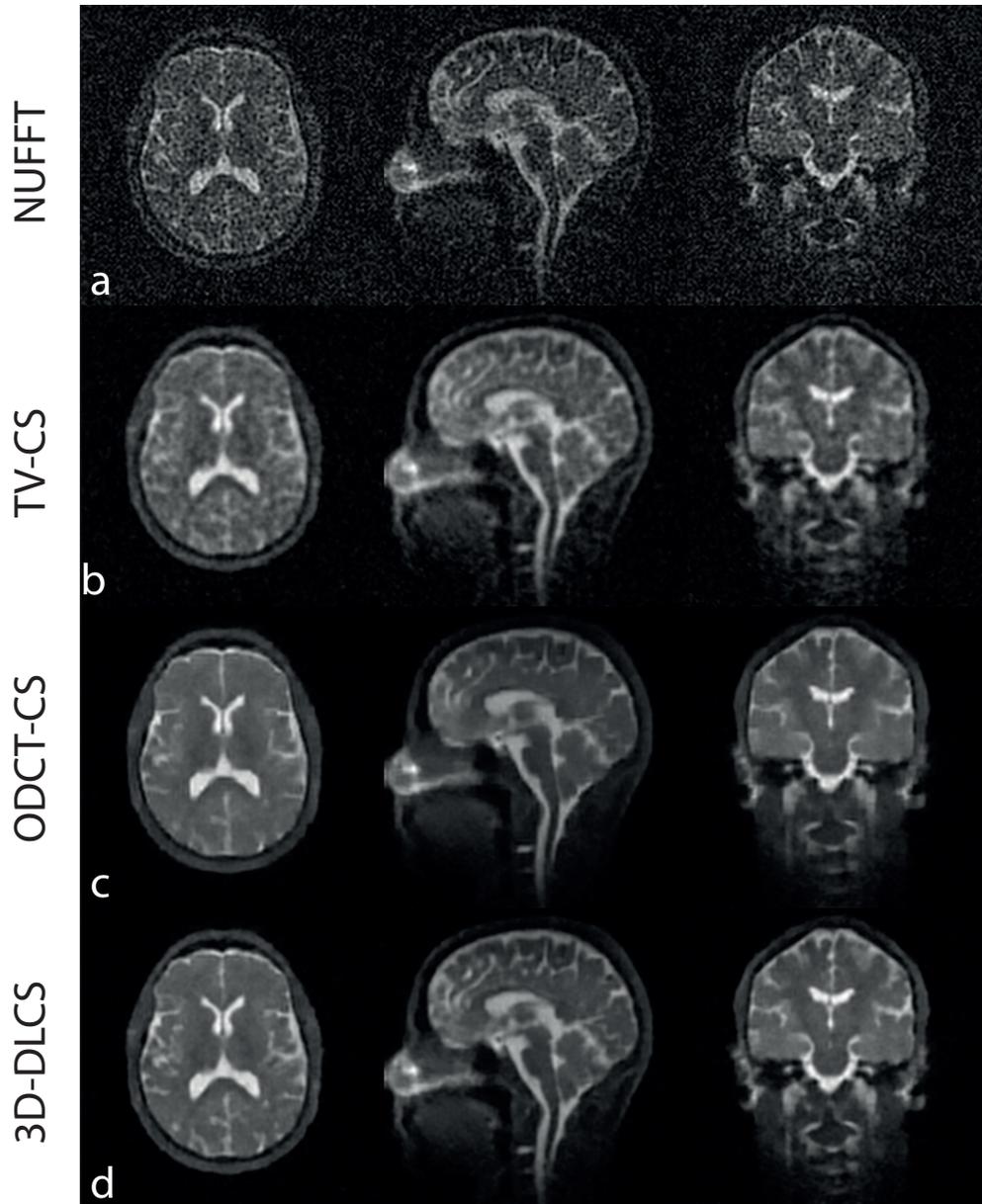


Abbildung A.3: Transversal- Sagittal- und Coronarschnitte der Rekonstruktion von in-vivo ^{23}Na -Daten eines gesunden Probanden (nominelle Auflösung: 2 mm. **a:** NUFFT-Rekonstruktionen. **b:** TV-CS-Rekonstruktionen. **c:** ODCT-CS-Rekonstruktionen. **d:** 3D-DLCS-Rekonstruktionen. Die Daten sind mit $USF = 10$ und $N_{av} = 10$ aufgenommen. Die Messzeit betrug $TA = 30$ min.

B Veröffentlichungen

Teile dieser Arbeit wurden in folgenden Zeitschriftenartikeln und Konferenzbeiträgen veröffentlicht:

Zeitschriftenartikel

Nicolas G. R. Behl, Christine Gnahn, Peter Bachert, Mark E. Ladd und Armin M. Nagel (2015). Three-Dimensional Dictionary-Learning Reconstruction of ^{23}Na MRI Data. *Magnetic Resonance in Medicine*. DOI: 10.1002/mrm.25759.

Konferenzbeiträge

Nicolas G. R. Behl, Christine Gnahn, Peter Bachert und Armin M. Nagel (2014). 3D-Dictionary-Learning-CS Reconstruction of Radial ^{23}Na -MRI-Data. *Proceedings of the 22nd scientific meeting, International Society for Magnetic Resonance in Medicine*.

Nicolas G. R. Behl, Christine Gnahn, Peter Bachert und Armin M. Nagel (2015). 3D-DLCS Reconstruction of Asymmetrically Undersampled Radial ^{23}Na -MRI *Proceedings of the 23rd scientific meeting, International Society for Magnetic Resonance in Medicine*

Abbildungsverzeichnis

| | | |
|------|---|----|
| 2.1 | Zeeman-Aufspaltung für ^1H , ^{23}Na und ^{17}O | 4 |
| 2.2 | Bildartefakte für verschiedene Unterabtastungsschemata | 18 |
| 2.3 | Partielle k -Raum Abtastung | 20 |
| 3.1 | 7T Tomograph und doppelresonante ^{23}Na - ^1H -Spule | 21 |
| 3.2 | Auflösungsphantom für die ^{23}Na -MRT | 22 |
| 3.3 | Sequenzschema der 3D-DAPR Sequenz | 23 |
| 3.4 | Asymmetrische radiale Datenaufnahme, reduziert auf 2D | 24 |
| 3.5 | Rekonstruktion asymmetrischer Daten durch Bildung des komplex Konjugierten | 32 |
| 3.6 | Eindimensionale, partiell aufgenommene k -Raum Zeile | 33 |
| 3.7 | Phasenkarten für die Korrektur der homodynem Verarbeitung asymmetrischer Daten | 34 |
| 4.1 | Variation der 3D-DLCS-Rekonstruktionsparameter | 41 |
| 4.2 | Resultierende Bilder bei variierender Blockgröße und Wichtungsparameter | 42 |
| 4.3 | Rekonstruktion simulierter Daten mit einer nominellen Auflösung von $(2\text{ mm})^3$ bei variierender Unterabtastung und Mittelung | 42 |
| 4.4 | Konvergenzanalyse der 3D-DLCS-Rekonstruktionen von simulierten Daten mit variierender Unterabtastung und Mittelung | 43 |
| 4.5 | Rekonstruktion von ^{23}Na -Phantomdaten (nominelle Auflösung $(2\text{ mm})^3$) | 44 |
| 4.6 | Rekonstruktion von <i>In-vivo</i> - ^{23}Na -Daten eines gesunden Probanden mit $USF = 1 / N_{av} = 1$ und $USF = 10 / N_{av} = 10$ (nominelle Auflösung $(2\text{ mm})^3$) | 45 |
| 4.7 | Transversal-, Sagittal-, und Coronarschnitte der Rekonstruktion von <i>In-vivo</i> - ^{23}Na -Daten eines gesunden Probanden (nominelle Auflösung $(2\text{ mm})^3$) | 46 |
| 4.8 | Variation von N_{av} bei der Rekonstruktion <i>In-vivo</i> - ^{23}Na -Daten eines gesunden Probanden (nominelle Auflösung $(2\text{ mm})^3$) | 47 |
| 4.9 | Vergleich der Rekonstruktionen von uniform und asymmetrisch unterabgetasteten simulierten Daten (nominelle Auflösung $(1,7\text{ mm})^3$) | 49 |
| 4.10 | Vergleich der Rekonstruktionen von uniform und asymmetrisch unterabgetasteten <i>In-vivo</i> -Daten (nominelle Auflösung $(1,7\text{ mm})^3$) | 50 |
| 5.1 | RMSE für unterschiedliche Bildartefakte | 55 |
| A.1 | Transversal- Sagittal- und Coronarschnitte der Rekonstruktion von <i>in-vivo</i> ^{23}Na -Daten eines gesunden Probanden (nominelle Auflösung: 2 mm) | 62 |
| A.2 | Transversal- Sagittal- und Coronarschnitte der Rekonstruktion von <i>in-vivo</i> ^{23}Na -Daten eines gesunden Probanden (nominelle Auflösung: 2 mm) | 63 |

| | | |
|-----|--|----|
| A.3 | Transversal- Sagittal- und Coronarschnitte der Rekonstruktion von in-vivo ^{23}Na -Daten eines gesunden Probanden (nominelle Auflösung: 2 mm) | 64 |
|-----|--|----|

Tabellenverzeichnis

| | | |
|-----|--|----|
| 4.1 | SSIM- und PSNR-Werte für die Rekonstruktionen simulierter Daten | 39 |
| 4.2 | Werte für den Kontrast C_L zwischen einer MS-Läsion und weißer Substanz | 40 |
| 4.3 | SSIM-, PSNR- und C_L -Werte für asymmetrisch unterabgetastete simulierte Daten | 49 |
| 5.1 | SSIM- und PSNR-Werte für die in Abbildung 5.1 dargestellten Bildartefakte | 55 |

Literaturverzeichnis

- A. Abragam. *Principles of Nuclear Magnetism*. Oxford University Press, 2007.
- M. Aharon, M. Elad, und A. Bruckstein. K-SVD: An algorithm for designing overcomplete dictionaries for sparse representation. *IEEE Trans Signal Process*, 54(11):4311–4322, 2006.
- S. P. Allen, G. R. Morrell, B. Peterson, D. Park, G. E. Gold, J. D. Kaggie, und N. K. Bangerter. Phase-sensitive sodium B1 mapping. *Magn Reson Med*, 65(4):1125–30, 2011.
- M. A. Bernstein, K. F. King, und X. J. Zhou. *Handbook of MRI pulse sequences*. Elsevier academic press, 2004.
- F. Bloch, W. W. Hansen, und M. Packard. Nuclear Induction. *Physical Review*, 69(3-4): 127–127, 1946.
- K. T. Block, M. Uecker, und J. Frahm. Undersampled radial MRI with multiple coils. Iterative image reconstruction using a total variation constraint. *Magn Reson Med*, 57(6):1086–98, 2007.
- F. E. Boada, J. D. Christensen, J. S. Gillen, und K. R. Thulborn. Three-dimensional projection imaging with half the number of projections. *Magn Reson Med*, 37(3):470–7, 1997.
- J. Caballero, A. N. Price, D. Rueckert, und J. V. Hajnal. Dictionary Learning and Time Sparsity for Dynamic MR Data Reconstruction. *IEEE Trans Med Imaging*, 33(4):979–94, 2014.
- I. L. Cameron, N. K. Smith, T. B. Pool, und R. L. Sparks. Intracellular concentration of sodium and other elements as related to mitogenesis and oncogenesis in vivo. *Cancer Res*, 40(5):1493–500, 1980.
- E. J. Candes und J. Romberg. Quantitative robust uncertainty principles and optimally sparse decompositions. *Foundations of Computational Mathematics*, 6(2):227–254, 2006.
- E. J. Candes, J. Romberg, und T. Tao. Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information. *IEEE Trans Inf Theory*, 52(2): 489–509, 2006.
- A. Cauchy. Méthode générale pour la résolution des systemes d'équations simultanées. *Comp. Rend. Sci. Paris*, 25:536–538, 1847.

- C. A. Cocosco, V. Kollokian, R. K-S. Kwan, G. B. Pike, und A. C. Evans. BrainWeb: Online interface to a 3D MRI simulated brain database. In *Proceedings of 3-rd International Conference on Functional Mapping of the Human Brain. Copenhagen*, volume 5, page 425. NeuroImage, 1997.
- C. D. Constantinides, E. Atalar, und E. R. McVeigh. Signal-to-noise measurements in magnitude images from NMR phased arrays. *Magn Reson Med*, 38(5):852–7, 1997.
- C. D. Constantinides, J. S. Gillen, F. E. Boada, M. G. Pomper, und P. A. Bottomley. Human skeletal muscle: sodium MR imaging and quantification-potential applications in exercise and disease. *Radiology*, 216(2):559–68, 2000a.
- C. D. Constantinides, R. G. Weiss, R. Lee, D. Bolar, und P. A. Bottomley. Restoration of low resolution metabolic images with a priori anatomic information: ^{23}Na MRI in myocardial infarction. *Magn Reson Imaging*, 18(4):461–71, 2000b.
- P. Deetjen, E.-J. Speckmann, und J. Hescheler. *Physiologie*. Elsevier Urban & Fischer, 2005.
- M. Doneva, P. Bornert, H. Eggers, C. Stehning, J. Senegas, und A. Mertins. Compressed Sensing Reconstruction for Magnetic Resonance Parameter Mapping. *Magn Reson Med*, 64(4):1114–1120, 2010.
- D. L. Donoho. Compressed sensing. *IEEE Trans Inf Theory*, 52(4):1289–1306, 2006.
- J. A. Fessler und B. P. Sutton. Nonuniform fast Fourier transforms using min-max interpolation. *IEEE Trans Signal Process*, 51(2):560–574, 2003.
- U. Gamper, P. Boesiger, und S. Kozerke. Compressed sensing in dynamic MRI. *Magn Reson Med*, 59(2):365–73, 2008.
- A. N. Garroway, P. K. Grannell, und P. Mansfield. Image-Formation in Nmr by a Selective Irradiative Process. *Journal of Physics C-Solid State Physics*, 7(24):L457–L462, 1974.
- C. Gnahn und A. M. Nagel. Anatomically weighted second-order total variation reconstruction of ^{23}Na MRI using prior information from ^1H MRI. *Neuroimage*, 105:452–61, 2015.
- C. Gnahn, M. Bock, P. Bachert, W. Semmler, N. G. Behl, und A. M. Nagel. Iterative 3D projection reconstruction of ^{23}Na data with an ^1H MRI constraint. *Magn Reson Med*, 71(5):1720–32, 2014.
- D. E. Goldman. Potential, Impedance, and Rectification in Membranes. *J Gen Physiol*, 27(1):37–60, 1943.
- E. M. Haacke, R. W. Brown, M. R. Thompson, und R. Venkatesan. *Magnetic Resonance Imaging: Physical Principles and Sequence Design*. J. Wiley & Sons, 1999.
- J. P. Haldar, D. Hernando, S. K. Song, und Z. P. Liang. Anatomically constrained reconstruction from noisy data. *Magn Reson Med*, 59(4):810–8, 2008.

- A. L. Hodgkin und B. Katz. The effect of sodium ions on the electrical activity of giant axon of the squid. *J Physiol*, 108(1):37–77, 1949.
- A. Hore und D. Ziou. Image quality metrics: PSNR vs. SSIM. pages 2366–2369, 2010. 20th International Conference on Pattern Recognition (ICPR). IEEE 2010.
- D. I. Hoult und P. C. Lauterbur. Sensitivity of the Zeugmatographic Experiment Involving Human Samples. *Journal of Magnetic Resonance*, 34(2):425–433, 1979.
- Q. Huynh-Thu und M. Ghanbari. Scope of validity of PSNR in image/video quality assessment. *Electronics Letters*, 44(13):800–U35, 2008.
- M. Inglese, G. Madelin, N. Oesingmann, J. S. Babb, W. Wu, B. Stoeckel, J. Herbert, und G. Johnson. Brain tissue sodium concentration in multiple sclerosis: a sodium imaging study at 3 tesla. *Brain*, 133(Pt 3):847–57, 2010.
- H. Jung, K. Sung, K. S. Nayak, E. Y. Kim, und J. C. Ye. k-t FOCUSS: a general compressed sensing framework for high resolution dynamic MRI. *Magn Reson Med*, 61(1):103–16, 2009.
- P. C. Lauterbur. Image Formation by Induced Local Interactions - Examples Employing Nuclear Magnetic-Resonance. *Nature*, 242(5394):190–191, 1973.
- F. Lehmann-Horn und K. Jurkat-Rott. Voltage-gated ion channels and hereditary disease. *Physiol Rev*, 79(4):1317–72, 1999.
- M. H. Levitt. *Spin Dynamic: basics of nuclear magnetic resonance*. John Wiley & Sons, 2008.
- J. Lommen, S. Konstandin, P. Kramer, und L. R. Schad. Enhancing the quantification of tissue sodium content by MRI: time-efficient sodium B mapping at clinical field strengths. *NMR Biomed*, DOI: 10.1002/nbm.3292, 2015.
- M. Lustig, D. Donoho, und J. M. Pauly. Sparse MRI: The application of compressed sensing for rapid MR imaging. *Magn Reson Med*, 58(6):1182–1195, 2007.
- M. Lustig, D. L. Donoho, J. M. Santos, und J. M. Pauly. Compressed sensing MRI. *IEEE Signal Process Mag*, 25(2):72–82, 2008.
- G. Madelin, G. Chang, R. Otazo, A. Jerschow, und R. R. Regatte. Compressed sensing sodium MRI of cartilage at 7T: preliminary study. *J Magn Reson*, 214(1):360–5, 2012.
- G. R. Morrell. A phase-sensitive method of flip angle mapping. *Magn Reson Med*, 60(4): 889–94, 2008.
- A. M. Nagel, F. B. Laun, M. A. Weber, C. Matthies, W. Semmler, und L. R. Schad. Sodium MRI using a density-adapted 3D radial acquisition technique. *Magn Reson Med*, 62(6):1565–73, 2009.

- A. M. Nagel, E. Amarteifio, F. Lehmann-Horn, K. Jurkat-Rott, W. Semmler, L. R. Schad, und M. A. Weber. 3 Tesla sodium inversion recovery magnetic resonance imaging allows for improved visualization of intracellular sodium content changes in muscular channelopathies. *Invest Radiol*, 46(12):759–66, 2011a.
- A. M. Nagel, M. Bock, C. Hartmann, L. Gerigk, J. O. Neumann, M. A. Weber, M. Bendszus, A. Radbruch, W. Wick, H. P. Schlemmer, W. Semmler, und A. Biller. The potential of relaxation-weighted sodium magnetic resonance imaging as demonstrated on brain tumors. *Invest Radiol*, 46(9):539–47, 2011b.
- D. C. Noll, D. G. Nishimura, und A. Macovski. Homodyne detection in magnetic resonance imaging. *IEEE Trans Med Imaging*, 10(2):154–63, 1991.
- H. Nyquist. Thermal agitation of electric charge in conductors. *Physical review*, 32(1):110, 1928.
- R. Ouwerkerk, K. B. Bleich, J. S. Gillen, M. G. Pomper, und P. A. Bottomley. Tissue sodium concentration in human brain tumors as measured with ^{23}Na MR imaging. *Radiology*, 227(2):529–37, 2003.
- D. Paling, B. S. Solanky, F. Riemer, D. J. Tozer, C. A. Wheeler-Kingshott, R. Kapoor, X. Golay, und D. H. Miller. Sodium accumulation is associated with disability and a progressive course in multiple sclerosis. *Brain*, 136(Pt 7):2305–17, 2013.
- E. M. Purcell, H. C. Torrey, und R. V. Pound. Resonance Absorption by Nuclear Magnetic Moments in a Solid. *Physical Review*, 69(1-2):37–38, 1946.
- S. Ravishankar und Y. Bresler. MR image reconstruction from highly undersampled k-space data by dictionary learning. *IEEE Trans Med Imaging*, 30(5):1028–41, 2011.
- R. Rubinstein, M. Zibulevsky, und M. Elad. Efficient implementation of the K-SVD algorithm using batch orthogonal matching pursuit. *CS Technion*, page 40, 2008.
- L. I. Rudin, S. Osher, und E. Fatemi. Nonlinear Total Variation Based Noise Removal Algorithms. *Physica D*, 60(1-4):259–268, 1992.
- C. P. Slichter. *Principles of Magnetic Resonance*. Springer, 1990.
- K. R. Thulborn, D. Davis, H. Adams, T. Gindin, und J. Zhou. Quantitative tissue sodium concentration mapping of the growth of focal cerebral tumors with sodium magnetic resonance imaging. *Magn Reson Med*, 41(2):351–9, 1999.
- J. A. Tropp und A. C. Gilbert. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit. *IEEE Trans Inf Theory*, 53(12):4655–4666, 2007.
- M. Uecker, S. Zhang, D. Voit, A. Karaus, K. D. Merboldt, und J. Frahm. Real-time MRI at a resolution of 20 ms. *NMR Biomed*, 23(8):986–94, 2010.
- J. T. Vaughan, H. P. Hetherington, J. O. Otu, J. W. Pan, und G. M. Pohost. High frequency volume coils for clinical NMR imaging and spectroscopy. *Magn Reson Med*, 32(2):206–18, 1994.

- Z. Wang und A. C. Bovik. Mean Squared Error: Love It or Leave It? A new look at signal fidelity measures. *Ieee Signal Processing Magazine*, 26(1):98–117, 2009.
- Z. Wang, A. C. Bovik, H. R. Sheikh, und E. P. Simoncelli. Image quality assessment: From error visibility to structural similarity. *IEEE Trans Image Process*, 13(4):600–612, 2004.
- M. A. Weber, S. Nielles-Vallespin, M. Essig, K. Jurkat-Rott, H. U. Kauczor, und F. Lehmann-Horn. Muscle Na⁺ channelopathies: MRI detects intracellular ²³Na accumulation during episodic weakness. *Neurology*, 67(7):1151–8, 2006.
- S. Weingärtner, F. Wetterling, S. Konstandin, M. Fatar, E. Neumaier-Probst, und L. R. Schad. Scan time reduction in ²³Na-Magnetic Resonance Imaging using the chemical shift imaging sequence: Evaluation of an iterative reconstruction method. *Z Med Phys*, 25(3):275–86, 2015.
- W. Zaaraoui, S. Konstandin, B. Audoin, A. M. Nagel, A. Rico, I. Malikova, E. Soulier, P. Viout, S. Confort-Gouny, P. J. Cozzone, J. Pelletier, L. R. Schad, und J. P. Ranjeva. Distribution of brain sodium accumulation correlates with disability in multiple sclerosis: a cross-sectional ²³Na MR imaging study. *Radiology*, 264(3):859–67, 2012.

Danksagung

- Ich möchte mich herzlich bei Professor Peter Bachert dafür bedanken, dass er mich auf meinem Weg innerhalb der Wissenschaft stets unterstützt hat. Von der ^1H -Spektroskopie zur ^{23}Na -Rekonstruktion hatten sie stets ein offenes Ohr und oft entscheidende Anregungen parat.
- Ich danke Professor Dirk Dubbers dafür, dass er sich trotz seiner mehrere Jahre zurückliegenden Emeritierung bereit erklärt hat das Zweitgutachten meiner Dissertation zu übernehmen. Danke für ihren Einsatz!
- Vielen Dank Armin für deine unermüdliche Betreuung und Unterstützung über den gesamten Zeitraum meiner Promotion. Deine Hilfe und dein Vertrauen haben die hier vorgestellten Ergebnisse erst möglich gemacht. Der Millimeter Auflösung ist nur noch eine Frage der Zeit!
- Ich danke Christine für die schnelle und unkomplizierte Hilfe zu Beginn meiner Promotion. Trotz deiner Doppelbelastung mit Vera und deiner eigenen Promotion hast du es geschafft mir das Eintauchen in die nicht immer rationale Welt des Compressed-Sensing maßgeblich zu erleichtern.
- Danke an die gesamte 7T-Truppe! Ihr habt immer wieder für eine einzigartige Atmosphäre gesorgt. Sei es bei Kaffee oder Flammkuchen, beim Kartfahren oder beim Wasserski, mit euch wurde die Promotion zum einzigartigen Erlebnis!
- Ich danke all meinen Freunden für die gemeinsam verbrachte Zeit. Ihr habt immer dafür gesorgt, dass ich auch in den anstrengenderen Phasen meiner Promotion nicht den Blick für das Wesentliche verliere.
- Ein ganz besonderer Dank gilt meinen Eltern: Euch habe ich es zu verdanken, dass ich hier diese Zeilen schreiben kann. Ohne eure uneingeschränkte Hilfe, gerade in schwierigeren Lebenslagen, wäre ich nicht auf meinem jetzigen Weg.

Erklärung

Ich versichere, dass ich diese Arbeit selbstständig verfasst habe und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Heidelberg, den 30.09.2015

.....