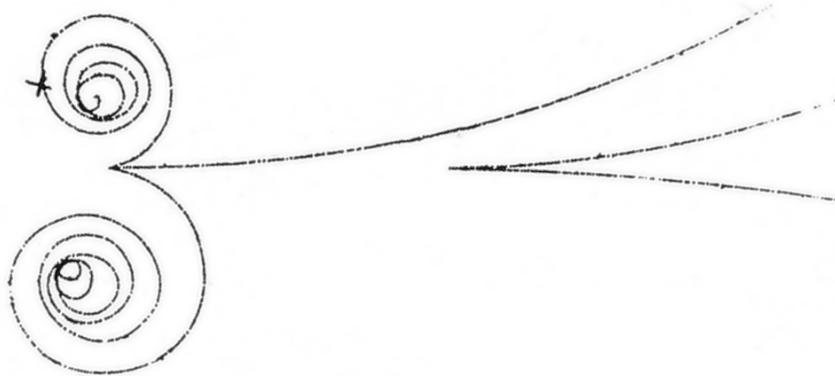


**Inaugural-Dissertation zur Erlangung der Doktorwürde
der naturwissenschaftlich-mathematischen Gesamtfakultät
der Ruprecht-Karl-Universität Heidelberg**

vorgelegt von Dipl.-Phys. Anton Wöllert, geboren in Finsterwalde.
Tag der mündlichen Prüfung: 27.7.2016

Paarerzeugung in semiklassischer und quantenfeldtheoretischer Beschreibung



Gutachter: Hon.-Prof. Dr. Christoph H. Keitel
Prof. Dr. Andreas Mielke

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Paarerzeugung von Elektron-Positron-Paaren in starken elektromagnetischen Feldern. Es werden zwei Regime der Paarerzeugung untersucht. Das erste Regime ist das sogenannte Tunnelregime der Paarerzeugung. Für dieses wird das vorhandene Tunnelbild zur Paarerzeugung um die Effekte eines Magnetfeldes und eines zusätzlichen, störungstheoretisch behandelten Photons erweitert. Beide Effekte werden in der semiklassischen Näherung behandelt. Für das zweite Regime der Paarerzeugung, welches untersucht wird, existiert bisher noch kein einfacher Zugang. Deshalb werden unter Verwendung des in/out-Formalismus für externe Felder numerische Berechnungen durchgeführt. Die numerischen Simulationen zeigen nicht-triviale Effekte, die in diesem Regime auftreten können. Speziell wird auf die Abhängigkeit der erzeugten Paare von der Polarisation des elektromagnetischen Feldes sowie auf die Bildung von Mehrpaarzuständen eingegangen.

Abstract

Pair production of electron-positron pairs in ultra-intense laser fields is considered in this work. Two regimes are investigated separately. The first regime is the so-called tunnel regime of pair production. The existing tunneling picture which is applicable in this regime will be enhanced by the effects of a magnetic field and an additional, perturbatively treated photon. Both effects are incorporated by the semi-classical approximation. In contrast, no straightforward approach exists so far for the second regime of pair production. Therefore, numerical calculations will be carried out by applying the framework of the in/out-formalism in external fields. These simulations show non-trivial effects that are expected in this regime. Specifically, the influence of the electromagnetic fields' polarization upon the produced pair spectra is investigated. Furthermore, multi-pair states will be studied.

Im Rahmen dieser Arbeit entstandene Veröffentlichungen:

- A. Wöllert, M. Klaiiber, H. Bauke, C. H. Keitel
Relativistic tunneling picture of electron-positron pair creation
Physical Review D **91**, 065022 (2015)
- A. Wöllert, H. Bauke, C. H. Keitel
Spin polarized electron-positron pair production via elliptical polarized laser fields
Physical Review D **91**, 125026 (2015)
- A. Wöllert, H. Bauke, C. H. Keitel
Multi-pair states in electron-positron pair creation
eingereicht bei Physics Letters B (2016)
e-Print: arXiv:1151.07709 [quant-ph]

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Theoretische Beschreibung der Paarerzeugung	7
2.1	Paarerzeugung als Bestandteil der Quantenelektrodynamik	7
2.2	Möglichkeiten zur theoretischen Beschreibung	8
2.3	In/Out-Formalismus	12
2.3.1	Paarerzeugung im externen elektromagnetischen Feld	17
2.3.2	Semiklassische Näherung	18
3	Ein erweitertes Tunnelbild	27
3.1	Feldkonfiguration, Notation und Vorüberlegungen	27
3.2	Kinematik im konstanten Feld	31
3.3	Grafische Interpretation des relativistischen Tunnelbildes	33
3.3.1	Fall $ E > B $	37
3.3.2	Fall $ E = B $	42
3.3.3	Fall $ E < B $	43
3.4	Feldkonfigurationen mit maximaler Tunnelwahrscheinlichkeit	45
3.5	Deutung für orts- und zeitabhängige Felder	48
4	Raumzeitabhängige Felder und Mehrpaarzustände	51
4.1	Monochromatische Felder	51
4.1.1	Charakterisierung der verwendeten Feldkonfiguration	54
4.1.2	Ein- und Ausschaltvorgang	57
4.2	Dynamik einzelner Materiefeldmoden	58
4.2.1	Ein Beispiel	59
4.2.2	Rabi-Oszillationen	61
4.2.3	Resonanzcharakteristika	62
4.2.4	Polarisationsabhängigkeit der Resonanzen	65
4.2.5	Impulsabhängigkeit der Resonanzen	69
4.3	Dynamik mehrerer Materiefeldmoden und Vielteilchenzustände	71
4.3.1	Zeitliche Entwicklung der Paarzustände	75
4.3.2	Spin und Helizität der Mehrpaarzustände	78
5	Diskussion	83

Inhaltsverzeichnis

Anhang A: Numerische Implementierung	87
A.1 Propagation der Materiefeldmoden	87
Literatur	93
Abbildungsverzeichnis	99
Danksagung	101

1. Einleitung

Was, wenn sich Licht in Materie umwandeln ließe? Diese bemerkenswerte Frage ist sehr allgemein formuliert und eine gemeingültige Antwort gibt es bisher noch nicht. Nur die prinzipielle Realisierbarkeit, aus theoretischer Sicht, wurde im Rahmen der relativistischen Quantenfeldtheorie bereits vor fast 90 Jahren (Dirac 1928a,b) mit einem „Ja“ beantwortet. Größtenteils ungewiss ist jedoch immer noch das „Wie“ und „Was“, also „Wie genau läuft der Prozess der Umwandlung ab?“ und „Was sind die unmittelbaren Konsequenzen?“

Der physikalische Effekt trägt den Namen Paarerzeugung, da ein Paar von Materieteilchen, Elektron und Positron, aus Lichtteilchen, den Photonen erzeugt wird. In den ersten Arbeiten zur Paarerzeugung im Vakuum (Sauter 1931; Euler und Kockel 1935; Heisenberg und Euler 1936), das heißt ausschließlich durch Licht und ohne Beteiligung anderer Materie, stand eine experimentelle Umsetzung außer Frage, da die hierfür notwendigen Intensitäten und Energien des Lichtfeldes praktisch nicht umsetzbar waren. Im Unterschied hierzu gibt es auch die Paarerzeugung durch Mitwirken anderer Teilchen wie zum Beispiel den gebundenen Elektronen am Atomkern oder des Atomkerns selbst. Nahe dieser zusätzlichen Teilchen existiert ein enormes elektromagnetisches Feld, welches im Zusammenspiel mit den Photonen des eigentlichen Lichtfeldes auch zur Paarerzeugung führen kann (siehe Abbildung 1.1). Diese Art der Paarerzeugung wurde bereits 1932 durch Anderson (Anderson 1932) experimentell nachgewiesen und bestätigte somit auch die Theorie von Dirac (Dirac 1928a), die neben der relativistischen Beschreibung des Elektrons auch die Existenz seines Antiteilchen, dem Positron, vorhersagt. Diese Arbeit beschäftigt sich ausschließlich mit der reinen Paarerzeugung im Vakuum, welche im folgenden auch einfach nur als Paarerzeugung bezeichnet wird. Interessanterweise wurde bereits früh darüber nachgedacht, ob die maximal mögliche Intensität des Lichts nicht gerade durch die Paarerzeugung begrenzt sei,¹ da bei Überschreitung einer kritischen Feldstärke $E \simeq 1.3 \times 10^{18} \text{ V/m}$ sich die Photonen des Lichtfeldes in Materie umwandeln und somit eine natürliche Beschränkung darstellen würden. Diese kritische Feldstärke, ab der Elektron-Positron-Paare in riesiger Menge erzeugt würden, entspricht einer maximalen Intensität von etwa 10^{29} W/cm^2 .

¹Laut A. Sommerfeld postulierte N. Bohr bereits in den 30er-Jahren, dass diese kritische Feldstärke nicht erreicht werden könne (so Fedotov u. a. (2010)).

1. Einleitung

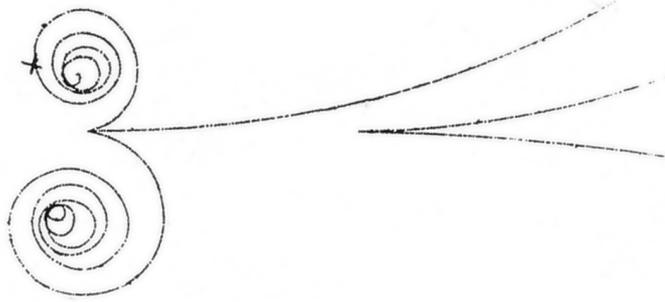


Abbildung 1.1: Ein hochenergetisches Photon (nicht sichtbar, von links kommend) wechselwirkt in einer Blasenkammer mit einem am Atomkern gebundenen Elektron und erzeugt dabei ein Elektron-Positron-Paar. Das erzeugte Elektron und das erzeugte Positron beschreiben jeweils eine spiralförmige Bahn mit entgegengesetztem Drehsinn aufgrund ihrer entgegengesetzten Ladung und der damit verbundenen Lorentzkraft durch das starke Magnetfeld in der Blasenkammer. Das ursprünglich gebundene Elektron wird nach rechts gestreut. Weiter rechts wird ein weiteres Paar mit höherer Energie durch die Wechselwirkung zwischen Photon und Atomkern erzeugt.

Mit der Entwicklung des Lasers (Maiman 1960) wurde es erstmals möglich, Lichtfelder mit höheren Intensitäten zu erzeugen. Für die Erzeugung der kritischen Feldstärke waren diese jedoch ganze 18 Größenordnungen zu klein und somit blieb die Paarerzeugung weiterhin ein theoretisches Konstrukt. Mit der immensen Forschung und Entwicklung am Laser (Hecht 2010) und den damit verbundenen Verbesserungen hat sich diese Lücke mittlerweile bis auf 6 Größenordnungen reduziert. Dieser Trend in Richtung ultrarelativistischer Physik scheint bisher beständig (Mourou, Tajima und Bulanov 2006; Di Piazza u. a. 2012) und die experimentelle Realisierung der direkten Paarerzeugung aus reinem Licht rückt somit näher. Insbesondere könnte damit auch die bereits erwähnte Tatsache bedeutsam werden, dass die maximal mögliche Intensität des Lichts vielleicht begrenzt ist und somit auch ein prinzipielles Limit beim Laser bald erreicht wird. Somit hat die rasche Entwicklung des optischen Lasers sowie neuerer Laser-Technologien, wie zum Beispiel Freie-Elektronen-Laser (McNeil und Thompson 2010), zu einem vermehrten Interesse an der Grundlagenforschung der Paarerzeugung in den letzten 20 Jahren geführt. Denn abgesehen von der reinen Paarerzeugung, tritt die Paarerzeugung auch als Nebenprodukt bei anderen Prozessen mit extrem hohen Laser-Intensitäten auf. Somit wird die Frage nach dem „Wie“, also dem genaueren Verständnis der Paarerzeugung zunehmend besser abgedeckt.

Neben den ersten Arbeiten zur Paarerzeugung in den 30er-Jahren hatte vor allem die Arbeit von Schwinger (Schwinger 1951) einen großen Einfluss, da hier zum ersten Mal die Paarerzeugung im modernen Formalismus der Quantenelektrodynamik behandelt wurde. Er ging dabei von einem rein elektrischen Feld aus, welches zeitlich und räumlich

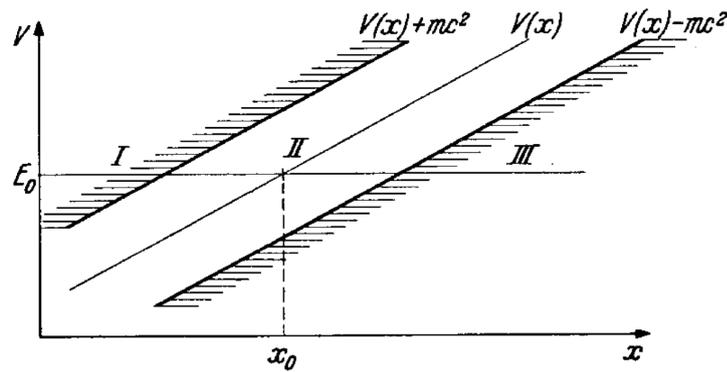


Abbildung 1.2: Das historische Tunnelbild zur Paarerzeugung aus (Heisenberg und Euler 1936). Die Paarerzeugung wurde in der *alten* Diracschen Lochtheorie als Übergang eines negativen Teilchens aus dem Diracsee (negatives Kontinuum mit $E < -mc^2$) in das positive Kontinuum mit $E > mc^2$ betrachtet. Durch das Potential $V(x)$ des äußeren elektrischen Feldes neigen sich die Kontinua zueinander und ein seitliches Tunneln vom negativen ins positive Kontinuum durch die verbotene Zone ohne Zustände wird möglich. Nachdem Tunneln existieren dann ein Loch im Diracsee, welches als Positron gedeutet wird, sowie ein Elektron und somit wurde ein Paar erzeugt.

konstant ist. In dieser vereinfachten Feldkonfiguration spricht man stellvertretend von Schwinger-Paarerzeugung. Die Approximation des statischen elektrischen Feldes ist für optische Laser anwendbar, da die typische Zeitskala der Paarerzeugung mehrere Größenordnungen kleiner ist als die Periodendauer des elektromagnetischen Feldes. Für diese statische Näherung kann die Paarerzeugung auch als Tunnelprozess verstanden werden, welcher ein intuitives Verständnis der Paarerzeugung ermöglicht. Die Berechnung für realistischere Felder mit Zeit- oder gar Ortsabhängigkeit ist analytisch nur für wenige spezielle Feldkonfigurationen möglich und muss daher numerisch durchgeführt werden. Aber selbst die numerische Behandlung führt schnell zu einem hohen Rechenaufwand, da die Quantenelektrodynamik prinzipiell unendlich viele Freiheitsgrade besitzt. Die Berücksichtigung realistischer Feldkonfigurationen ist besonders wichtig, da diese maßgeblichen Einfluss auf das Spektrum und die Anzahl an erzeugten Elektronen und Positronen hat.

Generell kann die Paarerzeugung im Vakuum abhängig vom elektromagnetischen Feld in drei verschiedene Regime unterteilt werden. Diese sind durch den sogenannten klassischen Nichtlinearitätsparameter²

$$\xi = \frac{eE}{\omega mc} = \frac{1}{2\pi} \frac{eE\lambda}{mc^2} \quad (1.1)$$

²Der Name „klassischer Nichtlinearitätsparameter“ für ξ kommt daher, dass für große Werte von ξ die klassischen, relativistischen Bewegungsgleichungen für das Elektron bzw. Positron nichtlinear werden. Der Parameter besitzt darüber hinaus aber noch andere Deutungen.

1. Einleitung

separiert. Dabei sind $-e$ und m die Ladung und Masse des Elektrons sowie ω , λ und E die Kreisfrequenz, Wellenlänge und elektrische Feldstärke des elektromagnetischen Feldes. Der Parameter ξ kann klassisch als Verhältnis zwischen der Energie $eE\lambda$, die ein Elektron größenordnungsmäßig während einer Periode im Feld aufnimmt, und der Ruheenergie mc^2 eines Elektrons, also der Energie, die für die Erzeugung eines Elektrons nötig ist, verstanden werden. So wird das Regime mit geringer Frequenz ω des elektrischen Feldes und hoher Feldstärke E , $\xi \gg 1$, als nichtperturbatives Tunnel- oder Schwinger-Regime klassifiziert. Hier wird innerhalb eines Bruchteils der Laserfeldperiode genügend Energie für ein Paar erzeugt, was letztlich auch die Motivation dafür ist, das Feld als statisch zu approximieren. Für schwache Felder mit höheren Frequenzen ω , also $\xi \ll 1$, spricht man hingegen vom perturbativen Multiphoton-Regime. Besonders diese beiden Regime wurden bisher intensiv untersucht. Das Schwinger-Regime lässt sich semiklassisch (Popov 1971, 1972), sowie auch mit dem Tunnelbild, verstehen und das Multiphoton-Regime kann mithilfe der quantenelektrodynamischen Störungstheorie (Zuber und Itzykson 1980) analysiert werden. Für das dritte, mittlere Regime, $\xi \approx 1$, existiert hingegen kein standardisierter Zugang. Hier sind numerische Untersuchungen erforderlich.

Diese Arbeit beschäftigt sich sowohl mit dem Tunnelregime $\xi \ll 1$, als auch mit dem bis jetzt weniger erforschten mittleren Regime $\xi \approx 1$. Beide werden getrennt und mit unterschiedlichen Problemstellungen behandelt. Dadurch ergeben sich zwei verschiedene Themenkomplexe: Im ersten wird für das Tunnelregime das existierende Tunnelbild (vgl. Abbildung 1.2), erweitert, indem auch die Effekte des magnetischen Feldes sowie eines zusätzlichen hochenergetischen Photons mit berücksichtigt und integriert werden. Für das zweite, durch $\xi \approx 1$ charakterisierte Regime wird die Paarerzeugung in monochromatischen Feldern untersucht. Monochromatische Felder sind orts- und zeitabhängig, besitzen aber eine feste Frequenz bzw. Wellenlänge. Weiterhin kann die Polarisation der monochromatischen Wellen beliebig eingestellt werden und somit auch der Einfluss der Polarisation auf die Paarerzeugung untersucht werden. Durch die quantenfeldtheoretische Beschreibung des Elektron-Positron-Feldes und aufwendige numerische Berechnungen ist es hierbei weiterhin möglich, Mehrpaarzustände zu analysieren. Mit Mehrpaarzuständen sind Zustände gemeint, die mehrere Paare von Elektronen und Positronen enthalten. Mit der Behandlung von Mehrpaarzuständen kann eine tiefere und detailliertere Einsicht in die komplexe Dynamik der Paarerzeugung gewonnen werden.

Der notwendige theoretische Hintergrund, der für die Untersuchung beider Problemstellungen erforderlich ist, wird im folgenden Kapitel 2 gegeben. Danach schließen sich die Ergebnisse zum erweiterten Tunnelbild in Kapitel 3 an. Die Untersuchungen zur Paarerzeugung in raumzeitabhängigen monochromatischen Feldern mit verschiedenen Polarisationen, sowie die quantenfeldtheoretische Behandlung von Mehrpaarzuständen sind in Kapitel 4 dargestellt. Die Diskussion der jeweiligen Ergebnisse findet sich in Kapitel 5. In allen folgenden Kapiteln werden die natürlichen Einheiten der Teilchenphysik verwendet, das heißt $c = 1$ und $\hbar = 1$.

Um abschließend auf die Frage nach dem „Was“ zurückzukommen: die unmittelbaren Konsequenzen der Paarerzeugung für die theoretische Beschreibung der Physik sind im Rahmen der Quantenelektrodynamik bekannt, wenn auch nicht vollständig verstanden. Was die Paarerzeugung jedoch eines Tages in unserem alltäglichen Leben für eine Rolle spielen könnte, ist wohl noch ungewiss.

2. Theoretische Beschreibung der Paarerzeugung

Zu Beginn dieses Kapitels wird eine kurze Einleitung zur Quantenelektrodynamik gegeben und deren Bedeutung für die theoretische Physik erläutert. Danach werden die wichtigsten Zugänge zur theoretischen Beschreibung der Paarerzeugung diskutiert. Die für diese Arbeit verwendete Methode ist der sogenannte in/out-Formalismus, dessen Zusammenfassung den Hauptteil dieses Kapitels darstellt. Damit soll das theoretische Fundament vermittelt werden, auf dem die folgenden Kapitel aufbauen. Die Darstellung des in/out-Formalismus wie auch die Notation, richtet sich dabei im wesentlichen nach (Fradkin, Gitman und Shvartsman 1991).

2.1. Paarerzeugung als Bestandteil der Quantenelektrodynamik

Die Paarerzeugung stellt einen wesentlichen Prozess in der Quantenelektrodynamik, kurz QED, dar. Die Quantenelektrodynamik wiederum bildet ein Teilgebiet des Standardmodells, dem bisher gängigstem Modell zur theoretischen Beschreibung der grundlegendsten Prozesse in der Natur. Historisch gründet die QED auf der klassischen Elektrodynamik, welche das Zusammenspiel zwischen elektrischen Ladungen und elektromagnetischen Feldern sowie deren Dynamik beschreibt. Diese Theorie ist bereits relativistisch, d.h. sie ist im Einklang mit den Annahmen von A. Einsteins Relativitätstheorie (Einstein 1905). Jedoch ist sie nicht widerspruchsfrei. Eine befriedigende Beschreibung ergab sich erst durch die quantenfeldtheoretische Formulierung der klassischen Elektrodynamik, welche die Quantenelektrodynamik als erste Quantenfeldtheorie (Tomonaga 1946; Schwinger 1948a,b; Dyson 1949a,b; Feynman 1949a,b, 1950) in der theoretischen Physik zur Folge hatte. Im Gegensatz zur klassischen Formulierung, werden neben dem elektromagnetischen Feld auch die elektrischen Ladungen als Feld (Materiefeld) beschrieben. Die sogenannte Quantisierung beider Felder, also dem Materiefeld und dem elektromagnetischen Feld, liefert dann deren Elementaranregungen. Die Elementaranregungen des Materiefeldes sind das Elektron und das Positron, welche die Korrespondenz zu den klassischen elektrischen Ladungen bilden. Beim elektromagnetischen Feld ist das Photon die Elementaranregung, in Korrespondenz zur klassischen elektromagnetischen Welle.

2. Theoretische Beschreibung der Paarerzeugung



Abbildung 2.1: Links: Typische Wechselwirkungsprozesse zwischen Elektron e^- , Positron e^+ und Photon γ . a) Photonabsorption durch ein Elektron. b) Photonenemission durch ein Elektron. c) Erzeugung eines Elektron-Positron-Paares durch ein Photon. Rechts: d) Weitere komplexere Prozesse in Form von Feynman-Diagrammen, gezeichnet auf dem Campermobil von R. Feynman.

Diese drei Teilchen, das Elektron, das Positron und das Photon sind somit die Elementarbausteine der QED. Ihre Wechselwirkung untereinander ergibt sich aus einer Kopplung zwischen dem Materiefeld und dem elektromagnetischen Feld. Diese Wechselwirkung kann mithilfe sogenannter Feynman-Diagramme (Feynman 1949b) visualisiert werden, welche anhand einiger Beispiele in Abbildung 2.1 dargestellt sind. Die quantenfeldtheoretische Behandlung dieser grundlegenden Wechselwirkung und deren Berechnung machten die QED zu der „genauesten Theorie“ der Physik, denn 1987 wurde eine Übereinstimmung von 12 Nachkommastellen zwischen Theorie und Experiment (Van Dyck, Schwinger und Dehmelt 1987) nachgewiesen. Diese Genauigkeit bezieht sich jedoch auf ein spezielles Experiment und sollte nicht stellvertretend für die komplette Theorie angenommen werden. Für andere Bereiche der QED, vor allem solche bei höheren Energien, sind die Übereinstimmungen häufig nicht so genau. Andererseits würden starke Abweichungen bzw. unerwartete experimentelle Beobachtungen von großer theoretischer Bedeutung sein, da mit ihnen neue Erkenntnisse in die Modellierung des Standardmodells einfließen könnten. Hier spielt die Paarerzeugung im Vakuum eine wichtige Rolle, da dieser Effekt einen komplizierten Teil der QED beschreibt und dessen Verifikation bzw. detaillierte Untersuchung einen bedeutenden Schritt für die Grundlagenforschung darstellt.

2.2. Möglichkeiten zur theoretischen Beschreibung

Die Quantenelektrodynamik bietet im Grunde alle theoretischen Mittel, um das Problem der Paarerzeugung in elektromagnetischen Feldern zu definieren. Jedoch lässt es sich mit den bisher vorhandenen Methoden nicht vollständig lösen. Daher sind verschiedene Ap-

2.2. Möglichkeiten zur theoretischen Beschreibung

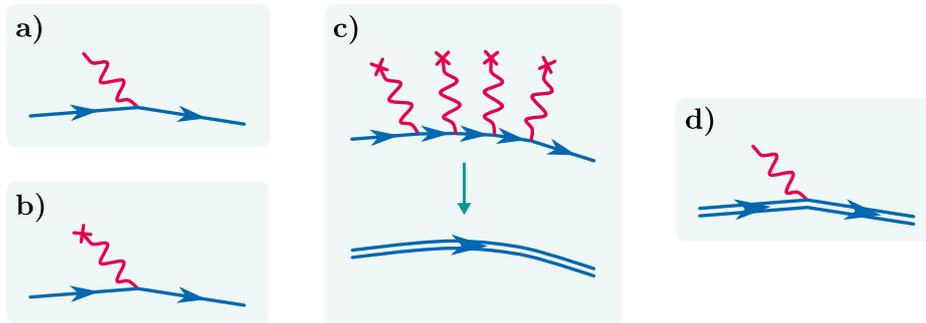


Abbildung 2.2: Die Verschiedenen Prozesse der QED im externen Feld. **a)** Wechselwirkung des quantisierten Materiefeldes (gerade Linien) mit dem quantisierten Photonenfeld (wellige Linie). Dieser Prozess kann generell nur perturbativ behandelt werden. **b)** Ebenfalls perturbative Wechselwirkung des quantisierten Materiefeldes mit dem externen, klassischen Photonenfeld (das Kreuz an der gewellten Linie soll auf das externe Feld hinweisen). **c)** Vollständige Wechselwirkung des externen Feldes mit dem quantisierten Materiefeld. Die vollständige Berücksichtigung des externen Feldes ist in wenigen Fällen analytisch möglich und für viele weitere Fälle numerisch zugänglich. Wird der Effekt des externen Feldes direkt in die Propagatoren der quantisierten Elektronen und Positronen aufgenommen, so werden diese häufig stellvertretend mit 2 Linien dargestellt. **d)** Das Zusammenspiel vom quantisierten Photonenfeld und dem externen Feld kann auch berücksichtigt werden.

proximationen nötig. Approximationen sind aber auch sinnvoll, da z.B. die klassische Beschreibung des elektromagnetischen Feldes wesentlich handlicher und näher am Experiment sein kann als dessen quantisierte Beschreibung mit Angabe aller Besetzungszahlen der vorhandenen Photonen. Damit wäre bereits eine wesentliche Vereinfachung genannt: Das starke elektromagnetische Hintergrundfeld wird klassisch behandelt. In diesem sogenannten externen Feld wird versucht die quantisierten Elektron- und Positronfelder exakt zu propagieren. Dieser Zugang wird auch als „Furry“-Bild bezeichnet (Furry 1951) und findet häufig Anwendung in der QED mit starken Feldern. In Abbildung 2.2 sind die möglichen Wechselwirkungsprozesse für dieses Bild dargestellt.

Fast ausschließlich alle Arbeiten, und so auch die vorliegende, verwenden diese Vereinfachung, welche besonders für starke Laserfelder sinnvoll und auch gerechtfertigt (Fradkin, Gitman und Shvartsman 1991) ist. Dies lässt sich dadurch begründen, dass für extreme Intensitäten eine entsprechend hohe Photonenzahl vorhanden ist und bei diesen großen Zahlen der Quantencharakter kaum noch eine Rolle spielt. Zusätzlich kann auch ein quantisiertes elektromagnetisches Feld mitberücksichtigt werden, welches aber generell nur störungstheoretisch behandelt werden kann. Dieses Feld kann zum Beispiel hochenergetische Photonen beinhalten, welche dann im Zusammenspiel mit dem intensiven Hintergrundfeld die Paarerzeugung verstärken können. Außerdem kann dieses zusätzliche Feld eventuelle Emissions- und Absorptionsprozesse berücksichtigen, die durch die erzeugten Elektronen und Positronen in Folge ihrer Propagation hervorgerufen werden

2. Theoretische Beschreibung der Paarerzeugung

können. Darüber hinaus kann auch die quantisierte Wechselwirkung zwischen den Materieteilchen untereinander, nach deren Erzeugung, perturbativ behandelt werden.

Eine weitere wichtige Rolle für die Behandlung spielt die Form des externen Feldes. Hier gibt es grob betrachtet drei prinzipiell unterschiedliche Formen:

1. Analytisch lösbare: Für diese Feldkonfigurationen ist eine analytische Lösung der Dirac-Gleichung, welche die Propagation des Materiefeldes im elektromagnetischen Hintergrundfeld beschreibt, bekannt. Eine Sammlung von bekannten Lösungen ist in (Bagrov und Gitman 1990) zu finden. Bzgl. der Paarerzeugung ist die Lösung für das homogene elektrische Feld relevant, da dieses eine gute Approximation für optische Laserfelder darstellt. Eine weitere Klasse von Feldern stellen die ebenen Wellen dar. Sie sind durch eine feste Ausbreitungsrichtung charakterisiert, besitzen Orts- und Zeitabhängigkeit und lassen eine analytische Lösung der Dirac-Gleichung zu (Wolkow 1935). Es ist bekannt, dass diese Felder keine Paare erzeugen können. In Kombination mit einem quantisierten elektromagnetischen Feld, welches perturbativ behandelt wird, lassen sich zum Teil auch realistischere Feldkonfigurationen beschreiben (Nikishov und Ritus 1964), die zur Paarerzeugung führen.
2. Nur zeitlich veränderliche Felder: Bei reiner Zeitabhängigkeit ist das elektromagnetische Feld räumlich konstant und die partiellen Differentialgleichungen für das Materiefeld lassen sich im Impulsraum als gewöhnliche Differentialgleichung darstellen. Somit gibt es keine Dynamik zwischen verschiedenen Paaren mit unterschiedlichen Impulsen. Das Problem der Paarerzeugung kann also für jeden Impuls getrennt berechnet werden und wird somit wesentlich einfacher. Für zeitlich periodische Felder wurde die Paarerzeugung unter gewissen Näherungen analytisch in (Brezin und Itzykson 1970) berechnet. Für zeitlich veränderliche Felder kann auch der semiklassische Zugang als approximativ analytische Methode verwendet (Popov 1971, 1972) werden.
3. Räumlich und zeitlich veränderliche Felder: Der nächste logische Schritt, um das elektromagnetische Feld realistischer zu machen, ist die Berücksichtigung der räumlichen Abhängigkeit. Es muss jedoch bedacht werden, dass das elektromagnetische Feld nicht beliebige Raumzeitabhängigkeiten besitzen kann, da es als externes Feld die freien Maxwell-Gleichungen erfüllen muss. Selbiges gilt im Prinzip auch für die vorher genannten rein zeitabhängigen Felder. Dort wird aber häufig vorausgesetzt, dass die typische Längenskala für die Paarerzeugung wesentlich kleiner als die typische Wellenlänge des externen Feldes ist und somit das Feld lokal als räumlich homogen approximiert werden kann.

Um die Propagation des Materiefeldes in allgemeinen, externen Feldern zu berechnen, was der Lösung der Dirac-Gleichung entspricht, müssen generell numerische Verfahren angewendet werden. Die numerische Lösung ist allerdings nicht ganz einfach. Ein Pro-

2.2. Möglichkeiten zur theoretischen Beschreibung

blem ist durch die verschiedenen Zeitskalen für das Materiefeld und das elektromagnetische Feld gegeben. So besitzen die zur Verfügung stehenden optischen Laser, welche bis jetzt die höchsten Intensitäten erreichen, eine Periodendauer, die 10^6 mal so lang ist wie die intrinsische Periode $1/m$ des Materiefeldes. Das bedeutet, dass die numerische Simulation einer Periode des Laserfeldes sehr aufwendig sein kann, da die Schrittweite mehrere Größenordnungen kleiner gewählt werden muss, damit auch das Materiefeld korrekt propagiert wird. Deshalb wählt man in der Simulation häufig wesentlich höhere Laserfrequenzen. Ein anderes Problem ist der numerische Rechenaufwand für ortsabhängige Felder. Hier muss das numerische Gitter zur Darstellung einer einzelnen Materiefeldmode meist 2- bzw. 3-dimensional gewählt werden. Für rein zeitabhängige Felder ist hingegen ein 0-dimensionales Gitter, also ein „Punkt“ ausreichend, da keine Kopplung der Impulse stattfindet.

Allen theoretischen Zugängen oder Formalismen ist gemeint, dass die Dirac-Gleichung im externen Feld für jede Elementaranregung des Materiefeldes vollständig gelöst werden muss. Das heißt konkret, dass alle Eigenfunktionen des Dirac-Hamiltonians vor Beginn der Wechselwirkung mit dem externen Feld bestimmt und dann vollständig im externen Feld propagiert werden müssen. Danach muss der Überlapp dieser propagierten Funktionen mit den Eigenfunktionen des Dirac-Hamiltonians nach Ende der Wechselwirkung mit dem externen Feld bestimmt werden. Das direkte Bestimmen dieser Matrixelemente wird als Streumatrix- oder auch in/out-Formalismus bezeichnet. Aus den Matrixelementen lassen sich dann alle Größen bestimmen.

Ist man nicht allen möglichen Größen interessiert, so können kompaktere Formalismen von Vorteil sein. Zwei davon, die häufig bei der Beschreibung der Paarerzeugung verwendet werden, sind der Formalismus der effektiven Wirkung und der quantenkinetische Formalismus. Beim ersteren Formalismus (Schwinger 1951; Dittrich und Gies 2000) ist die zentrale Größe die effektive Wirkung, zur deren Berechnung sämtliche Freiheitsgrade des Materiefeldes ausintegriert werden müssen. Die vollständige Ausintegration lässt sich praktisch nur analytisch umsetzen, weswegen meist semiklassische Approximationen (vergleiche Abschnitt 2.3.2) Anwendung finden um die analytische Berechenbarkeit zu gewährleisten. Mithilfe des Imaginärteils der effektiven Wirkung kann direkt die Vakuumstabilität bestimmt werden. Zudem können auch der Erwartungswert des durch die Paarerzeugung entstehenden Ladungsstroms und entsprechende nichtlineare Korrekturterme zu den Maxwell-Gleichungen bestimmt werden. Wahrscheinlichkeiten für spezielle Paare mit bestimmten Impulsen oder Mehrpaarzuständen können hingegen nicht angegeben werden. Bei dem quantenkinetischen Zugang ist man hingegen generell an den Verteilungsfunktionen für die entstehenden Elektronen und Positronen interessiert, also der Anzahl bzw. Dichte dieser Teilchen mit bestimmten Impuls zu einer bestimmten Zeit. Für diese Verteilungsfunktionen lassen sich speziell für rein zeitabhängige elektrische Felder kompaktere Differentialgleichungen herleiten, was auch ein Grund dafür ist, dass der quantenkinetische Formalismus meist nur für diese Felder verwendet wird. Die Verteilungsfunktionen haben gegenüber den Matrixelementen den Vorteil, dass sie

2. Theoretische Beschreibung der Paarerzeugung

z.B. das Impulsspektrum der erzeugten Teilchen direkt wiedergeben können. Erweiterungen dieses Formalismus bzgl. Rückwirkungseffekten und ortsabhängigen Felder wurden bereits erarbeitet (Kluger u. a. 1992; Bloch u. a. 1999; Kasper, Hebenstreit und Berges 2014).

Für diese Arbeit wird der in/out-Formalismus verwendet. Zum einen lassen sich aus diesem die Grundgleichungen für die semiklassische Approximation ableiten, welche für das erweiterte Tunnelbild benötigt wird. Zum anderen kann er auch direkt auf orts- und zeitabhängige Felder angewendet werden und die Wahrscheinlichkeiten für Mehrpaarzustände lassen sich unmittelbar mithilfe der Matrixelemente berechnen. Die Rückwirkungen der produzierten Teilchen auf des äußere elektrische Feld werden vernachlässigt, was für Feldstärken unterhalb der kritischen Feldstärke als gerechtfertigt gilt (Bloch u. a. 1999). Ebenfalls wird die Wechselwirkung der erzeugten Paare untereinander nicht berücksichtigt, da davon ausgegangen wird, dass diese im Vergleich zu dem externen Feld vernachlässigbar ist. Welchen Einfluss diese Wechselwirkung nach dem Ausschalten des externen Feldes hat, ist jedoch noch ungeklärt.

2.3. In/Out-Formalismus

Die mathematische Beschreibung der in dieser Arbeit behandelten Probleme basiert auf dem in/out-Formalismus. Dieser soll hier speziell für die Paarerzeugung im Vakuum skizziert werden. Die Darstellung und Notation richtet sich im wesentlichen nach (Fradkin, Gitman und Shvartsman 1991).

Die freien Moden des Materiefeldes folgen der Dynamik des freien Dirac-Hamiltonians

$$\mathcal{H}_e = \boldsymbol{\alpha}(-i\nabla) + \beta m. \quad (2.1)$$

Aus der Quantisierung des Materiefeldes folgt dann der Hamiltonian für das Elektron- und Positronfeld

$$\begin{aligned} \hat{H}_e &= \int d\mathbf{x} \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}) \mathcal{H}_e \hat{\psi}(\mathbf{x}) \\ &= \int d\mathbf{x} \hat{\bar{\psi}}(\mathbf{x}) (-i\boldsymbol{\gamma}\nabla + m) \hat{\psi}(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Ebenso lässt sich das freie elektromagnetische Feld quantisieren und führt auf einen Feld-Hamiltonian \hat{H}_γ , dessen genaue Form im Weiteren keine Rolle spielen wird. Der dazugehörige Feldoperator ist mit $\hat{A}^\mu(\mathbf{x})$ gegeben. Materiefeld und elektromagnetisches Feld koppeln aneinander, d.h. sie wechselwirken miteinander und diese Wechselwirkung

ist durch den Wechselwirkungs-Hamiltonian

$$\begin{aligned}\hat{H}_{\text{int}} &= e \int d\mathbf{x} \hat{\bar{\psi}}(\mathbf{x}) \gamma_\mu \hat{\psi}(\mathbf{x}) \hat{A}^\mu(\mathbf{x}) \\ &= \int d\mathbf{x} \hat{j}_\mu(\mathbf{x}) \hat{A}^\mu(\mathbf{x})\end{aligned}\quad (2.3)$$

gegeben. Die letzte Zeile der vorhergehenden Gleichung versinnbildlicht die Wechselwirkung zwischen Materiefeld und elektromagnetischem Feld, denn der Teilchenstrom des quantisierten Materiefeldes

$$\hat{j}_\mu(\mathbf{x}) = e \hat{\bar{\psi}}(\mathbf{x}) \gamma_\mu \hat{\psi}(\mathbf{x}) \quad (2.4)$$

wechselwirkt analog zu dem klassischen Strom aus den Maxwell'schen Gleichungen mit dem elektromagnetischen Feld. Die beiden Feldoperatoren $\hat{\psi}(\mathbf{x})$ und $\hat{A}^\mu(\mathbf{x})$ sind im Schrödinger-Bild quantisiert und hängen nur vom Raum \mathbf{x} , nicht aber von der Zeit t ab. Die Zeitabhängigkeit ist den Zuständen enthalten. \hat{H}_e , \hat{H}_γ und \hat{H}_{int} zusammen beschreiben im Prinzip die volle Quantenelektrodynamik, nur lassen sich damit nicht einmal sehr einfache Probleme vollständig lösen. Abhängig vom Problem werden daher verschiedene Vereinfachung gemacht. Wie bereits erwähnt, soll hier das Furry-Bild verwendet werden. Dazu wird das elektromagnetische Feld in ein klassisches externes Feld $A_{\text{ext}}^\mu(x)$ und ein quantisiertes Feld $\hat{A}_{\text{pert}}^\mu(\mathbf{x})$ aufgespalten. Der Einfluss des externen Feldes auf die Dynamik des Materiefeldes soll exakt berechnet werden, der Teil mit dem quantisierten elektromagnetischen Feld hingegen nur perturbativ. Die Aufspaltung lässt sich schreiben als

$$\hat{A}^\mu(x) = A_{\text{ext}}^\mu(x) + \hat{A}_{\text{pert}}^\mu(\mathbf{x}). \quad (2.5)$$

Man beachte hier, dass der Feldoperator $\hat{A}^\mu(x)$ nun eine Zeitabhängigkeit erhält, die durch die Zeitabhängigkeit des klassischen Feldes $A_{\text{ext}}^\mu(x)$ bedingt ist. Die Abspaltung eines klassischen externen Feldes ist bei sehr intensiven elektromagnetischen Feldern damit motiviert, dass diese aufgrund ihrer hohen Intensität bzw. Photonenzahl die quantisierte Beschreibung einzelner Photonen vernachlässigbar machen. Die hohe Intensität bezieht sich dabei meist auf Photonen mit einer bestimmten Energie, die sich aus der Laserfrequenz ergibt. Prozesse, bei denen die quantisierten Elektronen und Positronen Photonen emittieren bzw. absorbieren können oder bei denen Elektronen und Positronen durch ein hochenergetisches Photon im externen Hintergrundfeld erzeugt werden, müssen jedoch weiterhin quantisiert beschrieben werden. Dies ist mittels des quantisierten Teils $\hat{A}_{\text{pert}}^\mu$, der meist als Strahlungsfeld bezeichnet wird, perturbativ möglich. Analog zu der Aufspaltung des elektromagnetischen Feldes lässt sich nun der Wechselwirkungs-Hamiltonian (2.3) zerlegen in

$$\hat{H}_{\text{int,ext}}(x) = \int d\mathbf{x} \hat{j}_\mu(\mathbf{x}) A_{\text{ext}}^\mu(x) \quad \text{und} \quad (2.6)$$

$$\hat{H}_{\text{int,pert}}(\mathbf{x}) = \int d\mathbf{x} \hat{j}_\mu(\mathbf{x}) \hat{A}_{\text{pert}}^\mu(\mathbf{x}). \quad (2.7)$$

2. Theoretische Beschreibung der Paarerzeugung

Eine weitere Approximation für die Dynamik des externen Feldes besteht darin, dass es hier als unabhängig (extern) betrachtet wird. Das heißt, die Dynamik des externen Feldes ist durch die freien Maxwell-Gleichungen gegeben und wird nicht durch den Strom des Materiefeldes (2.4) beeinflusst¹. Wird der Einfluss des externen Feldes nun mit der Dynamik des freien Materiefeldes zusammengezogen, so ergibt sich der quantisierte Hamilton-Operator für das Materiefeld im externen elektromagnetischen Feld

$$\begin{aligned}\hat{H}_{e,\text{ext}} &= \hat{H}_e + \hat{H}_{\text{int,ext}} \\ &= \int d\mathbf{x} \hat{\psi}(\mathbf{x}) \left[\gamma (-i\nabla - e\mathbf{A}_{\text{ext}}) + m + e\gamma^0 A_{\text{ext}}^0 \right] \hat{\psi}(\mathbf{x}).\end{aligned}\quad (2.8)$$

Daraus lässt sich ablesen, dass die Dynamik der Moden des Materiefeldes unter Einfluss des externen elektromagnetischen Feldes durch den folgenden Hamiltonian, auch Dirac-Hamiltonian im externen Feld genannt, gegeben ist

$$\mathcal{H}_{e,\text{ext}} = \boldsymbol{\alpha} (-i\nabla - e\mathbf{A}_{\text{ext}}) + \beta m + eA_{\text{ext}}^0. \quad (2.9)$$

Für die Dynamik der Materiefeldmoden soll dem externen Feld exakt Rechnung getragen. Die Wechselwirkung mit dem restlichen quantisierten elektromagnetischen Feld kann störungstheoretisch berücksichtigt werden. Hierfür bietet sich ein Wechsel vom Schrödinger-Bild in das Wechselwirkungsbild an, wobei der *freie* Teil des Hamilton-Operators durch

$$\hat{H}_0 = \hat{H}_\gamma + \hat{H}_{e,\text{ext}} \quad (2.10)$$

gegeben ist und der *wechselwirkende* Teil durch (2.7). Dieses Wechselwirkungsbild, welches im freien Hamiltonian noch das externe elektromagnetische Feld exakt berücksichtigt, wird üblicherweise als Furry-Bild (Furry 1951) bezeichnet. Der Wechsel vom Schrödinger-Bild ins Wechselwirkungsbild ist durch den unitären Operator

$$\hat{U}_0(t, t') = \mathcal{T} \exp \left[-i \int_{t'}^t \hat{H}_0(\tau) d\tau \right] \quad (2.11)$$

gegeben. Mit \mathcal{T} ist der Zeitordnungsoperator gemeint. Im Wechselwirkungsbild wird der Feldoperator $\hat{\psi}$ zeitabhängig und transformiert sich nach

$$\hat{\psi}_I(x) = \hat{U}_0^+(t, 0) \hat{\psi}(x) \hat{U}_0(t, 0). \quad (2.12)$$

Man kann nun zeigen, dass der so definierte Feldoperator im Wechselwirkungsbild die Dirac-Gleichung erfüllt

$$(i\partial_t - \mathcal{H}_{e,\text{ext}}) \hat{\psi}_I(x) = 0. \quad (2.13)$$

¹Diese Approximation muss nicht gemacht werden, vereinfacht jedoch die numerische Berechnung wesentlich, da dann eine selbstkonsistente Berechnung der Dynamik von Materiefeld und elektromagnetischen Feld entfällt.

Somit ist es möglich, den Feldoperator $\hat{\psi}_I(x)$ nach den Eigenlösungen (Moden) des Hamiltonians $\mathcal{H}_{e,\text{ext}}$ (2.9) zu entwickeln. Zur Zeit t_{in} , bevor das externe Feld eingeschaltet wird, sowie zur Zeit t_{out} , nachdem es wieder ausgeschaltet wurde, entsprechen die Moden bzw. Eigenlösungen denen des freien Materiefeldes und können als Elektron- bzw. Positronzustände interpretiert werden. Damit ergeben sich zwei Mengen von Basiszuständen $\pm\varphi_n(x)$ und ${}^\pm\varphi_n(x)$, die wie folgt definiert sind

$$\mathcal{H}_{e,\text{ext}}(t_{\text{in}}) \pm\varphi_n(\mathbf{x}) = \pm\varepsilon_n \pm\varphi_n(\mathbf{x}), \quad (2.14a)$$

$$\mathcal{H}_{e,\text{ext}}(t_{\text{out}}) {}^\pm\varphi_n(\mathbf{x}) = {}^\pm\varepsilon_n {}^\pm\varphi_n(\mathbf{x}), \quad (2.14b)$$

mit

$$\begin{aligned} -\varepsilon_n < 0 < +\varepsilon_n, \\ -{}^-\varepsilon_n < 0 < +{}^+\varepsilon_n. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Die Eigenlösungen $\pm\varphi(\mathbf{x}t_{\text{in}})$ entsprechen also den freien Moden zur Zeit t_{in} . Dabei bilden speziell $-\varphi_n$ die Lösungen mit negativer Energie und korrespondieren mit den Positronzuständen. Die $+\varphi_n$ hingegen korrespondieren mit den Elektronzuständen zur Zeit t_{in} . Analog verhält es sich mit der Menge ${}^\pm\varphi$ zur Zeit t_{out} . Die Entwicklung des Feldoperators (2.12) hat dann folgende Form zur Zeit t_{in} bzw. t_{out}

$$\hat{\psi}_I(\mathbf{x}t_{\text{in}}) = \sum_n \hat{a}_n(\text{in}) {}^+\varphi_n(\mathbf{x}) + \hat{b}_n^+(\text{in}) {}^-\varphi_n(\mathbf{x}) \quad (2.16a)$$

$$\hat{\psi}_I(\mathbf{x}t_{\text{out}}) = \sum_n \hat{a}_n(\text{out}) {}^+\varphi_n(\mathbf{x}) + \hat{b}_n^+(\text{out}) {}^-\varphi_n(\mathbf{x}). \quad (2.16b)$$

Die Koeffizienten dieser Zerlegung entsprechen den Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren \hat{a}^+/\hat{a} und \hat{b}^+/\hat{b} für Elektron- und Positronzustände zu den Zeiten t_{in} und t_{out} . Die zu den Zuständen gehörenden Quantenzahlen sind über den Index n definiert. In dieser Arbeit sind die Quantenzahlen ausschließlich durch Impuls und Spin bestimmt. Mithilfe der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren lässt sich der Vakuumzustand des Materiefeldes zu Beginn und Ende der Wechselwirkung definieren:

$$\hat{a}_n(\text{in}) |\text{vac, in}\rangle = 0, \quad \hat{b}_n(\text{in}) |\text{vac, in}\rangle = 0, \quad (2.17a)$$

$$\hat{a}_n(\text{out}) |\text{vac, out}\rangle = 0, \quad \hat{b}_n(\text{out}) |\text{vac, out}\rangle = 0. \quad (2.17b)$$

Es mag etwas ungewohnt erscheinen, dass es zwei verschiedene Vakuumzustände gibt, da normalerweise oft nur ein ausgezeichneter Vakuumzustand verwendet wird. Beide Zustände $|\text{vac, in}\rangle$ und $|\text{vac, out}\rangle$ sind jedoch im Wechselwirkungsbild bzgl. $\hat{H}_{\text{int,ext}}$ definiert und beinhalten schon die komplette Dynamik des externen Feldes. Da sie sich aber auf unterschiedliche Zeiten t_{in} und t_{out} im Schrödinger-Bild beziehen, sind sie nicht identisch. Ebenso wie für das quantisierte Materiefeld, lässt sich auch für das quantisierte elektromagnetische Feld der Feldoperator $\hat{A}_{\text{pert,I}}^\mu$ im Wechselwirkungs-Bild nach seinen freien Eigenlösungen entwickeln

$$\hat{A}_{\text{pert,I}}^\mu(x) = \sum_{\lambda=0}^3 \int \left[\hat{c}_{\mathbf{k}\lambda} f_{\mathbf{k}\lambda}^\mu(x) + \hat{c}_{\mathbf{k}\lambda}^+ f_{\mathbf{k}\lambda}^{\mu*}(x) \right] d\mathbf{k}. \quad (2.18)$$

2. Theoretische Beschreibung der Paarerzeugung

Die allgemeine Form der Eigenlösungen $f_{\mathbf{k}\lambda}^\mu$ ist für diese Arbeit nicht von Belang. Wichtig ist jedoch, dass die $\hat{c}_{\mathbf{k}\lambda}/\hat{c}_{\mathbf{k}\lambda}^+$ den Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren für die quantisierten Photonen entsprechen. Dabei gibt \mathbf{k} den Photonenimpuls an. Mit dem Index λ kann die Polarisierung definiert werden. Da diese im Folgenden aber nicht für das quantisierte Photonenfeld berücksichtigt wird, soll der Index λ weggelassen werden.

Um nun die Übergangswahrscheinlichkeiten bzw. Matrixelemente zwischen Anfangs- und Endzuständen unter Berücksichtigung des quantisierten elektromagnetischen Feldes zu berechnen, müssen die Anfangs- bzw. *in*-Zustände mithilfe des Zeitentwicklungsoperators

$$\hat{U}(t_{\text{out}}, t_{\text{in}}) = \mathcal{T} \exp \left[-i \int_{t_{\text{in}}}^{t_{\text{out}}} \hat{H}_{\text{int,pert,I}} dt \right] \quad (2.19)$$

bis zu den End- bzw. *out*-Zuständen propagiert werden. Dabei ist zu beachten, dass der Wechselwirkungs-Hamiltonian des quantisierten Feldes im Wechselwirkungsbild verwendet wird, also

$$\hat{H}_{\text{int,pert,I}}(t) = \hat{U}_0^+(t, 0) \hat{H}_{\text{int,pert}} \hat{U}_0(t, 0) . \quad (2.20)$$

Die Bestimmung der Matrixelemente kann nun folgendermaßen durchgeführt werden: Es sei zum Beispiel der Anfangszustand x

$$|x, \text{in}\rangle = \hat{a}_l^+(\text{in}) \hat{c}_{\mathbf{k}}^+ |\text{vac}, \text{in}\rangle$$

gegeben, welcher aus einem Elektron mit Quantenzahl l und einem Photon aus dem quantisiertem elektromagnetischem Feld mit Impuls \mathbf{k} besteht. Weiterhin sei der Endzustand y

$$|y, \text{out}\rangle = \hat{a}_m^+(\text{out}) \hat{a}_n^+(\text{out}) \hat{b}_o^+(\text{out}) |\text{vac}, \text{out}\rangle$$

mit zwei Elektronen (Quantenzahlen m und n) sowie einem Positron (Quantenzahl o) vorgegeben. Das Matrixelement zwischen x und y hat dann folgende Gestalt

$$\begin{aligned} M_{yx} &= \langle y, \text{out} | \hat{U}(t_{\text{out}}, t_{\text{in}}) | x, \text{in} \rangle \\ &= \langle \text{vac}, \text{out} | \hat{b}_o^+(\text{out}) \hat{a}_m^+(\text{out}) \hat{a}_n^+(\text{out}) \hat{U}(t_{\text{out}}, t_{\text{in}}) \hat{a}_l^+(\text{in}) \hat{c}_{\mathbf{k}}^+ | \text{vac}, \text{in} \rangle . \end{aligned}$$

Ein Beitrag zu diesem Prozess ist z.B. die Paarerzeugung des Elektron-Positron-Paares mit den Quantenzahlen n und o durch das quantisierte Photon mit Impuls \mathbf{k} im externen elektromagnetischen Feld und die Streuung des Elektrons mit Quantenzahl l in das Elektron mit Quantenzahl m durch das externe Feld. Die exakte Berechnung mit dem vollständigen Propagator (2.19) ist im Allgemeinen nicht möglich und deshalb wird dieser störungstheoretisch entwickelt.

2.3.1. Paarerzeugung im externen elektromagnetischen Feld

Wird das quantisierte elektromagnetische Feld $\hat{A}_{\text{pert}}^\mu$ vernachlässigt und sozusagen nur in nullter Ordnung berücksichtigt, so vereinfacht sich der Zeitentwicklungsoperator (2.19) zum Einheitsoperator

$$\hat{U}(t_{\text{out}}, t_{\text{in}}) \rightarrow \hat{1} \quad (\text{nullte Ordnung in } \hat{H}_{\text{int,pert,1}}). \quad (2.21)$$

Diese Vereinfachung wird in diesem Abschnitt angenommen und in Kapitel 4 verwendet. Für die Berechnung sämtlicher Vorgänge im externen Feld sind dann nur noch folgende Größen von Bedeutung

$$G(\zeta|\chi)_{mn} = \int d\mathbf{x}d\mathbf{y} \zeta \varphi_m^+(\mathbf{x}) G(\mathbf{x}t_{\text{out}}, \mathbf{y}t_{\text{in}}) \chi \varphi_n(\mathbf{y}). \quad (2.22)$$

Mit $G(\mathbf{x}t_{\text{out}}, \mathbf{y}t_{\text{in}})$ in (2.22) ist der zu dem Hamiltonian (2.9) korrespondierende vollständige Propagator gemeint. Die Propagatorelemente $G(\zeta|\chi)_{mn}$ geben somit die Wahrscheinlichkeitsamplitude dafür an, dass ein Elektron- oder Positronzustand ($\chi = +/-$) mit Quantenzahl n zur Zeit t_{in} durch die Propagation von t_{in} nach t_{out} in einen Elektron- oder Positronzustand ($\zeta = +/-$) mit Quantenzahl m zur Zeit t_{out} übergeht.

Die zentralen Messgrößen bzw. Matrixelemente für diese Arbeit stellen die Vakuumstabilität

$$c_v = \langle \text{vac, out} | \text{vac, in} \rangle, \quad (2.24')$$

sowie die Erzeugung eines einzelnen Elektron-Positron-Paares mit den Quantenzahlen m und n

$$\begin{aligned} \langle n, m, \text{vac} | \text{vac, in} \rangle &= \langle \text{vac, out} | \hat{a}_m(\text{out}) \hat{b}_n(\text{out}) | \text{vac, in} \rangle \\ &\equiv \omega(\overset{+}{m}\bar{n}|0)c_v \end{aligned} \quad (2.23)$$

dar. Nach (Fradkin, Gitman und Shvartsman 1991) lassen sich beide Größen durch die Propagatorelemente (2.22) wie folgt berechnen

$$c_v = \det G(-|-) \quad (2.24)$$

und

$$\omega(\overset{+}{m}\bar{n}|0) = - \left[G(+|-) G^{-1}(-|-) \right]_{mn}. \quad (2.25)$$

Mit c_v und $\omega(\overset{+}{m}\bar{n}|0)$ kann nun wiederum der komplette Quantenzustand für das Materiefeld angegeben werden, der sich aus dem anfänglichem Vakuum durch die Wechselwirkung mit dem externen elektromagnetischen Feld ergibt. Dieser sei mit $|\text{out}\rangle$ bezeichnet ist gegeben durch (Frolov und Gitman 1978)

$$|\text{out}\rangle = c_v \sum_{N\{m\}\{n\}} \frac{1}{N!} \left(\prod_{i=1}^N \omega(\overset{+}{m}_i \bar{n}_i | 0) \right) |N_{\{m\}\{n\}}\rangle. \quad (2.26)$$

2. Theoretische Beschreibung der Paarerzeugung

Die Zustände $|N_{\{m\}\{n\}}\rangle$ bilden die Fockzustände des quantisierten Materiefeldes zur Zeit t_{out} . Sie enthalten N Paare, deren Quantenzahlen für die Elektronen durch die Indexmenge $\{m\}$ und für die Positronen durch die Indexmenge $\{n\}$ spezifiziert werden

$$|N_{\{m\}\{n\}}\rangle \equiv \hat{b}_{n_1}^+(\text{out}) \dots \hat{b}_{n_N}^+(\text{out}) \hat{a}_{m_N}^+(\text{out}) \dots \hat{a}_{m_1}^+(\text{out}) |\text{vac}, \text{out}\rangle . \quad (2.27)$$

Die Größe der Indexmengen $\{m\}$ und $\{n\}$ ist dabei jeweils durch N vorgegeben. Im Gegensatz zu den Elementen (2.23), die nur die Wahrscheinlichkeitsamplitude dafür angeben, dass genau ein Paar erzeugt wird, beinhaltet der Zustand $|\text{out}\rangle$ alle Informationen über sämtliche Paarkombinationen. Durch die Projektion auf einen bestimmten Vielpaarzustand $|N_{\{m\}\{n\}}\rangle$ kann dessen Wahrscheinlichkeitsamplitude

$$c_{\{m\}\{n\}} = \langle N_{\{m\}\{n\}} | \text{out} \rangle \quad (2.28)$$

bestimmt werden. Die Wahrscheinlichkeit, dass nach der Wechselwirkung N Paare entstanden sind, lässt sich folglich mit

$$c_N = \langle \text{out} | \left(\frac{1}{N!} \sum_{\{m\}\{n\}} |N_{\{m\}\{n\}}\rangle \langle N_{\{m\}\{n\}}| \right) | \text{out} \rangle \quad (2.29)$$

berechnen. An dieser Stelle sei erwähnt, dass in den Zuständen (2.27) kein Elektron oder Positron mit der gleichen Quantenzahl mehrmals vorkommen kann, da sonst die Erzeugungsoperatoren \hat{b}^+ bzw. \hat{a}^+ nach mehrmaliger Anwendung Null ergeben. Das Pauli-Verbot ist somit stets erfüllt.

2.3.2. Semiklassische Näherung

In der semiklassischen Näherung sollen die Propagatorelemente $G(\zeta|\chi)$ nicht exakt bestimmt werden, sondern nur näherungsweise. Zudem lassen sich den bei dieser Approximation auftretenden klassischen Pfaden oder Trajektorien eine einfache Bedeutung zuschreiben. Dadurch wird ein klassisch interpretierbares Bild des eigentlich quantenmechanischen Prozesses ermöglicht. Ein bekanntes Beispiel für ein solches Bild ist die Tunnelionisation des Elektrons. Ziel dieses Abschnittes ist es, eine Näherung für die Paarerzeugungswahrscheinlichkeit (2.23) herzuleiten, welche nur von einer klassischen Trajektorie des erzeugten Elektron-Positron-Paares abhängt. Weiterhin soll dieser Ausdruck bzw. das Tunnelbild symmetrisch für Elektron und Positron sein. Bisher wurde der Tunnelprozess der Paarerzeugung (vgl. Bild 1.2) so dargestellt, dass ein Elektron mit negativer Energie in einen klassisch verbotenen Bereich propagiert und diesen dann als Elektron mit positiver Energie wieder verlässt. Dieses Bild ist formal korrekt, entspricht anschaulich aber nicht der Realität, da am Anfang gar kein Teilchen vorhanden ist und nach dem Tunnelprozess Elektron sowie Positron vorhanden sind. Eine schematische Darstellung der Symmetrisierung ist in Abbildung 2.3 gegeben. Dabei werden beide Teilchen gleichzeitig im Tunnelbereich erzeugt.

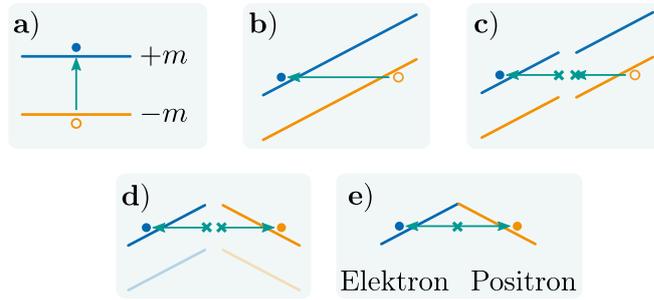


Abbildung 2.3: Symmetrisierung des aus der Lochtheorie stammenden Tunnelbildes für die Erzeugung eines Elektron-Positron-Paares. **a)** In der Lochtheorie wird die Paarerzeugung als Anheben eines Antiteilchens aus dem Dirac-See ($-m$) zu einem Elektron im positiven Kontinuum ($+m$) verstanden. Das entstehende Loch kann als Positron interpretiert werden. **b)** Durch ein äußeres elektrisches Feld neigen sich die Energieniveaus und die Paarerzeugung durch horizontales Tunneln wird ermöglicht. **c)** Das Bild wird in der Mitte getrennt. Dort soll das Paar direkt im Tunnelbereich entstehen. **d)** Durch die Uminterpretation des Loches als Positron müssen auch die Energieniveaus umgekehrt werden. **e)** Das Bild wird wieder zusammen gesetzt und ist nun symmetrisch für beide Teilchen.

Mit der semiklassischen Näherung ist in dieser Arbeit die Approximation des Pfadintegrals (dem Integral über aller Pfade, die zum Propagator beitragen) durch einen einzigen klassischen Pfad gemeint. Symbolisch ist der Propagator $G(x', x)$ vom Punkt x zum Punkt x' im Pfadintegralformalismus mit

$$G(x', x) \approx \int_x^{x'} \mathcal{D}\phi \exp(iS[\phi]) \quad (2.30)$$

gegeben. Dabei wird über die klassische Wirkung aller möglichen Pfade integriert, die x und x' verbinden. Die semiklassische Approximation kann verwendet werden, wenn der Integrand in (2.30) in Abhängigkeit vom Pfad stark oszilliert. Dann lässt sich das Integral auf die Pfade beschränken, bei denen der Exponent bzgl. des Pfades stationär wird, da die restlichen Pfade sich im Mittel wegheben. Die Pfade, bei denen die klassische Wirkung stationär wird, erfüllen gerade die klassischen Bewegungsgleichungen. Daher auch die Bezeichnung „semiklassisch“. Häufig liegt der gesuchte klassische Pfad in einem klassisch verbotenen Bereich. Dieser zeichnet sich dadurch aus, dass meist ein Teil des Pfades entlang imaginärer Zeit führt. Dadurch wird dann auch die Wirkung imaginär und der Integrand in (2.30) exponentiell unterdrückt, was typisch für Tunnelprozesse ist. Es lässt sich dann schreiben

$$G(x', x) \approx \exp(iS(x', x)). \quad (2.31)$$

Im Unterschied zu (2.30) ist die Wirkung S in (2.31) kein Funktional mehr, sondern eine Funktion, die von x' und x abhängt und sich aus der Lösung der klassischen Bewegungsgleichungen ergibt. Aufgrund der exponentiellen Unterdrückung der Paarerzeugung, die hier angenommen wird und auch notwendig für die Gültigkeit der folgenden Herleitung

2. Theoretische Beschreibung der Paarerzeugung

ist, lassen sich die Vakuumstabilität (2.24) und die Propagatorelemente (2.22) als

$$c_v = 1 - \mathcal{O}(e^-), \quad (2.32a)$$

$$G(+|+)_{mn} = e^{i\theta_n^+} \delta_{mn} + \mathcal{O}(e^-), \quad (2.32b)$$

$$G(-|-)_{mn} = e^{i\theta_n^-} \delta_{mn} + \mathcal{O}(e^-), \quad (2.32c)$$

$$G(+|-)_{mn} = \mathcal{O}(e^-), \quad (2.32d)$$

$$G(-|+)_{mn} = \mathcal{O}(e^-), \quad (2.32e)$$

schreiben. Mit $\mathcal{O}(e^-)$ ist symbolisch die exponentiell kleine Korrektur gemeint. Das bedeutet physikalisch, dass die freien Elektron- bzw. Positronzustände $\pm\varphi_n$ (2.14a) fast vollständig in die korrespondierenden Elektron- bzw. Positronzustände $\pm\varphi_n$ (2.14b) übergehen. Nur eben ein exponentiell kleiner Bruchteil geht in Zustände mit anderen Quantenzahlen über, egal ob Elektron- oder Positronzustand. Die Invertierung der Matrizen $G(+|+)$ und $G(-|-)$ liefert

$$G^{-1}(+|+)_{mn} = e^{-i\theta_n^+} \delta_{mn} + \mathcal{O}(e^-), \quad (2.33a)$$

$$G^{-1}(-|-)_{mn} = e^{-i\theta_n^-} \delta_{mn} + \mathcal{O}(e^-). \quad (2.33b)$$

Für das Matrixelement der Erzeugung eines Elektron-Positron-Paares (2.23) folgt daher

$$\begin{aligned} \langle n, m, \text{out} | \text{vac}, \text{in} \rangle &= \omega(\bar{m}\bar{n}|0) c_v \\ &= - \left[G(+|-) G^{-1}(-|-) \right]_{mn} (1 - \mathcal{O}(e^-)) \\ &= -G(+|-)_{mn} G^{-1}(-|-)_{nn} + \mathcal{O}^2(e^-). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Das Matrixelement ist also in erster Ordnung durch das Propagatorelement $G(+|-)$ gegeben, da $G^{-1}(-|-)$ nach (2.32c) diagonal ist. Mit (2.22) folgt

$$G(+|-)_{mn} = \int d\mathbf{x}' d\mathbf{x}^+ \varphi_m^+(\mathbf{x}') G(\mathbf{x}'t_{\text{out}}, \mathbf{x}t_{\text{in}}) - \varphi_n(\mathbf{x}). \quad (2.35)$$

In dieser Gleichung treten jetzt noch die ortsabhängigen Eigenlösungen $^+\varphi_m^+$ und $-\varphi_n$ auf, da auch der Propagator $G(\mathbf{x}'t', \mathbf{x}t)$ als Ortspropagator geschrieben ist. Damit ist gemeint, dass er die Amplitude dafür angibt, dass ein Teilchen von einem Raumpunkt x zu einem anderen x' propagiert. Da das gesuchte Matrixelement aber konkret die Quantenzahlen m und n vorgibt, welche für den klassischen Pfad die Endimpulse sowie Spin von Elektron und Positron vorgeben, ist es praktischer mit dem Impulspropagator zu arbeiten, da dann die Integrale über den Raum in (2.35) verschwinden. Der Spin der Teilchen wird hier in der semiklassischen Näherung vernachlässigt und somit können die Quantenzahlen $n = \mathbf{p}$ und $m = \mathbf{q}$ mit dem kinetischen Endimpuls von Elektron und Positron gleichgesetzt werden. Es kann gezeigt werden (Popov, Kuznetsov und Perelomov 1968; Marinov und Popov 1972), dass das Propagatorelement (2.35) in der semiklassischen

Näherung durch den Impulspropagator gegeben ist

$$\begin{aligned} G^{+|-}_{mn} &\approx G(\mathbf{p}t_{\text{out}}, \mathbf{q}t_{\text{in}}) \\ &\approx \exp [iS(\mathbf{x}'t_{\text{out}}, \mathbf{x}t_{\text{in}}) - i\mathbf{P}\mathbf{x}' + i\mathbf{Q}\mathbf{x}] . \end{aligned} \quad (2.36)$$

Dieser gibt die Wahrscheinlichkeitsamplitude dafür an, dass ein Teilchen mit Impuls \mathbf{q} zur Zeit t_{in} zu einer anderen Zeit t_{out} den Impuls \mathbf{p} besitzt. In (2.36) sind die Orte \mathbf{x}' und \mathbf{x} implizit durch die kanonischen Impulse \mathbf{P} und \mathbf{Q} vorgegeben

$$\mathbf{P} = \left. \frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}'} \right|_{\mathbf{x}'} , \quad (2.37a)$$

$$\mathbf{Q} = \left. \frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}} . \quad (2.37b)$$

Die Unterscheidung zwischen dem kanonischen und kinetischen Impuls ist wichtig, da beide im externen elektromagnetischen Feld nicht identisch sind. Dies muss bei der Anwendung von (2.36) berücksichtigt werden. Eine weitere Problematik, die bisher noch nicht erwähnt wurde, stellt die Matrixstruktur des exakten Propagators $G(\mathbf{x}'t', \mathbf{x}t)$ für den Dirac-Hamiltonian (2.9) dar, da dessen Eigenlösungen 4-dimensionale Bispinoren sind. In der Näherung (2.32) bzw. (2.36) geht diese Matrixstruktur scheinbar verloren, da der Exponent nur die skalare Wirkung enthält und somit selbst keine Matrixstruktur mehr besitzt. Eine genauere Analyse (Pauli 1932) zeigt jedoch, dass diese Matrixstruktur im Vorfaktor enthalten ist. Weiterhin muss dieser Vorfaktor in nullter Ordnung in \hbar nicht diagonal sein, ein Überlapp zwischen Eigenlösungen mit negativer und positiver Energie ist also möglich. Die für die Wahrscheinlichkeit wesentliche exponentielle Unterdrückung geht aber vom Exponenten und nicht vom Vorfaktor aus, weswegen dieser hier vernachlässigt wird. Auf dem klassischen, rein reellen Pfad, unter Verwendung der relativistischen Mechanik, ist es hingegen nicht möglich, dass sich das Vorzeichen der Energie für das klassische Teilchen ändert. Dies ist nur möglich wenn der Pfad imaginär wird, sodass der analytische Ausdruck für die kinetische Energie

$$p_0 = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2} \quad (2.38)$$

am Verzweigungspunkt (*branch point*) der Wurzel einen Vorzeichenwechsel ermöglicht. Klassisch gesehen würde also folgendes passieren: Ein Elektron startet mit positiver Energie und bewegt sich entlang eines reellen Pfades. Sobald der Pfad imaginär wird, taucht das Elektron in einen verbotenen Bereich ein und der Tunnelprozess beginnt. Entlang des imaginären Pfades kann der kinetische Impuls \mathbf{p} ebenfalls imaginär werden und der Ausdruck \mathbf{p}^2 negativ, sodass der Ausdruck unter der Wurzel in (2.38) auf 0 zuläuft. Nach Umlaufen des Verzweigungspunktes der Wurzel bei 0, kann diese ihr Vorzeichen wechseln. Wird der Pfad dann wieder reell, tritt das Elektron aus dem Tunnelbereich mit negativer Energie $p_0 = -\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$ heraus und kann dann nach quantenfeldtheoretischer Interpretation als ein Positron betrachtet werden. Der Punkt entlang des imaginären Pfades, an dem die Energie Null wird, soll mit x_s bezeichnet werden. Die Wirkung im

2. Theoretische Beschreibung der Paarerzeugung

Impulspropagator lässt sich dann bzgl. dieses Punktes aufteilen, sodass sich die Propagation als zwei Propagationen von einem Elektron mit positiver Energie und einem mit negativer Energie schreiben lässt, welche bei x_s starten:

$$G(\mathbf{p}t_{\text{out}}, \mathbf{q}t_{\text{in}}) \approx \exp[iS(\mathbf{x}'t_{\text{out}}, x_s) - i\mathbf{P}\mathbf{x}'] \cdot \exp[iS(x_s, \mathbf{x}t_{\text{in}}) + i\mathbf{Q}\mathbf{x}]. \quad (2.39)$$

Der hintere Teil entspricht nun formal einem Elektron, welches mit negativer Energie t_{in} nach x_s propagiert. Wird dieser letztere Teil mit dem inversen Propagator $G^{-1}(-|_-)$ multipliziert, so kann symbolisch geschrieben werden

$$\exp[iS(x_s, \mathbf{x}t_{\text{in}}) + i\mathbf{Q}\mathbf{x}] G^{-1}(-|_-)_{nn} = \exp[iS(x_s, \mathbf{x}t_{\text{out}}) + i\mathbf{Q}\mathbf{x}]. \quad (2.40)$$

Es ergibt sich also eine Propagation für das Elektron mit negativer Energie und Impuls \mathbf{Q} rückwärts in der Zeit von t_{out} nach x_s . Nach der quantenfeldtheoretischen Interpretation entspricht das gerade einem Positron mit positiver Energie, entgegengesetztem Impuls \mathbf{Q} und entgegengesetzter Ladung, welches vorwärts in der Zeit von x_s nach t_{out} propagiert. Für (2.40) kann also geschrieben werden²

$$\exp[iS(x_s, \mathbf{x}t_{\text{out}}) + i\mathbf{Q}\mathbf{x}] \rightarrow \exp[iS(\mathbf{x}t_{\text{out}}, x_s) - i\mathbf{Q}\mathbf{x}]. \quad (2.41)$$

Auf der rechten Seite von (2.41) ist nun die klassische Wirkung des Positrons gemeint, welche bis auf den Vorzeichenwechsel der Ladung identisch mit der klassischen Wirkung für das Elektron auf der linken Seite ist. Abhängig davon, ob es sich um ein Elektron oder Positron handelt, muss die Ladung entsprechend in der Wirkung richtig gewählt werden. Mit (2.39) bis (2.41) und (2.36) lässt sich der Betrag von (2.34) dann in erster Näherung mit

$$|\langle n, m, \text{out} | \text{vac}, \text{in} \rangle| \approx \exp[-\text{Im}(W_p + W_q)] \quad (2.42)$$

angeben. Hierbei sind

$$W_p = S(\mathbf{x}'t_{\text{out}}, x_s) - \mathbf{P}\mathbf{x}', \quad (2.43a)$$

$$W_q = S(\mathbf{x}t_{\text{out}}, x_s) - \mathbf{Q}\mathbf{x} \quad (2.43b)$$

die sogenannten modifizierten³ Wirkungen (Popov, Kuznetsov und Perelomov 1968; Popov und Marinov 1973).

Die Paarerzeugungswahrscheinlichkeit eines Elektron-Positron-Paares mit Impulsen \mathbf{p} und \mathbf{q} ist in der semiklassischen Näherung somit durch den Ausdruck (2.42) gegeben. Für

²Der Vorzeichenwechsel für den Term $i\mathbf{Q}\mathbf{x}$ ergibt sich durch die Uminterpretation des Impuls \mathbf{Q} des Positrons.

³Häufig wird bei semiklassischen Rechnungen einfach nur von der Wirkung S gesprochen. Abhängig davon, ob Impuls oder Ort zu Beginn bzw. Ende des Pfades vorgegeben sind, müssen aber verschiedene Wirkungen verwendet werden.

die Auswertung dieses Ausdruckes muss ein klassischer Pfad gefunden werden, welcher notwendigerweise auch streckenweise imaginär ist. Die Randbedingungen für diesen Pfad sind dadurch gegeben, dass zu Beginn Elektron und Positron am selben Ort x_s im Tunnelbereich „starten“ und am Ende jeweils den vorgegeben Impuls \mathbf{p} und \mathbf{q} besitzen. Da in (2.42) nur der Imaginärteil der Wirkung relevant ist, ist letztlich auch nur der Teil des Pfades im imaginären, klassisch verbotenen Bereich wichtig.

Paarerzeugung mit einem hochenergetischen Photon

In diesem Abschnitt soll die semiklassische Näherung der Paarerzeugung im externen Feld durch die Berücksichtigung eines zusätzlichen hochenergetischen Photons erweitert werden. Dieses zusätzliche Photon kann z.B. durch Abstrahlungsprozesse von beschleunigten Elektronen „gewonnen“ werden. Zur theoretischen Beschreibung wird der quantisierte Teil des elektromagnetischen Feldes perturbativ berücksichtigt. In erster Ordnung in \hat{A}_{pert} ist der Zeitentwicklungsoperator (2.19) gegeben durch

$$\begin{aligned} \hat{U}(t_{\text{out}}, t_{\text{in}}) &\rightarrow -i \int_{t_{\text{in}}}^{t_{\text{out}}} \hat{H}_{\text{int,pert,I}} dt \\ &\rightarrow -ie \int \hat{\bar{\psi}}_I(x) \gamma^\mu \hat{\psi}_I(x) \hat{A}_{\text{pert,I}}^\mu(x) dx. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Der Anfangszustand besteht aus einem hochenergetischen Photon mit Impuls \mathbf{k}

$$|0, 0, 1_k\rangle \equiv \hat{c}_k^+ |\text{vac}, t_{\text{in}}\rangle. \quad (2.45)$$

Der Endzustand besteht aus einem Elektron mit Impuls \mathbf{p} und einem Positron mit Impuls \mathbf{q}

$$|1_p, 1_q, 0\rangle \equiv \hat{a}_p^+(\text{out}) \hat{b}_q^+(\text{out}) |\text{vac}, t_{\text{out}}\rangle. \quad (2.46)$$

Somit ergibt sich das Matrixelement für die Paarerzeugung im externen Feld mit zusätzlichen Photon zu

$$M = -ie \langle 1_p, 1_q, 0 | \int \hat{\bar{\psi}}_I(x) \gamma^\mu \hat{\psi}_I(x) \hat{A}_{\text{pert,I}}^\mu(x) dx | 0, 0, 1_k \rangle \quad (2.47)$$

Die Feldoperatoren des quantisierten Materiefeldes bzw. des quantisierten elektromagnetischen Feldes können entsprechend den Zerlegungen (2.16) und (2.18) durch die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren \hat{a}/\hat{a}^+ , \hat{b}/\hat{b}^+ und \hat{c}/\hat{c}^+ ausgedrückt werden. Die raumzeitabhängigen Koeffizienten in den Zerlegungen (2.16) und (2.18) sind dabei durch die entsprechenden Eigenlösungen gegeben. Zu den Zeiten t_{in} und t_{out} entsprechen die Eigenlösungen den freien Moden (Teilchen) und sind durch ihren Impuls gekennzeichnet. Der Spin der Materieteilchen sowie die Polarisation der Photonen wird in dieser

2. Theoretische Beschreibung der Paarerzeugung

Näherung vernachlässigt. Mithilfe der semiklassischen Näherung lassen sich diese Eigenlösungen auch zu einer anderen Raumzeit $x = \mathbf{x}t$ angeben. Im Falle der Elektron- und Positronenlösungen gilt

$${}^+ \varphi_p(x) \approx \exp [iW_p(x)] , \quad (2.48a)$$

$${}^- \varphi_q(x) \approx \exp [-iW_q(x)] . \quad (2.48b)$$

Die modifizierten Wirkungen W sind dieselben wie in (2.43) und der Vorzeichenwechsel im Exponenten für die Positronwellenfunktion ergibt sich aus der Beschreibung als negativer Energieeigenzustand. Analog lassen sich die Koeffizienten f in der Zerlegung (2.18) für das Photon semiklassisch ausdrücken als

$$f_{\mathbf{k}} \approx \exp [iW_{\mathbf{k}}(x)] . \quad (2.49)$$

Die Wirkung für das Photon mit Impuls \mathbf{k} ist

$$W_{\mathbf{k}}(x) = -kx . \quad (2.50)$$

Unter Verwendung von (2.48) und (2.49) vereinfacht sich das Matrixelement (2.47) zu

$$M \approx -iec_v \int dx \exp [i(W_{\mathbf{k}}(x) + W_p(x) + W_q(x))] . \quad (2.51)$$

Dieser Ausdruck lässt sich wie folgt interpretieren: Da die Wechselwirkung mit dem quantisierten elektromagnetischen Feld nur in erster Ordnung betrachtet wird, gibt es nur einen Wechselwirkungsprozess, welcher zu jeder Raumzeit x geschehen kann. Dabei propagiert ein „freies“ Photon mit Impuls \mathbf{k} zur Zeit t_{in} nach x , wo es in ein Elektron und ein Positron umgewandelt wird. Das Elektron propagiert weiter und entspricht dann bei t_{out} einem asymptotisch freien Elektron mit Impuls \mathbf{p} . Analog propagiert das Positron in einen freien Zustand mit Impuls \mathbf{q} . Für das gesamte Matrixelement wird über alle möglichen Raumzeiten x , bei denen die Umwandlung stattfinden kann, integriert. Der Beitrag bzw. die Amplitude jedes einzelnen Pfades ist durch $\exp [i(W_{\mathbf{k}}(x) + W_p(x) + W_q(x))]$ gegeben. Diese Pfade sind reell und erfüllen in diesem Falle nicht die klassischen Bewegungsgleichungen, da sich ein Photon wegen Energie- und Impulserhaltung nicht in ein Elektron und Positron umwandeln kann. Das Integral in (2.51) kann mithilfe der Methode der stationären Phase weiter approximiert werden (de Bruijn 1961). Bei dieser Methode wird das Integral über x durch den Punkt x_s ersetzt, an dem der Exponent stationär wird. Es muss also gelten

$$\begin{aligned} 0 &= \left. \frac{\partial}{\partial x^\mu} (W_{\mathbf{k}} + W_p + W_q) \right|_{x_s} \\ &= K^\mu(x_s) - P^\mu(x_s) - Q^\mu(x_s) \\ &= k^\mu(x_s) - p^\mu(x_s) - q^\mu(x_s) . \end{aligned} \quad (2.52)$$

Obwohl die modifizierten Wirkungen W und somit auch die kanonischen Impulse K , P und Q eichabhängig sind, ist die Bedingung für den stationären Punkt x_s eichunabhän-

gig, da sich die Eichungen in der zweiten Zeile von (2.52) gerade wegheben.⁴ Das ist aber nur der Fall weil die Eichungen am selben Raumzeitpunkt ausgewertet werden. Der Pfad über x_s erfüllt die klassischen Bewegungsgleichungen, da Energie- und Impulserhaltung bei x_s nach (2.52) gilt:

$$k^\mu(x_s) = p^\mu(x_s) + q^\mu(x_s).$$

Diese Energie- und Impulserhaltung kann jedoch nicht an einem reellen Raumzeitpunkt x_s erfüllt sein, wie die Quadrierung beider Seiten zeigt:

$$k^2 = 0 \quad \text{und} \\ (p^\mu + q^\mu)^2 = 2m + 2pq \quad \text{mit} \quad 2pq > 2m.$$

Denn entlang einer klassisch reellen Trajektorie gilt für die Materieteilchen immer die Dispersionrelation $p^2 = m$. Auf imaginären Pfaden, welche weiterhin auch die klassischen Bewegungsgleichungen erfüllen, kann aber z.B. auch gelten $p^2 = 0$. Es ist also klar, dass der stationäre Punkt x_s bzw. der dazu korrespondierende Pfad imaginär sein wird. Für die Berechnung ist analog zur Herleitung der Formel (2.42) nur der imaginäre Teil des Pfades wichtig, der letztlich zur exponentiellen Unterdrückung des Prozesses führt. Zusammengefasst und unter Vernachlässigung sämtlicher Vorfaktoren ergibt sich damit für das Matrixelement der Paarerzeugung mit einem zusätzlichen Photon

$$M \approx \exp[-\text{Im}(W_k + W_p + W_k)]. \quad (2.53)$$

Dieser Ausdruck ist lorentzinvariant und wie sich im Kapitel 3 bei der genaueren Bestimmung der imaginären Trajektorie zeigen wird, auch eichinvariant.

Für den Grenzfall, dass die Energie des zusätzlichen Photons gegen Null geht ($W_k \rightarrow 0$), reduziert sich der Ausdruck (2.53) auf den Ausdruck (2.42) für die Paarerzeugung im Hintergrundfeld ohne Photon. Der Übergang scheint plausibel, da in der semiklassischen Betrachtung das zusätzliche Photon dann im Tunnelbild einfach nicht mehr auftreten wird. Beide Prozesse, also Paarerzeugung im externen elektromagnetischen Feld mit und ohne Photon sind aber verschieden bzw. unterscheidbar. Sie können beide parallel auftreten. Würde nun die Energie des Photons immer kleiner werden und damit auch (2.53) in (2.42) übergehen, könnte man zu dem Schluss kommen, dass die Wahrscheinlichkeit, ein Paar im externen Feld ohne ein quantisiertes Photon zu erzeugen, doppelt so groß wäre. Tatsächlich aber geht das exakte Matrixelement (2.47) gegen Null (bei verschwindender Photonenenergie) bedingt durch die Vorfaktoren, welche in (2.53) vernachlässigt worden sind. In dieser Arbeit wird lediglich die exponentielle Unterdrückung, d.h. der negative Realteil im Exponenten berücksichtigt und dieser lässt sich für beide Prozesse in einem gemeinsamen Tunnelbild berechnen und interpretieren.

⁴Das Photon besitzt keine Eichabhängigkeit, d.h. $K = k$. Für Elektron und Positron gilt $P = p - eA$ und $Q = q + eA$.

3. Ein erweitertes Tunnelbild

Das klassische Tunnelbild, welches bereits in der Einleitung erwähnt wurde (siehe Abbildung 1.2), bietet eine einfache Interpretation der Paarerzeugung als klassischen Tunnelprozess. Es basiert aber auf der damals noch vorhandenen Vorstellung vom Dirac-See. Man ging davon aus, dass sämtliche negativen Energieeigenzustände besetzt wären. Durch ein äußeres elektrisches Feld E kommt es zu einer Veränderung der Energieeigenzustände und ein Tunneln von negativen zu positiven Energieeigenzuständen wird möglich. Dieser Übergang kann als Paarerzeugung interpretiert werden, da der neue Zustand mit positiver Energie ein Elektron darstellt und der nun unbesetzte Zustand mit negativer Energie als Loch mit positiver Energie dem Positron gleichgesetzt werden kann. Obwohl mathematisch gleichwertig, wurde die Diracsche Lochtheorie weitestgehend durch die moderne quantenfeldtheoretische Interpretation, bei der Elektron und Positron als Teilchen und Antiteilchen gemeinsam als gleichwertig beschrieben werden, ersetzt. Dementsprechend wird in diesem Kapitel ein erweitertes Tunnelbild eingeführt, in dem Elektron und Positron als gleichwertig betrachtet werden können. Zusätzlich soll das magnetische Feld und dessen Einfluss auf den Tunnelprozess explizit mitberücksichtigt werden.¹ Dadurch wird auch die Lorentzinvarianz im neuen Bild ersichtlich, denn elektrisches und magnetisches Feld gehen durch Lorentztransformation ineinander über. Im alten Tunnelbild tritt das magnetische Feld nicht auf, wodurch dieses nicht lorentzinvariant sein kann. Weiterhin soll in das klassische Tunnelbild ein zusätzliches, perturbativ behandeltes, Photon mit aufgenommen werden, welches die Paarerzeugung unterstützen kann. Der Effekt eines zusätzlichen Photons bezüglich des Tunnelbildes wurde bereits in (Schützhold, Gies und Dunne 2008; Di Piazza u. a. 2009) angedeutet. Die in diesem Kapitel erarbeiteten Resultate finden sich in (Wöllert u. a. 2015) wieder.

3.1. Feldkonfiguration, Notation und Vorüberlegungen

Generell wird das Tunnelbild nur im quasistatischen Limes $\xi \gg 1$ verwendet. Es wird davon ausgegangen, dass die zeitliche Änderung des Hintergrundfeldes wesentlich länger

¹Für die Tunnelionisation von gebundenen Elektronen wurde die des Magnetfeldes in (Klaiber u. a. 2013) erarbeitet.

3. Ein erweitertes Tunnelbild

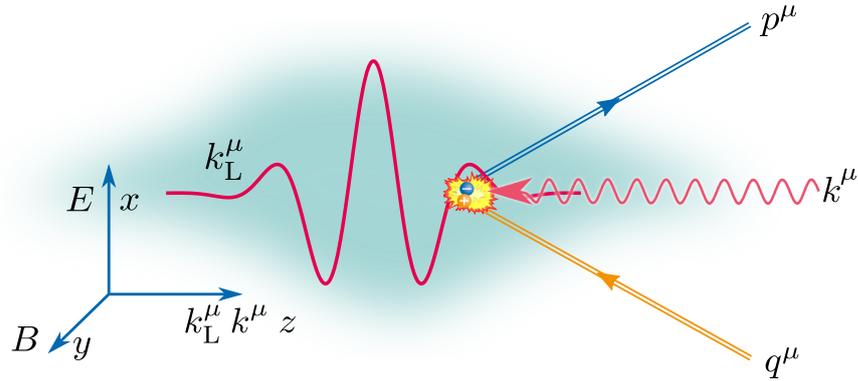


Abbildung 3.1: Räumliche Darstellung der Feldkonfiguration für das erweiterte Tunnelbild. Das externe elektromagnetische Feld mit Wellenvektor k_L propagiert entlang der z -Achse. Im quasistatischen Limes ergibt sich dadurch ein konstantes elektrisches Feld E entlang der x -Achse und ein konstantes magnetisches Feld B entlang der y -Achse. Das zusätzliche Photon propagiert mit Wellenvektor k ebenfalls entlang der z -Achse. Bei der Paarzeugung entstehen ein Elektron mit Viererimpuls p und ein Positron mit Viererimpuls q .

braucht als der eigentliche Tunnelprozess². Diese Näherung ist vor allem bei der Verwendung optischer Laser sehr genau, da die Periodendauer des erzeugten elektromagnetischen Feldes mehrere Größenordnungen höher ist als die charakteristische Tunnelzeit der Paarzeugung. Während des Tunnels sollen die teilnehmenden Teilchen also ein konstantes Hintergrundfeld sehen. Wäre das nicht der Fall, ließe sich ohnehin kein einfaches Bild angeben und eine Art Animation wird notwendig. Am Ende des Kapitels soll kurz darauf eingegangen werden, inwiefern die Effekte einfacher Zeitabhängigkeiten anhand des Tunnelbildes verständlich gemacht werden könnten. Zur Beschreibung des elektromagnetischen Feldes im quasistatischen Limes werden dann lediglich die elektrische Feldstärke E und die magnetische Feldstärke B benötigt. Beide Feldkomponenten werden orthogonal zueinander angenommen, da dies bei den beiden folgenden Situationen gerade der Fall ist. Zum einen sind bei der ebenen Welle, wo Paarzeugung nur mithilfe eines zusätzlichen hochenergetischen Photons möglich ist, elektrisches und magnetisches Feld senkrecht zueinander und von gleicher Amplitude, zum anderen gilt das auch für den Fall zweier aufeinander zulaufender Laserfelder mit linearer Polarisation. In letzterem Fall sind auch Überlagerungen möglich, bei denen das elektrische und magnetische Feld unterschiedliche Amplituden haben. Da der Ausdruck $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ eine Lorentzinvariante ist, bleibt auch die Orthogonalität beider Feldkomponenten unter Lorentztransformationen erhalten. Aus der Lorentzinvarianz des Ausdrucks

$$\mathcal{E} = \sqrt{|\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2|} \quad (3.1)$$

²Obwohl das Zeitintervall für den Tunnelprozess imaginär ist, kann auch das externe elektromagnetische Feld analytisch fortgesetzt werden und die quasistatische Bedingung für komplexe Zeiten überprüft werden.

3.1. Feldkonfiguration, Notation und Vorüberlegungen

folgt, dass sich grundsätzlich drei Fälle unterscheiden lassen:

$$|E| > |B|, \quad |E| = |B| \quad \text{und} \quad |E| < |B|.$$

Für den ersten Fall lässt sich immer ein Bezugssystem finden, für das $B' = 0$ gilt. Ebenso lässt sich für den letzten Fall ein Bezugssystem finden, für das $E' = 0$ gilt. Die Propagation der ebenen Welle bzw. der gegenläufigen Laserfelder soll entlang der z -Achse verlaufen. Damit folgt, dass E - und B -Feld senkrecht dazu in der xy -Ebene liegen müssen. Wie in Abbildung 3.1 dargestellt, wird das E -Feld entlang der x -Achse und das B -Feld entlang der y -Achse gewählt. Die Orientierung von elektrischem und magnetischem Feld ist für eine ebene Welle mit Wellenvektor \mathbf{k}_L wie folgt verknüpft

$$\mathbf{E} \times \mathbf{B} \parallel \mathbf{k}_L. \quad (3.2)$$

Bei Berücksichtigung des zusätzlichen hochenergetischen Photons wird davon ausgegangen, dass auch dieses entlang der z -Achse propagiert und somit direkt mit dem externen Laserfeld kollidiert.

Zur Herleitung des erweiterten Tunnelbildes wird die semiklassische Näherung aus Kapitel 2 herangezogen. Für die zweckmäßige Notation soll im Folgenden der kinetische Viererimpuls für das Elektron als

$$p^\mu = (p_0, p_x, p_y, p_z) \quad (3.3)$$

geschrieben werden und analog dazu der kanonische Impuls P^μ . Ebenso sei der kinetische und kanonische Impuls des Positrons mit q^μ und Q^μ bezeichnet. Entsprechend der Geometrie ist der Impuls des zusätzlichen Photons durch

$$k^\mu = (k_0, 0, 0, k_z) \quad (3.4)$$

gegeben und es gilt $k_0 = |k_z|$. Da sich die Beschreibung der Trajektorien von Elektron und Positron praktisch auf eine Bewegung entlang der x -Achse reduziert, wird die x -Koordinate des Elektrons mit x^+ angegeben und die des Positrons mit x^- . Die Werte für Variablen, ausgewertet am Punkt x_s der Paarerzeugung, werden mit einem tiefgestellten Index s gekennzeichnet. So entspricht z.B. $p_s^\mu = p^\mu(x_s)$. Weiterhin werden die Orte, an denen die Teilchen den Tunnelbereich verlassen, mit einem e (für „Ende“) gekennzeichnet. Mit $p_{x,e} = p_x(x_e^+)$ ist also die x -Komponente des kinetischen Elektronenimpulses am Ort x_e^+ gemeint, welcher das Ende der imaginären Trajektorie für das Elektron angibt. Der Ausdruck x_s soll im Folgenden sowohl für den Raumzeitpunkt x_s^μ der Paarerzeugung wie auch für die x -Komponente dieses Punktes benutzt werden. Welche Variante gemeint ist, ergibt sich aus dem Kontext.

Die Bewegungsgleichungen für die kanonischen Impulse von Elektron und Positron lauten (Landau und Lifshitz 1975)

$$\frac{d}{dt} P^\mu = -e \frac{\partial x^\nu}{\partial t} \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}, \quad (3.5a)$$

$$\frac{d}{dt} Q^\mu = e \frac{\partial x^\nu}{\partial t} \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}. \quad (3.5b)$$

3. Ein erweitertes Tunnelbild

Das Viererpotential des externen elektromagnetischen Feldes ist mit A_ν gegeben. Kinetischer und kanonischer Impuls sind über die folgenden Gleichungen verbunden:

$$p^\mu(x) = P^\mu(x) + eA^\mu(x), \quad (3.6a)$$

$$q^\mu(x) = Q^\mu(x) - eA^\mu(x). \quad (3.6b)$$

Wie bereits in Kapitel 2 erläutert, ist das Matrixelement für die Paarerzeugung in semi-klassischer Näherung durch (2.53) gegeben:

$$M \approx \exp[-\text{Im}(W_k + W_p + W_k)]. \quad (2.53)$$

Am Punkt der Paarerzeugung x_s gilt nach (2.51) die kinetische Energie- und Impulserhaltung:

$$p_s^\mu + q_s^\mu = k^\mu. \quad (3.7)$$

Das ist allerdings nur auf einer imaginären Trajektorie möglich, wie im Folgenden gezeigt werden soll. Das Quadrieren beider Seiten der Gleichung $k^\mu - p_s^\mu = q_s^\mu$ liefert

$$\begin{aligned} k^2 - 2kp_s + p_s^2 &= q_s^2, \\ 0 - 2kp_s + m^2 &= m^2 \end{aligned}$$

und somit

$$kp_s = 0 = k_0p_{0,s} - k_zp_{z,s}, \quad (3.8)$$

woraus mit $k_0 = |k_z|$

$$p_{0,s}^2 = p_{z,s}^2 \quad (3.9)$$

folgt. Selbiges gilt auch für q_s^μ . Setzt man dies in die relativistische Dispersionsrelation $m^2 = p_0^2 - \mathbf{p}^2$ ein, dann ergibt sich daraus

$$m^2 = -p_{x,s}^2 - p_{y,s}^2 = -q_{x,s}^2 - q_{y,s}^2. \quad (3.10)$$

Aufgrund der vorgegebenen Geometrie sind y -Komponenten der kinetischen Impulse Konstanten der Bewegung. Somit können $p_{y,s}$ und $q_{y,s}$ nicht imaginär sein, da die asymptotischen Impulse der Teilchen entsprechend der Randbedingungen reell sein müssen. Daher müssen die x -Komponenten der kinetischen Impulse von Elektron und Positron am Punkt der Paarerzeugung rein imaginär sein und es gilt

$$p_{x,s} = -q_{x,s} = \pm\sqrt{m^2 + p_{y,s}^2} = \pm im_*, \quad (3.11)$$

$$m_* \equiv \sqrt{m^2 + p_{y,s}^2}. \quad (3.12)$$

Die klassische Energie- und Impulserhaltung erfordert somit einen imaginären Impuls am Punkt der Paarerzeugung. Elektron und Positron werden demnach im klassisch verbotenen Bereich bzw. unterhalb der sogenannten Tunnelbarriere erzeugt. Die dann weiterführenden Trajektorien sollen als imaginär bezeichnet werden, solange die Impulse p_x und q_x noch imaginär sind. Das Ende des Tunnelbereichs wird mit

$$p_{x,e} = 0 = q_{x,e} \quad (3.13)$$

definiert.³

3.2. Kinematik im konstanten Feld

Wird das Viererpotential A des externen elektromagnetischen Feldes an einer bestimmten Stelle in erster Ordnung nach seiner Raumzeit-Abhängigkeit, also nach x^μ , entwickelt, so ergeben sich zeitlich und räumlich konstante elektrische und magnetische Feldkomponenten. Man spricht dann von der Approximation des konstanten Feldes. Diese Approximation ist wie eingangs erwähnt bzgl. des Tunnelbildes gültig, solange die Raumzeitausdehnung der imaginären Trajektorie $|x_s^\mu - x_e^\mu|$ klein gegenüber der Raumzeitregion ist, auf der sich das elektromagnetische Feld wesentlich ändert. Speziell für den Fall der ebenen Welle ist diese Approximation aber auch gültig, sollten die beiden erzeugten Teilchen sich mit dem externen Feld mitbewegen und daher, relativ betrachtet, immer dasselbe Feld sehen. Um die Gültigkeit der Approximation allgemein zu beantworten, muss sie im Nachhinein auf Konsistenz geprüft werden. Entlang der berechneten imaginären Trajektorie darf sich das elektromagnetische Feld also nicht wesentlich ändern. Wird das elektromagnetische Feld nicht als konstant approximiert, so muss es im Rahmen der semiklassischen Näherung auch an komplexwertigen Raumzeitpunkten ausgewertet werden. Im Folgenden werden aber das elektrische Feld E wie auch das magnetische Feld B als konstant vorausgesetzt und das Viererpotential in der hier gewählten Geometrie lässt sich schreiben als

$$A_\mu(z, t) = (0, Et - Bz, 0, 0). \quad (3.14)$$

Die Werte für E und B entsprechen dabei denen, die das elektromagnetische Feld an jenem Punkt annimmt, an dem es entwickelt wird. Dieser Punkt ist in der semiklassischen Näherung gerade der Ort x_s der Paarerzeugung. Mit (3.14) können die Bewegungsglei-

³Je nach Wahl des Pfades in der komplexen Ebene sind auch andere Definitionen möglich. Die hier gewählte ist aber ausreichend und einfach.

3. Ein erweitertes Tunnelbild

chungen (3.5) einfach integriert werden und es ergibt sich

$$p_0(x^+) = p_{0,e} - eE(x^+ - x_e^+), \quad (3.15a)$$

$$p_z(x^+) = p_{z,e} - eB(x^+ - x_e^+), \quad (3.15b)$$

$$q_0(x^-) = q_{0,e} + eE(x^- - x_e^-), \quad (3.15c)$$

$$q_z(x^-) = q_{z,e} + eB(x^- - x_e^-). \quad (3.15d)$$

Aufgrund der gewählten Geometrie und der Approximation des elektromagnetischen Feldes ergeben sich sehr einfache Bewegungsgleichungen. Die kinetische Energie und der Impuls in z -Richtung hängt nur linear von der x -Koordinate des Teilchens ab. Im Gegensatz zur Paarerzeugung im reinen elektrischen Feld erfolgt durch das Magnetfeld zusätzliche eine Beschleunigung entlang der z -Achse. Da durch das elektrische Feld beide Teilchen in entgegengesetzte Richtungen entlang der x -Achse beschleunigt werden, folgt mit (3.15b) und (3.15d), dass die Beschleunigung durch das Magnetfeld in dieselbe Richtung stattfindet. Der Impuls p_x bzw. q_x ist nun implizit durch $p^2 = m^2$ gegeben und lässt sich auflösen nach

$$p_x^2(x^+) = p_0^2(x^+) - (m_*^2 + p_z^2(x^+)), \quad (3.16a)$$

$$q_x^2(x^-) = q_0^2(x^-) - (m_*^2 + q_z^2(x^-)). \quad (3.16b)$$

Weiterhin ergibt sich für die Länge der imaginären Trajektorie in Tunnelrichtung (in x -Richtung) nach (3.8) und (3.15):

$$x_s - x_e^+ = \frac{k_0 p_{0,e} - k_z p_{z,e}}{e(Ek_0 - Bk_z)}, \quad (3.17a)$$

$$x_e^- - x_s = \frac{k_0 q_{0,e} - k_z q_{z,e}}{e(Ek_0 - Bk_z)}. \quad (3.17b)$$

Durch Einsetzen von (3.15) in (3.7) folgt

$$eE(x_e^- - x_e^+) = p_{0,e} + q_{0,e} - k_0, \quad (3.18a)$$

$$eB(x_e^- - x_e^+) = p_{z,e} + q_{z,e} - k_z. \quad (3.18b)$$

Wird nun (3.18a) mit B und (3.18b) mit E multipliziert und anschließend beides voneinander subtrahiert, so ergibt sich der Ausdruck

$$B(p_{0,e} + q_{0,e} - k_0) = E(p_{z,e} + q_{z,e} - k_z). \quad (3.19)$$

Dieser Ausdruck stellt eine reduzierte Energie- und Impulserhaltung zwischen Elektron, Positron und Photon dar, bei der im Gegensatz zu (3.7) bereits die Randbedingungen am Tunnelende mit eingegangen sind. Aus dieser Gleichung werden zwei Dinge ersichtlich: Bei nicht vorhandenem B -Feld gilt die exakte Impulserhaltung bzgl. der z -Richtung, also $p_{z,e} + q_{z,e} = k_z$. Das Photon teilt seinen Impuls somit exakt auf Elektron und Positron auf. Nach dem Tunneln ist diese Impulskomponente für beide Materieteilchen immer

3.3. Grafische Interpretation des relativistischen Tunnelbildes

noch die gleiche, da sie sich aufgrund der Kinematik ohne zusätzliches Magnetfeld nicht verändern kann. Bei verschwindendem elektrischen Feld folgt $p_{0,e} + q_{0,e} = k_0$ und stellt somit eine untere Grenze der Photonenenergie von $2m$ dar, ab der die Paarerzeugung erst möglich ist. Da das magnetische Feld alleine keine Arbeit verrichten kann, muss also die gesamte Energie für die Materieteilchen aus der Photonenenergie kommen.

Mit den obigen Formeln können nun die Wirkungen für die semiklassische Näherung bestimmt werden. Da jedoch nur der imaginäre Teil der Wirkung eine Rolle spielt, muss auch nur der bestimmt werden und nicht etwa die komplette Wirkung. Es lässt sich zeigen, dass der Imaginärteil gegeben ist durch⁴

$$W = \int_{x_s}^{x_e^+} p_x dx + \int_{x_s}^{x_e^-} q_x dx \equiv W^+ + W^- . \quad (3.20)$$

Der Imaginärteil der Wirkung ist also lediglich durch die Propagation von Elektron und Positron in Tunnelrichtung gegeben. Dabei entspricht W^+ dem Anteil des Elektrons und W^- dem Anteil des Positrons. Der Imaginärteil der Wirkung des Photons entlang der t - und z -Komponente kürzt sich gerade mit den entsprechenden Anteilen des Elektrons und Positrons aufgrund von Energie- und Impulserhaltung entlang dieser Richtungen weg. Das Photon beeinflusst den Wert von (3.20) aber indirekt über die Energie-Impulserhaltung bei x_s . Aus demselben Grund sind auch W^+ und W^- nicht unabhängig voneinander. Beide Integrale können analytisch berechnet werden. Dabei sind die Impulse p_x und q_x mit (3.16) und die Integrationsgrenzen durch (3.17) gegeben.

3.3. Grafische Interpretation des relativistischen Tunnelbildes

Um anhand des Tunnelbildes eine einfache Aussage über die Wahrscheinlichkeit des Tunnelprozesses zu erhalten, wird üblicherweise eine Fläche innerhalb der Tunnelbarriere gezeichnet, deren Größe ein Maß für die exponentielle Unterdrückung des betrachteten Prozesses ist. Um so höher die Tunnelbarriere ist, um so größer wird diese Fläche sein und folglich in einer geringeren Wahrscheinlichkeit resultieren. So lassen sich die Integralausdrücke in (3.20) beispielhaft als Flächen deuten. Für das Tunnelbild ist es aber nicht entscheidend und meistens auch nicht praktikabel, dass die dargestellte Fläche exakt dem Exponenten entspricht, da nur qualitative Aussagen abgelesen werden sollen. Für die quantitative Bestimmung können die Formeln zur Berechnung des Exponenten herangezogen werden. Die exakte Fläche, bzw. der exakte Exponent ist durch die

⁴Am einfachsten kann das in der Eichung $A^\mu = (-Ex, 0, 0, -Bx)$ gezeigt werden.

3. Ein erweitertes Tunnelbild

Integration der kinetischen Impulse

$$\text{Im } p_x(x) = \sqrt{m_*^2 + p_z^2(x) - p_0^2(x)}, \quad (3.21a)$$

$$\text{Im } q_x(x) = \sqrt{m_*^2 + q_z^2(x) - q_0^2(x)} \quad (3.21b)$$

entlang der Tunnelrichtung gegeben. Diese Größen bieten keine direkte Interpretationsmöglichkeit in Hinsicht darauf, wie sich die Wahrscheinlichkeit zur Paarerzeugung ändert, wenn sich das Magnetfeld oder das elektrische Feld ändern. Für die qualitative Bestimmung ist es ausreichend, einen Ausdruck zu finden, der monoton mit dem kinetischen Impuls korreliert. Dann vergrößert bzw. verkleinert sich die Fläche auch entsprechend. Eine günstige Wahl stellen die folgenden Ausdrücke dar:

$$\begin{aligned} \text{Im } \tilde{p}_x &= \left| \sqrt{m^2 + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2} - \sqrt{m^2 + p_y^2 + p_z^2} \right| \\ &= |p_0 - \tilde{p}_0| = \tilde{p}_0 - p_0, \end{aligned} \quad (3.22a)$$

$$\begin{aligned} \text{Im } \tilde{q}_x &= \left| \sqrt{m^2 + q_x^2 + q_y^2 + q_z^2} - \sqrt{m^2 + q_y^2 + q_z^2} \right| \\ &= |q_0 - \tilde{q}_0| = \tilde{q}_0 - q_0. \end{aligned} \quad (3.22b)$$

Sie entsprechen der Differenz aus kinetischer Gesamtenergie p_0 bzw. q_0 der Teilchen und einer kinetischen Energie \tilde{p}_0 bzw. \tilde{q}_0 , bei der der Impuls in x -Richtung Null gesetzt wird. Die kinetische Energie ohne Impuls in x -Richtung soll als Mindestenergie bezeichnet werden, da genau bei dieser Energie die Teilchen nach (3.13) reell werden. Die Mindestenergien \tilde{p}_0 und \tilde{q}_0 sind

$$\tilde{p}_0(x) = \sqrt{m^2 + p_y^2 + p_z^2} = \sqrt{m_*^2 + p_z^2}, \quad (3.23a)$$

$$\tilde{q}_0(x) = \sqrt{m^2 + q_y^2 + q_z^2} = \sqrt{m_*^2 + q_z^2}. \quad (3.23b)$$

Die Definition (3.22) erfüllt die Forderung nach der monotonen Korrelation zwischen $\text{Im } p_x$ und $\text{Im } \tilde{p}_x$. Es gilt zudem

$$\text{Im } p_x = 0 \quad \rightarrow \quad \text{Im } \tilde{p}_x = 0$$

und somit ist das Ende der Tunneltrajektorie weiterhin durch $\tilde{p}_x = 0$ für das Elektron und $\tilde{q}_x = 0$ für das Positron gegeben. Ein weiterer Vorteil der Wahl (3.22) ist, dass sich die Größen \tilde{p}_x und \tilde{q}_x als einfache Differenz aus der eingeführten Mindestenergie (3.23) und der tatsächlichen kinetischen Energie ergeben. So kann das ursprüngliche Integral in (3.20) qualitativ als die eingeschlossene Fläche zwischen kinetischer Energie und der Mindestenergie entlang der Tunnelrichtung betrachtet werden, wie in Abbildung 3.2 illustriert.

Die bisher eingeführten Größen und deren Bedeutung für das erweiterte Tunnelbild sollen jetzt Schritt für Schritt anhand von Abbildung 3.2 erklärt werden. Grundsätzlich sind Energien (Ordinate) entlang der Tunnelrichtung (Abzisse) aufgetragen. Die hier

3.3. Grafische Interpretation des relativistischen Tunnelbildes

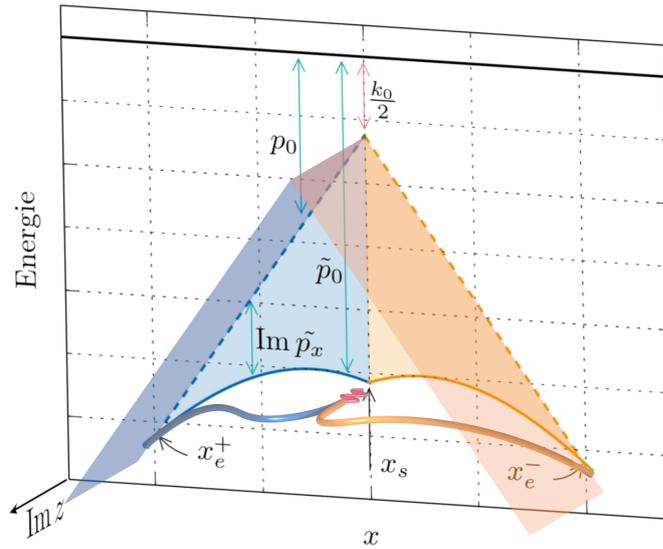


Abbildung 3.2: Überblick über die verschiedenen Größen im erweiterten Tunnelbild. An der Ordinate können die kinetische Energie (gestrichelte Linie) und die Mindestenergie (durchgezogene Linie) des jeweiligen Teilchens in Abhängigkeit vom Ort entlang der Tunnelrichtung (Abzisse) abgelesen werden. Das Elektron ist blau dargestellt und das Positron orange. Im dargestellten Fall tunnelt das Elektron nach links und das Positron nach rechts zum entsprechenden Tunnelende x_e^+ bzw. x_e^- . Beide entstehen bei x_s . Das transparente Dach symbolisiert die Tunnelbarriere, unter welcher die Teilchen nicht reell werden können. Die Größe der exponentiellen Unterdrückung lässt sich quantitativ anhand der eingeschlossenen Flächen zwischen gestrichelten und durchgezogenen Linien ablesen. Zusätzlich ist mit der dritten Dimension die Propagation von Elektron und Positron entlang der imaginären z -Achse dargestellt, die durch das Magnetfeld hervorgerufen wird.

zusätzlich gezeigte dritte Dimension soll die Trajektorie entlang der imaginären z -Achse visualisieren. Der linke Teil des Bildes bezieht sich auf den Tunnelprozess des Elektrons und der rechte auf den des Positrons.⁵ In der Mitte bei x_s entsteht das Paar und das Elektron tunnelt nach rechts und das Positron nach links. Die gestrichelten Linien geben an jeder Stelle entlang der Tunnelrichtung die aktuelle kinetische Energie für Elektron und Positron an. Die dünn durchgezogenen Linien entsprechen den in (3.23) definierten Mindestenergien. Sämtliche Energien werden bzgl. der oberen schwarzen Linie bestimmt.

Am Ort der Paarzeugung x_s muss die Summe aus kinetischer Energie von Elektron und Positron genau der Energie k_0 des Photons entsprechen. Für den hier dargestellten symmetrischen Fall, bei dem sich Elektron und Positron diese Energie genau aufteilen, muss folglich die kinetische Energie beider Materieteilchen genau $k_0/2$ betragen. Entlang

⁵ Abhängig vom Vorzeichen des elektrischen Feldes kann dies aber auch umgedreht sein.

3. Ein erweitertes Tunnelbild

der jeweiligen Tunnelrichtung für Elektron und Positron nimmt die kinetische Energie aufgrund des elektrischen Feldes nach (3.15a) und (3.15c) linear zu. Für den Fall, dass kein zusätzliches Photon vorhanden ist, hätten beide eine Anfangsenergie von Null. Damit die Teilchen aber „reell“ werden können, müssen sie mindestens eine Energie der Ruhemasse m besitzen. Die zusätzliche Energie, die die Teilchen noch benötigen um reell zu werden, ist durch die Differenz zwischen kinetischer Energie und Mindestenergie gegeben und entspricht dem horizontalen Abstand zwischen der gestrichelten und dünn durchgezogenen Linie. Für den eben erwähnten Fall, dass kein zusätzliches Photon vorhanden ist, ergibt sich bei x_s für die Mindestenergien $\tilde{p}_0 = \tilde{q}_0 = m$, vorausgesetzt beide Teilchen sollen keinen Impuls in y - und z -Richtung nach dem Tunneln besitzen. Dort, wo Mindestenergie und kinetische Energie übereinstimmen, sich also gestrichelte und dünn durchgezogene Linien schneiden, ist das Tunnelende erreicht, die Teilchen werden reell und es gilt $\tilde{p}_x = 0 = \tilde{q}_x$. Das Elektron propagiert also von x_s nach x_e^+ und das Positron von x_s nach x_e^- . Die eingeschlossene Fläche zwischen gestrichelter und dünn durchgezogener Linie vom Tunnelbeginn x_s bis zum Tunnelende x_e entspricht gerade dem genäherten qualitativen Ausdruck für die Wirkungen W^+ und W^- in (3.20).

Aus diesem Bild lassen sich nun unmittelbar folgende Dinge ablesen: Um die Fläche zu verkleinern und somit die Paarerzeugungswahrscheinlichkeit zu erhöhen, kann zum einen das elektrische Feld erhöht werden. Daraus folgt dann, dass die kinetische Energie entlang der Tunnelrichtung noch steiler ansteigt und die Tunneldistanz von x_s nach x_e kürzer wird. Zum anderen würde sich die Fläche auch verkleinern, wenn die Linien für kinetische Energie und Mindestenergie näher zusammenrücken würden. Die kinetische Anfangsenergie kann, wie bereits erwähnt, durch das zusätzliche Photon erhöht werden. Die Mindestenergie hingegen kann nur auf minimal m reduziert werden. Da das Photon aber nicht nur kinetische Energie, sondern auch kinetischen Impuls k_z mit sich trägt, und dieser sich ebenfalls auf Elektron und Positron verteilen muss, führt dies zu einer zusätzlichen Anhebung der Mindestenergie. Dieser Fakt wurde bei der grafischen Darstellung des Tunnelbildes im Falle der Paarerzeugung bisher nicht berücksichtigt! Die Mindestenergie erhöht sich also bei zunehmenden Impulsen p_y und p_z bzw. q_y und q_z . Die logische Konsequenz ist also, dass die Erzeugung von Elektron-Positron-Paaren unwahrscheinlicher wird, wenn diese nach dem Tunneln nicht „nur“ ihre Ruhemasse besitzen, sondern auch noch einen zusätzlichen kinetischen Impuls. Der kinetische Impuls in y -Richtung ist eine Bewegungskonstante und richtet sich daher ausschließlich nach den vorgegebenen Randbedingungen. Der kinetische Impuls in z -Richtung hingegen wird durch das Magnetfeld beeinflusst, vgl. (3.15b) und (3.15d). Im Idealfall sollte das Magnetfeld also so gewählt werden, dass der mittlere kinetische Impuls in z -Richtung während des Tunnelns möglichst gering ist.

Für den Effekt des Magnetfeldes während des Tunnelns ist auch folgendes Bild hilfreich: Im klassisch reellen Bereich führt ein Magnetfeld, welches in y -Richtung zeigt immer dazu, dass sich geladene Teilchen auf einer Kreisbahn senkrecht dazu bewegen. Anders formuliert bedeutet das, dass die kinetischen Impulse in x -Richtung in solche in

3.3. Grafische Interpretation des relativistischen Tunnelbildes

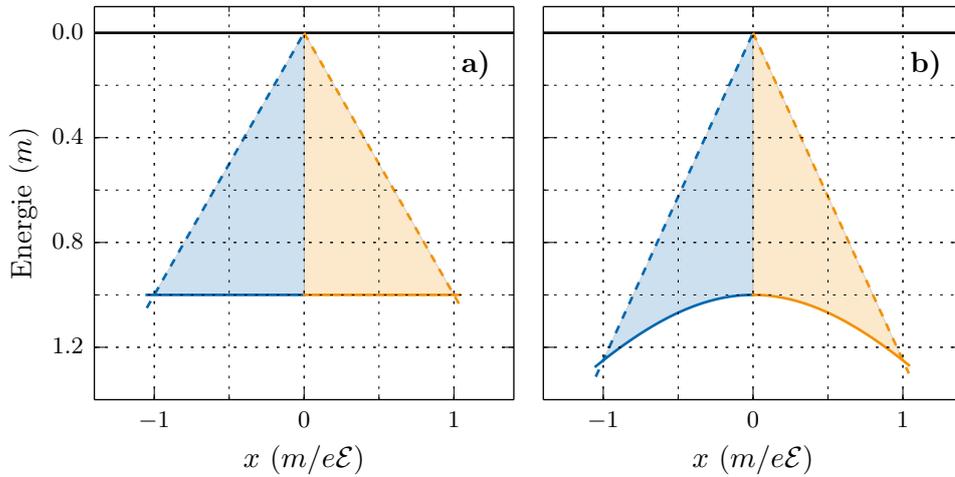


Abbildung 3.3: a) Tunnelbild für ein reines elektrisches Feld. Die Mindestenergie, die Elektron und Positron erreichen müssen ist genau m . Sie verändert sich in Tunnelrichtung nicht, da kein magnetisches Feld vorhanden ist. Die kinetische Energie beider Teilchen am Tunnelbeginn x_s beträgt Null. b) Tunnelbild für ein System, welches um $v = -3/5c$ relativ zu dem in a) geboostet wurde. Entsprechend der Lorentzinvarianz bleibt die eingeschlossene Fläche erhalten. Durch das zusätzlich auftretende Magnetfeld B' ändert sich der z -Impuls entlang der Tunnelrichtung, was an der nun gekrümmten Linie für die Mindestenergie ersichtlich ist.

z -Richtung transferiert werden und umgekehrt. Da das Tunneln entlang imaginärer Zeiten stattfindet, folgt damit am Beispiel des Elektrons, dass sich der anfänglich imaginäre Impuls p_x in einen reellen Impuls p_z „dreht“ und umgekehrt.

Im Falle des zusätzlichen Magnetfeldes und dem daraus resultierenden reellen Teilchenimpuls in z -Richtung wird auch eine Propagation entlang der imaginären z -Achse stattfinden. Dies ist mit den 3-dimensionalen Trajektorien in Abbildung 3.2 angedeutet. In Anlehnung an den Potentialhügel, den ein Elektron bei der Tunnelionisation am Atom durchqueren muss, können auch die gestrichelten Linien, welche prinzipiell dem elektrostatischen Potential des elektrischen Feldes entsprechen, als Potentialhügel aufgefasst werden, durch die Elektron und Positron entlang des Pfades \tilde{p}_x bzw. \tilde{q}_x tunneln müssen. Unter Einfluss des Magnetfeldes verformt sich dieser Pfad, der sonst wegen $\tilde{p}_x = \text{const.}$ für $B = 0$ eine Gerade ist (siehe auch Klaiber u. a. 2013). Es soll nun auf die drei verschiedenen Fälle $|E| > |B|$, $|E| = |B|$ und $|E| < |B|$ getrennt eingegangen werden, da sie ein prinzipiell unterschiedliches Verhalten aufzeigen.

3.3.1. Fall $|E| > |B|$

Für diesen Fall ist die Paarerzeugung immer möglich. Die Existenz der Tunnelausgänge ist stets gewährleistet, da sich die Linien für kinetische Energie und Mindestenergie

3. Ein erweitertes Tunnelbild

immer schneiden. Der physikalische Grund hierfür ist, dass das elektrische Feld mehr Energie zur kinetische Energie beitragen kann als das magnetische Feld zum z -Impuls, gleichbedeutend damit, dass die Gerade der kinetischen Energie immer steiler verläuft, als die der Mindestenergie.

In Bild 3.3a ist der einfachste Fall der Paarerzeugung mit reinem elektrischen Feld und ohne zusätzliches Photon gezeigt. Elektron und Positron besitzen bei x_s beide eine kinetische Energie von Null. Es wurde der Fall mit maximaler Wahrscheinlichkeit gewählt, bei dem die Endimpulse von Elektron und Positron Null sind. Daher muss das elektrische Feld genau die Ruhemasse m für jedes Teilchen aufbringen, damit diese *reell* werden. Die Mindestenergie beträgt genau m und verändert sich nicht. Qualitativ lässt sich aus dem Bild schließen, dass für diesen Fall die Paarerzeugung maximiert werden kann, also die eingeschlossene Fläche minimiert wird, wenn die elektrische Feldstärke erhöht wird oder die Mindestenergie verringert wird. Die höhere Feldstärke führt zu einem steileren Verlauf der kinetischen Energie und einer verkürzten Tunnellänge. Die Mindestenergie kann nicht weiter verringert werden. Sie wird nur höher, sollten Elektron bzw. Positron von Null verschiedene Endimpulse p_y und p_z bzw. q_y und q_z am Tunnelausgang besitzen. Deswegen ist die Erzeugung von Paaren mit höheren Endimpulsen unwahrscheinlicher.

Die Lorentzinvarianz des erweiterten Tunnelbildes für Lorentztransformationen entlang der z -Achse wird in Abbildung 3.3b ersichtlich.⁶ Es stellt im Prinzip genau dieselbe Konfiguration wie in Abbildung 3.3a dar, nur aus einem Bezugssystem, welches sich mit $v = -3/5c$ in z -Richtung bezüglich des ersteren bewegt. Durch diese Lorentztransformation erhöht sich das elektrische Feld E' und das Magnetfeld B' nimmt einen von Null verschiedenen Wert an. Beides ist anhand des steileren Verlaufs der kinetischen Energie sowie der nun nicht mehr konstanten Mindestenergie zu erkennen. Bezüglich der eingeschlossenen Fläche kann gesagt werden, dass die stärkere Neigung der Geraden für die kinetische Energie aufgrund des stärkeren elektrischen Feldes diese verringern würden. Gleichzeitig führt das magnetische Feld zur Erhöhung der Mindestenergie entlang der Tunnelrichtung. Beide Effekte, die Flächenabnahme durch das elektrische Feld und die Flächenzunahme durch das magnetische, heben sich genau weg. Somit bleibt die Paarerzeugungswahrscheinlichkeit erhalten, was im Einklang mit der Lorentzinvarianz ist. Es zeigt sich auch, dass die x -Komponente der Tunnelenden erhalten bleibt, da die Lorentztransformation entlang der z -Richtung stattfindet. Jedoch nimmt die Mindestenergie am Tunnelende einen von m verschiedenen Wert an. Dieser beträgt genau $\sqrt{m^2 + (m \cdot 3/5)^2}$, da Elektron und Positron nun eine Geschwindigkeit von $v = 3/5c$ in z -Richtung besitzen müssen, wenn sie im ungeboosteten System eine Geschwindigkeit

⁶Für Lorentztransformationen entlang der x - bzw. y -Achse würde die vorausgesetzte Geometrie aus Abbildung 3.1 nicht mehr erhalten bleiben und das Tunnelbild könnte nicht mehr eindimensional dargestellt werden. Die analytischen Ausdrücke für die Tunnelexponenten lassen sich aber dennoch lorentzinvariant darstellen.

3.3. Grafische Interpretation des relativistischen Tunnelbildes

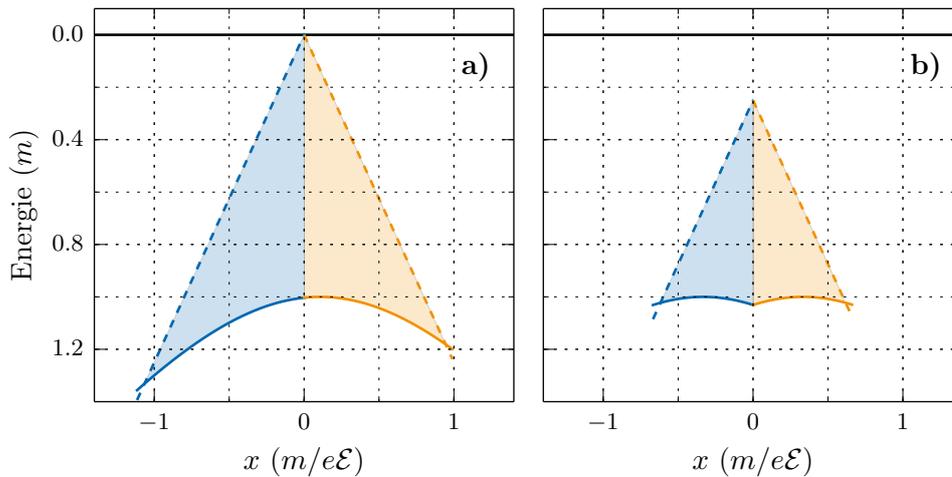


Abbildung 3.4: a) Verhalten bei unterschiedlichen Endimpulsen in z -Richtung: Mit einem magnetischen Feld können die Impulsbeträge $|p_{z,e}|$ und $|q_{z,e}|$ am Tunnelende unterschiedlich sein. Hier wurde $|p_{z,e}| > |q_{z,e}|$ gewählt und man kann erkennen, dass die eingeschlossene Fläche des Elektrons aufgrund seines höheren Endimpulses (= effektive Masse) größer ist. b) Tunnelbild mit zusätzlichem Photon: Die kinetische Energie $k = m/2$ verteilt sich auf beide Teilchen und erhöht somit ihre kinetische Energie zu Tunnelbeginn bei x_s . Gleichzeitig erhöht sich aber die Mindestenergie beider Teilchen, da sie auch den kinetischen Impuls des Photons $k_z = -m/2$ aufnehmen müssen. Insgesamt betrachtet wird die eingeschlossene Fläche kleiner und kann durch ein zusätzliches Magnetfeld weiter reduziert werden.

von Null am Tunnelende haben.

Eine Besonderheit stellt das Transformationsverhalten im Tunnelbereich dar. Man könnte erwarten, dass auch am Ort der Paarerzeugung x_s beide Teilchen bereits eine Geschwindigkeit von $v = 3/5c$ in z -Richtung besitzen. Das ist allerdings nicht der Fall, sonst würde die Mindestenergie bei x_s nicht weiterhin m betragen. Formell wird diese Sache verständlich, denn der Viererimpuls für Elektron und Positron ist bei x_s im ungestoßten System genau Null und muss somit auch Null nach der Lorentztransformation sein. Es ergibt sich ein nicht intuitives Transformationsverhalten, da im Tunnelbereich die kinetische Energie kleiner als m bzw. auch Null sein kann, was gleichbedeutend damit ist, dass die Teilchen nicht auf ihrer Massenschale liegen müssen.

Wenn nur ein elektrisches Feld vorhanden ist, müssen die Endimpulse von Elektron und Positron immer genau entgegengesetzt sein. Ist ein Magnetfeld vorhanden, so können beide Teilchen unterschiedliche Impulsbeträge in z -Richtung am Tunnelende besitzen. Dieser Fall ist beispielhaft Abbildung 3.4a in gezeigt. Das Elektron besitzt hier einen vom Betrag her höheren Endimpuls als das Positron, $|p_z| > |q_z|$. Daher ist auch die eingeschlossene Fläche des Elektrons größer, weil es mehr Energie braucht um das Elektron zu erzeugen. Für die Gesamtwahrscheinlichkeit müssen jedoch immer beide Flächen berücksichtigt werden.

3. Ein erweitertes Tunnelbild

Der Einfluss eines zusätzlichen Photons ist in Abbildung 3.4b gezeigt. Die elektrische und magnetische Feldstärke wurden wie in Abbildung 3.3b gewählt. Das Photon besitzt eine kinetische Energie von $k_0 = m/2$, welche sich in der Konfiguration mit maximaler Paarerzeugungswahrscheinlichkeit zu gleichen Teilen auf Elektron und Positron verteilt. Beide Teilchen besitzen daher bei x_s eine kinetische Energie von $m/4$. Dadurch sind die gestrichelten Linien für die kinetische Energie nach unten versetzt und die eingeschlossene Fläche verringert sich. Neben der kinetischen Energie verteilt sich aber auch der kinetische Impuls $k_z = -m/2$ auf Elektron und Positron in gleichen Maßen. Das heißt, beide besitzen bei x_s einen Impuls von $p_z = q_z = -m/4$. Dadurch verschiebt sich die durchgezogene Linie für die Mindestenergie nach unten und die eingeschlossene Fläche wird wieder etwas größer. Das zusätzliche Photon trägt mit seiner kinetischen Energie zur Paarerzeugung positiv bei, wirkt aber aufgrund seines zusätzlichen Impulses, der die effektive Masse von Elektron und Positron vergrößert, hemmend. Der Nettoeffekt ist aber stets eine erhöhte Paarerzeugungswahrscheinlichkeit.

Würde für den Fall mit Photon kein Magnetfeld vorhanden sein, so wäre die Mindestenergie für beide Teilchen

$$\tilde{p}_0 = \tilde{q}_0 = \sqrt{m^2 + (-m/4)^2} > m.$$

Mit einem zusätzlichen Magnetfeld lässt sich der z -Impuls von Elektron und Positron während des Tunnelns ändern und kann bei richtiger Orientierung die mittlere Mindestenergie verringern, was die Wahrscheinlichkeit zur Paarerzeugung erhöhen würde. Das ist auch in Abbildung 3.4b ersichtlich, wo die eingeschlossene Fläche aufgrund der Wölbung der durchgezogenen Linie reduziert ist. Das optimale Verhältnis von magnetischem zu elektrischem Feld bei gegebener Photonenenergie wird in Abschnitt 3.4 diskutiert.

Nachdem jetzt die grafische Interpretation des erweiterten Tunnelbildes für den Fall $|E| > |B|$ diskutiert wurde, sollen noch die analytischen Ausdrücke für den Exponenten angegeben werden. Die Richtung, in welche Elektron und Positron entlang der x -Achse tunneln wird ausschließlich durch das Vorzeichen des elektrischen Feldes bestimmt und es gilt

$$\text{sgn}(x_e^- - x_e^+) = \text{sgn } E. \quad (3.24)$$

Der Anteil W^+ des Elektrons im Integral für den Exponenten (3.20) berechnet sich für den hier betrachteten Fall $|E| > |B|$ zu

$$W^+ = i \frac{E p_{0,e} - B p_{z,e}}{2\mathcal{E}^3} \left(\arccos \Gamma - \Gamma \sqrt{1 - \Gamma^2} \right) \quad (3.25)$$

mit

$$\Gamma = 1 - e \frac{E^2 - B^2}{E p_{0,e} - B p_{z,e}} (x_s - x_e^+). \quad (3.26)$$

3.3. Grafische Interpretation des relativistischen Tunnelbildes

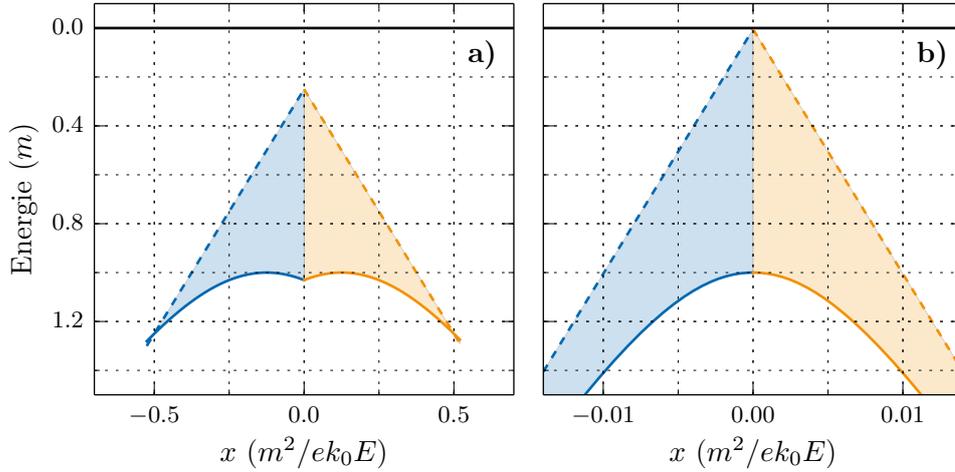


Abbildung 3.5: Tunnelbilder für den Fall $|E| = |B|$. **a)** Mithilfe eines zusätzlichen Photons (hier $k_0 = m/2$) wird die Paarerzeugung erst ermöglicht. **b)** Geht die Energie des Photons gegen Null (hier $k_0 = m/100$), so wandert das Tunnelende immer weiter nach außen. Die Linien für die kinetische Energie und die Mindestenergie verlaufen im Limes $k_0 \rightarrow 0$ parallel zueinander. Dann existiert kein Tunnelausgang und die Paarerzeugung kann nicht stattfinden.

Der Anteil W^- des Positrons besitzt die gleiche analytische Struktur, nur dass der Viererimpuls, die Ladung und das Tunnelende des Elektrons durch die Werte für das Positron ersetzt werden müssen. Da die Ausdrücke für W^+ und W^- in Abhängigkeit von den Endimpulsen p_e und q_e formuliert wurden, tritt der Impuls für das Photon nicht explizit in (3.25) auf. Dieser lässt sich mit (3.19) bestimmen. Soll der Wert für den Photonenimpuls jedoch vorgegeben werden, so müssen p_e und q_e entsprechend (3.19) bestimmt und mit diesen Werten dann W^\pm berechnet werden. Im Falle maximaler Symmetrie, d.h. $p_e^\mu = q_e^\mu$ sind die Werte für W^+ und W^- identisch. Für die Schwinger-Paarerzeugung (reines elektrisches Feld) ergibt sich in der Konfiguration mit maximaler Wahrscheinlichkeit $\mathbf{p}_e = \mathbf{q}_e = 0$ für $W = W^+ + W^-$ nach (3.25)

$$W = i \frac{\pi m^2}{2E}. \quad (3.27)$$

Für das Betragquadrat des Matrixelements zur Paarerzeugung muss dieser Term noch mit zwei multipliziert werden und entspricht dann exakt dem Schwinger-Exponenten von $\pi m^2/E$ (Schwinger 1951). Wird in diesem Ausdruck die elektrische Feldstärke E durch die korrespondierende Lorentzinvariante \mathcal{E} ersetzt, so ergibt sich direkt der lorentzinvariante Ausdruck für den Exponenten in erster Ordnung für die Paarerzeugung ohne zusätzliches Photon (Nikishov 1970).

3. Ein erweitertes Tunnelbild

3.3.2. Fall $|E| = |B|$

Der Fall, dass elektrische und magnetische Feldstärke identisch sind, entspricht der Approximation einer ebenen Welle als lokal konstantes elektromagnetisches Feld. Es ist bekannt, dass eine einzelne ebene Welle keine Paare erzeugen kann. Der Grund, warum die Paarerzeugung nicht möglich ist, lässt sich bereits aus den bisherigen Erkenntnissen des erweiterten Tunnelbildes herleiten. Da das magnetische Feld vom Betrag her genauso groß wie das elektrische ist, transferiert es nach (3.15) genauso viel kinetischen Impuls in z -Richtung wie das elektrische Feld in der Lage ist, äquivalente kinetische Energie zu erzeugen. Daraus folgt, dass stets $p_0 = p_z$ bzw. $q_0 = q_z$ gilt. Die Teilchen können somit nicht reell werden, denn es fehlt jeweils der Ruhemassenterm m an kinetischer Energie. Damit z.B. das Elektron reell werden kann, würde es noch folgende zusätzliche kinetische Energie benötigen

$$\Delta E = \sqrt{m^2 + p_z^2} - \sqrt{p_z^2}. \quad (3.28)$$

Diese Differenz wird zwar immer kleiner mit größer werdendem p_z , aber nie Null. Zur Paarerzeugung ist daher eine zusätzliche kinetische Energie notwendig. Selbst ein energetisch schwaches Photon würde genügen. Dieses Photon muss entgegen der ebenen Welle laufen, sonst ließe sich beides wieder als einzelne ebene Welle auffassen bzw. das Photon würde seinen Impuls in derselben Richtung beitragen, in welche auch das magnetische Feld beiträgt. Für eine ebene Welle zeigt der Wellenvektor in Richtung $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$. Damit in der hier gewählten Geometrie das Photon antiparallel läuft, muss gelten

$$\text{sgn } k_z = -\text{sgn}(EB). \quad (3.29)$$

Zwei Beispiele für das erweiterte Tunnelbild mit $|E| = |B|$ und zusätzlichem Photon sind in Abbildung 3.5a und 3.5b dargestellt. In Abbildung 3.5a hat das Photon eine Energie von $k_0 = m/2$ und in Abbildung 3.5b eine Energie von $k_0 = m/100$. Bezüglich der Interpretation sind beide Bilder äquivalent mit dem zuletzt diskutierten Bild in Abbildung 3.4b. Das Photon erhöht die kinetische Energie von Elektron und Positron zu Beginn des Tunnelns. Zusätzlich transferiert das Magnetfeld den anfänglichen Impuls von $k_0/2$ in z -Richtung der beiden Materieteilchen hinüber in den imaginären Impuls in x -Richtung, reduziert diesen, und „hilft“ somit zu Beginn des Tunnelns.

Für den zweiten Fall mit wesentlich kleinerer Photonenenergie in Abbildung 3.5b lässt sich der Grenzfall ohne Photon erahnen. Zum einen wird die eingeschlossene Fläche größer durch die fehlende kinetische Energie, zum anderen erhöht das Magnetfeld den Impuls in z -Richtung so stark, dass die Teilchen immer schwerer und die Kurven für die Mindestenergie asymptotisch Tangenten zu den Linien der kinetischen Energie werden. Das Tunnelende wandert daher mit sinkender Photonenenergie immer weiter nach außen, was in einer Vergrößerung der eingeschlossenen Fläche und Verminderung der Paarerzeugungswahrscheinlichkeit resultiert. Im Limes verschwindender Photonenenergie existiert kein Tunnelende mehr und die Paarerzeugung ist nicht möglich.

3.3. Grafische Interpretation des relativistischen Tunnelbildes

Die Tunnelrichtung entlang der x -Achse für Elektron und Positron ist weiterhin durch (3.24) gegeben. Der Imaginärteil für W^+ berechnet sich zu

$$W^+ = i \frac{2}{3} \frac{[2e(Ep_{0,e} - Bp_{z,e})(x_s - x_e^+)]^{3/2}}{|2e(Ep_{0,e} - Bp_{z,e})|}. \quad (3.30)$$

Der Wert W^- für den Beitrag des Positrons zum Exponenten hat dieselbe Struktur, nur müssen die entsprechenden Werte des Positrons eingesetzt werden. Analog zum vorherigen Fall $|E| > |B|$ ergibt sich der Photonenimpuls implizit mit (3.19). Für den symmetrischen Fall $p_e = q_e$ folgt daraus

$$p_{0,e} - p_{z,e} = k_0 = q_{0,e} - q_{z,e}. \quad (3.31)$$

Werden diese Werte für p_e und q_e in (3.30) eingesetzt, so ergibt sich in Summe für die Konfiguration mit höchster Paarerzeugungswahrscheinlichkeit ($p_{y,e} = q_{y,e} = 0$)

$$W = i \frac{2}{3} \frac{m^3}{eEk_0} \quad (3.32)$$

im Einklang mit (Reiss 1962). Das bedeutet im Vergleich zum Schwinger-Fall (3.27), dass das Photon mindestens eine Energie von $k_0 = 4m/(3\pi)$ haben muss, damit der Fall einer ebenen Welle mit Photon wahrscheinlicher ist als der Fall des reinen elektrischen Feldes. Dabei wurde jedoch nur der Exponent berücksichtigt und es wurden gleiche elektrische Feldstärken vorausgesetzt.

3.3.3. Fall $|E| < |B|$

Damit Paarerzeugung für diesen Fall stattfinden kann, muss ein zusätzliches Photon vorhanden sein und mindestens eine Energie von $2m$, d.h. die Ruhemasse von Elektron und Positron zusammen, besitzen. Dies wird deutlich in dem Bezugssystem, in welchem das elektrische Feld verschwindet. Dann ist nur noch ein Magnetfeld vorhanden, welches selbst keine Arbeit verrichten kann und nach (3.19) muss gelten

$$p_{0,e} + q_{0,e} = k_0. \quad (3.33)$$

In Abbildung 3.6a ist das erweiterte Tunnelbild für ein reines Magnetfeld dargestellt. Das Photon besitzt gerade die Minimalenergie von $2m$. Dementsprechend haben Elektron und Positron bei x_s schon eine kinetische Energie von m . Sie sind aber nicht reell, da sie noch den kinetischen Impuls von m in z -Richtung tragen. Damit ergibt sich bei x_s eine Mindestenergie von $\sqrt{2}m$. Diese Mindestenergie nimmt nun zu den Tunnelenden hin ab, da das Magnetfeld diesen reellen Impuls in einen imaginären Impuls in x -Richtung transferiert und somit das Tunneln überhaupt erst ermöglicht. Die gestrichelten Linien für die kinetische Energie sind konstant weil das elektrische Feld gleich Null ist. Bis zum Tunnelende wird der z -Impuls Null und gleicht den ursprünglich imaginären x -Impuls

3. Ein erweitertes Tunnelbild

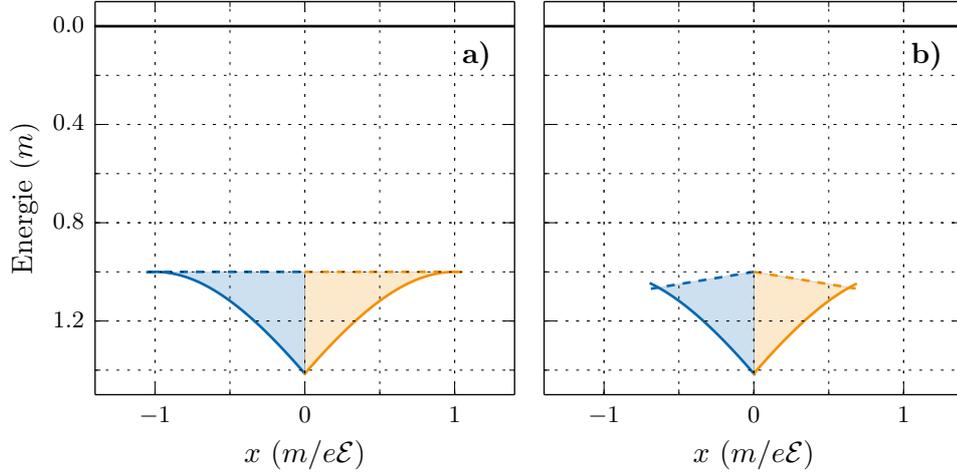


Abbildung 3.6: Tunnelbilder für $|E| < |B|$: **a)** Ist nur ein magnetisches Feld vorhanden, so muss das Photon eine mindestens eine Energie von $k_0 = 2m$ aufweisen. Die kinetische Energie der Materieteilchen bleibt konstant, da kein elektrisches Feld vorhanden ist. Die Mindestenergie verändert sich entlang der Tunnelrichtung und der z -Impuls von k_0 zu Beginn des Tunneln kann durch den Einfluss des Magnetfeldes bis auf Null am Tunnelende reduziert werden. **b)** Ein elektrisches Feld kann bei richtiger Orientierung die eingeschlossene Fläche weiter reduzieren und die Paarerzeugungswahrscheinlichkeit somit erhöhen.

von im bei x_s vollständig aus. Aus dem Bild lässt sich deuten, dass eine höhere Photonenenergie die Paarerzeugung begünstigen würde, da sich die eingeschlossene Fläche durch die steigende kinetische Energie insgesamt verkleinert, obwohl auch die Mindestenergie aufgrund des kinetischen Impulses ansteigt. Ebenso würde ein stärkeres Magnetfeld die Paarerzeugung begünstigen, da dann die Kurven für die Mindestenergie steiler zu den Tunnelenden hin abfallen würde.

Ein zusätzliches elektrisches Feld, siehe Abbildung 3.6b, wird je nach Vorzeichen die Paarerzeugungswahrscheinlichkeit begünstigen oder benachteiligen (bzw. ganz unterdrücken). Am Bild lässt sich das dadurch festmachen, dass sich die gestrichelten Geraden für die kinetische Energie um den Punkt bei x_s drehen und somit die Kurven für die Mindestenergie entweder früher oder später (bzw. auch gar nicht) schneiden.

Im Gegensatz zu den beiden vorherigen Fällen ist die Tunnelrichtung entlang der x -Achse nun durch das Magnetfeld und das Photon vorgegeben und es gilt

$$\text{sgn}(x_e^- - x_e^+) = -\text{sgn}(Bk_z). \quad (3.34)$$

Der Elektronanteil W^+ zum Exponenten berechnet sich zu

$$W^+ = i \frac{(Ep_{0,e} - Bp_{z,e})^2}{2\mathcal{E}^3} \left(\text{arcosh } \Gamma - \Gamma \sqrt{\Gamma^2 - 1} \right). \quad (3.35)$$

Ein einfacher analytische Ausdruck für den symmetrischen Fall $p_e = q_e$ ist leider nicht möglich.

3.4. Feldkonfigurationen mit maximaler Tunnelwahrscheinlichkeit

Nachdem auf die drei prinzipiell unterschiedlichen Fälle für die Paarerzeugung im konstanten Feld eingegangen wurde, soll nun untersucht werden, welche Trajektorien die höchste Wahrscheinlichkeit zur Paarerzeugung besitzen. Die Trajektorien sind über die Randbedingungen, also den kinetischen Impulsen von Elektron und Positron am Tunnelende festgelegt. Abhängig von diesen Impulsen und den Beträgen vom elektrischen und magnetischen Feld lässt sich der Exponent $\text{Im } W = \text{Im } W^+ + \text{Im } W^-$ mit den Gleichungen (3.25), (3.30) bzw. (3.35) bestimmen. Die Trajektorien maximaler Wahrscheinlichkeit sind jene, bei denen $\text{Im } W$ bei vorgegebenen Feldstärken E und B und vorgegebenen Photonenimpuls k_0 minimal wird. Für diese Betrachtung wird also lediglich der Exponent W , welcher für die exponentielle Unterdrückung verantwortlich ist, berücksichtigt. Der ebenfalls im Matrixelement auftretende Vorfaktor wird weiterhin vernachlässigt.

Aus Symmetriegründen folgt, dass die wahrscheinlichste Trajektorie dann gegeben ist, wenn die Beträge der Endimpulse für Elektron und Positron gleich sind, also $\mathbf{p}_e = \mathbf{q}_e$. Zudem ist der kinetische Impuls in x -Richtung am Tunnelende per Definition Null. Auch der kinetische Impuls in y -Richtung muss Null gesetzt werden. Dieser ist eine Bewegungskonstante und macht die Teilchen effektiv schwerer, welche dann mehr Energie während des Tunnelns benötigen. Es gilt demnach

$$p_{x,e} = q_{x,e} = 0, \quad (3.36a)$$

$$p_{y,e} = q_{y,e} = 0, \quad (3.36b)$$

$$p_{z,e} = q_{z,e}. \quad (3.36c)$$

Folglich müssen nur die Impulse in z -Richtung berücksichtigt werden. In Abbildung 3.7 sind für verschiedene Verhältnisse $\beta = B/E$ zwischen elektrischer und magnetischer Feldstärke die optimalen Endimpulse bei vorgegebener Photonenenergie k_0 aufgezeigt. Dabei wird die elektrische Feldstärke im linken Bereich $-1 < \beta < 1$ und die magnetische Feldstärke im rechten Bereich $1 > 1/\beta > -1$ festgehalten. Für den einfachsten Fall eines reinen elektrischen Feldes ($\beta = 0$) ohne zusätzliches Photon ist der Endimpuls $p_{z,e} = q_{z,e} = 0$ am günstigsten, da dann nur die Mindestenergie von $2m$ zur Erzeugung von Elektron und Positron aufgebracht werden muss. Für Werte von β ungleich Null wird das nun auftretende Magnetfeld die Teilchen während des Tunnelns in z -Richtung beschleunigen. Dadurch nehmen die optimalen Endimpulse in z -Richtung von Null verschiedene Werte an. Zu den Rändern $\beta = \pm 1$ hin divergieren $p_{z,e}$ und $q_{z,e}$ für $k_0 = 0$,

3. Ein erweitertes Tunnelbild

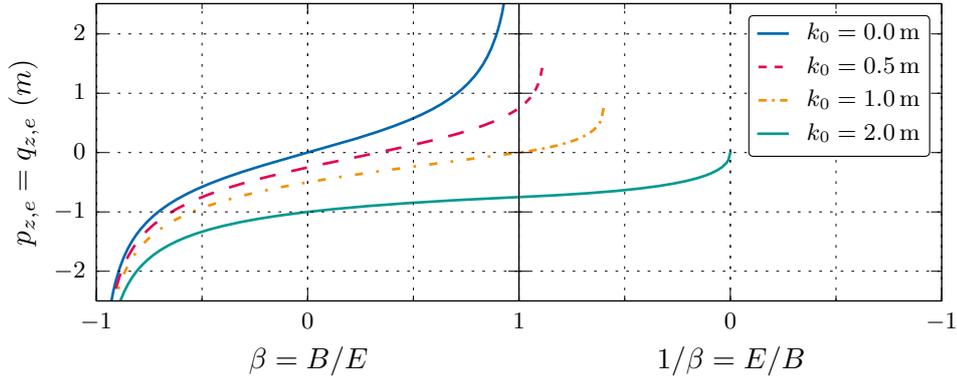


Abbildung 3.7: Darstellung der wahrscheinlichsten Endimpulse $p_{z,e}$ und $q_{z,e}$ in Abhängigkeit vom Verhältnis $\beta = B/E$ zwischen elektrischer und magnetischer Feldstärke sowie vom Photonenimpuls k_0 .

was gleichbedeutend mit dem Fakt ist, dass die Paarerzeugung im Fall der ebenen Welle $|E| = |B|$ ohne zusätzliches Photon nicht möglich ist .

Wirkt zusätzlich ein Photon mit, so lässt sich für den Fall des reinen elektrischen Feldes $\beta = 0$ erkennen, dass sich Elektron und Positron den zusätzlichen Impuls des Photons im günstigsten Fall gerade aufteilen $p_{z,e} = q_{z,e} = k_0/2$. Mit einem Magnetfeld divergieren diese Impulse für $\beta \rightarrow -1$ oder werden kleiner für $\beta \rightarrow 1$. Im ersteren Fall erhöht das Magnetfeld den anfänglichen z -Impuls von Elektron und Positron zusätzlich und arbeitet somit gegen das elektrische Feld. Im letzteren Fall, bei umgekehrter Richtung des Magnetfeldes, arbeitet es in dieselbe Richtung und vermindert den z -Impuls. Dieses Verhalten spiegelt die Tatsache aus Gleichung (3.29) wider, dass im Falle der ebenen Welle $|\beta| = 1$, ihre Propagationsrichtung entgegen der des Photons orientiert sein muss, damit die Paarerzeugung möglich ist. Bei $\beta = 1$ lässt sich erkennen, dass für Photonenenergien $k_0 < m$ der z -Impuls von Elektron und Positron am Tunnelende entgegen dem anfänglichen Impuls des Photons zeigt.

Sind die Propagationsrichtungen vom elektromagnetischen Feld und Photon zueinander richtig orientiert, so reichen die Linien mit $k_0 > 0$ bis in den Bereich $1 > 1/\beta > -1$ hinein. Es können also auch Paare erzeugt werden, wenn der Betrag der Magnetfeldstärke größer ist als der der elektrischen Feldstärke. Die Linien mit $k_0 < 2m$ reichen aber nicht bis an den Punkt $1/\beta = 0$ heran, an dem nur noch ein reines Magnetfeld existiert. Denn dafür müsste das Photon mindestens die Energie $2m$ mitbringen. Für kleinere Werte enden die Linien gerade da, wo das elektrische Feld noch in der Lage ist, die fehlende Energie während des Tunnelns aufzubringen. In Richtung $1/\beta \rightarrow -1$ wird die Paarerzeugung dann wieder erschwert, da elektrisches Feld und Magnetfeld in verschiedene Richtungen „arbeiten“.

In Abbildung 3.7a wurde bestimmt, welche Endimpulse am wahrscheinlichsten für ein

3.4. Feldkonfigurationen mit maximaler Tunnelwahrscheinlichkeit

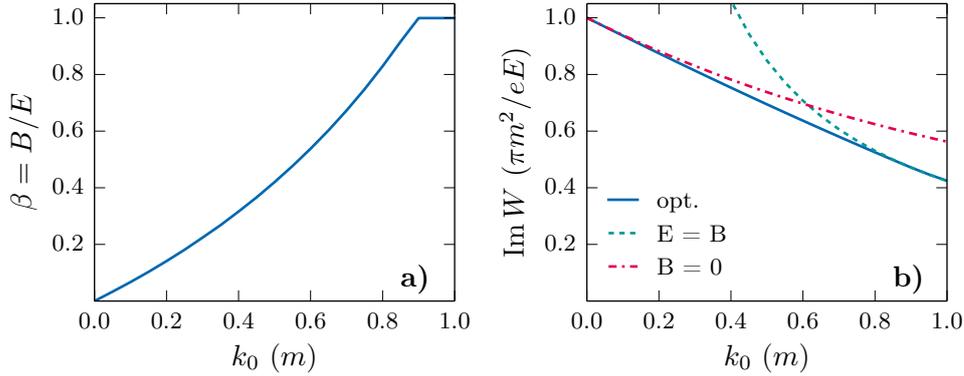


Abbildung 3.8: a) Optimales Verhältnis $\beta = B/E$ zwischen elektrischem und magnetischem Feld in Abhängigkeit vom Photonenimpuls k_0 . b) Verlauf der Tunnel-Exponenten bei Wahl des optimalen Verhältnisses β (durchgezogene Linie), bei der ebenen Welle (gestrichelte Linie) und bei reinem elektrischen Feld in Abhängigkeit des Photonenimpuls k_0 .

vorgegebenes Verhältnis zwischen elektrischem und magnetischem Feld sowie vorgegebenen Photonenimpuls k_0 sind. Es lässt sich aber auch bestimmen, welches Verhältnis β bei vorgegebenen Photonenimpuls optimal ist, um die exponentielle Unterdrückung, d.h. $\text{Im } W$, möglichst gering zu halten. Das optimale Verhältnis $\beta = B/E$ in Abhängigkeit vom vorgegebenen Photonenimpuls ist in Abbildung 3.8a dargestellt. Für $k_0 = 0$ ist das reine elektrische Feld ($\beta = 0$) die optimale Konfiguration, da ein zusätzliches magnetisches Feld die effektive Masse von Elektron und Positron während des Tunnelns nur zusätzlich erhöhen würde. Der entsprechende Wert für den Exponenten in Einheiten des Schwinger-Exponenten $\pi m^2 / (eE)$ ist mit der durchgezogenen Linie in Abbildung 3.8b angegeben. Bei $\beta = 0$ ist dieser folglich eins und fällt dann mit steigender Photonenenergie. Aus der Interpretation des erweiterten Tunnelbildes wurde klar, dass ein Magnetfeld das Tunneln mit zusätzlichem Photon unterstützt. Das ist in Abbildung 3.8b ersichtlich, da auch das optimale Verhältnis β mit steigendem k_0 zunimmt. Der optimale Wert für das Verhältnis β zwischen elektrischer Feldstärke kann aus der Minimierung von (3.25) nach β bei vorgegebenen k_0 bestimmt werden. Ab einem Photonenimpuls von

$$k_0^* \equiv \sqrt{4/5} \text{ m} \approx 0.89 \text{ m} \quad (3.37)$$

nimmt das Verhältnis β den Wert eins an und somit stellt die optimale Konfiguration ab k_0^* die ebene Welle bzw. ein gleichstarkes elektrisches und magnetisches Feld dar. Der Wert für k_0^* lässt sich bestimmen, indem der Ausdruck (3.25) nach B abgeleitet und anschließend gleich Null gesetzt wird. Daraus ergibt sich eine implizite Gleichung für k_0^* , die aufgelöst werden kann. Interessanterweise hängt k_0^* nicht von der Feldstärke E ab.

Als Vergleich sind auch die Werte der Exponenten für den Fall der ebenen Welle (gestrichelte Linie) und für den Fall eines reinen elektrischen Feldes (strichpunktierte Linie) in Abbildung 3.8b angegeben. Man kann erkennen, dass im Vergleich zu einem reinen

3. Ein erweitertes Tunnelbild

elektrischen Feld die exponentielle Unterdrückung für den Fall der ebenen Welle erst ab Photonenergien $\simeq 0.4m$ geringer ausfällt. Ab k_0^* fällt sie dann mit dem optimalen Exponenten zusammen. Um sämtliche Fälle miteinander zu vergleichen, wurde von einer festen Feldstärke ausgegangen. Daher ist auch das Verhältnis β durch eins nach oben beschränkt, da die magnetische Feldstärke nicht größer gewählt werden kann als die maximale elektrische Feldstärke. Die elektrische Feldstärke E zu reduzieren würde zwar $\beta > 1$ ermöglichen, aber den Exponenten $\text{Im } W$ gleichzeitig wieder erhöhen.

3.5. Deutung für orts- und zeitabhängige Felder

Eine zusätzliche Ortsabhängigkeit des elektrischen Feldes lässt sich unkompliziert in das erweiterte Tunnelbild integrieren. Denn der Gradient der oberen Linien für die kinetische Energie p_0 und q_0 entspricht gerade dem elektrischen Feld. Eine Änderung des elektrischen Feldes entlang der x -Richtung würde somit zu einer Krümmung der Linien für p_0 und q_0 führen. Wird z.B. das elektrische Feld Richtung Tunnelende schwächer, so nimmt auch die Steilheit der Linien ab und das Tunnelende verschiebt sich weiter nach außen, was die eingeschlossene Fläche vergrößern und die Paarerzeugungsrate reduzieren würde. Ein zunehmendes elektrisches Feld hätte die umgekehrte Wirkung. Schwieriger ist die Anschaulichkeit bei einem sich verändernden Magnetfeld. Die Stärke des magnetischen Feldes bestimmt im Wesentlichen die Krümmung der Linien für die Mindestenergien \tilde{p}_0 und \tilde{q}_0 . Aufgrund der analytischen Form für die Mindestenergien (3.23) stehen die Krümmung und die Stärke des magnetischen Feldes allerdings in keinem linearen Zusammenhang. Dennoch ist anhand der Bilder für die drei verschiedenen Fälle abzusehen, ob sich eine höhere oder geringere Krümmung der Linien für die Mindestenergien positiv oder negativ auf die Paarerzeugung auswirken würde. Für den Fall $|E| > |B|$, z.B., würde bei Nichtvorhandensein des zusätzlichen Photons ein schwächer werdendes magnetisches Feld und die daraus resultierende abnehmende Krümmung der Linien für die Mindestenergien zu einer geringeren Fläche und somit höheren Paarerzeugung führen. Besonders interessant ist auch der Fall mit Photon, vergleiche Abbildung 3.4b, denn hier wäre ein zu Beginn starkes und danach rasch abnehmendes magnetisches Feld von Vorteil.

Bezüglich der Zeitabhängigkeit lässt sich allerdings in zwei Dimensionen kein statisches Bild mehr angeben. Generell führt die Zeitabhängigkeit zu einer entsprechenden zeitabhängigen Krümmung der Linien für p_0 , q_0 , \tilde{p}_x und \tilde{q}_x . Diese Änderungen könnten entlang einer dritten Achse aufgetragen werden. Diese Achse entspräche dann der imaginären Zeit. Entlang der imaginären Zeit muss aber auch das elektromagnetische Feld ausgewertet werden. Da sich die analytische Fortsetzung des elektromagnetischen Feldes, bzw. dessen Abhängigkeit von imaginären Zeiten nicht ohne weiteres aus der tatsächlichen Zeitabhängigkeit von realen Zeiten rückschließen lässt, wird ein solches 3-dimensionales Bild vermutlich nicht mehr sehr anschaulich sein. Weiterhin müsste die

3.5. Deutung für orts- und zeitabhängige Felder

eingeschlossene Fläche entlang der Zeitachse projiziert betrachtet werden. Daraus folgt, dass sich das erweiterte Tunnelbild für die Betrachtung zeitabhängiger Felder nicht einfach übertragen lässt.

4. Raumzeitabhängige Felder und Mehrpaarzustände

Das im vorangegangenen Kapitel behandelte Tunnelbild beinhaltet eine Reihe von Approximationen. Zum einen wird die Propagation von Elektron und Positron im externen elektromagnetischen Feld nur semiklassisch berechnet, zum anderen wird das elektromagnetische Feld selbst als konstant und homogen vorausgesetzt. Diese Näherungen sind für den Fall optischer Laser, also elektromagnetischer Felder mit geringer Photonenenergie im Bereich einiger Elektronvolt, durchaus gerechtfertigt und liefern qualitative Abschätzungen zur Paarerzeugung. Weiterhin kann das einfache Tunnelbild zur Erklärung der wesentlichen Effekte herangezogen werden.

In diesem Kapitel werden raumzeitabhängige Felder und ihr Einfluss auf die Paarerzeugung mit dem vollständigen in/out-Formalismus untersucht. Dazu müssen die Propagatorelemente $G(\pm|_{\pm})$, welche zur vollständigen Beschreibung der Paarerzeugung im externen Feld notwendig sind, numerisch bestimmt werden. Für die zu untersuchenden elektromagnetischen Felder wird eine einfache Raumzeitabhängigkeit vorausgesetzt – sie werden als monochromatisch angenommen. Die Beschreibung der monochromatischen Felder folgt im ersten Teil dieses Kapitels. Danach wird die Propagation einzelner Materiefeldmoden untersucht. Hiermit lassen sich bereits bestimmte Charakteristika der Paarerzeugung in monochromatischen Feldern erkennen. Diese Ergebnisse wurden in (Wöllert, Bauke und Keitel 2015b) veröffentlicht. Im letzten Abschnitt dieses Kapitels wird die Propagation von gekoppelten Materiefeldmoden untersucht. Dadurch kann prinzipiell die vollständige Propagation des Vakuumzustandes im externen Feld bestimmt werden. Die entsprechenden Ergebnisse sind in der Arbeit (Wöllert, Bauke und Keitel 2015a) zu finden.

4.1. Monochromatische Felder

Da bei reiner Zeitabhängigkeit des externen Feldes der kanonische Impuls eine Erhaltungsgröße ist, ergibt sich eine wesentliche Vereinfachung für die Integration: Es können alle Moden, durch den Impuls charakterisiert, getrennt voneinander berechnet werden.

4. Raumzeitabhängige Felder und Mehrpaarzustände

Wird nun eine räumliche Abhängigkeit des elektromagnetischen Feldes berücksichtigt, so müssen prinzipiell auch sämtliche Kopplungen zwischen den verschiedenen Moden berücksichtigt werden. Für halbwegs realistische Feldkonfiguration sind dann zweidimensionale Gitter zur Integration notwendig und bei Berücksichtigung des Magnetfeldes sogar dreidimensionale Gitter. Die Gittergröße und Gitterpunktdichte selbst ergibt sich dann aus der Diskretisierung bzw. daraus, wie genau die Auflösung des Impulses sein soll. Der Nachteil von zwei- oder dreidimensionalen Berechnungen ist eindeutig die längere Rechenzeit sowie größere Datenmengen. Beschränkt man sich jedoch auf eine Klasse von elektromagnetischen Feldern, welche lediglich aus einer kleinen Anzahl monochromatischer Wellen zusammengesetzt sind, so entfällt eine Diskretisierung. Der Grund dafür ist, dass eine monochromatische elektromagnetische Welle neben ihrer Polarisati-on nur durch genau einen Wellenvektor \mathbf{k} bestimmt ist. Im Impulsraum koppeln dann nur Materiemoden, welche um ein Vielfaches von \mathbf{k} separiert sind. Für einfache Feldkonfigurationen wie gegenläufige oder gekreuzte Laserfelder, die sich im Wesentlichen auf wenige monochromatische Wellen reduzieren lassen, kann das Vektorpotential des externen Feldes in Coulomb-Eichung in folgender Form geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) &= \sum_n \mathbf{A}_n \cos(\mathbf{k}_n \mathbf{x} - \omega_n t + \varphi_n) \\ &= \sum_n \frac{\mathbf{A}_n}{2} \left(e^{i(\mathbf{k}_n \mathbf{x} - \omega_n t + \varphi_n)} - e^{-i(\mathbf{k}_n \mathbf{x} - \omega_n t + \varphi_n)} \right). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Die Summe läuft dabei über die einzelnen monochromatischen Wellen, welche durch einen Wellenvektor \mathbf{k}_n und Polarisationsvektor \mathbf{A}_n bestimmt sind. Der Dirac-Hamiltonian (2.9) mit dem externen Vektorpotential in Coulomb-Eichung vereinfacht sich zu

$$\mathcal{H}(x) = \alpha (-i\nabla - e\mathbf{A}(x)) + \beta m. \quad (2.9')$$

Durch den Wechsel in den Impulsraum mithilfe der Fouriertransformation

$$\psi(\mathbf{p}, t) = \int d\mathbf{x} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \psi(\mathbf{x}, t) \quad (4.2)$$

nimmt die Wirkung des Differentialoperators (2.9') die Form

$$\begin{aligned} (\mathcal{H}\psi)(\mathbf{p}, t) &= \int d\mathbf{x} e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}} \mathcal{H}\psi(\mathbf{x}, t) \\ &= (\alpha\mathbf{p} + \beta m)\psi(\mathbf{p}, t) \\ &\quad - e \sum_n \frac{\alpha\mathbf{A}_n}{2} \left[e^{i(-\omega_n t + \varphi_n)} \psi(\mathbf{p} - \mathbf{k}_n, t) + e^{-i(-\omega_n t + \varphi_n)} \psi(\mathbf{p} + \mathbf{k}_n, t) \right] \end{aligned} \quad (4.3)$$

an. Daran ist ersichtlich, dass der erste Term $(\alpha\mathbf{p} + \beta m)$ diagonal im Impulsraum ist, während der zweite nur diskrete Impulse der Wellenfunktion miteinander koppelt. Somit ist nur noch eine diskrete Kopplung und keine kontinuierliche Kopplung wie im

Realraum zu berücksichtigen. Physikalisch lässt sich das damit verstehen, dass monochromatische Felder elektromagnetischen Wellen mit einem scharfen Photonenimpuls entsprechen. Dadurch entsteht im Impulsraum der Wellenfunktion auch nur eine Kopplung zwischen Impulseigenfunktionen, die durch eine bestimmte Anzahl der vorhandenen Photonenimpulse \mathbf{k}_n separiert sind. Für mehr als zwei und dazu noch beliebig orientierte Photonenimpulse bzw. Wellenvektoren der monochromatischen Felder \mathbf{k}_n ergeben sich dennoch beliebig komplizierte und dichte Gitter, auf denen die Wellenfunktion nach (4.3) propagiert werden muss. In dieser Arbeit wird von der praktischen Vereinfachung ausgegangen, dass sich das externe elektromagnetische Feld nur aus zwei monochromatischen Feldern zusammensetzt. Das entspricht einer Konfiguration von zwei entgegengesetzt propagierenden oder gekreuzten Laserfeldern mit relativ scharfem Impuls. Durch eine geeignete Lorentztransformation lässt sich nun immer ein Bezugssystem finden, in dem für die beiden Wellenvektoren \mathbf{k}'_1 und \mathbf{k}'_2 gilt

$$\mathbf{k}'_1 = -\mathbf{k}'_2 \equiv \mathbf{k}. \quad (4.4)$$

In diesem Fall reduziert sich das Gitter im Impulsraum auf eine eindimensionale Kette äquidistanter Punkte mit einem Abstand von \mathbf{k} . Die numerische Implementierung wird im Anhang A.1 erleutert.

Was bedeuten diese Vereinfachungen nun für die Berechnung der Propagatorelemente

$$G(\zeta|_{\chi})_{mn} = \int d\mathbf{x}d\mathbf{y} \zeta \varphi_m^+(\mathbf{x}t_{\text{out}}) G(\mathbf{x}t_{\text{out}}, \mathbf{y}t_{\text{in}}) \chi \varphi_n(\mathbf{y}t_{\text{in}})? \quad (2.22)$$

Da das externe elektromagnetische Feld nur zwischen t_{in} und t_{out} eingeschaltet ist und andernfalls null ist, sind die Anfangs- und Endeigenmoden $+\varphi$ und $^+\varphi$ für das Elektron bzw. $-\varphi$ und $^-\varphi$ für das Positron durch die Eigenzustände des freien Dirac-Hamiltonians (2.1) gegeben. Das heißt auch, dass die Anfangs- und Endeigenmoden jeweils identisch sind, also

$$+\varphi_n = ^+\varphi_n, \quad (4.5a)$$

$$-\varphi_n = ^-\varphi_n. \quad (4.5b)$$

Die gängigste Wahl für die Basis dieser Eigenfunktionen sind die Impulseigenfunktionen, deren Quantenzahlen der Impuls \mathbf{p} und der Spin \uparrow/\downarrow in z -Richtung sind. Diese Basis wird auch in dieser Arbeit gewählt. Der Quantenzahlindex n in (4.5) erhält somit die Form

$$n = (\mathbf{p}, \uparrow/\downarrow). \quad (4.6)$$

Würde kein elektromagnetisches Feld wirken, so würden diese Eigenfunktionen weiterhin Eigenfunktionen bleiben und die G -Matrizen in (2.22) entsprächen der Einheitsmatrix. Für ein beliebiges elektromagnetisches Feld hingegen, werden sämtliche Eigenfunktionen unterschiedlicher Impulse und Spins während der Propagation miteinander koppeln, was numerisch prinzipiell nicht machbar ist und im besten Fall nur eine kleine Anzahl an Propagationen ermöglichen würde. Für den häufig verwendeten Fall des räumlich



4. Raumzeitabhängige Felder und Mehrpaarzustände

homogenen elektromagnetischen Feldes entfällt die Kopplung zwischen Moden unterschiedlichen Impulses komplett weg und somit können die Moden mit unterschiedlichen Impulsen separat und auch parallel propagiert werden. Aufgrund der Spinorstruktur der Wellenfunktionen ergibt sich daraus eine 4-dimensionale Differentialgleichung in erster Ordnung in der Zeit. Für die in dieser Arbeit gewählte Konfiguration zweier monochromatischer Felder mit der Bedingung (4.4) koppeln hingegen nur Impulsmoden, die um ein vielfaches von \mathbf{k} separiert sind. Dies sind zwar im Prinzip unendlich viele, da aber mit steigendem Impuls der Moden ihre Kopplung durch das elektromagnetische Feld immer schwächer wird, kann diese ab einem bestimmten Impulswert einfach vernachlässigt werden. Sei N die Anzahl der gekoppelten Moden, die berücksichtigt werden, so ergibt sich eine $4 \times N$ -dimensionale Differentialgleichung, die integriert werden muss. Alle nicht durch ein Vielfaches von \mathbf{k} separierten Moden bilden unabhängige Unterräume, die für sich und parallel berechnet werden können. Bevor nun auf die numerischen Simulation eingegangen wird, soll die Konfiguration aus zwei monochromatischen Feldern genauer charakterisiert werden.

4.1.1. Charakterisierung der verwendeten Feldkonfiguration

Die in dieser Arbeit für die numerische Berechnungen verwendete Feldkonfiguration besteht aus zwei gegenläufigen monochromatischen Feldern mit

$$\mathbf{k}_+ = -\mathbf{k}_- \equiv \mathbf{k}. \quad (4.4')$$

Als Propagationsachse wird die z -Richtung gewählt und damit $\mathbf{k} = k \mathbf{e}_z$. Größen mit „+“ als Subindex beziehen sich auf die in positive z -Richtung laufende Welle und solche mit „-“ als Subindex auf die in negative z -Richtung laufende Welle. In der Einleitung wurde angesprochen, dass das Verhältnis zwischen Feldstärke E und der Kreisfrequenz ω ($\omega = |\mathbf{k}|$ in den verwendeten Einheiten) des elektromagnetischen Feldes, der sogenannte klassische Nichtlinearitätsparameter

$$\xi = \frac{eE}{\omega m}, \quad (4.7)$$

wesentlich für das prinzipielle Verhalten der Paarerzeugung ist. Für die numerischen Untersuchungen in diesem Kapitel wird das Verhältnis von E und ω stets so gewählt, dass $\xi \sim 1$ gilt.

Für die kompakte Beschreibung der Polarisation beider Wellen wird der Jones-Formalismus (Jones 1941) verwendet. Für zirkular links und zirkular rechts polarisierte Wellen entlang der z -Richtung werden die beiden Jones-Vektoren

$$|l\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y), \quad (4.8a)$$

$$|r\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y) \quad (4.8b)$$

verwendet. Jeder mögliche Polarisationszustand kann durch Superposition dieser beiden Vektoren beschrieben werden. Die Polarisation des monochromatischen Feldes in klassischer Beschreibung lässt sich mit dem Spin der Photonen in quantenfeldtheoretischer Beschreibung identifizieren (Bliokh, Bekshaev und Nori 2013). In der hier gewählten Geometrie entspricht der Zustand $|l\rangle$ Photonen mit Spin \uparrow und der Zustand $|r\rangle$ Photonen mit Spin \downarrow in z -Richtung. Der Spin der monochromatischen Welle kann mithilfe des klassischen Spinvektors $\boldsymbol{\sigma}$ beschrieben werden und es gilt $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{e}_z$ für den zirkular links polarisierten Fall $|l\rangle$ sowie $\boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{e}_z$ für den zirkular rechts polarisierten Fall $|r\rangle$. Bei beliebiger Polarisationen gilt in der hier gewählten Geometrie für den Spinvektor

$$-1 < \sigma_z < 1. \quad (4.9)$$

Im Zusammenhang mit dem Spin kann eine klassische Helizität für die monochromatische Welle definiert werden

$$h = \boldsymbol{\sigma} \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}. \quad (4.10)$$

Die Helizität gibt die Projektion vom Spin auf die Ausbreitungsrichtung an. Eine mögliche Wahl für das Vektorpotential zur Parametrisierung beliebiger Polarisation ist die folgende

$$\mathbf{A}_{\pm}(z, t) = \text{Re} \left[\frac{\mathbf{E}_{\pm}}{i\omega} \left(\cos \alpha_{\pm} |l\rangle + \sin \alpha_{\pm} e^{i\varphi_{\pm}} |r\rangle \right) e^{i(\pm kz - \omega t)} \right]. \quad (4.11)$$

Daraus können das elektrische Feld und das magnetische Feld hergeleitet werden. Für das elektrische Feld gilt

$$\mathbf{E}_{\pm} = \text{Re} \left[\mathbf{E}_{\pm} \left(\cos \alpha_{\pm} |l\rangle + \sin \alpha_{\pm} e^{i\varphi_{\pm}} |r\rangle \right) e^{i(\pm kz - \omega t)} \right]. \quad (4.12)$$

Durch Einsetzen der Jones-Vektoren (4.8) ergibt sich

$$\mathbf{E}_{\pm} = E_{\pm} \begin{pmatrix} \cos \varphi_{\pm}/2 & -\sin \varphi_{\pm}/2 \\ \sin \varphi_{\pm}/2 & \cos \varphi_{\pm}/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\pm kz - \omega t + \varphi_{\pm}/2) \cos(\alpha_{\pm} - \pi/4) \\ \sin(\pm kz - \omega t + \varphi_{\pm}/2) \sin(\alpha_{\pm} - \pi/4) \end{pmatrix}. \quad (4.12')$$

In dieser Darstellung lässt sich gut erkennen, dass der Parameter φ_{\pm} die Polarisationsellipse der jeweiligen monochromatischen Welle in der xy -Ebene dreht und somit deren Orientierung bestimmt. Der zweite Parameter α_{\pm} bestimmt die Elliptizität. Zum Beispiel entsprechen $\alpha_{\pm} = \pi/4$ und $\alpha_{\pm} = 3\pi/4$ einer linearen Polarisation. Die zirkulare Polarisation ist für $\alpha_{\pm} = 0$ und $\alpha_{\pm} = \pi/2$ gegeben. Dieser Sachverhalt ist zur Veranschaulichung in Abbildung 4.1 dargestellt. Das magnetische Feld besitzt im Prinzip genau die gleiche Form wie das elektrische Feld, nur dass es senkrecht zu diesem und der Ausbreitungsrichtung steht. Es gilt

$$\mathbf{B}_{\pm} = \frac{\mathbf{k}_{\pm}}{k} \times \mathbf{E}_{\pm}. \quad (4.13)$$

4. Raumzeitabhängige Felder und Mehrpaarzustände

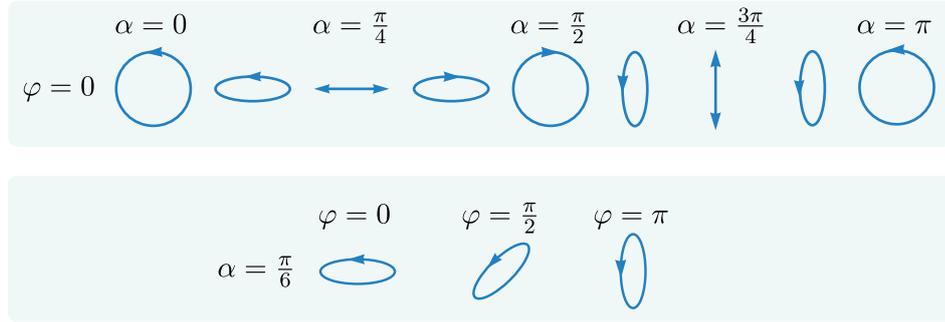


Abbildung 4.1: Die obere Hälfte stellt schematisch dar, wie der Polarisationsparameter α bei festem $\varphi = 0$ die Elliptizität der Polarisationsellipse beeinflusst. In der unteren Hälfte ist für eine feste Elliptizität $\alpha = \pi/6$ der Einfluss des Parameters φ gezeigt, welcher eine Drehung der Polarisationsellipse bewirkt.

Die mittlere Intensität beider Felder beträgt $\varepsilon_0 E_{\pm}^2/2$ und hängt nur von der gewählten elektrischen Feldstärke, nicht aber von den Parametern φ oder α ab. Die mittlere Intensität ist somit in der Charakterisierung mittels Jones-Vektoren von der gewählten Polarisation unabhängig. Das ist ein praktischer Vorteil für die Untersuchung der Paa-
rerzeugung bei unterschiedlichen Polarisierungen und auch der Grund für die Wahl des Jones-Formalismus.

Das vollständige externe elektromagnetische Feld ist durch die Überlagerung der beiden monochromatischen Felder bestimmt:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_+ + \mathbf{A}_-. \quad (4.14)$$

Ein einzelnes monochromatisches Feld ist vollständig durch die Feldstärke E sowie den beiden Polarisierungsparametern φ und α festgelegt. Zusätzlich hängen beide Felder vom Betrag des Wellenvektors k ab. Somit ergeben sich insgesamt 7 Parameter zur vollständigen Feldcharakterisierung. Da es praktisch nicht durchführbar ist, diesen großen Konfigurationsraum zu untersuchen, werden folgende Annahmen gemacht um die Anzahl der Parameter zu reduzieren: Die Feldstärken beider Wellen sollen identisch sein

$$E_- = E_+. \quad (4.15)$$

Weiterhin ist auch nur die relative Lage der Polarisationsellipsen im Raum zueinander von Bedeutung, d.h. anstatt von φ_+ und φ_- ist nur die Differenz $\varphi_+ - \varphi_-$ zu berücksichtigen. Zur Vereinfachung soll aber davon ausgegangen werden, dass beide Polarisationsellipsen die gleiche Elliptizität und auch Orientierung besitzen. Bedingt durch die gleiche Orientierung folgt

$$\varphi_+ - \varphi_- = 0 \rightarrow \varphi_+ = \varphi_- \equiv 0. \quad (4.16)$$

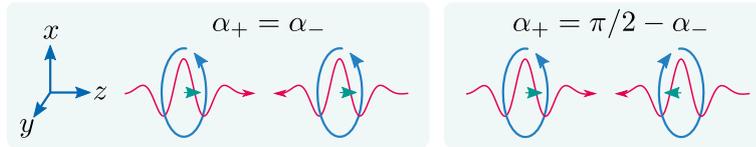


Abbildung 4.2: Links ist der Fall dargestellt, in dem die Polarisationen beider monochromatischen Felder denselben Drehsinn bzw. Spin besitzen (symbolisiert durch den kurzen Pfeil). Da die Wellenvektoren entgegengesetzt sind, ist für diesen Fall die Helizität beider Felder auch entgegengesetzt. Rechts ist der Fall dargestellt, bei dem der Spin entgegengesetzt und die Helizität identisch ist.

Damit die Polarisationen beider Felder auch dieselbe Elliptizität besitzen, muss entweder

$$\alpha_+ = \alpha_- \quad \text{oder} \quad \alpha_- = \pi/2 - \alpha_+ \quad (4.17)$$

gelten. Im ersteren Fall ist die Rotationsrichtung beider Polarisationen identisch, wohingegen sie im letzteren entgegengesetzt ist (siehe Abbildung 4.2). Für beide Fälle kann eine Aussage bezüglich der Symmetrie von Spin und Helizität getroffen werden. Für den ersten Fall mit gleichem Drehsinn sind die Spinvektoren σ parallel zueinander und die Helizitäten h (4.10) entgegengesetzt. Für den zweiten Fall mit entgegengesetztem Drehsinn sind die Spinvektoren antiparallel und die Helizitäten beider Felder identisch.

Durch diese Vereinfachung sind von den ursprünglich 7 Parametern nur noch 3 Parameter (E_+ , k , α_+) übrig und zwei Fälle müssen unterschieden werden (Rotation mit gleichem bzw. entgegengesetztem Sinn). Zusätzlich zur Wahl der Laserfeldparameter sind auch Anfangsimpuls und -spin der zu propagierenden Mode beliebig, d.h. der Anfangszustand für das Elektron bzw. Positron. Aufgrund dieser Parametervielfalt werden in den numerischen Simulationen immer nur maximal zwei Parameter variiert und die restlichen festgehalten, damit eine 2-dimensionale Darstellung möglich ist.

4.1.2. Ein- und Ausschaltvorgang

Eine grundlegende Problematik bei Rechnungen im externen Feld stellt die Identifizierung der Zustände von Elektronen und Positronen „im Feld“ dar. Anders als im feldfreien Fall, bei dem das externe Feld gleich Null ist und die Eigenzustände des Materiefeldes freien Elektronen bzw. Positronen entsprechen, ist eine solche Zuordnung der Eigenzustände vom Dirac-Hamiltonian im eingeschalteten Feld (2.9) bis auf Spezialfälle nicht möglich. Dieses Problem ist generell in wechselwirkenden Quantenfeldtheorien (Bogoljubov und Širkov 1984) vorhanden und kann auf eine Art Unschärfe zurückgeführt werden. Denn während der Wechselwirkung zwischen verschiedenen Zuständen verlieren diese ihre Identität, da auch neue, z.B. gebundene Zustände, erzeugt werden. Mitunter ist es

4. Raumzeitabhängige Felder und Mehrpaarzustände

möglich Quasizustände oder effektive Zustände zu definieren. In dieser Arbeit wird diese Problematik umgangen, indem das elektromagnetische Feld abgeschaltet wird, bevor die propagierten Moden untersucht werden. Will man also wissen, wie sich der Materiefeldzustand während der Wechselwirkung mit dem externen Feld verändert, muss das externe Feld erst ausgeschaltet werden. Dabei sollte der Ein- und Ausschaltvorgang den Feldzustand so wenig wie möglich ändern. Ein zu abruptes Einschalten würde zum Beispiel bereits energetisch höher liegende Zustände anregen, während bei zu langsamen Ausschalten die Dynamik noch unnötig weiterlaufen würde. Mit dem Ein- und Ausschalten soll nur eine geringe Störung des Systems einhergehen. Eine Störung durch Messung würde aber auch im Experiment auftreten.

Das numerische Ein- und Ausschalten wird erreicht, indem die Fensterfunktion

$$w(t) = \begin{cases} \sin^2 \frac{\pi(\Delta T - t)}{2\Delta T} & \text{für } -\Delta T \leq t \leq 0, \\ 1 & \text{if } 0 \leq t \leq T, \\ \sin^2 \frac{\pi(T + \Delta T - t)}{2\Delta T} & \text{für } T \leq t \leq T + \Delta T, \end{cases} \quad (4.18)$$

mit dem Gesamtvektorpotential \mathbf{A} (4.14) multipliziert wird und das Produkt als eigentliches Vektorpotential für das elektromagnetische Feld benutzt wird. Durch T ist die Wechselwirkungsdauer definiert und ΔT entspricht der Ein- bzw. Ausschaltdauer. Als Ein- und Ausschaltdauer wird, sofern nicht anders angegeben, $\Delta T = 2.5$ Laserzyklen verwendet. Weiterhin gilt $t_{\text{in}} = -\Delta T$ und $t_{\text{out}} = T + \Delta T$.

4.2. Dynamik einzelner Materiefeldmoden

In diesem Abschnitt wird die Propagation einzelner Materiefeldmoden untersucht. Das bedeutet, dass zur Zeit t_{in} ein Elektronen- oder Positronenzustand mit definiertem Impuls und Spin

$$n \equiv (\mathbf{p}, \sigma_z) = (\mathbf{p}_0, \uparrow/\downarrow) \quad (4.19)$$

festgelegt wird und anschließend unter dem Einfluss des externen Feldes propagiert wird. Während der Wechselwirkung werden dann Übergänge zu den durch das Feld angekoppelten Moden mit den Impulsen $p = lke_z + \mathbf{p}_0$ mit ganzzahligem l stattfinden. Durch einen Trick können diese numerischen Resultate bereits verwendet werden um etwas über den Erwartungswert sagen zu können, dass ein Teilchen mit der Quantenzahl n durch die Wechselwirkung mit dem externen Feld erzeugt wird. Dieser Erwartungswert ist, für den Fall, dass es sich bei dem Teilchen um ein Elektron handelt, nach (Fradkin, Gitman und Shvartsman 1991) mit

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_n &= \langle \text{out} | \hat{a}_n^+ (\text{out}) \hat{a}_n (\text{out}) | \text{out} \rangle \\ &= \sum_n |G^{+|-}_{nm}|^2 \end{aligned} \quad (4.20)$$

gegeben. Es müssten im Prinzip alle möglichen Positroneneigenzustände m , die mit n koppeln können, von t_{in} nach t_{out} propagiert und anschließend auf den Elektronenzustand n projiziert werden, was gerade $G^{(+|-)}_{nm}$ entspricht. Über das Betragsquadrat dieser Werte muss anschließend summiert werden. Der Trick, um diese Rechnung zu vereinfachen, besteht darin, direkt mit dem Elektronenzustand n bei t_{out} zu beginnen und diesen dann rückwärts¹ in der Zeit bis zu t_{in} zu propagieren. Die sich ergebene Wellenfunktion zur Zeit t_{in} kann dann direkt in die verschiedenen Positronenzustände m zerlegt werden und die Koeffizienten können anschließend aufsummiert werden. Somit ist nur eine einzige Propagation notwendig.

4.2.1. Ein Beispiel

In diesem Abschnitt werden anhand eines einfachen Beispiels die wesentlichen Aspekte einer einzelnen Propagation veranschaulicht. Die Propagation soll sich auf ein Elektron mit $n_0 = (\mathbf{p}_0 = 0, \uparrow)$ beziehen. Der Impuls wurde gleich Null gewählt, da in diesem Fall aufgrund der minimal notwendigen Mindestenergie die Paarerzeugung am wahrscheinlichsten ist. Die Propagation dieser Mode wird dazu führen, dass nach und nach auch angekoppelte Moden besetzt werden. Ein Maß für ihre Besetzung ist durch die Größen

$$c_{l+} = |G^{(+|+)}_{(\mathbf{p}_0, \uparrow)(\mathbf{p}_l, \uparrow)}|^2 + |G^{(+|+)}_{(\mathbf{p}_0, \uparrow)(\mathbf{p}_l, \downarrow)}|^2, \quad (4.21a)$$

$$c_{l-} = |G^{(+|-)}_{(\mathbf{p}_0, \uparrow)(\mathbf{p}_l, \uparrow)}|^2 + |G^{(+|-)}_{(\mathbf{p}_0, \uparrow)(\mathbf{p}_l, \downarrow)}|^2 \quad (4.21b)$$

gegeben. Die Größen c_{l+} entsprechen der Projektion der propagierten Elektronenmode n_0 auf angekoppelte Elektronenmoden mit Quantenzahlen $(\mathbf{p}_l = \mathbf{p}_0 + l\mathbf{k}\mathbf{e}_z, \uparrow/\downarrow)$. Über den Spin wurde bereits summiert um die Darstellung einfacher zu halten. Analog entsprechen die Größen c_{l-} der Ankopplung an Positronenmoden. Die Ganzzahl l gibt somit an, wie weit entfernt, in Einheiten des Wellenvektors k , die angekoppelten Moden zur propagierten Mode sind.

Für die beiden monochromatischen Laser wird lineare Polarisation $\alpha_- = \alpha_+ = \pi/4$ angenommen. Als Frequenz wurde $\omega = 0.472\text{m}$ gewählt und der Parameter $\xi = 1/2$ gesetzt. Die Feldstärke ergibt sich nach (4.7) zu $E = \xi\omega m/e$. Da sich beide Laserfelder überlagern, ergibt sich ein maximal möglicher Wert von $\xi = 1$. In Abbildung 4.3 ist die resultierende Propagation und Ankopplung an die benachbarten Moden dargestellt. Zur Berücksichtigung des Ein- und Ausschaltproblems wurden die Größen aus (4.21) für die linken zwei Bilder direkt im Feld berechnet und für die rechten zwei Bilder erst im Vakuum nach Ausschalten des Feldes. Für die Bilder im Vakuum ist gut erkennbar, dass

¹Aufgrund der Zeitumkehrinvarianz bei monochromatischen Feldern kann die Propagation trotzdem vorwärts in der Zeit ausgeführt werden.

4. Raumzeitabhängige Felder und Mehrpaarzustände

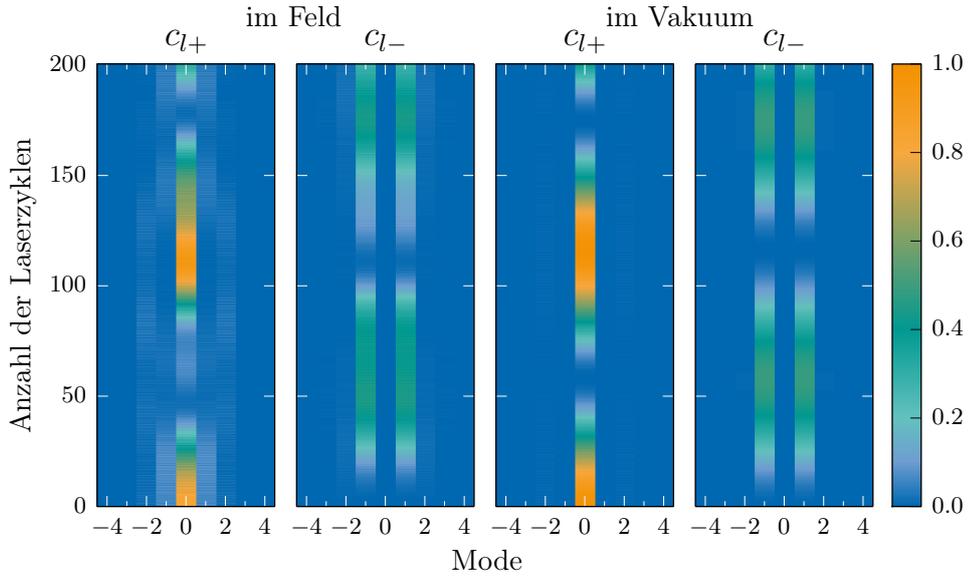


Abbildung 4.3: Zeitentwicklung eines Elektronenzustandes mit den Quantenzahlen $\mathbf{p} = 0$ und Spin \uparrow . Die Ankopplung an benachbarte Elektronen- und Positronenmoden mit $\mathbf{p}_l = l k \mathbf{e}_z$ ist im Feld (links), als auch im Vakuum, nach Abschalten des Feldes, zu sehen. Die Besetzungskoeffizienten für die Elektronenmoden sind durch c_{l+} und für die Positronenmoden durch c_{l-} gegeben. Für die Simulation wurden die Parameter $\alpha_+ = \alpha_- = \pi/4$, $\omega = 0.472 \text{ m}$ und $\xi = 1/2$ verwendet.

anfänglich nur die ursprüngliche Elektronenmode n_0 mit $l = 0$ besetzt ist. Innerhalb der ersten 50 Laserzyklen sieht man, dass sich das spektrale Gewicht zu gleichen Teilen auf die angekoppelten Positronenmoden mit $l = \pm 1$ verteilt. Anschließend wandert das Gewicht wieder zurück zur Ausgangsmode. Speziell für die hier gewählten Parameter findet eine deutliche Oszillation der Moden statt. Bei den Moden in den rechten zwei Bildern, die im Feld gemessen werden, sind kleine Unterschiede zu denen im Vakuum zu erkennen. Dort werden auch Elektronen- und Positronenmoden mit bis zu $l = \pm 2$ besetzt. Für diese spezielle Simulation wäre es daher ausreichend nur insgesamt 9 Moden bis $l = \pm 4$ numerisch aufzulösen und die höheren bzw. niedrigen abzuschneiden. Für andere Parameter, vor allem mit größer werdendem ξ , nimmt die Anzahl der zu berücksichtigenden Moden zu.

Um den Unterschied zwischen „Messungen“ im Feld und Messungen im Vakuum deutlicher zu machen, sind in Abbildung 4.4 jeweils die Gewichte c_{l-} für beide Fälle dargestellt. Daraus geht klar hervor, dass das Messen im Feld zu unphysikalischen Oszillationen führt. Die Frequenz dieser Oszillationen entspricht in etwa der des Laserfeldes. Wird das Feld hingegen abgeschaltet, so ergibt sich eine glatte harmonische Schwingung mit wesentlich geringerer Frequenz. Diese harmonische Schwingung kann als Rabi-Oszillation gedeutet werden (Mocken u. a. 2010). Im Unterschied zu dem typischen Zwei-Niveau-System, welches periodisch getrieben wird, sind hier mehr als zwei Level bzw. Moden

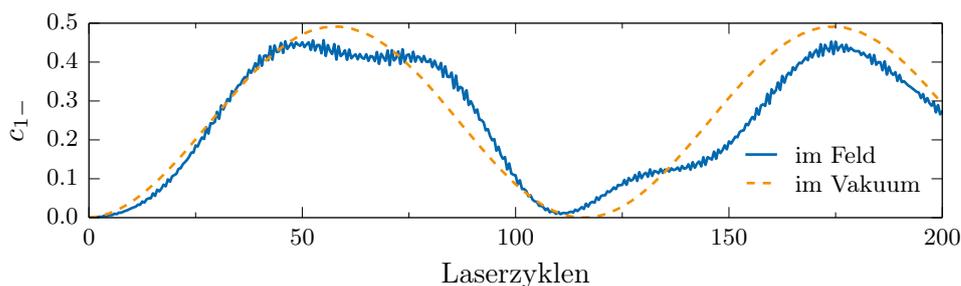


Abbildung 4.4: Detailliertere Darstellung der Unterschiede zwischen der Messung im Feld (durchgezogene Linie) und der Messung im Vakuum (gestrichelte Linie). Beide Linien entsprechen den Werten c_{1-} aus Abbildung 4.3. Die Messung im Feld zeigt hochfrequente Oszillationen mit Frequenzen nahe der Laserfeldfrequenz. Diese Oszillationen haben keine physikalische Bedeutung. Wird das Feld zu den jeweiligen Messungen abgeschaltet, so ergibt sich eine glatte Oszillation, die mehrere Laserzyklen dauert.

beteiligt und das Spektrum der Resonanzfrequenzen, bei denen das elektromagnetische Feld gerade verschiedene Moden koppelt, ist wesentlich komplizierter. Für die in Abbildung 4.3 verwendeten Parameter befindet sich das System gerade in Resonanz. Der Erwartungswert \mathcal{N}_{n_0} (4.20), dass nach der Wechselwirkung mit dem elektromagnetischen Feld ein Elektron mit Quantenzahl n_0 vorhanden ist, ist durch die Summe über die Positronenkoeffizient c_{l-} gegeben. Daher kann erahnt werden, dass dieser Erwartungswert in Abhängigkeit von der Gesamtdauer des elektromagnetischen Feldes auch oszilliert. Diese Rabi-Oszillationen werden im nächsten Abschnitt genauer untersucht.

4.2.2. Rabi-Oszillationen

Um einen groben Überblick über die Rabi-Oszillationen zu gewinnen, ist in Abbildung 4.5 der Erwartungswert $\mathcal{N}_{(p_0=0,\uparrow/\downarrow)}$ spinaufgelöst für drei verschiedene Parametersätze dargestellt. Für alle Konfigurationen wurde $\xi = 1/2$ gewählt. Im obersten Fall wurde eine lineare Polarisation mit $\alpha_{\pm} = \pi/4$ und eine Feldfrequenz von $\omega = 0.472 \text{ m}$ gewählt und entspricht damit genau der Konfiguration im vorhergehenden Abschnitt. Aufgrund der linearen Polarisation ist der Erwartungswert spinunabhängig und die Kurven für $\mathcal{N}_{(p_0=0,\uparrow)}$ und $\mathcal{N}_{(p_0=0,\downarrow)}$ liegen genau aufeinander. Im mittleren Fall wurde eine Frequenz von $\omega = 0.692 \text{ m}$ und eine elliptische Polarisation mit $\alpha = 0.6 \times \pi/4$ gewählt. Aufgrund der elliptischen Polarisation sind nun die Erwartungswerte für ein Elektron mit Spin \uparrow bzw. Spin \downarrow nicht mehr identisch. Man kann sehr gut erkennen, dass für das Elektron mit Spin \uparrow weiterhin eine Resonanz vorhanden ist, während die Wahrscheinlichkeit, dass ein Elektron mit Spin \downarrow erzeugt wird, faktisch Null ist. Die Resonanzbedingungen sind also sowohl von der Feldpolarisation sowie vom Spin des Elektronenzustandes abhängig. Weiterhin besteht natürlich auch eine Abhängigkeit vom Impuls des Elektronenzustandes. Die spinabhängige Verschiebung der Resonanz ist im unteren Teilbild von Abbildung 4.5

4. Raumzeitabhängige Felder und Mehrpaarzustände

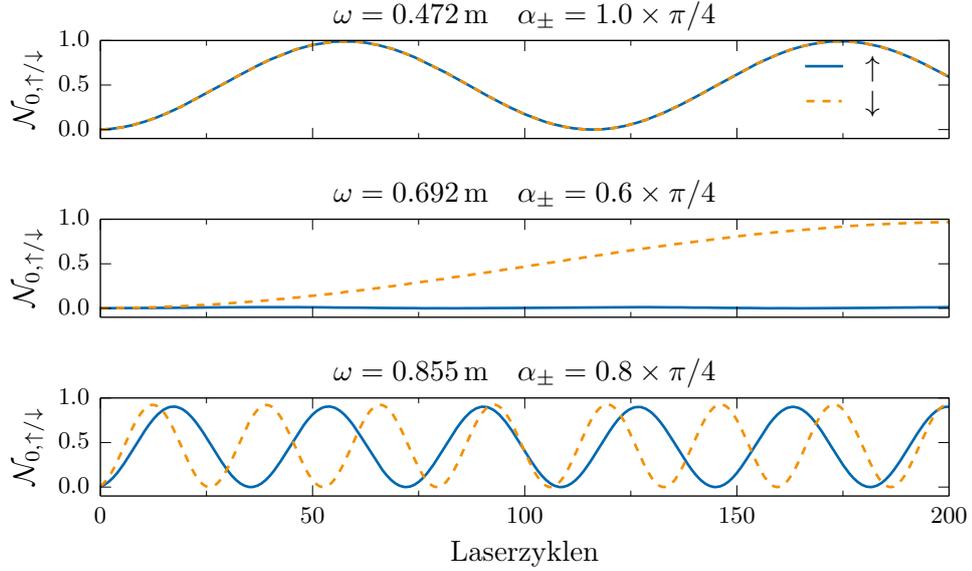


Abbildung 4.5: Rabi-Oszillationen für die Besetzungswahrscheinlichkeit $\mathcal{N}_{0,\uparrow/\downarrow}$ eines erzeugten Elektrons mit Impuls Null. Es sind drei Simulationen mit verschiedenen Polarisationsparametern α_{\pm} und Feldfrequenzen ω gezeigt (mit $\xi = 1/2$). Im oberen Bild wurde eine lineare Polarisation der Felder gewählt und beide Spinzustände des Elektrons zeigen das gleiche resonante Verhalten. Bei elliptischer Polarisation im mittleren Bild zeigt sich, dass der Zustand mit Spin \uparrow nicht angeregt wird. Der Zustand mit Spin \downarrow hingegen zeigt ein resonantes Verhalten. Für leicht elliptische Polarisation ist im unteren Bild ersichtlich, dass beide Spinzustände nahezu resonant sind, aber unterschiedliche Frequenzen besitzen.

für eine leicht elliptische Polarisation mit $\alpha = 0.8 \times \pi/4$ zu erkennen. Für beide Spinzustände des Elektrons ist die Anregung mit der Laserfrequenz $\omega = 0.855 \text{ m}$ nahezu resonant, jedoch besitzen beide Rabi-Oszillationen eine unterschiedliche Rabi-Frequenz.

Aus den drei Parametersätzen wird ersichtlich, dass die Periodendauern der Rabi-Oszillationen ein Vielfaches der Laserperiode sind und auch stark variieren. Das Spektrum der erzeugten Materieteilchen steht daher in einem nichttrivialen Zusammenhang mit den gewählten Laserfeldparametern. Im nächsten Abschnitt werden die Rabi-Oszillationen auf ihr typisches Resonanzverhalten geprüft.

4.2.3. Resonanzcharakteristika

Bei der Rabi-Oszillation in einem Zwei-Niveau-System tritt die vollständige Umbesetzung von einem Niveau in das andere nur genau bei der Resonanzfrequenz ω_R auf (Griffiths 2004). Entfernt sich die treibende Kraft von dieser Resonanzfrequenz, so fällt die Umbesetzung geringer aus. Um dieses Verhalten zu prüfen, wird der maximale

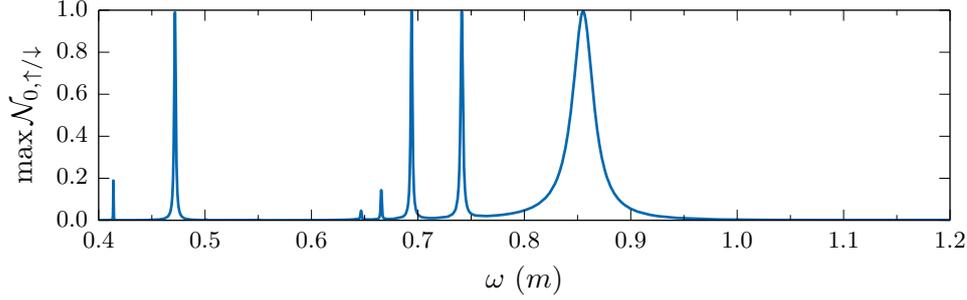


Abbildung 4.6: Paarerzeugungsresonanzen bei linearer Polarisation $\alpha_{\pm} = \pi/4$. Für jede Laserfeldfrequenz ω zwischen 0.4 m und 1.2 m wurde analog zu den bisherigen Simulationen eine Propagation über insgesamt 200 Laserzyklen gemacht. Die Ordinate gibt die dabei maximal auftretende Besetzungswahrscheinlichkeit $\mathcal{N}_{0,\uparrow/\downarrow}$ an. Es sind 4 vollständige Resonanzen zu erkennen. Die anderen Resonanzen haben eine sehr niedrige Rabi-Frequenz und erreichen nicht das Maximum von $\mathcal{N}_{0,\uparrow/\downarrow} = 1$ innerhalb der ersten 200 Laserzyklen. Mit einer längeren Simulationsdauer würden diese stärker ausgeprägt sein und weitere Resonanzen würden auftreten.

Wert von $\mathcal{N}_{(p_0=0,\uparrow/\downarrow)}$ als Maß für die Vollständigkeit der Umbesetzung über die verwendete Laserfrequenz aufgetragen. In Abbildung 4.6 wird dafür eine Frequenz von $\omega = 0.4$ m bis $\omega = 1.2$ m durchlaufen. Für jede Frequenz ist die Wechselwirkungsdauer auf maximal 200 Laserzyklen begrenzt und es wird von linearer Polarisation $\alpha_{\pm} = \pi/4$ sowie $\xi = 1/2$ ausgegangen. Während dieser 200 Laserzyklen wird das Maximum von $\mathcal{N}_{(p_0=0,\uparrow/\downarrow)}$ gesucht und genau dieses ist in Abbildung 4.6 über die durchlaufene Laserfrequenz ω dargestellt. Es sind vier vollständige Resonanzen und drei unvollständige Resonanzen erkennbar. Die unvollständigen Resonanzen haben eine sehr geringe Rabi-Frequenz und erreichen daher nicht ihr „Besetzungsmaximum“ innerhalb der ersten 200 Laserzyklen.

Das für die Resonanz um $\omega = 0.47$ m typische Rabi-Verhalten ist in Abbildung 4.7 detailliert dargestellt. Bei einer Rabi-Oszillation hat die Resonanz die charakteristische Form einer Lorentzfunktion

$$\mathcal{N}_{(p_0=0,\uparrow/\downarrow)}(\omega) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega - \omega_R}{w/2}\right)^2}. \quad (4.22)$$

Gegen diese sollen die numerischen Daten aus Abbildung 4.6 gefittet werden. Die Fitparameter sind die Resonanzfrequenz ω_R und die Halbwertsbreite w (FWHM). Wie im linken Bild von Abbildung 4.7 ersichtlich wird, folgen die hier bei der Paarerzeugung auftretenden Oszillationen exakt dieser Form. Direkt an der Resonanz wird die Oszillationsfrequenz Ω der „Umbesetzung“ als Rabi-Frequenz Ω_R bezeichnet. Die Oszillationsfrequenz verändert sich mit größer werdender Differenz $\omega_R - \omega$. Die typische Form ist mit

$$\Omega = \sqrt{\Omega_R^2 + \eta^2 (\omega - \omega_R)^2} \quad (4.23)$$

4. Raumzeitabhängige Felder und Mehrpaarzustände

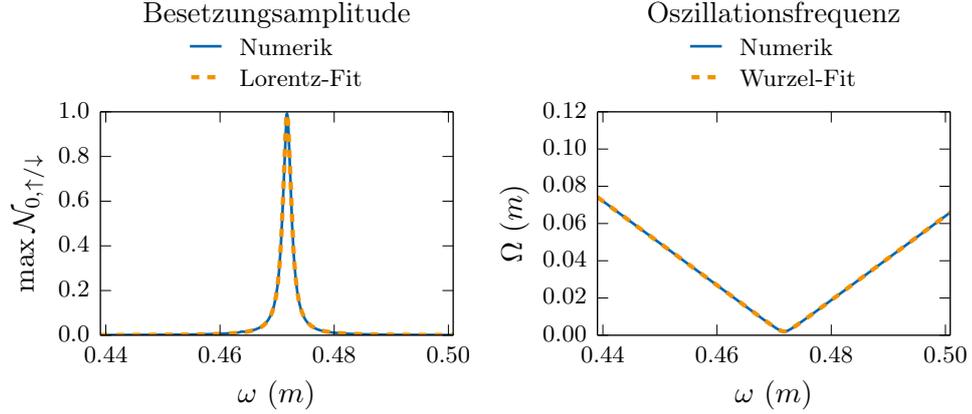


Abbildung 4.7: Detaillierte Darstellung der Resonanz bei $\omega \simeq 0.472$ m und Vergleich mit dem typischen Resonanzverhalten von Rabi-Oszillationen. Es zeigt sich eine sehr gute Übereinstimmung. Im linken Bild wurde die Besetzungswahrscheinlichkeit $\max \mathcal{N}_{(p_0=0,\uparrow/\downarrow)}$ mit einer Lorentz-Funktion (4.22) gefittet. Als Werte für die Fitparameter ergaben sich $\omega_R = 0.47174(1)$ m und $w = 0.001780(3)$ m. Im rechten Bild ist die Oszillationsfrequenz Ω in Abhängigkeit der Laserfrequenz ω dargestellt mit einem Fit an die Funktion (4.23). Die Fitparameter ergeben $\Omega_R = 0.002012(4)$ m, $\eta = 2.26639(4)$ und $\omega_R = 0.47175(1)$ m.

gegeben (Mocken u. a. 2010). Die Fitparameter sind die Rabi-Frequenz Ω_R , die Resonanzfrequenz ω_R und ein resonanzabhängiger Koeffizient η . Um den Fit durchzuführen, muss zusätzlich die Oszillationsfrequenz Ω von $\mathcal{N}_{(p_0=0,\uparrow/\downarrow)}$ bestimmt werden. Dazu wird numerisch eine harmonische Funktionen an die Daten für $\mathcal{N}_{(p_0=0,\uparrow/\downarrow)}$ gefittet und Ω extrahiert. Im rechten Teilbild von Abbildung 4.7 ist der Fit von (4.23) gegen die numerischen Daten dargestellt und eine genaue Übereinstimmung ist ersichtlich. Diese Resultate sprechen dafür, dass auch bei monochromatischen Laserfeldern im Bereich $\xi \sim 1$ die Paarerzeugung mathematisch als ein Mehrlevel-System aufgefasst werden kann, bei dem die Übergänge bzw. die Paarerzeugung durch Resonanzbedingungen festgelegt sind.

Wird das in Abbildung 4.6 dargestellte Resonanzspektrum für kleinere Frequenzen $\omega \ll m$ bestimmt, so zeigt sich, dass die Resonanzen immer dichter werden. Der Grund hierfür ist, dass die benachbarten Moden eine Energiedifferenz von ω äquivalent zur Photonenenergie besitzen. Um so kleiner dieser Abstand mit sinkender Laserfrequenz wird, desto mehr resonante Übergänge werden zwischen vielen verschiedenen Leveln möglich. Das entspricht dem Bild, dass es wesentlich mehr Möglichkeiten gibt, mit kleinen Photonenergien in Summe auf die Ruhemasse zu kommen, als mit größeren. Wird der Parameter ξ festgehalten, so sinkt auch die Feldstärke mit kleiner werdendem ω und das System wird schwächer getrieben, was auch eine sinkende Rabi-Frequenz bedeutet. Für realistische Wechselwirkungszeiten wird anstatt der vollen Oszillation nur noch der anfängliche quadratische Anstieg sichtbar. Ähnlich wie bei Fermi's goldener Regel würde die Integration im Impulsraum über alle möglichen Paarzustände im Kontinuum dann zu einer Rate, also einem sehr kleinen linearen Anstieg der Paare mit der Zeit, führen.

Lässt man die Feldstärke jedoch fest und vermindert nur die Laserfrequenz ω , so erreicht man das Tunnelregime $\xi \gg 1$. Auch hier wird die hohe Resonanzdichte und der quadratische Anstieg in Summe zu einer Rate für die Paarerzeugung führen. Diese wird nun allerdings exponentiell von der Feldstärke abhängig sein, was der starken Nichtlinearität des getriebenen Systems bzgl. der Feldstärke entspricht. Für das Regime $\xi \ll 1$ kann die Laserfrequenz festgehalten und die Feldstärke verkleinert werden. Hierfür werden die Übergänge im Mehrlevelsystem immer unwahrscheinlicher und lassen sich dann perturbativ betrachten. Somit wird für den Wert der Rate dann die Anzahl der Übergänge entscheidend werden, die notwendig sind um von einem Positronenzustand zu einem Elektronenzustand zu gelangen. Die Anzahl ergibt sich im Optimalfall als Quotient zwischen Mindestenergie $2m$ und der Photonenenergie ω . Die Rate besitzt dann die perturbative Form $\sim \xi^{4m/\omega}$.

Die verschiedenen Regime der Paarerzeugung lassen sich also auch durch ein getriebenes Mehrlevelsystem veranschaulichen. Für kleine Frequenzen und der entsprechenden Approximation eines rein zeitlich oszillierenden Feldes, wurden die Raten für die verschiedenen Regime ξ in (Brezin und Itzykson 1970) berechnet. Die Verteilung der erzeugten Paare in Abhängigkeit von ihrer kinetischen Gesamtenergie ist bei kleinen Photonenergien (im Vergleich zur Ruhemasse m) kontinuierlich verteilt, da ein Photon mehr oder weniger keine große Rolle spielt. Bei sehr hohen Photonenergien wird die diskrete Natur des Spektrums, wie in Abbildung 4.6 dargestellt, deutlich sichtbar.

4.2.4. Polarisationsabhängigkeit der Resonanzen

Das im vorhergehenden Abschnitt dargestellte Resonanzspektrum wurde lediglich für den Fall der linearen Polarisation bestimmt. Wird neben der Frequenz (bei weiterhin festgehaltenem $\xi = 1/2$) auch die Polarisation der Laserfelder verändert, so ergeben sich für den Fall gleichsinnig rotierender Felder die in Abbildung 4.8 dargestellten 2-dimensionalen Bilder. Die Farbe entspricht dem Maximum des Erwartungswertes, dass während der gesamten Wechselwirkungszeit von 200 Laserzyklen ein Elektron mit Impuls Null und dem jeweiligen Spin erzeugt wird. Der horizontale Schnitt entlang $\alpha_+ = \pi/4$ entspricht für beide Teilbilder genau der Abbildung 4.6. Das untere Ende der Bilder ($\alpha_+ = 0$) entspricht zirkular polarisiertem Licht. Die Elliptizität nimmt bis $\alpha_+ = \pi/4$ zu, wo lineare Polarisation vorliegt, und anschließend bis $\alpha_+ = \pi/2$ wieder ab, wo erneut zirkulare Polarisation herrscht. Der Drehsinn zwischen unterer und oberer Hälfte der Bilder ist gerade entgegengesetzt. Die Polarisation könnte bis $\alpha_+ = \pi$ fortgesetzt werden, jedoch sind die Bilder spiegelsymmetrisch um die Polarisation $\alpha_+ = \pi/2$. Zuerst soll nun der Fall gleichsinnig rotierender Felder diskutiert werden und danach der Fall gegensinnig rotierender Felder.

Im Falle gleichsinnig rotierender Felder lässt sich erkennen, dass die Resonanzfrequenzen von der Polarisation abhängen. Die Resonanzbreite ist in etwa bei linearer Polarisation

4. Raumzeitabhängige Felder und Mehrpaarzustände

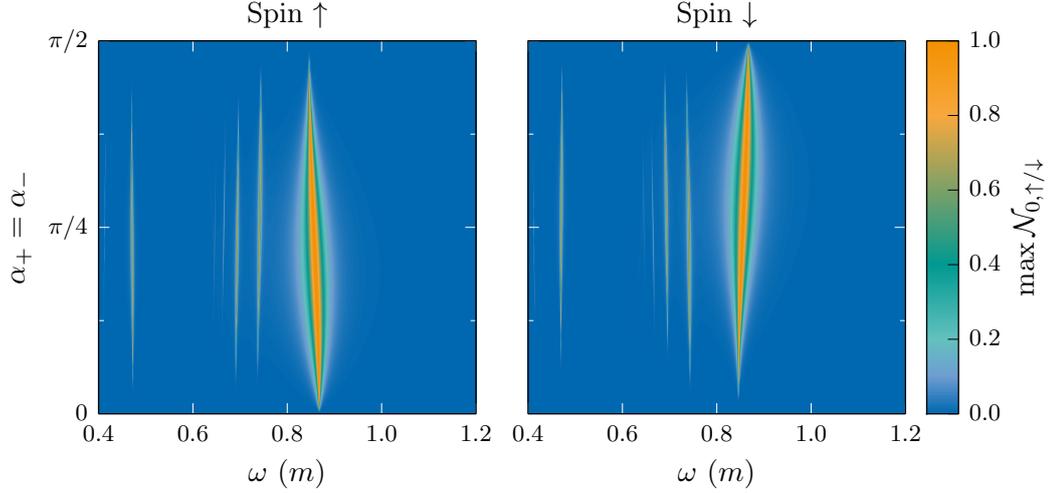


Abbildung 4.8: Polarisations- und Laserfrequenzabhängigkeit der Elektronenerzeugungswahrscheinlichkeit $\max \mathcal{N}_{(p_0=0, \uparrow/\downarrow)}$ für den Fall gleichsinnig rotierender Laserfelder $\alpha_+ = \alpha_-$. In beiden Bildern ist die maximale Besetzungswahrscheinlichkeit für den Elektronenzustand mit Endimpuls Null und jeweiligem Spin innerhalb der ersten 200 Laserzyklen für verschiedene Polarisierungen und Frequenzen des Laserfeldes dargestellt. Bis auf die lineare Polarisation $\alpha_{\pm} = \pi/4$ sind die Resonanzen vom Spin des Elektrons abhängig. Die Spektren für ein Positron sind identisch.

maximal und nimmt dann in Richtung zirkularer Polarisation ab. Bei vollständig zirkularer Polarisation ($\alpha_+ = 0$ und $\alpha_+ = \pi/2$) findet keine Paarerzeugung statt. Der Grund hierfür könnte ein Symmetrieverbot bzw. eine Auswahlregel sein. Die Resonanzen sind nicht unabhängig vom Spin des erzeugten Elektrons, da die beiden klassischen Spinvektoren der Laserfelder aufgrund der gleichsinnigen Rotation in dieselbe Richtung zeigen. Deshalb spielt es auch eine Rolle, ob der Spin des Elektrons parallel oder antiparallel dazu ausgerichtet ist. Nur bei linearer Polarisation $\alpha_+ = \pi/4$ stimmen die Resonanzen überein, weil dort der Spinvektor beider Felder Null ist.

Zur Polarisationsabhängigkeit der Resonanzfrequenzen lässt sich sagen, dass im Fall der linearen Polarisation die maximale Feldstärke genau E beträgt und vom Betrag her harmonisch oszilliert. Für zirkuläre Polarisation beträgt die maximale Feldstärke hingegen nur $E/\sqrt{2}$, ist aber vom Betrag her konstant und rotiert in der xy -Ebene. Die mittlere Feldenergie ist jedoch für sämtliche Polarisierungen gleich. Die jeweils maximale Feldstärke könnte also für die Verschiebung der Resonanzfrequenzen und die Änderung der Resonanzbreite verantwortlich sein. Da die Resonanzänderungen aber nicht spiegelsymmetrisch bezüglich der linearen Polarisation $\alpha_+ = \pi/4$ sind, muss der Spin des Elektrons mitverantwortlich sein. Die Werte sind allerdings spiegelsymmetrisch bezüglich der linearen Polarisation, wenn auch der Spin sein Vorzeichen ändert, denn das linke Bild geht aus dem rechten durch Spiegelung an $\alpha_+ = \pi/4$ hervor. Die Spiegelung entspricht der Umkehrung des Rotationssinnes beider Felder. Wird der Spin mit umgedreht, so ergibt sich wieder das selbe Resultat.

Eine entsprechende Erklärung dafür, warum die Resonanzverschiebungen für die beiden Spinrichtungen gerade entgegengesetzt sind (besonders gut ersichtlich für die Resonanz zwischen $0.8 \text{ m} < \omega < 0.9 \text{ m}$), lässt sich durch das folgende vereinfachte Bild geben. Da die Teilchen im Feld erzeugt werden, besitzen sie, bedingt durch die Bewegung im Feld, eine effektive Energie. Neben der spinunabhängigen kinetischen Energie trägt auch der spinabhängige relativistische Zeeman-Term (Thaller 2005)

$$\Delta E = -\frac{e}{2m} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}' \quad (4.24)$$

bei. Deshalb muss das Magnetfeld \mathbf{B}' , welches das Elektron in seinem Ruhesystem sieht, berücksichtigt werden. Bewegt sich das Elektron mit einer Geschwindigkeit \mathbf{v} , so ist das Magnetfeld in seinem Ruhesystem durch

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} - \mathbf{v} \times \mathbf{E} \quad (4.25)$$

gegeben. Wird davon ausgegangen, dass der klassische Spinvektor $\boldsymbol{\sigma}$ des Elektrons entsprechend der Wahl von Spin \uparrow/\downarrow hauptsächlich in z -Richtung zeigt, so fällt das eigentliche Magnetfeld B der Laserfelder weg und es bleibt

$$\Delta E \sim \frac{e}{2m} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{E}) . \quad (4.26)$$

Da für nichtlinear polarisierte Felder das elektrische Feld in der xy -Ebene rotiert und sich das Elektron in dieser Ebene bewegen wird, ergibt sich auch ein Beitrag für den Zeeman-Term. Dieser ist vom Spin und der Ladung abhängig. Er wechselt sein Vorzeichen bei Spinumkehr. Mit dem Vorzeichenwechsel von (4.26) bei Spinumkehr lässt sich das entgegengesetzte Verschieben der Resonanzfrequenzen für Spin \uparrow und \downarrow schließlich erklären. Selbiges gilt allerdings nicht bei Ladungsumkehr, wie man nach (4.26) meinen könnte, denn bei entgegengesetzter Ladung würde auch die Geschwindigkeit \mathbf{v} ihr Vorzeichen ändern, da die Teilchen mit unterschiedlicher Ladung in entgegengesetzte Richtungen beschleunigt werden. Interessanterweise ist der Zeeman-Effekt hier also gar nicht maßgeblich durch das eigentliche Magnetfeld des Lasers bedingt, sondern vielmehr durch das elektrische Feld im Ruhesystem des Teilchen erzeugte magnetische Feld. Simulationen für rotierende und rein elektrische Felder zeigen (Wöllert, Bauke und Keitel 2015b), dass ein ähnliches Verhalten der Resonanzverschiebung auch ohne die Berücksichtigung des Magnetfeldes vom Laser auftritt.

Betrachtet man den Fall gegensinnig rotierender Felder in Abbildung 4.9, so fällt auf, dass die Resonanzen unabhängig vom Spin des Elektrons sind. Aus Symmetriegründen muss das auch der Fall sein. Es gibt keine bevorzugte Richtung für den Spin, weil die klassischen Spinvektoren der beiden Laserfelder genau entgegengesetzt sind. Durch den entgegengesetzten Drehsinn ergibt sich, dass das elektrische wie auch das magnetische Feld nicht rotieren, sondern nur in einer Richtung in der xy -Ebene oszillieren. Aufgrund der fehlenden Rotation ließe sich mit dem oben verwendeten Bild das Nichtvorhandensein des Zeeman-Terms motivieren. Dennoch ist auch hier eine Abhängigkeit der Resonanzen



4. Raumzeitabhängige Felder und Mehrpaarzustände

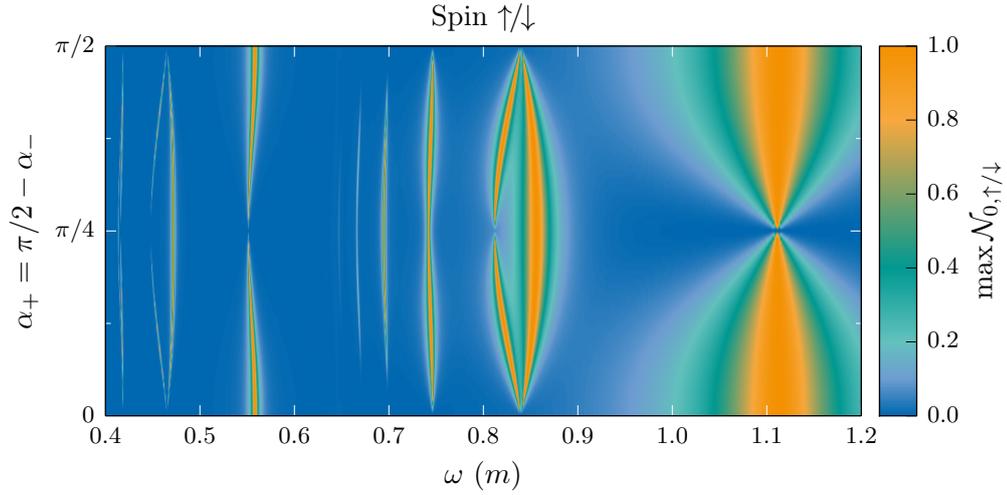


Abbildung 4.9: Polarisations- und Laserfrequenzabhängigkeit der Elektronenerzeugungswahrscheinlichkeit $\max \mathcal{N}_{(\mathbf{p}_0=0, \uparrow/\downarrow)}$ für den Fall gegensinnig rotierender Laserfelder $\alpha_+ = \pi/2 - \alpha_-$. Im Gegensatz zu Abbildung 4.8 sind die Resonanzen nicht vom Spin des erzeugten Elektrons abhängig, da aufgrund des entgegengesetzten Spin beider Laserfelder keine Spinrichtung bevorzugt wird. Das Spektrum ist spiegelsymmetrisch bzgl. $\alpha_+ = \pi/4$ und zeigt eine sehr ausgeprägte Resonanz bei $\omega \simeq 1.1$ m. Diese Resonanz entspricht der direkten Paarerzeugung aus zwei Photonen, da diese mit $\omega \simeq 1.1$ m genug Energie für die Ruhemasse von Elektron und Positron besitzen. Bei linearer Polarisation $\alpha_+ = \pi/4$ verschwindet die Resonanz.

von der Polarisation zu erkennen. Die Resonanzen liegen in etwa an den gleichen Stellen, was damit zusammenhängt, dass für lineare Polarisation $\alpha_+ = \pi/4$ die beiden Fälle mit gleichem oder entgegengesetztem Rotationssinn zur gleichen Feldkonfiguration führen und somit dieselben Werte liefern. Besonders auffällig ist die sehr breite Resonanz bei $\omega \approx 1.1$ m, die als direkte Paarerzeugung aus jeweils zwei Photonen mit $\omega \approx 1.1$ m interpretiert werden kann. Die Gesamtenergie der Photonen liegt über der eigentlich nötigen Energie von $2m$, da die effektive Energie der Teilchen im Feld höher ist. In Abbildung 4.9 ist auch erkennbar, dass die Breite der Resonanzen mit kleiner werdender Frequenz ω abnimmt. Grund dafür ist, dass bei kleinerem ω mehr Photonen benötigt werden um die Ruhemasse zu erzeugen. Um so mehr Photonen aber benötigt werden, desto stärkere Abweichungen von der Resonanz treten auf, da die einzelne Abweichung $\Delta\omega$ mit der Anzahl der Photonen multipliziert die Gesamtabweichung ergibt.

Die spinabhängige Resonanzverschiebung im Falle gleichsinnig rotierender Felder könnte zum Beispiel verwendet werden um nur Elektronen und Positronen mit Spin \uparrow zu erzeugen. Bei gegensinnig drehenden Felder ist dies nicht möglich, jedoch zeigt sich dort, dass die Impulse in z -Richtung für Teilchen mit Spin \uparrow gerade entgegengesetzt zu denen mit Spin \downarrow sind. Dies wird im folgenden Abschnitt diskutiert.

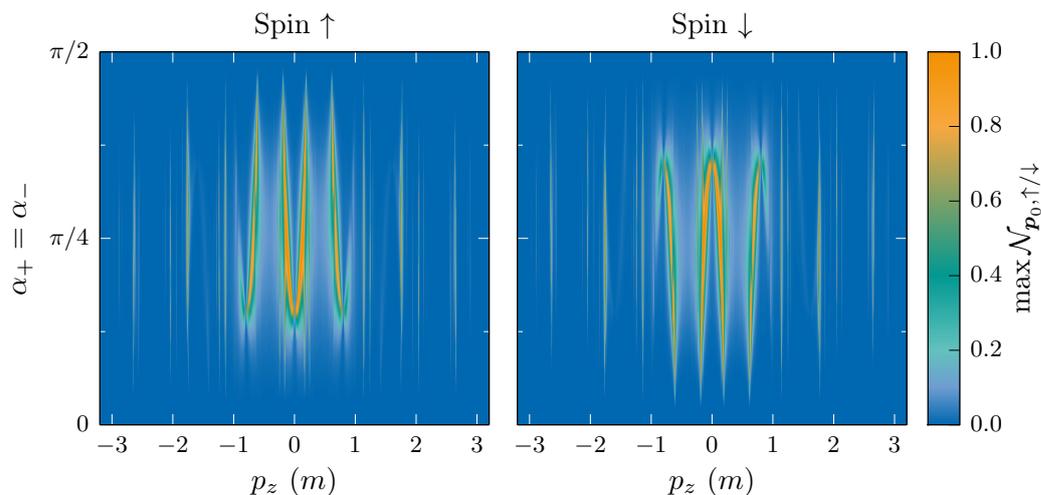


Abbildung 4.10: Polarisationsabhängigkeit der Erzeugungswahrscheinlichkeit von Elektronen mit unterschiedlichem Endimpuls für gleichsinnig rotierende Laserfelder mit einer Frequenz von $\omega = 0.8 \text{ m}$. Der Endimpuls der Elektronen ist durch $\mathbf{p}_0 = (0, 0, p_z)$ gegeben. Beide Spektren für ein Elektron mit Spin \uparrow und Spin \downarrow sind symmetrisch um $p_z = 0$. Zu jedem Teilchen wird daher auch ein Teilchen mit entgegengesetztem Impuls und gleichem Spin erzeugt. Die Spiegelsymmetrie bzgl. $\alpha_{\pm} = \pi/4$ bei Spinumkehr ist weiterhin vorhanden.

4.2.5. Impulsabhängigkeit der Resonanzen

Bei fester Laserfrequenz $\omega = 0.8 \text{ m}$ soll nun das Impulsspektrum in Abhängigkeit der Polarisation untersucht werden. Die vorangegangenen Simulationen haben sich jeweils nur auf den Erwartungswert bezogen, dass ein Elektron mit Impuls $\mathbf{p}_0 = 0$ erzeugt wird. In Abbildung 4.10 sind die Erwartungswerte für Impulse $\mathbf{p}_0 = (0, 0, p_z)$ und $-3 \text{ m} < p_z < 3 \text{ m}$ mit gleichsinnig rotierenden Feldern dargestellt. Obwohl in Abbildung 4.8 keine Resonanzen bei $\omega = 0.8 \text{ m}$ für Elektronen mit Impuls $\mathbf{p} = 0$ auftreten, treten bei dieser Frequenz durchaus Resonanzen für Elektronen mit anderen Impulsen auf. Diese sind in Abbildung 4.10 sichtbar und wiederum auch von der Polarisation abhängig. Für die gleichsinnige Rotation der Felder ist die Resonanz vom Spinzustand des Elektrons abhängig. Würde für den konkreten Fall eine Polarisation von $\alpha_+ \gtrsim 3/8 \pi$ gewählt werden, so würden nur Elektron (und Positronen) mit Spin \uparrow im dargestellten Impulsintervall erzeugt werden, jedoch keine mit Spin \downarrow . Weiterhin ist ersichtlich, dass für gleichsinnig rotierende Felder das Impulsspektrum symmetrisch bezüglich des Impulses $p_z = 0$ ist. Das bedeutet, dass für jedes erzeugte Teilchen mit einem bestimmten Impuls und Spin auch genau ein entsprechendes Teilchen mit entgegengesetztem Impuls und gleichem Spin vorhanden sein wird. Diese Symmetrie lässt sich mithilfe der Helizität erklären. Denn die zwei gleichsinnig rotierenden Felder haben, wie in Abschnitt 4.1 erklärt, zwar den gleichen Spinvektor, aber entgegengesetzte Helizität. Somit ergibt sich auch, dass das Spektrum der erzeugten Teilchen diese Symmetrie innehat.

4. Raumzeitabhängige Felder und Mehrpaarzustände

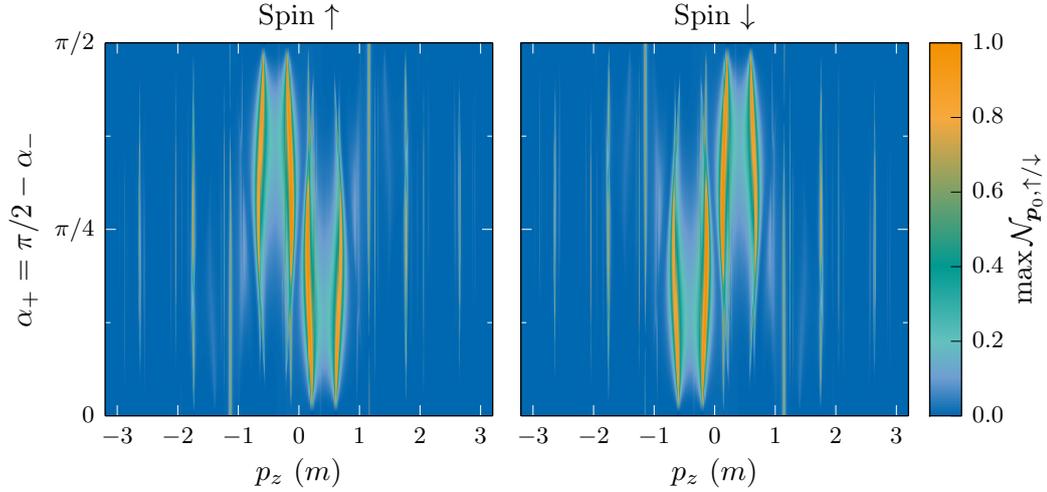


Abbildung 4.11: Polarisationsabhängigkeit der Erzeugungswahrscheinlichkeit von Elektronen mit unterschiedlichem Endimpuls für gegensinnig rotierende Laserfelder mit einer Frequenz von $\omega = 0.8 \text{ m}$. Der Endimpuls der Elektronen ist durch $\mathbf{p}_0 = (0, 0, p_z)$ gegeben. Die Spiegelsymmetrie bzgl. $p_z = 0$ ist nicht mehr vorhanden. Stattdessen existiert eine Punktsymmetrie um den Punkt $(p_z = 0, \alpha_+ = \pi/4)$. Anhand beider Spektren lässt sich erkennen, dass zu jedem Teilchen ein Teilchen mit entgegengesetztem Impuls und entgegengesetztem Spin, was der gleichen Helizität entspricht, erzeugt wird.

Für den Fall gleichsinnig rotierender Felder lässt sich erneut am Impulsspektrum erkennen, dass für die vollständige zirkuläre Polarisation bei $\alpha_+ = 0$ bzw. $\alpha_+ = \pi/2$ keine Paarerzeugung stattfindet bzw. diese deutlich unterdrückt wird. Schaut man sich die beiden breiteren Resonanzen in der Mitte im linken Bild von Abbildung 4.10 an, so könnte man erwarten, dass diese nach unten hin zusammenlaufen. Jedoch ist genau dort, etwa bei $p_z = 0$ und $\alpha_+ \approx 1/8 \pi$ eine Lücke. Diese Lücke ist im Einklang mit dem Nichtvorhandensein einer Resonanz für Elektronen mit Impuls gleich Null bei $\omega = 0.8 \text{ m}$ (siehe Abbildung 4.8). Im Bild des Mehrlevelsystems sind vermutlich manche Übergänge aus Symmetriegründen verboten, d.h. es existieren Auswahlregeln.

Betrachtet man nun den Fall der gegensinnig rotierenden Laserfelder, so fällt auf, dass die Spektren jetzt auch vom Spin abhängig sind. Bezüglich der Symmetrie lässt sich erkennen, dass das Spektrum für Spin \uparrow durch Spiegelung an $p_z = 0$ aus dem Spektrum für Spin \downarrow hervorgeht. Das entspricht einer bevorzugten Helizität. Zu jedem erzeugten Teilchen wird auch ein Teilchen mit entgegengesetztem Impuls und entgegengesetztem Spin, also gleicher Helizität, vorhanden sein. Die Richtung der bevorzugten Helizität ist durch die Helizität der Laserfelder gegeben. Diese ist für beide identisch bei gegensinnig rotierenden Drehsinn.

Analog zur vorangegangenen Diskussion bzgl. der Symmetrie gilt für beide Fälle (Abbildung 4.8 und 4.9), dass sich das Spektrum für einen Spin durch Spiegelung um $\alpha_+ = \pi/4$

4.3. Dynamik mehrerer Materiefeldmoden und Vielteilchenzustände

$$\begin{aligned}
 |\text{out}\rangle = c_v |\text{vac}\rangle + \\
 c_1 \begin{array}{|c|} \hline \downarrow \uparrow \\ \hline -3 \quad 0 \\ \hline \end{array} + c_2 \begin{array}{|c|} \hline \downarrow \uparrow \\ \hline 2 \quad 0 \\ \hline \end{array} + c_3 \begin{array}{|c|} \hline \downarrow \uparrow \\ \hline -2 \quad 0 \\ \hline \end{array} + \dots \\
 c_4 \begin{array}{|c|} \hline \downarrow \downarrow \uparrow \uparrow \\ \hline -3 \quad 0 \quad 2 \quad 0 \\ \hline \end{array} + c_5 \begin{array}{|c|} \hline \downarrow \downarrow \uparrow \uparrow \\ \hline -3 \quad 0 \quad -2 \quad 0 \\ \hline \end{array} + c_6 \begin{array}{|c|} \hline \downarrow \uparrow \downarrow \uparrow \\ \hline 2 \quad 0 \quad -2 \quad 0 \\ \hline \end{array} + \dots
 \end{aligned}$$

Abbildung 4.12: Das Vakuum entwickelt sich unter dem Einfluss des externen elektromagnetischen Feldes. Im Falle der Paarerzeugung zerfällt der Vakuumszustand in eine Superposition aus Vakuum, Ein- und Mehrpaarzuständen. Dadurch wird die Wahrscheinlichkeitsamplitude c_v , dass sich das System im weiterhin im Vakuum befindet, kleiner als eins. Mehrpaarzustände, bei denen die einzelnen Paare ein Teilchen mit derselben Quantenzahl besitzen, sind wegen des Pauli-Prinzips verboten. So ist zum Beispiel der Zustand mit dem Koeffizienten c_6 verboten, da er zweimal ein Positron mit Spin \uparrow und identischem Impuls enthält.

aus dem Spektrum für den entgegengesetzten Spin ergibt, da dann der Rotationssinn des Feldes wie auch des Teilchens umgekehrt wird.

4.3. Dynamik mehrerer Materiefeldmoden und Vielteilchenzustände

Bis jetzt wurden die Propagatorelemente $G(\pm|_{\pm})$ für die verschiedenen Materiefeldmoden einzeln berechnet. Damit ließen sich Aussagen über die Erwartungswerte machen, ob das mit der Materiefeldmode korrespondierende Elektron bzw. Positron durch das externe elektromagnetische Feld erzeugt wird. Es lässt sich damit aber nicht der vollständige Quantenzustand angeben. Durch das externe elektromagnetische Feld beginnt das Vakuum, aufgrund der Paarerzeugung, zu zerfallen. Der sich entwickelnde Zustand besteht nun nicht mehr vollständig aus dem Vakuum, sondern auch aus einer Vielzahl von anderen Zuständen. In der Fock- bzw. Besetzungszahldarstellung lassen sich die Paarzustände nach der Anzahl von Paaren und deren Quantenzahlen darstellen. Neben den Einpaarzuständen, bestehend aus einem Elektron-Positron-Paar, werden auch Mehrpaarzustände auftreten, die sich als Kombination aus den Einpaarzuständen ergeben.

Eine beispielhafte Zerlegung ist in Abbildung 4.12 dargestellt. Die Spinzustände von Elektron (blau) und Positron (orange) werden durch die Pfeilrichtungen angegeben. Die darunter stehende Zahl entspricht der Ganzzahl l , über welche der Impuls in Einheiten vom Wellenvektor des Laserfeldes gegeben ist, also $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + lk \mathbf{e}_z$. Die Bedeutung von \mathbf{p}_0 wird unten noch genauer diskutiert. Zu Beginn ist die Wahrscheinlichkeitsamplitude c_v , dass sich der Anfangszustand im Vakuum befindet, genau 1. Durch die Wechselwirkung mit dem elektromagnetischen Feld wird diese Wahrscheinlichkeit kleiner als 1, da nun auch Ein- und Mehrpaarzustände erzeugt und gemessen werden können. In Abbildung 4.12 sind drei weitere Einpaarzustände und zwei Zweipaarzustände gezeigt.



4. Raumzeitabhängige Felder und Mehrpaarzustände

Weiterhin ist ein verbotener Zweipaarzustand dargestellt, der sich aus der Kombination der beiden Einpaarzustände mit Koeffizienten c_2 und c_3 ergibt. Dieser ist verboten und wird nicht vorkommen, weil er das Pauliprinzip verletzt. Das Pauliprinzip besagt, dass ein Fermion nie genau dieselben Quantenzahlen wie ein anderes besitzen darf, was für die beiden Positronen hier der Fall wäre. Der Erwartungswert, dass ein bestimmtes Teilchen erzeugt wird, ergibt sich aus dem vollständigen Zustand, indem zuerst sämtliche Zustände, in denen dieses Teilchen vorkommt, ausgewählt werden. Für den Fall eines Elektrons mit Impuls $\mathbf{p} = 2k\mathbf{e}_z$ und Spin \downarrow wären dies in Abbildung 4.12 die beiden Zustände mit den Koeffizienten c_3 und c_5 . Anschließend muss das Betragsquadrat dieser Koeffizienten gebildet werden und ihre Aufsummierung ergibt den Erwartungswert.

Die Propagation der zu einem bestimmten Elektron oder Positron gehörenden Materiefeldmode gibt also nur Aufschluss darüber, dass dieses Teilchen überhaupt vorhanden ist, nicht aber, in welchen Paarzuständen dieses auftritt. Um den kompletten Quantenzustand des Materiefeldes im externen elektromagnetischen Feld zu bestimmen, d.h.

$$|\text{out}\rangle = c_v \sum_{N\{m\}\{n\}} \frac{1}{N!} \left(\prod_{i=1}^N \omega(\bar{m}_i \bar{n}_i | 0) \right) |N_{\{m\}\{n\}}\rangle, \quad (2.26)$$

müssen die sogenannten relativen² Wahrscheinlichkeitsamplituden zur Paarerzeugung $\omega(\bar{m}\bar{n}|0)$ berechnet werden. Diese ergeben sich aus den Propagatorelementen nach

$$\omega(\bar{m}\bar{n}|0) = - \left[G(+|-) G^{-1}(-|-) \right]_{mn}. \quad (2.25)$$

Im Vergleich zu Abbildung 4.12 entsprechen die Zustände $|N_{\{m\}\{n\}}\rangle$ (2.26) gerade den Ein- bzw. Mehrpaarzuständen mit N Paaren. Die Indexmengen $\{m\}$ und $\{n\}$ bestimmen die Quantenzahlen der Paare. Die Vakuumstabilität c_v ist durch

$$c_v = \det G(-|-) \quad (2.24)$$

gegeben. Grundsätzlich müssten alle Propagatorelemente $G(+|-)$ und $G(-|-)$ berechnet werden. Aufgrund der Matrixmultiplikation in (2.25) bedeutet das für den allgemeinen Fall, dass diese Elemente für sämtliche Quantenzahlen m und n benötigt werden. Da die Quantenzahlen über den kompletten Impulsraum laufen, würde dies numerisch äußerst aufwendig sein. Für den Fall der monochromatischen Felder koppeln jedoch nur Moden miteinander, deren Impulse sich um ein Vielfaches des Wellenvektors \mathbf{k} unterscheiden. Somit zerfällt der Hilbertraum, auf dem der Dirac-Hamiltonian (4.3) wirkt, in unendlich viele Unterräume. Diese Unterräume können durch einen ausgezeichneten Impuls \mathbf{p}_0

² „Relativ“ bedeutet in diesem Zusammenhang, dass die Wahrscheinlichkeit bzgl. eines stabilen Vakuums berechnet wird. Da aber das Vakuum in viele Paarzustände zerfällt, muss die relative Wahrscheinlichkeit mit der totalen Vakuumstabilität c_v multipliziert werden um die absolute Wahrscheinlichkeit zu erhalten.

4.3. Dynamik mehrerer Materiefeldmoden und Vielteilchenzustände

identifiziert werden. Der eigentliche Hilbertraum H lässt sich als direkte Summe der Unterräume $H_{\mathbf{p}_0}$ schreiben

$$H = \bigoplus_{\mathbf{p}_0} H_{\mathbf{p}_0} . \quad (4.27)$$

Die Unterräume werden dabei aus sämtlichen Eigenmoden mit Impulsen $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + l\mathbf{k}$ (l ganzzahlig) aufgespannt. In der Summe (4.27) erstreckt sich der Laufindex \mathbf{p}_0 über die erste Brillouin-Zone

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathbf{p}_0 \mathbf{e}_x < k , \\ 0 &\leq \mathbf{p}_0 \mathbf{e}_y < k , \\ 0 &\leq \mathbf{p}_0 \mathbf{e}_z < k . \end{aligned} \quad (4.28)$$

Für die Berechnung von $\omega(\bar{m}\bar{n}|0)$ muss also nur der Unterraum mit \mathbf{p}_0 berücksichtigt werden, in dem die zu n und m gehörenden Impulse liegen. Dieser ist zwar immer noch unendlich groß, nun aber schon abzählbar. Die Berechnung von $G(+|_-)$ und $G(-|_-)$ auf einem bestimmten Unterraum $H_{\mathbf{p}_0}$ lässt sich weiter vereinfachen, denn ab einem gewissen Impulsbetrag sind die Moden aufgrund ihrer hohen kinetischen Energie effektiv frei. Das heißt, sie spüren das externe Feld nicht mehr. Für sehr große Impulse kann also gesetzt werden

$$G(+|_-)_{mn} = 0 , \quad (4.29)$$

$$G(-|_-)_{mn} = \delta_{mn} . \quad (4.30)$$

Die restlichen Moden mit „kleinen“ Impulsen können dann, wie im Abschnitt 4.2 zur Dynamik einzelner Moden, getrennt voneinander propagiert werden. Und genau wie in Abschnitt 4.2 ist auch bei dieser Propagation die Kopplung an die benachbarten Moden für das gewählte Parameterregime überschaubar.

Da der Dirac-Hamiltonian (2.9) die verschiedenen Unterräume $H_{\mathbf{p}_0}$ nicht miteinander koppelt, folgt für den Quantenzustand, dass dieser sich als Produktzustand

$$|\text{out}\rangle = \bigotimes_{\mathbf{p}_0} |\text{out}\rangle_{\mathbf{p}_0} \quad (4.31)$$

schreiben lässt. Die in diesem direkten Produkt auftretenden Zustände $|\text{out}\rangle$ sind analog zu (2.26) definiert als

$$|\text{out}\rangle_{\mathbf{p}_0} = c_{\mathbf{v},\mathbf{p}_0} \sum_{N\{m\}\{n\}} \frac{1}{N!} \left(\prod_{i=1}^N \omega(\bar{m}_i\bar{n}_i|0) \right) |N_{\{m\}\{n\}}\rangle . \quad (4.32)$$

Hierbei werden jetzt nur noch Indexmengen $\{m\}$ und $\{n\}$ berücksichtigt, deren zugehörige Impulse im durch \mathbf{p}_0 definierten Unterraum liegen. Da aufgrund der Entkopplung der



4. Raumzeitabhängige Felder und Mehrpaarzustände

Unterräume, die Matrix $G(-|_-)$ eine blockdiagonale Struktur bekommt, können lokale Vakuumstabilitäten c_{v,p_0} analog zu (2.24) definiert werden

$$c_{v,p_0} = \det G(-|_-)|_{p_0}. \quad (4.33)$$

Dabei bezieht sich die Determinante nur auf den zu p_0 gehörenden Block der Matrix $G(-|_-)$. Diese lokale Vakuumstabilität gibt eine Aussage darüber, wie stabil der betreffende Unterraum ist. Die tatsächliche Vakuumstabilität ergibt sich aus den lokalen Vakuumstabilitäten aller Unterräume zu

$$c_v = \prod_{p_0} c_{v,p_0}. \quad (4.34)$$

Diese Schreibweise ist symbolisch zu verstehen, da der Laufindex p_0 für das Produkt kontinuierlich ist. Bezüglich der relativen Wahrscheinlichkeitsamplituden $\omega(\vec{m}\vec{n}|0)$ und den Zuständen $|\text{out}\rangle_{p_0}$ ist zu erwähnen, dass diese differentielle Größen sind. Das heißt, Zustände mit exakt scharfen Impulsen besitzen prinzipiell ein Maß von Null und können daher nicht gemessen werden. Was gemessen werden kann, sind Zustände mit einer gewissen Unschärfe $d\mathbf{p}$ und mit dieser Breite müssen die berechneten Größen multipliziert werden. Würde das Integral über die erste Brillouin-Zone diskretisiert werden und in N gleich große Würfel zerlegt werden, so ließe sich für die Vakuumstabilität (4.34) schreiben

$$c_v = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_i^N (c_{v,i})^{\frac{1}{N}}. \quad (4.35)$$

Mit $c_{v,i}$ ist der i te Würfel in der Brillouin-Zone gemeint. Um also das vollständige System zu berechnen, ist die bereits aufwendige Propagationen eines Unterraumes für sämtliche Impulsuntersysteme in der diskretisierten Brillouin-Zone durchzuführen. Obwohl die Rechnungen alle parallel durchgeführt werden können, ist es dennoch ein erheblicher numerischer Aufwand, da über die 3-dimensionale Brillouin-Zone integriert werden muss. Diese Rechnungen sind mit der aktuellen Technik machbar, würden aber mehrere Tage für eine einzige Parameterwahl benötigen. Im Gegensatz zur Berechnung eines einzelnen Unterraumes bestünde der Vorteil der Berechnung des kompletten Raumes darin, dass man die totale Vakuumstabilität $|c_v|^2$ bestimmen könnte sowie die spektrale Verteilung der erzeugten Paare auf die Unterräume. Der Zustand $|\text{out}\rangle$ ließe sich aber schon gar nicht mehr vernünftig wiedergeben, da das Tensorprodukt (4.31) einfach zu viele „Untersysteme“ $|\text{out}\rangle_{p_0}$ beinhalten würde.

Da die verschiedenen Unterräume unabhängig voneinander sind, können sie getrennt untersucht werden. In den folgenden Abschnitten werden jeweils nur einzelne Unterräume betrachtet und der Quantenzustand des Materiefeldes in diesen untersucht. Die wesentlichen Effekte lassen sich dadurch bereits erkennen.

4.3. Dynamik mehrerer Materiefeldmoden und Vielteilchenzustände

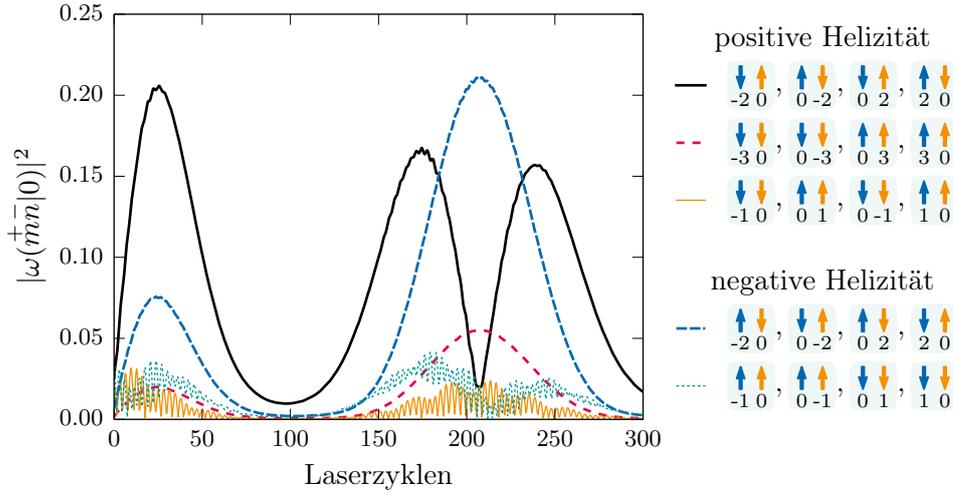


Abbildung 4.13: Zeitentwicklung der relativen Paarerzeugungswahrscheinlichkeiten für Einpaarzustände. Insgesamt sind nur 20 Zustände dargestellt, da alle anderen eine verschwindend geringe Wahrscheinlichkeit im betrachteten Unterraum mit $\mathbf{p}_0 = 0$ aufweisen. Die vierfache Entartung der relativen Wahrscheinlichkeiten kann auf zwei Symmetrien zurückgeführt werden. Es wurden gegensinnig rotierende Laserfelder mit einer Elliptizität von $\alpha_+ = 0.2\pi/4$ und einer Frequenz von $\omega = 0.746\text{ m}$ verwendet. Die effektive Helizität des gesamten Laserfeldes überträgt sich auf die Helizität der Einpaarzustände.

4.3.1. Zeitliche Entwicklung der Paarzustände

Um einen Überblick für die zeitliche Entwicklung von Ein- und Mehrpaarzuständen sowie der differentiellen Vakuumstabilität zu erhalten, wird eine vollständige Propagation des Unterraumes $\mathbf{p}_0 = 0$ berechnet. Als Konfiguration für die Laserfelder wird von gegensinnig rotierenden Feldern mit $\alpha_+ = \pi/2 - \alpha_- = 0.2\pi/4$ ausgegangen. Die Laserfrequenz wird mit $\omega = 0.746\text{ m}$ gewählt und der Parameter $\xi = 1/2$ gesetzt, was einer elektrischen Feldstärke von $E = 4.9 \times 10^{17}\text{ V/m}$ entspricht. Die Parameter wurden gerade so gewählt, dass diese in der Nähe der Resonanz für ein Elektron mit Spin \uparrow liegen (vergleiche Abbildung 4.9).

Es könnten nun sämtliche relativen Paarerzeugungswahrscheinlichkeiten $\omega(m\bar{n}|0)$ für alle Paare angegeben werden, für die die Indexmengen $\{m\}$ und $\{n\}$ im entsprechenden Unterraum $\mathbf{p}_0 = 0$ liegen. In der numerischen Zeitentwicklung über insgesamt 300 Laserzyklen zeigt sich jedoch, dass für die gewählten Parameter nur 20 verschiedene Einpaarzustände einen wesentlichen Beitrag liefern. Alle anderen Einpaarzustände sind bis auf numerische Ungenauigkeiten Null und werden nicht angeregt. Diese 20 Einpaarzustände sind in Abbildung 4.13 dargestellt. Analog zu Abbildung 4.12 geben die Pfeile den Spin und die Zahlen den Impuls an. Wie zu erkennen ist, besitzen immer genau 4 Einpaarzustände dieselbe relative Paarerzeugungswahrscheinlichkeit. Diese vierfache Entartung ist

4. Raumzeitabhängige Felder und Mehrpaarzustände

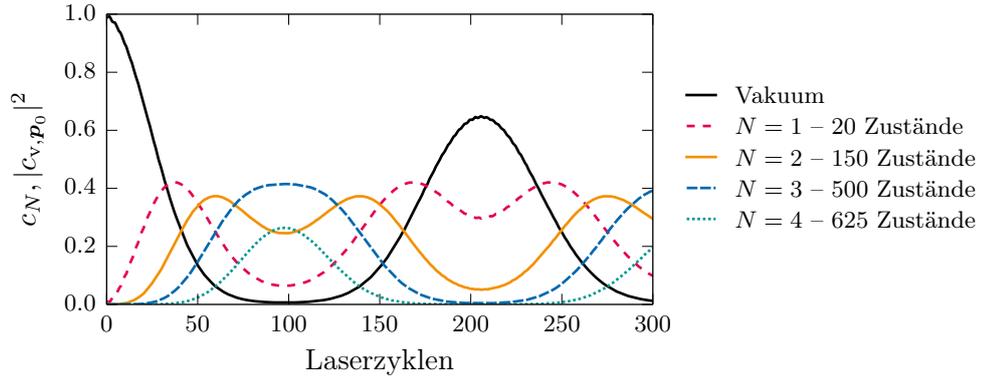


Abbildung 4.14: Zeitliche Entwicklung der lokalen Vakuumbeständigkeit und der Wahrscheinlichkeit für Mehrpaarzustände. Zu Beginn ist das System noch im Vakuum und es ist $c_{v,p_0} = 1$. Danach steigt die Wahrscheinlichkeit für Einpaarzustände und auch Mehrpaarzustände werden demnach angeregt. Aufgrund der großen Anzahl an Mehrpaarzuständen (siehe Legende) wird es zu bestimmten Zeiten wahrscheinlicher, einen Mehrpaarzustand anstatt eines Einpaarzustandes zu messen. In Summe ergeben alle Kurven genau eins, da die Zeitentwicklung des Unterraumes unitär ist.

auf zwei Symmetrien zurückzuführen. Erstens besteht die Symmetrie bzgl. Ladungsumkehr. Das heißt, ein Einpaarzustand besitzt genau dieselbe Wahrscheinlichkeit wie jener, bei dem Elektron und Positron vertauscht werden und die jeweils anderen Quantenzahlen annehmen. Zweitens herrscht Symmetrie bzgl. der Helizität. Zwei Einpaarzustände haben dieselbe Wahrscheinlichkeit, wenn der eine durch Umdrehen der Impulse und Spins jedes einzelnen Teilchens in den anderen übergeht.

Die Einpaarzustände sind in Abbildung 4.13 nach ihrer Helizität sortiert und es ist ersichtlich, dass vorwiegend die Zustände mit positiver Helizität das höhere spektrale Gewicht besitzen. Bei etwa 200 Laserzyklen ist es für „kurze Zeit“ wahrscheinlicher, Einpaarzustände mit negativer Helizität zu messen. Dies lässt sich durch die gewählte Polarisation von $\alpha_+ = \pi/2 - \alpha_- = 0.2\pi/4$ begründen. Diese klassische elliptische Polarisation, mit positiver Helizität beider Laserfelder, entspräche quantenmechanisch der Superposition von Photonen mit positiver Helizität und negativer Helizität. Nur vollständig zirkuläre Polarisation würde Photonen mit reiner Helizität entsprechen. Klassisch liegt hier sozusagen vorwiegend positive Helizität des Laserfeldes vor, was quantenmechanisch bedeutet, dass der Anteil von Photonen mit positiver Helizität den Anteil mit negativer Helizität überwiegt. Aufgrund des geringer Anteils an negativer Helizität sind dennoch Übergänge zu Paaren mit negativer Helizität möglich. Einen solchen Übergang kann man in Abbildung 4.13 erkennen.

Aus der Kombination der oben erwähnten 20 Einpaarzustände, welche den wesentlichen Anteil der Wahrscheinlichkeitsamplitude tragen, werden sich unter Berücksichtigung des Pauliverbotes auch Mehrpaarzustände $|N_{\{m\}\{n\}}\rangle$ mit $N > 1$ bilden. Mithilfe von c_N

4.3. Dynamik mehrerer Materiefeldmoden und Vielteilchenzustände

(2.29) können die Wahrscheinlichkeiten dafür angegeben werden, dass im betrachteten Unterraum ein Zustand mit N Paaren gemessen wird. Diese Wahrscheinlichkeit ergibt sich aus der Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Paarzustände mit N Paaren. Die zeitliche Entwicklung dieser Wahrscheinlichkeiten, sowie die Vakuumsstabilität c_{v,p_0} des betrachteten Unterraumes mit $p_0 = 0$, sind in Abbildung 4.14 dargestellt. In Summe ergeben diese Koeffizienten genau eins, da die Zeitentwicklung unitär ist. In der Legende sind neben der Bezeichnung auch die Anzahl möglicher Zustände angegeben. So sind weiterhin 20 Einpaarzustände vorhanden. Aus diesen 20 Einpaarzuständen ließen sich durch direkte Kombination $20 \times 20 = 400$ Zweipaarzustände bilden. Aufgrund des Pauliverbotes sind aber nur insgesamt 150 Kombinationen von 2-Paarzuständen möglich. Die Anzahl steigt weiter bei 3- und 4-Paarzuständen. Da, wie man in der Legende von Abbildung 4.13 sehen kann, die 20 Einpaarzustände immer ein Elektron oder Positron mit Impuls 0 und Spin \uparrow oder \downarrow (4 Möglichkeiten) enthalten, sind keine 5-Paarzustände möglich.

In dem in Abbildung 4.14 betrachteten Unterraum ist erkennbar, dass die lokale Vakuumstabilität zu Beginn noch eins ist und dann bei 100 Laserzyklen fast auf Null abfällt. An dieser Stelle sei noch einmal erwähnt, dass dies nicht bedeutet, dass zu 100 prozentiger Wahrscheinlichkeit kein Vakuum mehr vorhanden ist. Die lokale Vakuumstabilität stellt nur eine differentielle Größe dar und erst die Integration aller Unterräume ergibt die totale Vakuumstabilität. Mit dem Abnehmen der lokalen Vakuumstabilität, nehmen nach und nach die Wahrscheinlichkeiten dafür zu, dass 1-, 2-, usw. Paarzustände vorhanden sind. Gerade für die hier verwendeten sehr hohen Feldstärken ergibt sich, dass auch Mehrpaarzustände angeregt werden und diese ab 50 Laserzyklen wahrscheinlicher als Einpaarzustände sind. Bei 100 Laserzyklen ist es dann z.B. am wahrscheinlichsten, einen 3-Paarzustand zu messen. Generell ist ein oszillatorisches Verhalten der Wahrscheinlichkeiten zu erkennen, was sich auf die Beschreibung der Paarerzeugung als getriebenes Mehrlevelsystem zurückführen lässt. Lediglich innerhalb der ersten Zyklen wäre hier ein Model anwendbar, welches Paarerzeugungsraten bestimmt.

Betrachtet man zum Vergleich die relativen Paarerzeugungswahrscheinlichkeiten für die Einpaarzustände $\omega(\bar{m}\bar{n}|0)$ in Abbildung 4.13, so fällt auf, dass diese alle kleiner eins sind. Daraus folgt, dass die Wahrscheinlichkeit einen einzelnen Mehrpaarzustand zu messen, geringer ist. Denn diese Wahrscheinlichkeit ergibt sich nach (2.26) im Wesentlichen aus dem Produkt der Koeffizienten $\omega(\bar{m}\bar{n}|0)$ der im Mehrpaarzustand auftretenden Paare. Aufgrund der Kombinatorik und der daraus resultierenden Vielzahl an verschiedenen Mehrpaarzuständen kann es aber dennoch vorkommen, dass es in Summe wahrscheinlicher wird, einen beliebigen Mehrpaarzustand anstatt eines Einpaarzustand zu messen. Bei der Untersuchung verschiedener Parameterkonfigurationen zeigte sich, dass es selten auch vorkommt, dass einzelne Koeffizienten $\omega(\bar{m}\bar{n}|0)$ größer als eins sind. In diesem Fall kann auch ein einzelner Mehrpaarzustand (aus den entsprechenden Einpaarzuständen zusammengesetzt) wahrscheinlicher sein als die Einpaarzustände. Obwohl die relativen Wahrscheinlichkeiten größer als eins sein können, steht dies nicht im Widerspruch dazu,



4. Raumzeitabhängige Felder und Mehrpaarzustände

dass die tatsächliche Wahrscheinlichkeit kleiner gleich eins sein muss. Das wird durch die Multiplikation mit der Vakuumsstabilität c_v gewährleistet.

Für Feldkonfigurationen mit anderer Parameterwahl, vor allem zu kleineren Laserfrequenzen ω hin, sind mitunter deutlich höhere Werte für die Anzahl der Zustände zu beobachten. So können z.B. mehrere Millionen verschiedene 5-Paarzustände in dem bereits eingeschränkten Unterraum existieren. Daher kann es sinnvoller sein, kollektive Messgrößen anstatt einzelne Zustände zu untersuchen. Zwei dieser kollektiven Messgrößen, der gemittelte Spin und die gemittelte Helizität, werden im folgenden Abschnitt diskutiert.

4.3.2. Spin und Helizität der Mehrpaarzustände

Für die verwendete Konfiguration von zwei gegenläufigen monochromatischen Laserfeldern liegt es nahe den Spin und die Helizität der erzeugten Paare zu untersuchen, denn sowohl der klassische Spinvektor (4.9) als auch die klassische Helizität (4.10) beider monochromatischer Felder lassen sich beeinflussen. Aus den bisherigen Ergebnissen wurde bereits deutlich, dass sich der Spin und die Helizität des elektromagnetischen Feldes auf die erzeugten Paare überträgt. Zur Untersuchung von Spin und Helizität, abhängig von der Anzahl N an Paaren, werden folgende Größen eingeführt

$$s_N^\pm = \frac{1}{c_N} \langle \text{out} | \left(\frac{1}{N!} \sum_{\{m,n\}} |N_{\{m\}\{n\}}\rangle \left(\sum_i^N \sigma_i^\pm \right) \langle N_{\{m\}\{n\}} | \right) | \text{out} \rangle , \quad (4.36)$$

$$h_N^\pm = \frac{1}{c_N} \langle \text{out} | \left(\frac{1}{N!} \sum_{\{m,n\}} |N_{\{m\}\{n\}}\rangle \left(\sum_i^N \lambda_i^\pm \right) \langle N_{\{m\}\{n\}} | \right) | \text{out} \rangle . \quad (4.37)$$

Die Notation ist am Beispiel des gemittelten Spins s_N^\pm wie folgt zu verstehen. Für alle N -Paarzustände (äußere Summe) wird über alle N Paare (innere Summe) iteriert. Der Laufindex i indiziert also das i -te von N Paaren im jeweiligen N -Paarzustand. Für das i -te Paar wird dann die Quantenzahl des Spins σ_i^\pm bestimmt. Das hochgestellte „ \pm “ unterscheidet zwischen Elektron und Positron. Sämtliche Spins einer Teilchensorte (Elektron oder Positron) werden dann für jeden Mehrpaarzustand aufsummiert. Anschließend werden diese Werte über alle Mehrpaarzustände mit N Paaren aufsummiert und durch c_N geteilt um den mittleren Spin im N -Parsektor zu bestimmen. So entspricht s_3^+ zum Beispiel dem mittleren Spin der Elektronen in allen 3-Paarzuständen. Analog ist auch die mittlere Helizität h_N^\pm definiert. Mit λ_i^\pm ist dabei der Wert der Helizität $\lambda = \sigma_z \cdot p_z / |\mathbf{p}|$ gemeint, der sich aus den Quantenzahlen \mathbf{p} und σ_z des jeweiligen Teilchens im i -ten Paar bestimmt.

Als Beispiel für die mittlere Helizität sind die Werte für h_N^\pm in Abbildung 4.15 dargestellt. Die verwendeten Parameter für das Laserfeld sind die gleichen wie im vorigen

4.3. Dynamik mehrerer Materiefeldmoden und Vielteilchenzustände

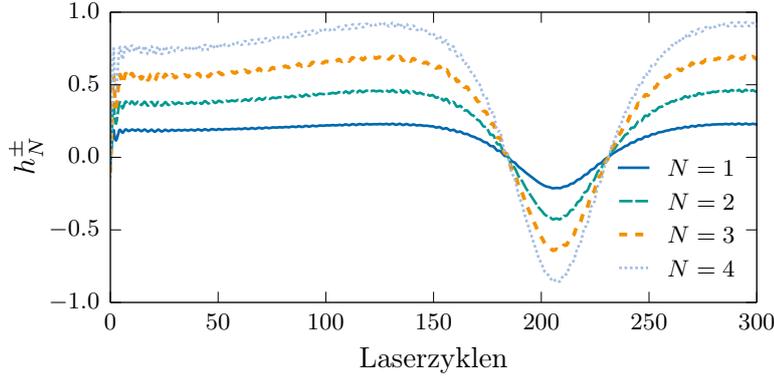


Abbildung 4.15: Zeitentwicklung der mittleren Helizität h_N^\pm für Ein- und Mehrpaarzustände. Für Laserfelder mit gegensinniger Rotation ist die mittlere Helizität ungleich Null. Für die gewählten Feldparameter (identisch zu Abschnitt 4.3.1) zeigt sich eine lineare Abhängigkeit der mittleren Helizität von der Anzahl der Paare N . Die Werte sind identisch für Elektronen und Positronen, d.h. $h_N^+ = h_N^-$.

Abschnitt 4.3.1. Analog zur Diskussion der Abbildung 4.13 ist auch hier die Helizität der erzeugten Paare zum Großteil positiv, was aufgrund der positiven Helizität des klassischen elektromagnetischen Feldes zu erwarten ist. Dennoch kommt es nach einer Wechselwirkungszeit bei etwa 200 Laserzyklen zu einer effektiven Umkehr der Helizität. Dies ist darauf zurückzuführen, dass dort aufgrund der nichtlinearen Dynamik vor allem Paare mit negativer Helizität eine höhere Besetzungswahrscheinlichkeit besitzen also solche mit positiver Helizität (vergleiche Abbildung 4.13). Es lässt sich weiterhin erkennen, dass die mittlere Helizität nahezu linear mit der Anzahl N an Paaren zunimmt. In der gewählten Konfiguration zweier Laserfelder mit gegenläufigem Drehsinn ist keine Spinrichtung bevorzugt und daher ist der mittlere Spin s_N^\pm Null. In der Simulation zeigt sich, dass die mittlere Helizität von der Ladung des Teilchens unabhängig, d.h. $h_N^+ = h_N^-$.

Wird eine Konfiguration gewählt, bei der der Drehsinn beider Laserfelder gleich ist, so zeigt sich, wie in Abbildung 4.16 dargestellt, ein effektiver mittlerer Spin der produzierten Paare. Die mittlere Helizität hingegen ist Null. Die für die Simulation gewählten Parameter sind $\xi = 1/2$, $\omega = 0.4715$ m (entspricht $E = 3.1 \times 10^{17}$ V/m) und $\alpha_+ = \alpha_- = 0.7\pi/4$. Wie auch bei der mittleren Helizität kommt es hier zu einer temporären Umkehr des mittleren Spins. Aufgrund der vorwiegend links-zirkularen Polarisation sollte der Zustand mit Spin \uparrow für Elektronen und Positronen bevorzugt werden. Da die Laserfelder aber nicht vollständig links-zirkular polarisiert sind, können auch Zustände mit Spin \downarrow angeregt werden. Werden die Paarzustände für diese Konfiguration genauer untersucht, siehe Abbildung 4.17, so zeigt sich, dass insgesamt nur 8 Einpaarzustände einen wesentlichen Beitrag liefern. Diese können in zwei Gruppen mit jeweils vier Einpaarzuständen aufgeteilt werden. Die erste Gruppe beinhaltet nur Zustände mit Spin \uparrow und die zweite Gruppe beinhaltet nur Zustände mit Spin \downarrow . Weiterhin sind die Wahrscheinlichkeiten für die Zustände in der ersten bzw. zweiten Gruppe alle gleich. Diese Entartung folgt aus

4. Raumzeitabhängige Felder und Mehrpaarzustände

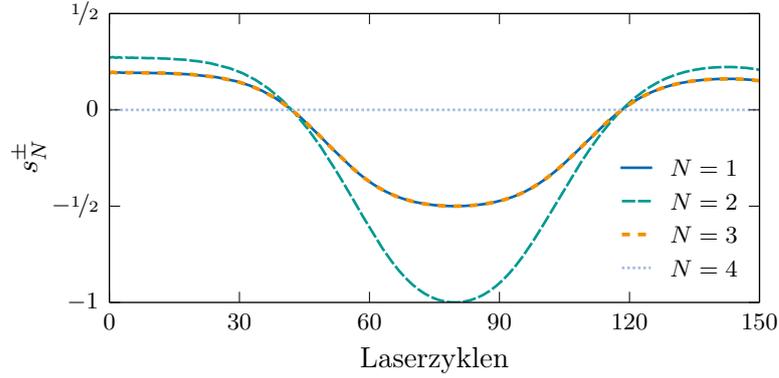


Abbildung 4.16: Zeitliche Entwicklung des mittleren Spins s_N^\pm bei Laserfeldern mit gleichem Rotationssinn. Beide Laserfelder sind elliptisch polarisiert mit $\alpha_\pm = 0.7\pi/4$ und besitzen eine Frequenz $\omega = 0.4175$ m. Eine nichttriviale Abhängigkeit des mittleren Spins von der Anzahl der Einzelpaare N ist ersichtlich. Sie lässt sich auf das Pauli-Verbot zurückführen. Bei etwa 80 Laserzyklen kommt es zu einer Umkehr des mittleren Spins, da auch Zustände mit Spin \downarrow bei nicht vollständig links polarisierten Laserfeldern angeregt werden.

zwei Symmetrien. Die erste ist wie bei Abbildung 4.13 die Invarianz unter Austausch von Elektron und Positron. Die zweite ergibt sich aus daraus, dass keine Vorzugsrichtung für die Helizität bei Laserfeldern mit gleichem Rotationssinn vorhanden ist. Daher können die Impulse der Teilchen invertiert werden und es ergibt sich ein Paar mit derselben Wahrscheinlichkeit.

Der Verlauf des mittleren Spins in Abbildung 4.16 ergibt sich also nur aus dem zeitlichen Verlauf der beiden Wahrscheinlichkeiten in Abbildung 4.17. Der mittlere Spin für die Einpaarzustände ergibt sich aus dem Mittelwert der beiden Wahrscheinlichkeiten multipliziert mit dem jeweiligen Spin. Für die 2-Paarzustände kann nun ein Einpaarzustand mit einem weiteren Einpaarzustand aus derselben Spin-Gruppe oder einem von jeweils zwei möglichen aus der anderen Spin-Gruppe kombiniert werden. Dies führt insgesamt zu einem geringen Anstieg des mittleren Spins, d.h. $|s_1^\pm| < |s_2^\pm|$. Für die 3-Paarzustände ergibt sich interessanterweise genau derselbe mittlere Spin wie für die Einpaarzustände ($s_1^\pm = s_3^\pm$). Das folgt aus der Kombinatorik, denn jeder 3-Paarzustand lässt sich als Produkt von einem 1-Paarzustand und einem 2-Paarzustand schreiben, bei dem die beiden Paare im 2-Paarzustand gerade entgegengesetzte Spins besitzen. Somit wird effektiv wieder über einen 1-Paarzustand gemittelt, da der 2-Paarzustand keinen Spin beiträgt und immer denselben multiplikativen Koeffizienten besitzt. Für die 4-Paarzustände ist der mittlere Spin genau Null, da sich 4-Paarzustände wegen des Pauli-Verbots nur mit jeweils zwei Paaren mit Spin \uparrow und zwei Paaren mit Spin \downarrow bilden lassen.

4.3. Dynamik mehrerer Materiefeldmoden und Vielteilchenzustände

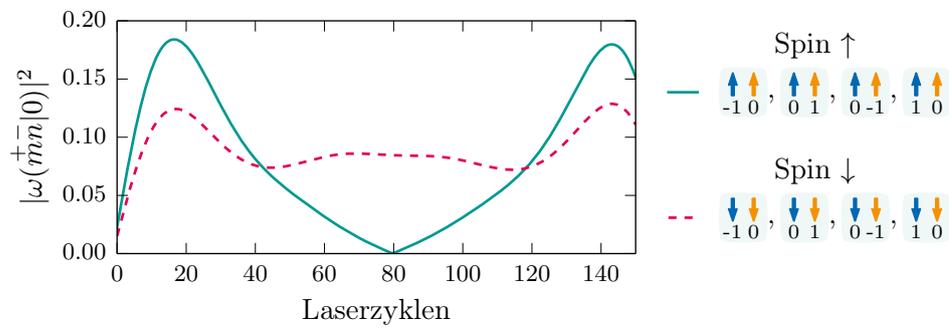


Abbildung 4.17: Zeitentwicklung der relativen Wahrscheinlichkeiten für die in Abbildung 4.16 auftretenden Einpaarzustände. Aufgrund zweier Symmetrien sind die Koeffizienten vierfach entartet. Für die gewählten Feldparameter entstehen im betrachteten Unterraum nur Paare, bei denen Elektron und Positron den gleichen Spin besitzen.

5. Diskussion

In dieser Arbeit wurden zum einen das Tunnelbild erweitert, welches für die Beschreibung der Paarerzeugung im Tunnel- oder Schwinger-Regime $\xi \ll 1$ ein intuitives Bild für den Vorgang der Paarerzeugung sowie qualitative Aussagen über deren Wahrscheinlichkeit liefert. Zum Anderen wurde für das nichtperturbative Regime $\xi \approx 1$ ein quantenfeldtheoretischer Formalismus angewendet, mit dem die Dynamik des quantisierten Elektron-Positron-Feldes unter der Wirkung eines monochromatischen elektromagnetischen Feldes untersucht werden kann.

Erweitertes Tunnelbild

Das Tunnelbild selbst leitet sich aus der semiklassischen Approximation des quantenfeldtheoretischen Prozesses der Paarerzeugung ab. Generell werden semiklassische Methoden oft verwendet, um ein intuitives klassisches Bild von dem meist etwas schwer vorstellbaren Quantenprozessen zu bekommen. Die Approximation lässt sich vor allem für optische Laserpulse verwenden, da deren Periodendauer mehrere Größenordnungen höher ist als die typische Zeitskala der Paarerzeugung, und somit von einem konstanten elektromagnetischen Feld ausgegangen werden darf. Das bisherige Tunnelbild zur Paarerzeugung berücksichtigte bis jetzt nur ein konstantes und statisches elektrisches Feld. Dadurch ist es formal betrachtet nicht lorentzinvariant. Die Lorentzinvarianz kann durch die Berücksichtigung des magnetischen Feldes erreicht werden. Anlehnend an die Arbeiten (Klaiber u. a. 2013) zur Berücksichtigung des magnetischen Feldes bei der Tunnelionisation, wurde dieses für die Paarerzeugung integriert. Dabei zeigt sich am Bild direkt, dass das magnetische Feld die Paarerzeugungsrate senkt. Dieser Fakt war bereits bekannt, da er sich auch aus einer effektiven Reduzierung des elektrischen Feldes schließen lässt (Nikishov 1970). Im erweiterten Tunnelbild lässt sich die Wirkung des magnetischen Feldes aber anschaulich verstehen, da es die kinetische Energie von Elektron und Positron zusätzlich erhöht und somit den Tunnelprozess erschwert.

Weiterhin wurde der Effekt eines zusätzlichen hochenergetischen Photons im Tunnelbild perturbativ berücksichtigt. Auch hier existierten bereits Ansätze (Di Piazza u. a. 2009) zur Integration ins Tunnelbild. Die genaue kinematische Untersuchung im erweiterten Tunnelbild zeigt, dass neben der Energie, die das zusätzliche Photon für die Paarerzeugung beiträgt, auch der Impuls des Photons mitberücksichtigt werden muss. Dieser



5. Diskussion

zusätzliche Impuls teilt sich ebenfalls auf das Elektron-Positron-Paar auf und macht es somit effektiv schwerer, was zur teilweisen Reduktion der Paarerzeugungswahrscheinlichkeit führt. Im Zusammenspiel mit dem Magnetfeld kann dieser allerdings kompensiert werden. Bei der Schwinger-Paarerzeugung mit zusätzlichem Photon, dem sogenannten *dynamically assisted Schwinger mechanism* (Schützhold, Gies und Dunne 2008), kann die Paarerzeugungsrate also durch ein Magnetfeld zusätzlich noch verbessert werden. Ebenfalls ist das erweiterte Tunnelbild in der Lage, die Paarerzeugung im reinen magnetischen Feld zu erklären, insofern das zusätzliche Photon eine Energie größer gleich zweimal der Ruhemasse des Elektrons besitzt.

Durch die Konstruktion des Tunnelbildes mithilfe von kinetischen Größen wird zudem die formale Lorentz- und Eichinvarianz sichergestellt. Die Lorentzinvarianz im Tunnelbild selbst ist jedoch nur in Propagationsrichtung des elektromagnetischen Feldes bzw. Photons ersichtlich, da sonst eine 2-dimensionale Darstellung nicht mehr ausreichen würde. Zusätzlich wurde entsprechend der „modernen“ Interpretation der Quantenelektrodynamik das Tunnelbild bzgl. Elektron und Positron symmetrisiert. Es wird somit nicht mehr von einem tunnelnden Teilchen ausgegangen, sondern von zwei Teilchen. Diese zwei Teilchen sind genau das Elektron und das Positron, die am Ende des Tunnelns auch das erzeugte Paar darstellen. Die ebenfalls mithilfe der semiklassischen Näherung berechneten Exponenten, welche die Tunnelwahrscheinlichkeit widerspiegeln, sind im Einklang mit den existierenden Arbeiten.

Inwiefern das überarbeitete Tunnelbild für kompliziertere elektromagnetische Felder angewendet werden kann, ist unklar. Generell werden Orts- und Zeitabhängigkeiten zu komplizierteren Trajektorien führen, die nur schwer oder gar nicht mehr in einem 2- oder 3-dimensionalen Bild veranschaulicht werden können.

Raumzeitabhängige Felder und Mehrpaarzustände

Die Berechnung der Paarerzeugung für raumzeitabhängige Felder mit beliebiger Form ist numerisch sehr aufwendig, da für eine vollständige Beschreibung prinzipiell alle Materiefeldmoden nach der Dirac-Gleichung in drei Dimensionen propagiert werden müssen. Durch die Wahl von zwei gegenläufigen monochromatischen Laserfeldern mit fester Frequenz $\omega = |\mathbf{k}|$ entkoppeln sämtliche Materiefeldmoden, deren Impulse nicht durch genau ein Vielfaches des Laserfeldwellenvektors \mathbf{k} separiert sind. Diese Feldkonfiguration führt somit auf eine effektive eindimensionale Propagation und stellt eine wesentliche numerische Vereinfachung dar. Bei den experimentell zugänglichen Laserquellen mit hoher Energiedichte ist die Annahme monochromatischer Wellen für Freie-Elektronen-Laser adäquat. Die Beschreibung der Laserfelder als monochromatische Wellen hat aber neben numerischen Vereinfachungen den besonderen Vorteil, dass sowohl das Magnetfeld aufgrund der Ortsabhängigkeit also auch sämtliche Polarisierungen des elektromagnetischen Feldes berücksichtigt werden können. Weiterhin kommt im Vergleich zu rein

zeitabhängigen Feldern hinzu, dass eine nichttriviale Kopplung der Materiefeldmoden im Impulsraum stattfindet. Diese Dynamik der Kopplung verschiedener Moden kann für rein zeitabhängige Felder nicht untersucht werden, da dort sämtliche Moden mit unterschiedlichen Impuls entkoppeln.

Die numerischen Rechnungen in dieser Arbeit haben erneut bestätigt (vgl. Ruf u. a. 2009), dass sich die Paarerzeugung in monochromatischen Feldern im nichtlinearen Regime $\xi \approx 1$ als ein getriebenes Mehrlevelsystem verstehen lässt. Die verschiedenen Level bilden dabei die durch das Feld gekoppelten Elektron- und Positronmoden mit verschiedenen Impulsen. Die für getriebene Mehrlevelsysteme charakteristischen Resonanzen wurden analysiert und es wurde gezeigt, dass diese mit hoher Genauigkeit dem typischen Verhalten von Rabi-Oszillationen folgen. So werden bei einer festgelegten Laserfrequenz nur Paare erzeugt, bei denen die Elektronen und Positronen bestimmte Impuls- bzw. Energiebedingungen erfüllen. Weiterhin wurde die Abhängigkeit des Resonanzspektrums von der Polarisierung des elektromagnetischen Feldes untersucht. Hier zeigt sich, dass sich die Resonanzen mit der Polarisierung verschieben und zum Teil auch verschwinden bzw. unterdrückt werden. Je nachdem, ob die gegenläufigen Laserfelder denselben oder entgegengesetzten Drehsinn der Polarisierung haben, was klassisch gleichen Spin bzw. gleiche Helizität der Felder bedeutet, unterscheiden sich auch die Resonanzfrequenzen für Teilchen mit unterschiedlichen Spin bzw. unterschiedlicher Helizität. Dieser Effekt ist bei Simulationen mit linearer Polarisierung nicht sichtbar und bedeutet, dass je nach Wahl der Polarisierung vorwiegend Paare erzeugt werden, bei denen der Spin oder die Helizität von Elektron und Positron eine bevorzugte Richtung aufweist. Der Spin und die Helizität des klassischen elektromagnetischen Feld überträgt sich also auch auf den Spin und die Helizität der quantentheoretisch beschriebenen Elektronen und Positronen. Es können somit spinpolarisierte Teilchen erzeugt werden.

Durch die Propagation sämtlicher Materiefeldmoden, die miteinander gekoppelt sind, ist es möglich die komplette Dynamik des entsprechenden Quantenzustandes des Elektron-Positron-Feldes im externen elektromagnetischen Feld aufzuzeigen. Es können dadurch sämtliche Wahrscheinlichkeitsamplituden für Ein- sowie Mehrpaarzustände bestimmt und demnach sämtliche Observablen berechnet werden. Für das gewählte Parameterregime wurde beispielhaft gezeigt, dass die Wahrscheinlichkeit einen Mehrpaarzustand zu messen, nach einer gewissen Wechselwirkungszeit höher sein kann als die Wahrscheinlichkeit, einen Einpaarzustand zu messen. Aufgrund der Vielzahl an möglichen Kombinationen von Mehrpaarzuständen aus mehreren Einpaarzuständen wurde sichtbar, dass es generell eine sehr hohe Anzahl an verschiedenen Mehrpaarzuständen gibt. Diese lassen sich aufgrund ihrer Vielzahl nicht mehr vernünftig darstellen. Daher wurden kollektive Messgrößen wie der mittlere Spin oder die mittlere Helizität definiert, die sich durch eine Summe über sämtliche Mehrpaarzustände mit N Paaren berechnen lassen. Diese Größen zeigen in Abhängigkeit von der gewählten Polarisierung des Laserfeldes ein komplexes Verhalten, welches sich auf Symmetrien und das Pauli-Prinzip (Mehrpaarzustände dürfen keine Paare mit identischen Teilchen enthalten) zurückführen



5. Diskussion

lässt. Aus der Vielzahl an Mehrpaarzuständen lässt sich schlussfolgern, dass für komplexere elektromagnetische Felder solche Berechnungen extrem aufwendig werden, da bei ihnen eine große Anzahl zusätzlicher Kopplungen zwischen den Materiefeldmoden hinzukommen,

Die für die Simulationen gewählten Feldstärken und Frequenzen liegen noch deutlich über den momentan erreichbaren Werten der vorhandenen Laserquellen. Ein direkter Vergleich zum Experiment ist daher noch nicht absehbar. Die Wahl kleinerer Werte würde zu numerisch so geringen Wahrscheinlichkeiten führen, dass man sie nicht mehr auflösen könnte – was prinzipiell auch dem Fakt entspricht, dass die direkte Paarerzeugung in reinen elektromagnetischen Feldern bis heute noch nicht gemessen wurde. Alternativ könnte das hier erarbeitete numerische Verfahren für Versuche (Burke u. a. 1997) verwendet werden, bei denen die Paarerzeugung indirekt über ein hochbeschleunigtes Elektron stattfindet, denn im Ruhesystem dieses Elektrons ist das äußere elektromagnetische Feld um mehrere Größenordnungen höher. Somit bringt das energetische Elektron einen Großteil der Energie zur Paarerzeugung mit sich. Eine weitere interessante Möglichkeit stellt die Kombination eines optischen Laserfeldes mit einem monochromatischen und hochfrequenten Laserfeld dar. Das optische Laserfeld könnte als räumlich konstant approximiert werden und würde somit nur zwischen Elektron- und Positronmoden mit demselben Impuls koppeln, dafür aber mit wesentlich höherer Intensität. Das monochromatische Feld würde weiterhin zwischen den verschiedenen durch $|\mathbf{k}|$ separierten Moden koppeln. Durch diese Kombination, ähnlich zu (Schützhold, Gies und Dunne 2008), könnte die Paarerzeugung bereits bei realistischeren Parametern beobachtet werden.

Darüber hinaus ist in der aktuellen Forschung die Frage nach der Rückwirkung der erzeugten Elektron-Positron-Paare auf das elektromagnetische Feld von großer Bedeutung. Dazu müsste der durch die erzeugten Paare hervorgerufene Strom berechnet werden. Dieser würde dann entsprechend Maxwells Gleichungen die Dynamik des externen Feldes ändern und zu einer Reduktion dieses Feldes führen. Ansätze zur Beschreibung dieses Effektes, welcher, wie in der Einleitung dieser Arbeit erwähnt, zu einer Beschränkung der maximalen Feldstärke führt, finden sich in (Kluger u. a. 1992; Kasper, Hebenstreit und Berges 2014). Inwiefern die quantisierte Beschreibung des elektromagnetischen Feldes, abgesehen von störungstheoretischer Behandlung, möglich ist, bleibt noch unklar.

A. Numerische Implementierung

Die einzelnen Einträge in der Matrix besitzen eine 4×4 -Blockstruktur aufgrund der Spinorform der Dirac-Gleichung.

Für die Zeitpropagation der Moden muss der Operator

$$\mathcal{U}(t_{\text{out}}, t_{\text{in}}) = \mathcal{T} \left[\exp \left(-i \int_{t_{\text{in}}}^{t_{\text{out}}} \mathcal{H}(t) dt \right) \right] \quad (\text{A.6})$$

berechnet werden. Mit \mathcal{T} ist der Zeitordnungsoperator gemeint. Der Ausdruck kann im Allgemeinen nicht exakt bestimmt werden, weshalb das Integral als Summe genähert wird. Dabei wird die Gesamtzeit $t_{\text{out}} - t_{\text{in}}$ in N_T äquidistante Zeitintervalle $\Delta t = (t_{\text{out}} - t_{\text{in}})/N_T$ unterteilt. Somit ergibt sich für (A.6) die Approximation

$$\mathcal{U}(t_{\text{out}}, t_{\text{in}}) \approx \mathcal{T} \left[\exp \left(-i \sum_{n=0}^{N_T-1} \mathcal{H}(t_n) \Delta t \right) \right], \quad (\text{A.7})$$

mit $t_n = t_{\text{in}} + \Delta t \cdot n$. Für diesen Ausdruck ist die Anwendung des Zeitordnungsoperators \mathcal{T} immer noch zu komplex. Wird der Exponent mit Summe in ein Produkt von Exponenten umgeschrieben, so wären die einzelnen Terme schon der Zeit nach geordnet und der Zeitordnungsoperator kann weggelassen werden. Da die verschiedenen Terme $\mathcal{H}(t_n)$ zu verschiedenen Zeiten im allgemeinen aber nicht kommutieren, kann der Exponent nicht ohne weiteres faktorisiert werden. Hierfür kann die Trotter-Suzuki Zerlegung (Suzuki 1976)

$$e^{\delta(A+B)} = e^{\delta A} e^{\delta B} + \mathcal{O}(\delta^2) \quad (\text{A.8})$$

als Approximation herangezogen werden. Für genügend kleine Zeitschritte Δt ergibt sich also aus (A.7):

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(t_{\text{out}}, t_{\text{in}}) &\approx \mathcal{T} \left[e^{-i\mathcal{H}(t_{N_T-1})\Delta t} \dots e^{-i\mathcal{H}(t_0)\Delta t} \right] \\ &\approx e^{-i\mathcal{H}(t_{N_T-1})\Delta t} \dots e^{-i\mathcal{H}(t_0)\Delta t} \\ &\approx \prod_{n=0}^{N_T-1} e^{-i\mathcal{H}(t_n)\Delta t}. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Nach der numerischen Berechnung müssen die Ergebnisse auf Konvergenz bezüglich $\Delta t \rightarrow 0$ geprüft werden. Damit hat sich die Berechnung der Zeitentwicklung (A.6) auf die Bestimmung der Operatoren $\exp[-i\mathcal{H}(t_n)]$ reduziert. Da die Anzahl der Schritte N_T Größenordnungen von 10^6 und mehr annehmen kann, ist eine effiziente Berechnung äußerst wichtig. Für monochromatische Felder mit periodischer Zeitabhängigkeit könnte man den gesamten Operator nur für eine Periode berechnen und dann wiederverwenden. Da aber die Ein- und Ausschaltvorgänge auch noch berechnet werden müssen und die Anwendung des gesamten Operators für eine Periode einer vollständigen Matrixmultiplikation, anstatt der direkten Ausmultiplikation einer dünnbesetzten Matrix, entspricht

A. Numerische Implementierung

zerlegen:

$$\mathcal{H}_f = \begin{pmatrix} H_{-N_M} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & H_0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & H_{N_M} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.13})$$

$$\mathcal{H}_A = \begin{pmatrix} 0 & H_A & \cdots & 0 & (H_A^+) \\ H_A^+ & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & H_A \\ (H_A) & 0 & \cdots & H_A^+ & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.14})$$

Für die Matrix \mathcal{H}_A werden die Einträge in Klammern zusätzlich hinzugefügt um sie zirkulant zu machen. Die Einträge ändern die Simulation nicht, da die Moden am Rand sowieso nicht merklich besetzt werden dürfen (siehe Abbildung 4.3). Sonst müsste die Anzahl N_M der zu berücksichtigenden Moden erhöht werden. Da die Matrix \mathcal{H}_A nun zirkulant ist, kann Sie mithilfe der schnellen Fouriertransformation numerisch auf dem 4×4 -Blocklevel diagonalisiert werden. Durch den Wechsel in den Fourierraum, welcher mit der Fouriertransformation der Größe $(2N_M + 1)$ der Wellenfunktion ψ_{p_0} erreicht wird¹, bekommt die Matrix \mathcal{H}_A die blockdiagonale Struktur

$$\mathcal{F}(\mathcal{H}_A) = \begin{pmatrix} H_{A,-N_M} & & & & \\ & H_{A,-N_M+1} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & H_{A,0} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & H_{A,N_M-1} \\ & & & & & & H_{A,N_M} \end{pmatrix} \quad (\text{A.15})$$

und die Blockeinträge $H_{A,l}$ sind mit

$$H_{A,l} = \exp\left[-\frac{2\pi}{2N_M+1}l\right] H_A + \exp\left[\frac{2\pi}{2N_M+1}l\right] H_A^+ \quad (\text{A.16})$$

gegeben, wobei $-(2N_M + 1) \leq l \leq 2N_M + 1$. Aufgrund der gewählten Geometrie ist \mathcal{A}_z Null und das Ausschreiben der Terme $H_{A,l}$, was im wesentlichen der Ausmultiplikation

¹Die Fouriertransformation wird dabei insgesamt 4 mal durchgeführt - einmal für jeden der 4 Spinor-Einträge.

$\alpha\mathcal{A}$ entspricht, zeigt, dass diese immer die folgende Form haben

$$H_{A,l} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_l \\ 0 & 0 & a_l^* & 0 \\ 0 & a_l & 0 & \\ a_l^* & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.17})$$

Die komplexe Zahl a_l hängt von der Zeit, vom Modenindex l und von der gewählten Parametermenge der beiden monochromatischen Felder ab. Die Exponentierung von $H_{A,l}$ kann direkt durchgeführt werden und ergibt

$$\exp[-iH_{A,l}\theta] = \mathbb{1} \cos(|a|\theta) - \frac{i}{|a|} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_l \\ 0 & 0 & a_l^* & 0 \\ 0 & a_l & 0 & \\ a_l^* & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sin(|a|\theta). \quad (\text{A.18})$$

Somit können nun sowohl $\exp \mathcal{H}_f$ und $\exp \mathcal{H}_A$ effizient berechnet werden. Da \mathcal{H}_f nicht zeitabhängig ist, können die $(2N_M + 1)$ Matrizen, also $\exp H_l$ abgespeichert und wiederverwendet werden. Die Blockmatrizen $\exp H_{A,l}$ müssen hingegen für jeden Zeitschritt neu bestimmt werden. Im Gegensatz zur vollständigen Diagonalisierung lässt sich die Zeitentwicklung (A.10) also durch zweimalige Fouriertransformation der Wellenfunktion und anschließender direkter Ausmultiplikation mit 4×4 -Blockmatrizen sehr effizient berechnen.



Literatur

- Anderson, C. D. (1932). “Energies of Cosmic-Ray Particles”. In: *Physical Review* 41.4, S. 405–421. DOI: 10.1103/PhysRev.41.405.
- Bagrov, V. G. und D. M. Gitman (1990). *Exact solutions of relativistic wave equations*. 1. Aufl. Bd. 39. Mathematics and its Applications. Springer Netherlands. 324 S.
- Bliokh, K. Y., A. Y. Bekshaev und F. Nori (2013). “Dual electromagnetism: helicity, spin, momentum and angular momentum”. In: *New Journal of Physics* 15.3, S. 033026. DOI: 10.1088/1367-2630/15/3/033026.
- Bloch, J. C. R., V. A. Mizerny, A. V. Prozorkevich u. a. (1999). “Pair creation: Back reactions and damping”. In: *Physical Review D* 60.11, S. 116011. DOI: 10.1103/PhysRevD.60.116011.
- Bogoljubov, N. N. und D. V. Širkov (1984). *Quantenfelder*. Physik Verlag.
- Brezin, E. und C. Itzykson (1970). “Pair Production in Vacuum by an Alternating Field”. In: *Physical Review D* 2.7, S. 1191–1199. DOI: 10.1103/PhysRevD.2.1191.
- Burke, D. L., R. C. Field, G. Horton-Smith u. a. (1997). “Positron Production in Multi-photon Light-by-Light Scattering”. In: *Physical Review Letters* 79.9, S. 1626–1629. DOI: 10.1103/PhysRevLett.79.1626.
- de Bruijn, N. G (1961). *Asymptotic Methods in Analysis*. Wiley.
- Di Piazza, A., E. Lötstedt, A. I. Milstein u. a. (2009). “Barrier Control in Tunneling e^+e^- Photoproduction”. In: *Physical Review Letters* 103.17, S. 170403. DOI: 10.1103/PhysRevLett.103.170403.
- Di Piazza, A., C. Müller, K. Z. Hatsagortsyan u. a. (2012). “Extremely high-intensity laser interactions with fundamental quantum systems”. In: *Reviews of Modern Physics* 84.3, S. 1177–1228. DOI: 10.1103/RevModPhys.84.1177.



Literatur

- Dirac, P. A. M. (1928a). “The Quantum Theory of the Electron”. In: *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 117.778, S. 610–624. DOI: 10.1098/rspa.1928.0023.
- (1928b). “The Quantum Theory of the Electron. Part II”. In: *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 118.779, S. 351–361. DOI: 10.1098/rspa.1928.0056.
- Dittrich, W. und H. Gies (2000). *Probing the Quantum Vacuum - Perturbative Effective Action Approach in Quantum Electrodynamics and its Application*. 1. Aufl. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. DOI: 10.1007/3-540-45585-X.
- Dyson, F. J. (1949a). “The Radiation Theories of Tomonaga, Schwinger, and Feynman”. In: *Physical Review* 75.3, S. 486–502. DOI: 10.1103/PhysRev.75.486.
- (1949b). “The S Matrix in Quantum Electrodynamics”. In: *Physical Review* 75.11, S. 1736–1755. DOI: 10.1103/PhysRev.75.1736.
- Einstein, A. (1905). “Zur Elektrodynamik bewegter Körper”. In: *Annalen der Physik* 322.10, S. 891–921. DOI: 10.1002/andp.19053221004.
- Euler, H. und B. Kockel (1935). “Über die Streuung von Licht an Licht nach der Diracschen Theorie”. In: *Naturwissenschaften* 23.15, S. 246–247. DOI: 10.1007/BF01493898.
- Fedotov, A. M., N. B. Narozhny, G. Mourou u. a. (2010). “Limitations on the Attainable Intensity of High Power Lasers”. In: *Physical Review Letters* 105.8, S. 080402. DOI: 10.1103/PhysRevLett.105.080402.
- Feynman, R. P. (1949a). “The Theory of Positrons”. In: *Physical Review* 76.6, S. 749–759. DOI: 10.1103/PhysRev.76.749.
- (1949b). “Space-Time Approach to Quantum Electrodynamics”. In: *Physical Review* 76.6, S. 769–789. DOI: 10.1103/PhysRev.76.769.
- (1950). “Mathematical Formulation of the Quantum Theory of Electromagnetic Interaction”. In: *Physical Review* 80.3, S. 440–457. DOI: 10.1103/PhysRev.80.440.
- Fradkin, E. S., D. M. Gitman und S. M. Shvartsman (1991). *Quantum Electrodynamics with Unstable Vacuum*. 1. Aufl. Springer Series in Nuclear and Particle Physics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 288 S.

- Frolov, V. P. und D. M. Gitman (1978). “Density matrix in quantum electrodynamics, equivalence principle and Hawking effect”. In: *Journal of Physics A: Mathematical and General* 11.7, S. 1329–1333.
- Furry, W. H. (1951). “On Bound States and Scattering in Positron Theory”. In: *Physical Review* 81.1, S. 115–124. DOI: 10.1103/PhysRev.81.115.
- Griffiths, D. J. (2004). *Introduction to Quantum Mechanics*. Prentice Hall.
- Hecht, J. (2010). “Short history of laser development”. In: *Optical Engineering* 49.9, S. 091002–1–091002–23. DOI: 10.1117/1.3483597.
- Heisenberg, W. und H. Euler (1936). “Folgerungen aus der Diracschen Theorie des Positrons”. In: *Zeitschrift für Physik* 98.11-12, S. 714–732. DOI: 10.1007/BF01343663.
- Jones, R. C. (1941). “A New Calculus for the Treatment of Optical Systems I. Description and Discussion of the Calculus”. In: *Journal of the Optical Society of America* 31.7, S. 488–493. DOI: 10.1364/JOSA.31.000488.
- Kasper, V., F. Hebenstreit und J. Berges (2014). “Fermion production from real-time lattice gauge theory in the classical-statistical regime”. In: *Physical Review D* 90.2, S. 025016. DOI: 10.1103/PhysRevD.90.025016.
- Klaiber, M., E. Yakaboylu, H. Bauke u. a. (2013). “Under-the-Barrier Dynamics in Laser-Induced Relativistic Tunneling”. In: *Physical Review Letters* 110.15, S. 153004. DOI: 10.1103/PhysRevLett.110.153004.
- Kluger, Y., J. M. Eisenberg, B. Svetitsky u. a. (1992). “Fermion pair production in a strong electric field”. In: *Physical Review D* 45.12, S. 4659–4671. DOI: 10.1103/PhysRevD.45.4659.
- Landau, L. D. und E. M. Lifshitz (1975). *The Classical Theory of Fields. Vol. 2*. 4. Aufl. Pergamon Press.
- Maiman, T. H. (1960). “Stimulated Optical Radiation in Ruby”. In: *Nature* 187.4738, S. 493–494. DOI: 10.1038/187493a0.
- Marinov, M. S. und V. S. Popov (1972). “Pair formation in an electromagnetic field (the case of arbitrary spin)”. In: *Soviet Journal of Nuclear Physics* 15, S. 702.
- McNeil, B. W. und N. R. Thompson (2010). “X-ray free-electron lasers”. In: *Nature photonics* 4.12, S. 814–821. DOI: 10.1038/nphoton.2010.239.



Literatur

- Mocken, G. R., M. Ruf, C. Müller u. a. (2010). “Nonperturbative multiphoton electron-positron-pair creation in laser fields”. In: *Physical Review A* 81.2, S. 022122. DOI: 10.1103/PhysRevA.81.022122.
- Mourou, G. A., T. Tajima und S. V. Bulanov (2006). “Optics in the relativistic regime”. In: *Reviews of Modern Physics* 78.2, S. 309–371. DOI: 10.1103/RevModPhys.78.309.
- Nikishov, A. I. (1970). “Pair Production by a Constant External Field”. In: *Soviet Physics JETP* 30.4, S. 660–662.
- Nikishov, A. I. und V. I. Ritus (1964). “Quantum processes in the field of a plane electromagnetic wave and in a constant field. I”. In: *Soviet Physics JETP* 19.2, S. 529–541.
- Pauli, W. (1932). “Diracs Wellengleichung des Elektrons und geometrische Optik”. In: *Helvetica Physica Acta* 5.III, S. 179–199. DOI: 10.5169/seals-110167.
- Popov, V. S. (1971). “Production of e^+e^- pairs in an alternating external field”. In: *JETP Letters* 13.5, S. 185–187.
- (1972). “Pair production in a variable external field”. In: *Soviet Physics JETP* 34.4, S. 709–718.
- Popov, V. S., V. P. Kuznetsov und A. M. Perelomov (1968). “Quasiclassical Approximation for Nonstationary Problems”. In: *Soviet Physics JETP* 26.1, S. 222–232.
- Popov, V. S. und M. S. Marinov (1973). “ e^+e^- pair production in an alternating electric field”. In: *Soviet Journal of Nuclear Physics* 16.4, S. 449–456.
- Reiss, H. R. (1962). “Absorption of Light by Light”. In: *Journal of Mathematical Physics* 3.1, S. 59–67. DOI: 10.1063/1.1703787.
- Ruf, M., G. R. Mocken, C. Müller u. a. (2009). “Pair Production in Laser Fields Oscillating in Space and Time”. In: *Physical Review Letters* 102.8, S. 080402. DOI: 10.1103/PhysRevLett.102.080402.
- Sauter, F. (1931). “Über das Verhalten eines Elektrons im homogenen elektrischen Feld nach der relativistischen Theorie Diracs”. In: *Zeitschrift für Physik* 69.11-12, S. 742–764. DOI: 10.1007/BF01339461.
- Schwinger, J. (1948a). “On Quantum-Electrodynamics and the Magnetic Moment of the Electron”. In: *Physical Review* 73.4, S. 416–417. DOI: 10.1103/PhysRev.73.416.

- (1948b). “Quantum Electrodynamics. I. A Covariant Formulation”. In: *Physical Review* 74.10, S. 1439–1461. DOI: 10.1103/PhysRev.74.1439.
 - (1951). “On Gauge Invariance and Vacuum Polarization”. In: *Physical Review* 82.5, S. 664–679. DOI: 10.1103/PhysRev.82.664.
- Schützhold, R., H. Gies und G. Dunne (2008). “Dynamically Assisted Schwinger Mechanism”. In: *Physical Review Letters* 101.13, S. 130404. DOI: 10.1103/PhysRevLett.101.130404.
- Suzuki, M. (1976). “Generalized Trotter’s formula and systematic approximants of exponential operators and inner derivations with applications to many-body problems”. In: *Communications in Mathematical Physics* 51.2, S. 183–190.
- Thaller, B. (2005). *Advanced Visual Quantum Mechanics*. 1. Aufl. Springer-Verlag New York. DOI: 10.1007/b138654.
- Tomonaga, S. (1946). “On a Relativistically Invariant Formulation of the Quantum Theory of Wave Fields”. In: *Progress of Theoretical Physics* 1.2, S. 27–42. DOI: 10.1143/PTP.1.27.
- Van Dyck, R. S., P. B. Schwinberg und H. G. Dehmelt (1987). “New high-precision comparison of electron and positron g factors”. In: *Physical Review Letters* 59.1, S. 26–29. DOI: 10.1103/PhysRevLett.59.26.
- Wolkow, D. M. (1935). “Über eine Klasse von Lösungen der Diracschen Gleichung”. In: *Zeitschrift für Physik* 94.3, S. 250–260. DOI: 10.1007/BF01331022.
- Wöllert, A., H. Bauke und C. H. Keitel (2015a). *Multi-pair states in electron-positron pair creation*. arXiv: arXiv:1511.07709 [quant-ph].
- (2015b). “Spin polarized electron-positron pair production via elliptical polarized laser fields”. In: *Physical Review D* 91.12, S. 125026. DOI: 10.1103/PhysRevD.91.125026.
- Wöllert, A., M. Klaiber, H. Bauke u. a. (2015). “Relativistic tunneling picture of electron-positron pair creation”. In: *Physical Review D* 91.6, S. 065022. DOI: 10.1103/PhysRevD.91.065022.
- Zuber, J.-B. und C. Itzykson (1980). *Quantum Field Theory*. McGraw-Hill, Inc., New York. 752 S.



Abbildungsverzeichnis

Quelle: Photo courtesy of Berkeley Lab. URL: http://photos.lbl.gov/viewphoto.php?imageId=10592974	iii
1.1 Paarerzeugung durch ein hochenergetisches Photon am Atom. Quelle: Photo courtesy of Berkeley Lab. URL: http://photos.lbl.gov/viewphoto.php?imageId=10592974 (Stand: 4. Mai 2016)	2
1.2 Das historische Tunnelbild zur Paarerzeugung. Quelle: Heisenberg und Euler 1936, S. 719	3
2.1 Typische Wechselwirkungsprozesse in der QED und R. Feynmans Campermobil. URL: http://www.fnal.gov/pub/tufte/images/artwork/Tufte-Van-2-hr.jpg (Stand: 4. Mai 2006)	8
2.2 Grafische Darstellung der möglichen Prozesse im Furry-Bild.	9
2.3 Symmetrisierung des Tunnelbildes für die Paarerzeugung.	19
3.1 Räumliche Darstellung der Feldkonfiguration für das erweiterte Tunnelbild.	28
3.2 Erklärung der verschiedenen Größen im erweiterten Tunnelbild.	35
3.3 Tunnelbild für ein reines elektrisches Feld und aus der Sicht eines dazu lorentztransformierten Systems.	37
3.4 Tunnelbild für ungleiche Endimpulse und für den Einfluss eines zusätzlichen Photons.	39
3.5 Tunnelbild für $ E = B $ mit verschiedenen Photonenenergien.	41
3.6 Tunnelbild für $ E < B $	44
3.7 Darstellung der wahrscheinlichsten Endimpulse $p_{z,e}$ und $q_{z,e}$	46
3.8 Abhängigkeit des optimalen Verhältnis $\beta = B/E$ und der Tunnelexponenten vom Photonenimpuls k_0	47
4.1 Abhängigkeit der Polarisierung von den Parametern α und φ	56
4.2 Darstellung der zwei verwendeten Fälle für die Polarisierungen der monochromatischen Felder.	57
4.3 Zeitentwicklung einer einzelnen Materiefeldmode und deren Ankopplung an benachbarte Materiefeldmoden.	60
4.4 Unterschiede zwischen der Messung im Feld und der Messung im Vakuum.	61
4.5 Rabi-Oszillationen für die Besetzungswahrscheinlichkeit $\mathcal{N}_{0,\uparrow/\downarrow}$ eines erzeugten Elektrons mit Impuls Null.	62



Abbildungsverzeichnis

4.6	Paarerzeugungsresonanzen für lineare Polarisation $\alpha_{\pm} = \pi/4$	63
4.7	Detaillierte Resonanz bei $\omega = 0.472$ m und Vergleich mit dem typischen Resonanzverhalten von Rabi-Oszillationen.	64
4.8	Polarisations- und Laserfrequenzabhängigkeit der Elektronenerzeugungswahrscheinlichkeit für gleichsinnig rotierende Laserfelder.	66
4.9	Polarisations- und Laserfrequenzabhängigkeit der Elektronenerzeugungswahrscheinlichkeit für gegensinnig rotierende Laserfelder.	68
4.10	Polarisationsabhängigkeit der Erzeugungswahrscheinlichkeit von Elektronen mit unterschiedlichem Endimpuls für gleichsinnig rotierende Laserfelder mit einer Frequenz von $\omega = 0.8$ m.	69
4.11	Polarisationsabhängigkeit der Erzeugungswahrscheinlichkeit von Elektronen mit unterschiedlichem Endimpuls für gegensinnig rotierende Laserfelder mit einer Frequenz von $\omega = 0.8$ m.	70
4.12	Schematische Darstellung der Zeitentwicklung des Vakuumzustandes. . .	71
4.13	Zeitentwicklung der relativen Paarerzeugungswahrscheinlichkeiten für Einpaarzustände.	75
4.14	Zeitliche Entwicklung der lokalen Vakuumstabilität und der Wahrscheinlichkeit für Mehrpaarzustände.	76
4.15	Zeitentwicklung der mittleren Helizität für Ein- und Mehrpaarzustände. .	79
4.16	Zeitliche Entwicklung des mittleren Spins bei Laserfeldern mit gleichem Rotationssinn.	80
4.17	Zeitentwicklung der relativen Wahrscheinlichkeiten für die in Abbildung 4.16 auftretenden Einpaarzustände.	81

Danksagung

An erster Stelle möchte ich Christoph Keitel danken, dass er mir die Promotion in seiner Arbeitsgruppe ermöglicht hat. Seine Bereitschaft, auf Probleme einzugehen und diese zu diskutieren, war mir eine große Hilfe.

Ebenso möchte ich Heiko Bauke dafür danken, dass er mir bei der Durchführung der Promotion und bei der Ausarbeitung der Publikationen stets zur Seite gestanden hat und für Ideen offen war.

Besonderen Dank möchte ich Sebastian Meuren und Enderalp Yakaboylu für die interessanten Gespräche während der Zeit am MPI-K aussprechen. Es war mir eine große Freude, Euch kennengelernt zu haben.

Darüber hinaus bedanke ich mich bei Nicolas Teeny, David Schönleber und Jonas Gunst für die ruhige Atmosphäre im Büro, bei Maria Wöllert für das Korrekturlesen dieser Arbeit, bei Michael Kläiber für die Zusammenarbeit und weiterhin bei Werner Heibel, Norbert Winkler und Michael Panter vom MPI-K.

Ebenso möchte ich den Mitarbeitern der Abteilung Keitel danken, die mir stets Entgegenkommen gezeigt haben.

Danke.

