UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
HEIDELBERG

Heidelberger Texte zur
Mathematikgeschichte

Leitartikel der Zeitschrift „Bibliotheca Mathematica“

von

Gustaf Eneström

zusammengestellt von
Gabriele Dörflinger
Universitätsbibliothek Heidelberg

2018

//www.ub.uni-heidelberg.de/archiv/24244

Vorwort

Gustaf Eneström (1852–1923) arbeitete als Bibliothekar an der Königlichen Bibliothek in Stockholm. Ab 1884 gab er die mathematikhistorische Zeitschrift *Bibliotheca Mathematica* heraus. Sie erschien zunächst als Anhang der von Gösta Mittg-Leffler herausgegebenen *Acta Mathematica* und veröffentlichte sehr kurze Hinweise auf neu erschienene mathematikhistorische Literatur. Ab 1887 erschien die Zeitschrift in etwas erweiterten Umfang selbständig (2. Folge). Ab 1900 wurde sie in nochmals erweitertertem Umfang vom Teubner-Verlag in Leipzig verlegt (3. Folge).

Die Leitartikel der 3. Folge von Gustaf Eneström sind im Folgenden zusammengestellt. Sie behandeln methodische Fragen der mathematikhistorischen Forschung.

Die Seitenzählung des Originals sind am Rand in runden Klammern vermerkt. In der Regel wurden von diesen Aufsätzen Eigenreferate Gustaf Eneströms im *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* publiziert. Diese Referate wurden den Artikeln als *Zusammenfassung* vorangestellt.

Gabriele Dörflinger

Inhaltsverzeichnis

Band 1

Ziele und Aufgaben eines Organs für mathematisch-historische Forschung und für aktuelle Fragen auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften.

Zusammenfassung:
Einleitungsweise hebt der Verf. hervor, dass und warum die mathematisch-historische Forschung ein besonderes Organ nötig hat, und giebt eine Uebersicht über die bisherigen mathematisch-historischen Zeitschriften. Dann wird als Hauptzweck der erweiterten Folge der Bibliotheca Mathematica angegeben, neue Untersuchungen zur Geschichte der Mathematik, Physik und Astronomie anzuregen und zu veröffentlichen, und die Aufmerksamkeit darauf gelenkt, dass solche Untersuchungen nicht nur erwünscht sind, um die von der bisherigen Forschung gelassenen Lücken auszufüllen, sondern dass sie auch vom rein mathematischen Gesichtspunkt aus wertvoll sein müssen, da die Geschichte der Mathematik in der letzten Zeit eine ganz andere Bedeutung als früher bekommen hat. Hierzu werden noch Bemerkungen darüber angefügt, wie die Zeitschrift ihren Hauptzweck am besten erfüllen wird.

Zuletzt wird kurz dargelegt, welches die im Titel des Artikels angedeuteten actuellen Fragen sind, von denen einige dem mathematisch-historischen Gebiete sehr nahe, andere demselben etwas ferner liegen.

Quelle: JFM 31.1900, S. 37

---

(1) Es ist eine längst beobachtete und bemerkte Thatsache, daß, sobald die Forschungen auf einem wissenschaftlichen Gebiete eine gewisse Extensität erreicht haben, das Bedürfnis nach besonderen Organen für diese Forschungen sich fühlbar macht, und daß es dann auch früher oder später durch Fachzeitschriften befriedigt wird. Um so größer muß das fragliche Bedürfnis sein, wenn es sich um eine Art von Forschung handelt, welche, wie die mathematisch-historische, umfangreiche Einsichten in verschiedene Wissenschaften (Mathematik, Litteraturgeschichte, Philologie) erfordert, und so hat sich in der That das Bedürfnis nach Fachzeitschriften für die mathematisch-historische Wissenschaft schon seit Jahrzehnten eingestellt.

Als die erste derselben dürfte das kleine *Bulletin de bibliographie, d'histoire et de biographie mathématiques* (eigentlich ein Anhang zu den *Nouvelles annales de mathématiques*) anzusehen sein, das O. Terquem vom Jahre 1855 bis zu seinem Tode (1862) herausgab. Etwa gleichzeitig mit diesem *Bulletin* wurde die *Zeitschrift für Mathematik und Physik* begründet, die, obgleich sie nicht vom Anfang an ein mathematisch-historisches Journal war, schon in ihren ersten Jahrgängen, und besonders seitdem Herr Moritz Cantor (1859) Mitredakteur derselben geworden war, viele mathematisch-historische Abhandlungen enthielt, welche von 1875 an in einer besonderen „Historisch-litterarischen Abteilung" Aufnahme fanden. Außerdem ist seit dem Jahre 1877 eine ziemlich große Anzahl von historischen Abhandlungen nicht in der Zeitschrift selbst, sondern in „Supplementen" veröffentlicht, welche auch selbständig unter dem Titel: *Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik* (9 Hefte 1877–1899) erschienen sind.

Ein ganz selbständiges und groß angelegtes Organ erhielt endlich die Geschichte der
Mathematik im Jahre 1868 durch das *Bullettino di bibliografia e di storia delle* (2)
scienze matematiche e fisiche des Fürsten Baldassarre Boncompagni, von welcher Zeitschrift zwanzig starke Bände publiziert wurden. Schon 1879 war es Boncompagnis Absicht, das *Bullettino* eingehen zu lassen, und für diesen Fall war eine neue Zeitschrift für Geschichte der Mathematik geplant, aber Boncompagni entschloß sich nach längerem Zögern sein Unternehmen noch einige Jahre fortzusetzen, und als es endlich mit dem Jahrgange 1887 definitiv eingestellt wurde, hatte ich schon die *Bibliotheca Mathematica*, deren drei erste Jahrgänge (1884–1886) hauptsächlich Verzeichnisse neuerschienener mathematischer Schriften enthalten hatten, in eine Fachzeitschrift für Geschichte der Mathematik verwandelt; von dieser „neuen Folge" der *Bibliotheca Mathematica* sind dreizehn Jahrgänge (1887–1899) erschienen.

In den letzten Jahren haben wir noch eine mathematisch-historische Zeitschrift bekommen, nämlich das *Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche* des Herrn Gino Loria, welches 1897 als Anhang an das *Giornale di matematiche*, vom Jahre 1898 an als selbständige Zeitschrift herausgegeben worden ist.

Der Vollständigkeit halber soll noch erwähnt werden, daß das im Jahre 1868 begründete *Bulletin des sciences mathématiques* eine große Anzahl von wertvollen historischen Aufsätzen enthält, und daß Herr Victor Bobynin seit 1885 in Moskwa eine russische Zeitschrift (Физико-математическія науки) herausgiebt, die hauptsächlich mathematisch-historischen Inhalts ist, und fast ausschließlich Aufsätze des Herausgebers bringt.

Aus der soeben mitgeteilten Übersicht geht hervor, daß es bisher an mathematisch-historischen Zeitschriften nicht gefehlt hat, und daß wir während der letzten Jahre sogar drei oder vier solche gehabt haben, aber dennoch kann behauptet werden, daß das Bedürfnis eines wirklichen Organs der mathematisch-historischen Forschung dadurch nicht ganz befriedigt worden ist. Die *Historisch-litterarische Abteilung der Zeitschrift für Mathematik und Physik* ist buchhändlerisch keine selbständige Publikation, und sie ist auch nicht ausschließlich mathematisch-historisch, sondern ihr Zweck ist ebenso sehr eine mathematische Litteraturzeitung zu sein; die letzte Bemerkung gilt auch hinsichtlich des *Bollettino* des Herrn Loria. Die *Bibliotheca Mathematica* ist zwar ausschließlich der Geschichte der Mathematik gewidmet gewesen, aber ihr Umfang war bisher auf acht Druckbogen pro Jahr beschränkt, und da sie dem Programme nach sowohl Originalaufsätze als Rezensionen, Schriftverzeichnisse und Anfragen mit Antworten enthalten mußte, so konnten längere Abhandlungen darin nicht veröffentlicht werden und Beiträge

(3) zur Geschichte der angewandten Mathematik nur ausnahmsweise Platz finden; auch für die Rezensionen war der Raum so beschränkt, daß in jedem Hefte nur ein paar Schriften besprochen werden konnten. Endlich kann mit Bezug auf die ***Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik*** bemerkt werden, daß sie keine eigentliche Zeitschrift und schon aus diesem Grunde weniger geeignet sind, als Organ für die mathematisch-historische Forschung zu wirken, sofern man von einem solchen etwas mehr fordert, als daß es mathematisch-historische Abhandlungen sammeln und zum Drucke befördern soll.

Die Übelstände, die das Fehlen an einem besonderen, dem Bedürfnis angepaßten Organ für die mathematisch-historische Forschung mit sich geführt hat, sind für die Fachmänner um so fühlbarer geworden, je mehr deren Anzahl herangewachsen ist, und von Seiten meiner Kollegen ist an mich oft die Aufforderung ergangen, durch Erweiterung des Umfanges der ***Bibliotheca Mathematica*** ein solches Organ herzustellen. Da auch ich selbst seit längerer Zeit eine solche Erweiterung als notwendig erachtete, so war nur die Art und der Zeitpunkt derselben noch festzustellen. Jetzt haben diese bisher schwebenden Fragen ihre Lösung gefunden, und zwar durch ein Anerbieten von Seiten der Teubnerschen Verlagsbuchhandlung, welche sich bereit erklärte, den Verlag der Zeitschrift zu übernehmen, und mir dabei eine wesentliche Erweiterung des Umfanges gestattete, sodaß jährlich etwa 35 Druckbogen herausgegeben werden können.

Vom Jahre 1900 an wird also die ***Bibliotheca Mathematica*** im stande sein, viel kräftiger als früher als Organ für die mathematisch-historische Forschung zu wirken, und ihr Zweck soll dabei in erster Linie sein, neue Untersuchungen zur Geschichte der Mathematik, Physik und Astronomie anzuregen und zu veröffentlichen. Was zunächst die Geschichte der reinen Mathematik betrifft, so haben wir ja schon eine vorzügliche Darstellung derselben in den CANTORschen *Vorlesungen*, und da diese drei starke Bände umfassen, könnte es scheinen, als ob auf diesem Gebiete verhältnismäßig wenig noch zu thun wäre. Aber in Wirklichkeit verhält es sich ganz anders, und es ist gerade ein besonderes Verdienst dieser *Vorlesungen* die Aufmerksamkeit darauf gelenkt zu haben, wie viele Lücken noch auszufüllen und wie viele eingehende Untersuchungen folglich noch nötig sind. Ganz besonders gilt diese Bemerkung in Bezug auf das Mittelalter, kaum weniger für die neuere Zeit bis zum Jahre 1758, mit welchem die *Vorlesungen* abbrechen; für die letzte Hälfte des 18. Jahrhunderts und das ganze 19. Jahrhundert besitzen wir noch gar keine befriedigende Gesamtdarstellung und nur eine ziemlich kleine Anzahl von Einzeldarstellungen, die übrigens
(4) nicht nach demselben Plan bearbeitet worden sind.

Diese Umstände sind um so mehr hervorzuheben, als die Geschichte der Mathematik in der letzten Zeit eine ganz andere Bedeutung als früher bekommen hat. Als ich vor etwa dreißig Jahren anfing, mich mit mathematisch-historischen Forschungen zu beschäftigen, waren die meisten Mathematiker, mit denen ich in Berührung kam, der Ansicht, daß eingehende Untersuchungen auf diesem Gebiete eigentlich nur unnütze Zeitverschwendung sei, sodaß eine solche Arbeit nicht als verdienstlich, sondern eher als verwerflich erachtet werden müsse[1]; ich habe hinreichenden Anlaß anzunehmen, daß die meisten übrigen Mathematiker damals derselben Meinung waren. Jetzt aber dürfte eine solche Auffassung eher als eine Kuriosität betrachtet werden, und die meisten Fachgenossen sind wohl darüber einig, daß

[1]Diese Ansicht wurde gewöhnlich auf folgende Weise begründet: Hat eine ältere mathematische Arbeit wirklich bleibende Errungenschaften aufzuweisen, so sind diese gewiß in den neueren systematischen Darstellungen und zwar in verbesserter Form enthalten, und das Studium der älteren Arbeit ist also unnötig; repräsentiert dagegen diese Arbeit einen schon überwundenen Standpunkt, so ist ihr Studium unnütz oder sogar schädlich.

die Geschichte der Mathematik nicht nur an und für sich von Belang ist, sondern auch für das Studium der Mathematik großen pädagogischen Wert hat, und daß die Einsicht darin sogar für die Fortbildung der Wissenschaft nicht selten von Nutzen sein kann.[2]

Darum ist es auch mehr und mehr gebräuchlich geworden, theoretischen Abhandlungen historische Einleitungen voranzustellen und in systematische Darstellungen historische Notizen einzuflechten; so sind z. B. in den schon erschienenen Heften der neuen *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* der Herren H. Burkhardt und W. Fr. Meyer und des *Formulaire de mathématiques* des Herrn G. Peano nicht nur die historischen Bemerkungen sehr zahlreich vertreten, sondern auch zum Teil Resultate selbständiger historischer Forschungen enthalten.

Es giebt noch einen anderen Umstand, der deutlich zeigt, welche Bedeutung die Geschichte der Mathematik in den letzten Jahren erreicht hat, nämlich die große Anzahl von Kompendien der Geschichte der Mathematik, die herausgegeben worden und zum Teil in neuen Auflagen erschienen sind. Während vor 30 Jahren die wenigen vorhandenen Bücher
dieser Art (von Bossut, Poppe, Arneth) meistenteils schon veraltet waren, haben wir (5)
seit 1870 solche Arbeiten von Suter (1871–1873), Hankel (1874; unvollendet), Hoefer (1874; 4. Aufl. 1895), Marie (1883–1888), Ball („Account“ 1888, 2. Aufl. 1893; „Primer“ 1895), Cajori (1893; 2. Aufl. 1895) und Boyer (1900) zu verzeichnen, wozu noch die Geschichte der Elementarmathematik von Fink (1890; englische Übersetzung 1900) und Cajori (1896) hinzugefügt werden können. Es ist klar, daß das Erscheinen einer solchen Anzahl von Arbeiten, zum Teil in mehreren Auflagen, nur durch ein beständig wachsendes Interesse für die Geschichte der Mathematik erklärt werden kann. In diesem Zusammenhange dürfte auch darauf hingewiesen werden können, daß die Geschichte der Mathematik jetzt an vielen Hochschulen ein Gegenstand des Unterrichts geworden ist.

Was ich soeben mit Bezug auf die Geschichte der reinen Mathematik bemerkt habe, gilt im großen und ganzen auch von der Geschichte der Physik und Astronomie, wenngleich auf diesen Gebieten die Lücken, die noch auszufüllen sind, zum Teil, z. B. hinsichtlich der Astronomie, nicht so groß sind.

Ich habe oben bemerkt, dals die erste Aufgabe der *Bibliotheca Mathematica* sein soll, neue Untersuchungen auf den einschlägigen Gebieten anzuregen und zu veröffentlichen, um dadurch das noch fehlende Material zur Herstellung einer vollständigen Geschichte der mathematischen Wissenschaften herbeizuschaffen. Selbstverständlich würde es für diesen Zweck am vorteilhaftesten sein, wenn die Zeitschrift vorzugsweise ausführliche Einzeldarstellungen, die den fraglichen Gegenstand erschöpfend behandelten, enthielte. In der That wird sich die Redaktion auch bemühen, den Lesern solche Monographien darzubieten; die neueste Geschichte wird teils durch Biographien hervorragender Mathematiker, Physiker und Astronomen neuerer Zeit, teils durch Berichte über den gegenwärtigen Stand einzelner mathematischer Theorien vertreten werden. Die Berichte werden sich selbstverständlich nur auf solche Theorien beziehen, die schon eine ziemlich umfangreiche Litteratur besitzen, sodaß der Bericht nicht nur als eine mathematische, sondern ebensogut als eine litterarische Arbeit betrachtet werden kann.

[2] „Die Entwicklung einer Wissenschaft gleicht einer krummen Linie, deren Gesetz nicht bekannt ist, und die man darum auch nicht genau konstruieren kann. Je mehr man aber Punkte derselben kennen lernt, mit desto größerer Genauigkeit wird es auch möglich sein, ihre Fortsetzung nach rückwärts und vorwärts zu erraten und die Richtung ihres Laufes bis auf einige Entfernung hin anzugeben.“ F. Rosenberger, *Die Geschichte der exakten Wissenschaften und der Nutzen ihres Studiums*; Abh. zur Gesch. d. Mathem. **9**, 1899, 377–378.

Die `Bibliotheca Mathematica` soll aber nicht ausschließlich dazu bestimmt sein, den Verfassern von Gesamtdarstellungen Material zu bieten, sondern sie soll überhaupt das Interesse für die Geschichte der mathematischen Wissenschaften wecken und wach erhalten. Mit Bezug hierauf wird sie auch kleinere Mitteilungen veröffentlichen, um dadurch dem Inhalt der einzelnen Hefte so viel Abwechselung als möglich zu geben. Solche kleinere
(6) Mitteilungen können ja oft für die Ausarbeitung ausführlicher Monographien höchst wertvoll sein; so z. B. hat Herr A. von Braunmühl für seine *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie* eine ganze Menge kleiner Notizen verwertet, die von anderen Verfassern veröffentlicht worden sind, für welche ihm die Quellen aus sprachlichen oder anderen Gründen unzugänglich waren. Zuweilen können auch Bemerkungen, die nur wenige Zeilen umfassen, von Interesse sein, besonders wenn sie Angaben allgemein benutzter Arbeiten berichtigen oder wesentlich ergänzen, und aus diesem Grunde wird die Redaktion in jedem Hefte der `Bibliotheca Mathematica` eine Abteilung mit dem Titel: „Kleine Bemerkungen zur letzten Auflage von Cantors *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*" einführen; in dieser Abteilung werden die Bemerkungen nach den Seitenzahlen der betreffenden Stellen der *Vorlesungen* geordnet sein, und durch Verweisungen wird dafür gesorgt werden, daß der Leser eines Heftes alle in den vorangehenden Heften eingeführte Bemerkungen zu einer gewissen Stelle unmittelbar auffinden kann. Eine andere Abteilung wird den Forschern ermöglichen, über besondere mathematisch-historische Fragen Aufschluß zu verlangen und solchen von ihren Fachgenossen zu bekommen.

Ferner soll die Zeitschrift auch methodologische und pädagogische Fragen behandeln, welche sich auf die Geschichte der mathematischen Wissenschaften beziehen, z. B. über die Periodeneinteilung bei der Darstellung derselben, über die passendste Form der Darstellung der Geschichte der neuesten Zeit (Gesamtdarstellung oder Einzeldarstellungen) und über den mathematisch-historischen Unterricht. Außer den Originalaufsätzen sollen endlich in jedem Hefte Verzeichnisse neuerschienener historischer Schriften und Besprechungen solcher Arbeiten gegeben werden.

Aber das Programm der `Bibliotheca Mathematica` umfaßt noch einen anderen Punkt. In neuerer Zeit hat man bekanntlich eine ganze Reihe von Unternehmungen teils geplant, teils schon in Angriff genommen, um die mathematischen Forschungen zu erleichtern, welche für die Mathematik und die Mathematiker von großem Interesse sind, obgleich sie sich nicht direkt auf die Fortbildung der mathematischen Theorien beziehen, und darum von den Fachzeitschriften nur ausnahmsweise behandelt werden. Fragen dieser Art — ich nenne sie der Kürze halber „aktuelle Fragen" — wird die `Bibliotheca Mathematica` von nun an in ihren Bereich hineinziehen, um dieselben zu erörtern und zu ihrer Erledigung beizutragen. Es ist nicht meine Absicht, an dieser Stelle ein vollständiges Verzeichnis der betreffenden Fragen zu geben; nur einige der wichtigsten Gegenstände derselben nenne ich hier:

(7)
- eine allgemeine mathematische Bibliographie mit jährlichen Fortsetzungen;
- ein mathematisches Wörterbuch;
- verschiedene Nachschlagebücher, z. B. ein biographisch-litterarisches Handbuch der jetzt lebenden Mathematiker mit ihren Porträts;
- eine zeitgemäße internationale mathematische Litteraturzeitung;
- mathematische Kongresse und Ausstellungen;

- Klassifikation der mathematischen Wissenschaften;
- mathematische Terminologie;
- mathematischen Hochschulunterricht.

Mit Bezug auf den letzten Gegenstand möge bemerkt werden, daß er den übrigen ziemlich fern liegt und so umfassend ist, daß er eigentlich eine besondere Zeitschrift erfordert, wie auch in der That eine solche *(L'enseignement mathématique)* kürzlich von den Herren C. A. Laisant und H. Fehr begründet worden ist. In der ***Bibliotheca Mathematica*** werden daher nur solche Unterrichtsfragen behandelt werden, die für die Entwickelung der Wissenschaft von besonderer Bedeutung und darum für die Mathematiker von besonderem Interesse sind.

Endlich soll jedes Heft eine wissenschaftliche Chronik enthalten, die Notizen aus dem jetzigen wissenschaftlichen Leben auf den einschlägigen Gebieten mitteilen wird, z. B. Todesfälle (mit einigen biographischen Daten über die Verstorbenen), demnächst erscheinende wichtigere Schriften, historische Arbeiten in Vorbereitung, bemerkenswerte Vorlesungen, Preisfragen gelehrter Gesellschaften, u. s. w.

Was diesen zweiten Punkt des Programms, dessen vielseitige Schwierigkeiten ich mir keineswegs verhehlt habe, betrifft, so kann er natürlich nicht durchgeführt werden ohne Beihilfe einer großen Anzahl von Fachmännern. Eine solche ist jedoch im Anfang für alle erwähnten Fragen kaum zu ermöglichen. Je mehr aber der Nutzen eines Organs für aktuelle Fragen auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften erkannt wird, desto kräftiger wird ohne Zweifel der Beistand werden, den die Zeitschrift bekommen wird, um diesen Teil des Programms durchführen zu können. In jedem Falle aber wird der erste Zweck der ***Bibliotheca Mathematica*** bleiben ein Organ für die mathematisch-historische Forschung zu sein, und darum soll in jedem Hefte zum mindesten die Hälfte dem rein geschichtlichen Teile vorbehalten bleiben.

Stockholm, 1. Januar 1900.

Band 2

Über litterarische und wissenschaftliche Geschichtsschreibung auf dem Gebiete der Mathematik.

Zusammenfassung:
Die zwei im Titel genannten Arten der mathematischen Geschichtschreibung definiert der Verf. so, daß die erste vorzugsweise in chronologischer Ordnungsfolge über Sätze und Methoden berichtet, die von verschiedenen Verfassern gefunden wurden, also eine Entdeckungsgeschichte ist, während die zweite Art besonders den Zusammenhang zwischen den mathematischen Ideen zu ermitteln versucht und dieselben als Glieder in der Entwickelung der betreffenden Theorien betrachtet, so daß man hier von einer wirklichen Entwicklungsgeschichte sprechen kann. Die erste Art ist als Vorbereitung zur zweiten von wesentlichem Wert, aber erst durch die zweite kann die Geschichte der Mathematik beanspruchen, als eine selbständige Wissenschaft betrachtet zu werden.

Der Verf. hebt weiter hervor, daß die wissenschaftliche Geschichtschreibung bisher nur spärlich vertreten worden ist, und bemerkt, daß dieser Umstand ohne Zweifel auf den Schwierigkeiten beruht, die mit derselben verbunden sind, daß aber für die Zukunft eine Änderung zum Besseren zu erwarten ist. Er bespricht auch einige der angedeuteten Schwierigkeiten und behält sich vor, in einem folgenden Artikel eine hierher gehörende schwierige Frage, nämlich über die Periodeneinteilung, ausführlicher zu behandeln.

Quelle: JFM 32.1901, S. 40

---

(1) Die Zeit ist längst vorüber, in der man ein chronologisch geordnetes Verzeichnis mathematischer Schriften nebst gelegentlich hinzugefügten Notizen über deren Inhalt und Verfasser als Geschichte der Mathematik bezeichnete, und man ist jetzt gewohnt von einer unter diesem Namen erscheinenden Arbeit zu fordern, daß sie in erster Linie die mathematischen Ideen historisch behandelt. Hat eine mathematische Idee nichts weiter gebracht, als was schon früher bekannt war, so ist es natürlich, daß der Geschichtsschreiber, wenn er dieselbe überhaupt erwähnen will, dieses Umstandes gedenkt, und ebenso natürlich ist es, daß er auf den etwaigen *unmittelbaren* historischen Zusammenhang zwischen zwei Ideen aufmerksam macht. In einer überaus großen Anzahl von Fällen enthält aber eine historisch gegebene mathematische Idee wirklich etwas Neues, ohne daß ihre Abhängigkeit von einer früher notierten Idee *unmittelbar* ersichtlich ist, und in solchen Fällen kann der Geschichts-

schreiber sich damit begnügen, die einzelnen Ideen vorzugsweise als Forschungsresultate an und für sich zu betrachten. Er berichtet also in chronologischer Ordnungsfolge über die Sätze und Methoden, die von verschiedenen Verfassern gefunden wurden, und fügt, so oft als es ihm möglich ist, Verweise auf verwandte Forschungsresultate früherer Verfasser hinzu, ohne jedoch auf diesen Teil seiner Darstellung ein hauptsächliches Gewicht zu legen. Eine auf diese Weise hergestellte Geschichte der Mathematik könnte „Entdeckungsgeschichte“ genannt werden, wenn die mathematisch-historische Forschung nur wirkliche Entdeckungen zu berücksichtigen hätte; da aber dies wohl nicht der Fall ist, erlaube ich mir sie als „litterarische Geschichte der Mathematik“ zu bezeichnen. Selbstverständlich bedeutet das Wort „litterarisch“ hier nicht, daß nur litterarische aber keine mathematischen Notizen vorhanden sind.

Es giebt aber auch eine andere Art mathematischer Geschichtsschreibung, wo man besonders den Zusammenhang zwischen den mathematischen Ideen zu ermitteln versucht und (2)
dieselben also als Glieder in der Entwickelung der betreffenden Theorien betrachtet; eine solche Geschichte der Mathematik könnte man „Entwickelungsgeschiehte“ nennen, aber da ich für die erste Art den Namen „litterarische Geschichte“ gewählt habe, scheint es mir angemessen, die zweite als „wissenschaftliche Geschichte der Mathematik“ zu bezeichnen, wobei indessen bemerkt werden soll, daß diese Geschichte selbstverständlich nicht litterarischer Notizen entbehren kann, ebensowenig als der ersten Art das Prädikat „unwissenschaftlich“ beigelegt werden darf.

Es ist offenbar, daß die Herstellung einer wissenschaftlichen Geschichte der Mathematik fast unüberwindliche Schwierigkeiten darbieten wird, sofern man nicht eine litterarische Geschichte oder wenigstens eine ziemlich vollständige Sammlung von litterarischen Einzeluntersuchungen zur Verfügung hat. Teils ist es nämlich fast unmöglich auf einem größeren Gebiete der Mathematik gleichzeitig alle einzelnen in Betracht kommenden Forschungsresultate direkt aus den Quellen herbeizuholen und den Zusammenhang zwischen denselben herauszufinden, teils würde man unter solchen Umständen oft versucht werden von vornherein einen gewissen Entwicklungsgang zu konstruieren, und *die* Thatsachen zu übersehen, welche nicht in den Rahmen desselben passen. Darum hat gewiß die litterarische Geschichtsschreibung auf dem Gebiete der Mathematik eine nicht zu unterschätzende Bedeutung, und auch in den Fällen, wo sie fast nur eine Sammlung von Referaten bringt (wie z. B. die bekannten historischen Arbeiten von L. Todhunter), können die Resultate ihrer Wirksamkeit von großem Nutzen sein.

Auf der anderen Seite ist es klar, daß wenn die mathematisch-historische Forschung wirklich einen eigenen Platz unter den Wissenschaften beanspruchen will, ihr Ziel sein muß eine wissenschaftliche Geschichte der Mathematik in dem von mir oben angegebenen Sinne hervorzubringen. Interessant und belehrend ist es zwar, wenn in ausführlicher und geschickter Darstellung die Zeitfolge und die ersten Autoren der besonderen Entdeckungen festgestellt werden, aber eine wirkliche Wissenschaft wird die Geschichte der Mathematik erst dann, wenn sie sich die Aufgabe stellt, den Zusammenhang zwischen diesen Entdeckungen anzugeben und dadurch zum Verständnis des Wesens der wissenschaftlichen Entwickelung zu führen.[1]

Überblicken wir jetzt die bisherige Wirksamkeit auf dem Gebiete der mathematischhistorischen Forschung, so ergiebt sich, daß sie zwar in litterarischer Hinsicht belangreiche (3)

[1] Vgl. F. Rosenberger, *Die Geschichte der exakten Wissenschaften und der Nutzen ihres Studiums*; *Abhandl. zur Gesch. der Mathem.* **9**, 1899, S. 378.

Resultate gebracht hat, daß aber die wissenschaftliche Geschichtsschreibung bisher nur spärlich repräsentiert worden ist. Ohne Zweifel hat dies Verhältnis zum großen Teil seinen Grund darin, daß die Behandlung der litterarischen Geschichte, die ja im allgemeinen der anderen vorangehen muß, noch sehr lückenhaft ist, aber sicherlich beruht es auch auf den ganz besonderen Schwierigkeiten, die bei der wissenschaftlichen Geschichtsschreibung vorhanden sind. Für diese letztere ist es nämlich von wesentlicher Bedeutung, nicht nur die besonderen Sätze, sondern auch die Methoden, durch welche sie gefunden wurden, anzugeben, und nicht selten enthalten die Quellen keinen Aufschluß hierüber[2]; zuweilen ist es nicht einmal möglich zu ermitteln, ob wirkliche Methoden vorhanden waren, oder ob die Sätze nur durch unvollständige Induktion erhalten wurden.[3]

Aber abgesehen von diesen und ähnlichen Schwierigkeiten, die sich eigentlich auf einzelne Entdeckungen beziehen, macht gerade die Weise, in welcher die Mathematik sich historisch entwickelt hat, der wissenschaftlichen Geschichtsschreibung nicht unerhebliche Ungelegenheiten. So z. B, ist die Entwickelung der verschiedenen Zweige der Wissenschaft oft so verwickelt, daß man kaum entscheiden kann, zu welchem Zweige eine gewisse Gruppe von Ideen gehören soll; die Verteilung, die ein moderner Mathematiker als selbstverständlich betrachten muß, erweist sich zuweilen vom historischen Gesichtspunkte aua als ganz unzulänglich. Eine andere Schwierigkeit rührt davon her, daß gewisse Teile der Mathematik zeitweise fast ausschließlich für besondere Zwecke ausgebildet wurden, die mit der genetischen Entwickelung der Begriffe wenig zu thun haben, sodaß man unsicher ist, ob man diese Ausbildung als ein wesentliches Moment in der Entwickelung der betreffenden Theorie aufnehmen darf oder nicht.

Die bisherige mehr litterarische Wirksamkeit auf dem Gebiete der mathematisch-historischen Forschung darf also nicht zu weitgehenden Folgerungen in Bezug auf die Zukunft veranlassen, und meiner Ansicht nach ist die jetzige Richtung dieser Wirksamkeit nur eine zeitweilige, die sobald als möglich in eine mehr wissenschaftliche verändert werden wird und soll, sodaß die mathematisch-historische Forschung als eine besondere Wissen-
(4) schaft im eigentlichen Sinne dieses Wortes betrachtet werden wird. Die Schwierigkeiten, auf welche ich soeben hingewiesen habe, können natürlich nur allmählich beseitigt werden, und jeder Versuch zu diesem Zwecke allgemeine Regeln aufzustellen, wird gewiß vergeblich sein. Dagegen giebt es andere schwierige Fragen mehr methodologischer Art, zu deren prinzipiellen Erledigung die Mitarbeit der Fachgenossen schon jetzt beitragen kann.

Eine solche Frage ist die folgende: „Wie soll der Geschichtsschreiber über die neuen mathematischen Ideen berichten, die zwar (wie z. B. die Wesselsche Theorie der geometrischen Bedeutung der imaginären Zahlen) bei ihrem ersten Hervortreten an und für sich epochemachend waren, die aber damals aus äußeren Gründen keinen oder wenigstens nur geringen Einfluß auf die Entwickelung der Wissenschaft übten?“ Stellt man sich als einzige Aufgabe den Entwickelungsgang der Mathematik zu schildern, wäre es wohl am richtigsten, das erste Hervortreten solcher Ideen nur so weit zu berücksichtigen, als es geeignet ist den wissenschaftlichen Charakter der betreffenden Zeit zu kennzeichnen, und eine eingehende Darstellung der Ideen selbst erst dann zu geben, wenn ihr Einfluß auf die folgende Entwickelung konstatiert werden kann. Auf der anderen Seite mag bemerkt werden, daß

[2] Welch großer Aufwand von Scharfsinn und Gelehrsamkeit in einem solchen Falle nötig sein kann, geht wohl am deutlichsten, aus der Zeuthenschen Behandlung der Lehre von den Kegelschnitten im Altertume hervor.

[3] Bekanntlich gehört die Frage, auf welchem Wege Fermat einige seiner Sätze aus der Zahlentheorie entdeckt hat, zu den noch ungelösten mathematisch-historischen Problemen.

eben die zeitweilige Nichtberücksichtigung gewisser urkundlich vorhandener Ideen für das Verständnis der Entwickelung einer gewissen Theorie im Laufe eines gewissen Zeitraumes so wichtig sein kann, daß schon aus diesem Grunde ein sofortiger ausführlicher Bericht über dieselben angemessen ist. Die Frage dürfte also in verschiedenen Fällen auf verschiedene Weise zu beantworten sein, aber in jedem Fall ist wohl der Umstand, daß das erste Hervortreten einer neuen Theorie nicht in leichtverständlicher und systematischer Form stattfand, und darum von den Zeitgenossen wenig beachtet wurde, kein hinreichender Grund, um die Geschichte dieser Theorie erst mit der ersten wirklich erfolgreichen Darstellung derselben zu beginnen.[4]

Eine andere schwierige Frage betrifft die Periodeneinteilung, die zwar auch in der litterarischen Geschichte der Mathematik eine gewisse Rolle spielt, aber dort von mehr untergeordneter Bedeutung ist. Diese Frage erfordert indessen eine ausführlichere Untersuchung, und ich werde derselben darum einen besonderen Artikel widmen. Dann beabsichtige ich auch einige andere Punkte zu behandeln, welche für die wissenschaftliche Geschichtsschreibung von Belang sind.

[4] Vgl. Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* **3**:3 (1898), S. 728.

Band 3

Über Periodeneinteilung in der Geschichte der Mathematik.

Zusammenfassung:
Der Verf. bemerkt einleitungsweise, daß eine Gesamtdarstellung der Geschichte der Mathematik ohne Einteilung in Abschnitte kaum möglich ist, und daß es natürlich am besten wäre, wenn jeder Abschnitt ein im wissenschaftlichen Sinne abgeschlossenes Ganzes, d. h. eine wirkliche Periode wäre. Er untersucht darum, ob solche Perioden in der Entwicklung der Mathematik vorkommen, und gelangt zu dem Resultate, daß dies im allgemeinen nicht der Fall ist, sofern man sich nicht auf eine spezielle Theorie beschränkt. Es ist darum von rein wissenschaftlichem Gesichtspunkte aus zu empfehlen, die Geschichte der einzelnen Theorien besonders zu behandeln und als Ergänzung eine kürzere Gesamtübersicht über die Geschichte der mathematischen Ideen zu geben. Dann geht der Verf. zu der Frage über, in welche Abschnitte eine solche Übersicht eingeteilt werden soll, und hebt dabei hervor, daß die Einteilung nach Volksgrenzen eigentlich nur für eine kulturhistorische Darstellung der Geschichte der Mathematik paßt, während bei der rein fachmäßigen Behandlung fast ausnahmslos Zeitgrenzen zu empfehlen sind. Endlich gibt er an und begründet, wo die Periodengrenzen seiner Ansicht nach zu ziehen sind, macht aber darauf aufmerksam, daß die Schwierigkeiten, diese Grenzen festzustellen, um so größer werden, je mehr man sich der Gegenwart nähert.

Quelle: JFM 33.1902, S. 50

---

(1) Wenn man eine historische Darstellung der bisherigen Untersuchungen auf einem sehr beschränkten Gebiete der Mathematik geben will, kann man zwar den Lesern die Übersicht erleichtern, wenn man die Darstellung in Abschnitte einteilt, aber von wesentlicher Bedeutung ist ein solches Verfahren hier nicht. Hat man dagegen die Geschichte einer umfangreichen mathematischen Theorie oder sogar der ganzen Mathematik in einem Zusammenhange zu bearbeiten, und begnügt man sich nicht mit einer chronologisch-tabellarischen Behandlung des gegebenen Materials oder mit einer Reihe von wissenschaftlichen Biographien der in Betracht kommenden Mathematiker, so ist es wohl durchaus notwendig, besondere Marksteine zu wählen, durch die man entweder die ganze Schilderung oder wenigstens Hauptstücke derselben in Zeitabschnitte einteilt. Zu solchen Marksteinen kann z. B. der Beginn eines neuen Jahrhunderts oder eine andere runde Jahreszahl, ein bedeutungsvolles weltgeschichtliches Ereignis oder das Auftreten eines hervorragenden Mathematikers gewählt werden; in jedem Falle hat man die Möglichkeit bekommen, auch bei einer systematischen Behandlung des Stoffes die verschiedenartigen Untersuchungen eines gewissen Zeitraumes zusammenzustellen, ehe man zur Schilderung der nachfolgenden Forschungen

übergeht. Nennt man „Periode", den Zeitraum zwischen zwei solchen Marksteinen, die einander nicht allzu nahe liegen, so bietet es gar keine Schwierigkeit, die historische Darstellung in Perioden einzuteilen, und man hat dabei ganz freie Wahl, so daß man z. B., um überall die Übersichtlichkeit zu bewahren, zuerst wichtige Ereignisse, dann runde Jahreszahlen, und zuletzt das Auftreten bedeutender Mathematiker als Periodengrenzen anwenden kann. Freilich kann es dabei leicht vorkommen, daß Arbeiten, die aus inneren oder äusseren Gründen zusammengehören, in der Darstellung weit von einander entfernt werden müssen.

Legt man dagegen großes Gewicht darauf, daß die mathematischen Untersuchungen, die wesentlich zusammengehören, nicht unnötigerweise von einander getrennt werden, so muß
man sich offenbar nach, solchen Marksteinen umsehen, welche das Ende oder den Beginn (2)
einer im wissenschaftlichen Sinne abgeschlossenen oder neuen Zeit bezeichnen; da es aber von vornherein gar nicht ausgemacht ist, daß Marksteine dieser Art wirklich existieren, wird die erste Frage, die wir hier zu erledigen haben, die folgende sein: Giebt es überhaupt in der Geschichte der Mathematik Perioden im wissenschaftlichen Sinne, d. h. Zeitabschnitte, die wissenschaftlich abgeschlossen sind? Diese Frage ist zwar von einigen Verfassern im Vorübergehen gestreift, aber meines Wissens noch nicht näher untersucht worden.

Schon bei flüchtiger Überlegung zeigt sich uns ein Umstand, der der Bildung von wissenschaftlich abgeschlossenen Perioden entgegensteht, sobald es sich um die ganze Mathematik oder einen grösseren Teil derselben handelt, nämlich daß die besonderen mathematischen Theorien sich oft unabhängig von einander entwickelt haben, und schon aus diesem Grunde erweist es sich vorläufig wenig wahrscheinlich, daß sie alle oder wenigstens fast alle gleichzeitig zu einem gewissen Abschlusse gebracht werden. Bei genauerer Untersuchung der Frage entdecken wir noch einen ähnlichen Umstand, nämlich daß die Entwickelung jeder einzelnen Theorie im allgemeinen nicht nach logischen Gesetzen vor sich geht, sondern von zufälligen Verhältnissen beeinflußt worden ist, so daß in vielen Theorien neue Probleme auftreten, ehe die alten noch erledigt worden sind, und die Theorie selbst eigentlich nie zu einem gewissen Abschlusse gelangt. Um die Einwirkung dieses letzten Umstandes deutlich hervorzuheben, erlauben wir uns anzunehmen, daß die Geometrie lediglich den Zweck gehabt hat, die drei berühmten Probleme: *duplicatio cubi, trisectio anguli, quadratura circuli* zu lösen, und machen zuerst die weitere Annahme, daß die Geometrie sich vollständig regelmäßig entwickelt hat. Dann könnte man die Geschichte der Geometrie in großen Zügen etwa auf folgende Weise darstellen. Zuerst wurden die elementar-geometrischen Sätze erfunden, die geeignet schienen, die drei Probleme zu lösen, aber nach vielen Versuchen erwies sich die Lösung auf diesem Wege faktisch unmöglich; damit war die erste Periode der Geometrie abgeschlossen. Die zweite Periode begann mit Bestrebungen neue geometrische Gebilde aufzufinden, und nachdem die Kegelschnitte entdeckt worden waren, gelang es die zwei ersten Probleme zu erledigen; dagegen konnte das dritte Problem mit den vorhandenen Hilfsmitteln nicht gelöst werden, und die zweite Periode war beendet. Während der dritten Periode machte man anfangs viele Versuche, die Quadratur des Kreises vermittelst höherer algebraischer Kurven zu finden, aber da diese immer ohne Erfolg waren, stellte man Untersuchungen über die zwei folgenden Fragen an: 1) ist es möglich, die Quadratur des Kreises auf diesem
Wege zu ermitteln?; 2) wenn es unmöglich ist, welche Kurven braucht man um das Pro- (3)
blem zu lösen?, und nachdem diese zwei Fragen erledigt waren, war auch die dritte Periode abgeschlossen.

Wäre die Entwickelung der Geometrie regelmäßig vor sich gegangen, so würde man also drei wirkliche Perioden gehabt haben, aber die Geschichte der Mathematik hat etwas ganz anderes zu erzählen. Sie belehrt uns nämlich u. a., daß für die Quadratur des Kreises höhere Kurven benutzt wurden, lange bevor man darauf verzichtet hatte, dieselbe rein elementar zu finden, und daß auch im übrigen die Entwickelung nicht begriffsmäßig gewesen ist, so daß man gar nicht drei Perioden unterscheiden kann. Hierzu kommt noch, daß die Erledigung der Frage, ob die Quadratur des Kreises vermittelst algebraischer Kurven ausgeführt werden kann, nicht eine *geometrische* Errungenschaft gewesen ist, und man kann also eigentlich nicht sagen, daß die fingierte Geometrie an sich zu einem Abschlusse gebracht worden ist.

Aus dem, was wir jetzt bemerkt haben, dürfte hervorgehen, daß die Geschichte der Mathematik nur ausnahmsweise Perioden in streng wissenschaftlichem Sinne aufweisen kann, und besonders unwahrscheinlich muß das Vorkommen solcher Perioden für die moderne Mathematik sein, die aus einer großen Anzahl von verschiedenen Theorien besteht. Auf der anderen Seite ist es ja unmöglich, eine übersichtliche Darstellung der Entwickelungsgeschichte der Mathematik zu bieten, ohne dieselbe in Zeitabschnitte zu verteilen. Man könnte meinen, daß es zweckmäßiger wäre, für jede einzelne Theorie die Grenzen zwischen den Zeitabschnitten, nur mit Bezugnahme auf den Entwickelungsgang dieser Theorie zu bestimmen, ohne sich darum zu bekümmern, ob zwei Theorien dabei dieselben Zeitgrenzen bekommen, oder nicht. Bei der Darstellung würde man in solchem Falle zuerst in systematischer Reihenfolge die Geschichte der verschiedenen Theorien bis zur ersten Zeitgrenze (die also für jede Theorie verschieden sein kann) verfolgen, dann die weitere Entwickelung derselben Theorien in derselben Reihenfolge bis zur zweiten Zeitgrenze (die auch für jede Theorie wechseln kann) behandeln u. s. w. Gewiß wäre es unter solchen Umständen leichter zu vermeiden, daß in der Darstellung zusammengehörende Forschungsresultate von einander getrennt werden, aber die Übersichtlichkeit geht verloren, und das Verfahren bringt auch andere Übelstände mit sich. Viel besser wäre es dann meiner Ansicht nach, die verschiedenen Theorien besonders zu behandeln, aber auch dann ist es erforderlich, eine kurze Gesamtdarstellung der Geschichte der Mathematik hinzuzufügen, und man wird also auf die frühere Frage über Periodeneinteilung zurückgeführt. Freilich hat die Frage dann nicht so große Bedeutung wie früher, und man kann darum ohne eigentliche Übelstände als
(4) Periodengrenzen solche Zeitpunkte wählen, in denen entweder sehr wichtige Theorien zu einem gewissen Abschlusse gebracht worden sind oder Neuerungen auftreten, die für die Entwickelung auf einem wichtigen Gebiete als epochemachend betrachtet werden können. Selbstverständlich ist es nicht notwendig für alle Theorien die Entwickelung *genau* bis zum bestimmten Zeitpunkte zu verfolgen, aber natürlich dürfen Abweichungen nicht ohne wichtige Gründe vorkommen.

Ich habe bisher vorausgesetzt; daß bei der Periodeneinteilung nur *Zeit*grenzen in Betracht kommen können, und für die moderne Mathematik ist wohl diese Voraussetzung ohne weitere Begründung erlaubt. Für die ältere Mathematik dagegen stellt sich die Sache etwas anders, und es ist also notwendig au untersuchen, inwieweit bei der Schilderung derselben auch *Volks*grenzen berücksichtigt werden müssen. Betrachtet man die Geschichte der Mathematik in erster Linie als eine Abteilung der Kulturgeschichte, so liegt es natürlich sehr nahe, die Geschichte der Mathematik in Abschnitte einzuteilen, die kulturhistorisch abgeschlossen sind, und bei einer solchen Einteilung bekommen die Volksgrenzen eine hervorragende Bedeutung für das Altertum und das Mittelalter. Von diesem Gesichtspunkte aus empfiehlt es sich also, mit Herrn M. Cantor folgende Hauptabschnitte einzuführen:

1) Ägypter; 2) Babylonier; 3) Griechen und Byzantiner; 4) Römer; 5) Inder; 6) Chinesen; 7) Araber; 8) Christliches Mittelalter, und den letzten Abschnitt im Bedarfsfalle nach Volksstämmen zu gliedern. Dann wäre zu untersuchen, ob und auf welche Weise die Hauptabschnitte in Perioden eingeteilt werden sollen.

Betrachtet man dagegen die Geschichte der Mathematik in erster Linie als einen selbständigen Zweig der mathematischen Wissenschaften, so verlieren die Volksgrenzen den größten Teil ihrer Bedeutung; nur in den Fällen, wo die Volksgrenzen einen wesentlichen und wirklich konstatierten Einfluß auf die Entwickelung der Mathematik gehabt haben, sind sie bei der Periodeneinteilung zu berücksichtigen. Sonst ist es ja gleichgültig, ob zwei Mathematiker, die etwa gleichzeitig Entdeckungen auf einem gewissen Gebiete gemacht haben, demselben Volksstamme angehören oder nicht. War die eine Entdeckung von der anderen abhängig; so liegt wohl darin ein hinreichender Grund, um dieselben in jedem Falle zusammen zu behandeln; waren sie von einander unabhängig, ist es eigentlich nicht zu ersehen, warum im zweiten Falle die Nationalität des einen Mathematikers eine Trennung von zusammengehörenden Gegenständen verursachen soll.

Wenn man die jetzt angegebenen Grundsätze als richtig anerkennt, dürfte es verhältnismäßig leicht sein, die Gliederung der Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter durchzuführen, und ich denke daß sich die folgende Anordnung als zweckmäßig
erweisen wird. In einer Einleitung behandelt man die vorwissenschaftliche Mathematik der (5)
Ägypter und Babylonier sowie der Inder im vorchristlichen Zeitraume, und die erste Periode umfaßt die griechische Mathematik etwa bis zum Tode des Apollonios oder möglicherweise etwas weiter. Die zweite Periode schließt die spätgriechische und die römische Mathematik, sowie die indische, die arabische und die christliche Mathematik im Mittelalter bis zum Jahre 1200 ein. Mit dem Auftreten des Leonardo Pisano fängt die dritte Periode an, und als Ende derselben empfiehlt es sich, die Entdeckung der Lösung kubischer Gleichungen (etwa 1515) zu betrachten.

Mit der vierten Periode beginnt die neuere Mathematik, und dann stellen sich auch die prinzipiellen Schwierigkeiten bei der Periodeneinteilung ein. Wir haben schon oben bemerkt, daß die einzelnen mathematischen Theorien ziemlich selten zu einem eigentlichen Abschlusse gebracht werden können, und auch wenn ein solcher Abschluß wirklich konstatiert wird, kann er im allgemeinen nicht zur Periodengrenze gewählt werden, weil die betreffende Theorie für diesen Zweck nicht hinreichend wichtig ist. So z. B. wäre es kaum zu empfehlen, am Anfange des 19. Jahrhunderts eine neue Periode aus dem Grunde zu beginnen, weil die kombinatorische Analysis damals wesentlich aufhörte weiter ausgebildet zu werden. Wir haben also hauptsächlich auf wichtige Neuerungen Rücksicht zu nehmen, aber freilich müssen wir immerhin dafür besorgt sein, daß wir dabei solche wichtige Entwickelungsmomente, die wesentlich zusammengehören, nicht unnötigerweise trennen. Dagegen ist es meiner Ansicht nach eine Nebensache, ob die wissenschaftliche Wirksamkeit gewisser hervorragender Mathematiker auf zwei Perioden verteilt wird.

Sehen wir jetzt nach, welche Neuerungen auf dem mathematischen Forschungsgebiete seit dem Anfange des 16. Jahrhunderts als besonders wichtig betrachtet werden können! Zuerst begegnet uns da am Ende des 16. Jahrhunderts die Reformation der Algebra und der Trigonometrie durch Viète, und mit derselben könnte man bei ausführlicherer Darstellung sehr gut eine neue Periode beginnen. Die Erfindung der Logarithmen durch Neper ist zwar wichtig, aber kann aus verschiedenen Gründen hier kaum in Betracht kommen. Dagegen dürfte das Auftreten der analytischen Geometrie entschieden als ein Markstein bezeichnet werden können, und da etwa um dieselbe Zeit wichtige Erfindungen auf den Gebieten der synthetischen Geometrie (durch Desargues) und der Zahlentheorie (durch Fermat) gemacht wurden, empfiehlt es sich der vierten Periode die Zeit etwa 1515–1635 zuzuweisen.

Vor dem Ende des 17. Jahrhunderts haben wir noch eine epochemachende Neuerung zu verzeichnen, nämlich die Entstehung der höheren Analysis, und der damit historisch
(6) verknüpften Differentialgeometrie. Es wäre also angemessen hier eine neue Periode zu beginnen, aber dabei treten gewisse Schwierigkeiten auf. Wählt man als Periodengrenze die ersten Untersuchungen von Newton auf dem Gebiete der höheren Analysis (etwa 1666), so wird die fünfte Periode zu kurz; nimmt man dagegen Bezug auf die erste Veröffentlichung der Gründe des neuen Kalküls in den *Acta eruditorum* (1684), wird man genötigt, die eigentliche Entdeckung der höheren Analysis schon in der fünften Periode zu behandeln. Vielleicht wäre es darum angemessen, dieser Periode einen etwas grösseren Zeitraum zuzuweisen, so daß sie nicht nur die Entdeckung, sondern auch die erste Ausbildung der Infinitesimalrechnung einschließt. Eine neue Periode würde also erst dann beginnen, als die analytischen Hilfsmittel wesentlich die Form annahmen, die sie jetzt haben, und der Neuerer auf diesem Gebiete ist ja eigentlich Euler, so daß die fünfte Periode die die Zeit etwa 1635–1728 umfassen würde.

Wie die Gliederung der Geschichte der modernen Mathematik seit Euler ausgeführt werden soll, ist eine Frage, die um so schwieriger ist, als ein Teil dieses Zeitraumes uns zu nahe liegt, um mit gebührender Objektivität beurteilt werden zu können. Meiner Ansicht nach soll auch nicht die untere Grenze der sechsten Periode festgestellt werden, ehe man über die Einteilung des ganzen 19. Jahrhunderts entschieden hat. Steht man überhaupt von einer solchen Einteilung ab, so dürfte es sich empfehlen die sechste Periode bis zu Cauchys epochemachenden funktionentheoretischen Untersuchungen zu erstrecken; will man dagegen das 19. Jahrhundert in zwei oder mehrere Perioden einteilen, so ist es wohl besser, die mit Euler beginnende Periode am Ende des 18. Jahrhunderts abzuschließen, wofür es gewiß auch nicht an Gründen fehlt.

Die vorangehenden Überlegungen dürften besonders geeignet sein um ersichtlich zu machen, wie schwierig oder beinahe unmöglich es sein muß bei einer *wissenschaftlichen* Gesamtdarstellung der Entwickelung der neueren Mathematik eine passende Gliederung durchzuführen, und dadurch bestätigt sich auch meine oben geäußerte Meinung, daß man die Entwickelungsgeschichte der Mathematik am besten darstellt, wenn man die einzelnen Theorien besonders behandelt und die Darstellung durch eine kurze Schilderung der Gesamtentwickelung ergänzt.

Band 4

Über kulturhistorische und rein fachmäßige Behandlung der Geschichte der Mathematik.

Zusammenfassung:
Unter „rein fachmäßiger“ Behandlung der Geschichte der Mathematik versteht der Verf. eine zweckmäßige Darstellung der Entwicklung der mathematischen Ideen und fordert von einer solchen Darstellung, daß sie auch versucht, die scheinbaren Unregelmäßigkeiten der Entwicklung zu erklären. In betreff der kulturhistorischen Behandlung unterscheidet er zwei Arten, von denen die erste nur insofern kulturhistorisch ist, als sie eine Schilderung der allgemeinen Kulturentwicklung als Hintergrund für die reine fachmäßige Darstellung bringt und in geeigneten Fällen die besonderen Kulturverhältnisse in Betracht zieht, um die vorhandene Unregelmäßigkeit der Entwicklung auf dem Gebiete den Mathematik zu erklären. Gegen diese Art von kulturhistorischer Darstellung hat den Verf. eigentlich nichts zu bemerken.

Die zweite Art von kulturhistorischer Behandlung geht von der Voraussetzung aus, daß die verschiedenen Völker besondere Anlage zur Mathematik haben, die natürlich im Laufe der Jahrhunderte mehr oder weniger modifiziert werden kann Diese Behandlung der Geschichte der Mathematik ist nach der Ansicht des Verf. teils von untergeordnetem Wert, weil sie nicht auf die moderne Mathematik angewendet werden kann, teils im allgemeinen unzulässig weil sie von einer Voraussetzung ausgeht, die in den meisten Fällen nicht zutrifft. Daß wirklich hervorragende Fachgenossen durch diese Voraussetzung zu unrichtigen Resultaten gelangt oder wenigstens zu bestimmten Behauptungen verleitet worden sind, die kaum mehr als bloße Vermutungen sind, sucht der Verf. durch ein paar Beispiele zu zeigen. Das erste Beispiel bezieht sich auf H. Hankels Darstellung der Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter, das zweite betrifft eine Behauptung von M. Cantor, die bei den römischen Agrimensoren zum erstenmal vorkommende Summierung der Reihe von Kubikzahlen könne selbstverständlich nicht von einem römischen, sondern nur von einem alexandrinischen Mathematiker herrühren. In betreff dieser Behauptung bemerkt der Verf., daß man auf dieselbe Weise beweisen könnte, Johann Bolyai habe die nicht-euklidische Geometrie nicht selbständig erfunden. Als einen, freilich weniger wichtigen Übelstand der kulturhistorischen Behandlung der Geschichte der Mathematik hebt der Verf. hervor, daß dabei gewisse Fragen in den Vordergrund treten, die für die rein fachmäßige Behandlung fast ohne Belang sind.

Quelle: JFM 34.1903, S. 43

(1) In meinem Artikel: „Über literarische und wissenschaftliche Geschichtsschreibung auf dem Gebiete der Mathematik“[1] habe ich darauf hingewiesen daß eine wissenschaftliche Geschichte der Mathematik in erster Linie die Entwickelung der mathematischen Ideen berücksichtigen muß. Ist der Verlauf dieser Entwickelung regelmäßig gewesen, d. h. fällt die chronologische Ordnungsfolge wesentlich mit der systematischen zusammen, so genügt selbstverständlich eine einfache Auseinandersetzung des tatsächlichen Entwickelungsganges, aber wenn dies nicht der Fall ist, muß der Geschichtsschreiber auch versuchen die scheinbare Unregelmäßigkeit zu erklären, denn sonst gewinnt man keinen wirklichen Einblick in die Entwickelungsgeschichte der Mathematik. Zuweilen liegt die Erklärung ziemlich nahe; so z. B., kann die Unregelmäßigkeit auf einem Fehler in dem Ausgangspunkte der Untersuchungen, um die es sich handelt, beruhen, oder darauf, daß gewissen Fragen eine allzu geringe Aufmerksamkeit gewidmet worden ist. Zuweilen ist der Grund einer Unregelmäßigkeit der Entwickelung auf einem besonderen Gebiete darin zu suchen, daß ein angrenzendes Gebiet zeitweilig entweder verhältnismäßig sehr wenig oder verhältnismäßig sehr viel bearbeitet worden ist. In vielen Fällen aber ist es unmöglich, solche oder ähnliche rein sachliche Gründe der Unregelmäßigkeit zu entdecken, man muß vielmehr auf andere Umstände, z. B. die eigenartige Anlage eines gewissen Mathematikers oder gewisse Zeitströmungen Rücksicht nehmen. In der Tat bilden ja die mathematischen Ideen keine Welt für sich, jede derselben verdankt ihre Entstehung einer oder mehreren Persönlichkeiten, und von einem höheren Gesichtspunkte aus kann die geistige Arbeit dieser Persönlichkei-
(2) ten als ein integrierender Teil der allgemeinen Kulturarbeit betrachtet werden. Somit wäre die kulturhistorische Behandlung der Geschichte der Mathematik die einzige, die zu einem wahren und vollständigen Verständnisse des Entwickelungsganges der Mathematik führen könnte.

Diese Schlußfolgerung, die natürlich auch für die Geschichte jeder anderen Wissenschaft gilt, ist gewiß an sich richtig, nur darf man sich nicht dadurch verlocken lassen, den Geschichtsschreibern der Mathematik ohne weiteres eine kulturhistorische Behandlung ihres Materials zu empfehlen. Denn die Behandlung, von der soeben die Rede war, muß selbstverständlich als ein Ideal betrachtet werden, das für uns, die wir jetzt leben, unerreichbar ist, und es ist a priori sehr wohl möglich, daß die kulturhistorische Darstellung, die sich tatsächlich durchführen läßt, von untergeordnetem Wert sein kann. Sehen wir also nach, was man bisher auf diesem Gebiete geleistet hat!

Unter den Versuchen, die Geschichte der Mathematik kulturhistorisch zu behandeln, hat man zwei Arten zu unterscheiden. Die erste Art bringt eine Schilderung der allgemeinen Kultureutwickelung als Hintergrund für die rein fachmäßige Darstellung, wobei in geeigneten Fällen die Zeitumstände hervorgehoben werden, die zum Aufschwung oder zum Niedergang der Mathematik oder gewisser Abteilungen derselben beigetragen haben. Gegen eine solche kulturhistorische Behandlung ist natürlich an sich nichts auszustellen; im Gegenteil werden dadurch einige der oben angedeuteten Unregelmäßigkeiten genügend erklärt, und die ganze Darstellung wird auch viel interessanter. Nur soll man sich immer erinnern, daß die Geschichte der Mathematik die Hauptsache ist, und daß folglich die Schilderung der allgemeinen Kulturentwickelung nicht allzu ausführlich werden darf. Unter dieser Bedingung kann die Behandlung mit ebenso gutem Rechte rein fachmäßig genannt werden.

[1] G. Eneström, *Über literarische und wissenschaftliche Geschichtsschreibung auf dem Gebiete der Mathematik;* `Bibliotheca Mathematica` **2**$_3$, 1901, 1–4.

Aber es gibt eine andere kulturhistorische Behandlung der Geschichte der Mathematik, der in eigentlicherem Sinne das Prädikat „kulturhistorisch“ zukommt, auf welche ich mich im folgenden immer beziehen werde, wenn ich dies Wort benutze. Bei dieser Behandlungsweise geht man von der Voraussetzung aus, daß die verschiedenen Völker besondere Anlage zur Mathematik haben, die natürlich im Laufe der Jahrhunderte mehr oder weniger modifiziert werden kann, und die mathematische Forschungsarbeit wird in erster Linie als eine Äußerung dieser Anlage betrachtet; die Forschungsarbeit geht in einer von der Anlage bestimmten Richtung fort, sofern nicht von außen, d. h. von einem anderen Volke, störende Einwirkungen vorkommen. Das Hauptproblem der Geschichte der Mathematik wird also sein: für ein gegebenes Volk und einen gegebenen Zeitabschnitt die besondere Anlage zur Mathematik zu bestimmen, und wenn man für alle in Betracht kommenden Fälle dies Problem gelöst hat, so ist es leicht ein vollständiges Verständnis des Entwickelungsganges der (3)
Mathematik zu erlangen. Zugleich wird man imstande sein, die Quellen für die Geschichte der Mathematik im Bedarfsfalle zu ergänzen und zu berichtigen; wenn nämlich in der Literatur eines Volkes mathematische Sätze oder Methoden angetroffen werden, die für die besondere Anlage desselben nicht passen, so weiß man, daß eine Einwirkung von außen stattgefunden hat, wenn auch die Quellen keine Auskunft hierüber geben, und ebenso kann man im Falle streitiger oder unvollständiger Angaben entscheiden, welchem Volke eine gewisse Entdeckung zukommt.

Ich beeile mich zu bemerken, daß, so weit mir bekannt ist, kein Vertreter der kulturhistorischen Behandlungsweise versucht hat, dieselbe auf die Entwickelung der modernen Mathematik anzuwenden, und es ist wohl kaum wahrscheinlich, daß künftighin ein ernster Versuch in dieser Richtung gemacht werden wird. In der Tat wäre es fast zu kühn z. B. durch eine Untersuchung der Leistungen der norwegischen Mathematiker bestimmen zu wollen, welche mathematische Begabung die Norweger haben, und das so gewonnene Resultat zu benutzen, um ausfindig zu machen, in wie weit Abel die Theorie der elliptischen Funktionen selbständig entdeckt hat. Wenn aber die kulturhistorische Behandlung nicht für die Geschichte der modernen Mathematik, die ja für den Mathematiker vom größten Interesse sein muß, angewendet werden kann, so wird natürlich schon dadurch der Wert dieser Behandlung wesentlich vermindert. Eine nähere Untersuchung wird zeigen, daß auch in den Fällen, wo die Möglichkeit einer kulturhistorischen Behandlung nicht von vorne herein ausgeschlossen ist, der Wert dieser Behandlung sehr problematisch sein muß.

Wie ich oben bemerkt habe, setzt man bei der kulturhistorischen Behandlung voraus, daß einem bestimmten Volke eine besondere Anlage zur Mathematik zukommt, aber schon die theoretische Richtigkeit dieser Voraussetzung dürfte aus guten Gründen bezweifelt werden können. Daß die geographischen und wirtschaftlichen Verhältnisse eines Volkes einen gewissen Einfluß auf die Ausbildung der rein volkstümlichen Mathematik haben kann, soll natürlich nicht in Abrede gestellt werden, daß aber dieser Einfluß auch auf das wissenschaftliche Studium der Mathematik fortgepflanzt werden muß, ist meiner Ansicht nach eine bisher unbestätigte Hypothese, deren Richtigkeit ich höchstens in Bezug auf ein sehr kleines Volk zugeben möchte. Aber angenommen, daß die Voraussetzung wirklich an sich richtig wäre, so ist dennoch ihr praktischer Wert fast gleich Null oder sogar negativ, weil eben in den Fällen, wo sie für den Geschichtsschreiber von Nutzen sein würde, das vorhandene Quellenmaterial nicht genügt, um die betreffende Anlage zur Mathematik nach Quantität und Qualität genau festzustellen. Je geistreicher nun ein Vertreter der kulturhistorischen Behandlungsweise ist, um so leichter wird er verlockt werden, die Anlage zur (4)

Mathematik bei den verschiedenen Völkern aus der Tiefe seines Bewußtseins zu konstruieren, und mit Bezugnahme hierauf eine Schilderung der Entwickelung der Mathematik zu bieten, die vielleicht recht bald wegen Auffindung neuen Quellenmaterials wesentlich berichtigt werden muß. Man vergleiche nur unsere jetzige Auffassung der Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter mit der HANKELschen, deren Hauptzüge auf folgende Weise dargestellt werden können.[2]

> Die Geschichte der Mathematik fängt mit einer vorgriechischen Periode an, in welcher aus handgreiflicher Empirie gewisse Regeln entstanden, die dem Inhalt nach mit einfachen mathematischen Sätzen zusammenfallen. Dieser Rohstoff wurde teils von den Griechen, teils von den Indern wissenschaftlich behandelt, und zwar so, daß die Griechen den geometrischen, die Inder dagegen den arithmetischen Stoff bearbeiteten. Jedes dieser Völker hatte seine spezielle mathematische Begabung, was indessen nicht verhinderte, daß ausnahmsweise auf griechischem Boden ein Arithmetiker entstand. Dieser war DIOFANTOS, der aber kaum als Grieche anzusehen ist, und er muß notwendigerweise äußerem Einflusse unterworfen worden sein; wären seine Schriften nicht in griechischer Sprache geschrieben, so wäre Niemand auf den Gedanken gekommen, dieselben aus griechischer Kultur entsprossen anzusehen. — Was die Griechen und die Inder auf verschiedenen Gebieten geleistet hatten, wurde von den Arabern übernommen und zum Teil weiter entwickelt, indessen macht sich bei diesen eine entschiedene Anlage zur Astronomie ersichtlich.

Wie wesentliche Berichtigungen dieser Darstellungsweise sind nicht jetzt auf Grund neuen Quellenmaterials nötig geworden![3]

Wie leicht ein geistreicher Vertreter der kulturhistorischen Richtung auch inbetreff einzelner Tatsachen zu bestimmten Behauptungen verleitet werden kann, die kaum mehr als bloße Vermutungen sind, dürfte deutlich aus einer Stelle der CANTORschen Arbeit über die römischen Agrimensoren hervorgehen, wo über gewisse im Codex Arcerianus vorkommende arithmetische Aufgaben, darunter auch die Summierung der Reihe der Kubikzahlen, berichtet wird[4]. Am Ende des Berichtes stellt CANTOR die Frage: „Wem gehören diese Aufgaben an?“ und beantwortet unmittelbar diese Frage auf folgende Weise: „Natürlich
(5) keinem Römer. Die Stellung der Römer in der Geschichte der Mathematik ist eine erhaltende, keine fördernde gewesen. Daß sie selbst nichts schufen, ist allgemein anerkannt, wenn aber, was Römer Mathematisches lehrten, nur von ihnen Aufbewahrtes ist, so haben wir keinerlei Auswahl für die Herkunft des so Aufbewahrten. Zur Zeit, in der die Römer mathematische Dinge sich aneigneten, waren es nur die Alexandriner, welche ihre Lehrer sein konnten. Alexandrinisch war die römische Feldmeßwissenschaft, alexandrinisch war auch dieser arithmetische Teil.“ Es ist wohl ziemlich überflüssig zu bemerken, daß es bei der rein fachmäßigen Behandlung gewiß nicht erlaubt ist zu behaupten, daß die fraglichen arithmetischen Sätze, von denen einige leicht empirisch entdeckt werden konnten, *natürlich* keinem Römer angehören, und daß es ebensowenig erlaubt ist, den alexandrinischen Ursprung der Sätze als etwas selbstverständliches zu bezeichnen. Meiner Ansicht nach könnte man mit

[2]1) Vgl. HANKEL, *Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter* (Leipzig 1874), 88–89, 157, 227–228.

[3]Vgl. P. TANNERY, *La géométrie grecque* (Paris 1887), 4–5.

[4]M. CANTOR, *Die römischen Agrimensoren* (Leipzig 1875), 128.

ebenso gutem Recht die CANTORsche Folgerungsweise anwenden um zu beweisen, daß JOHANN BOLYAI nicht die nicht-euklidische Geometrie selbständig erfunden hat; es wäre nur nötig Ungarn statt Rom und Deutschland statt Alexandria zu setzen, sowie die Schlußworte ein wenig zu ändern, die Schlußfolgerung würde dann meines Erachtens ebensosehr oder ebensowenig stichhaltig sein.

Im vorhergehenden habe ich aus prinzipiellen Gründen mein Bedenken ausgesprochen gegen die kulturhistorische Behandlung der Geschichte der Mathematik, sofern es sich nicht lediglich um die volkstümliche Mathematik handelt. Ich füge noch hinzu, daß bei dieser Behandlung gewisse Fragen in den Vordergrund treten müssen, die für die Geschichte der mathematischen Ideen von sehr untergeordneter Bedeutung sind.[5] So z. B. muß es für den Kulturhistoriker wichtig sein zu ermitteln, ob die deutschen Cossisten des 15. Jahrhunderts ihre Kenntnisse aus italienischen oder aus arabischen Quellen entnommen haben, und im letzteren Falle ob aus lateinischen Übersetzungen oder direkt aus den Originalschriften, während für die rein fachmäßige Behandlung die Hauptfrage ist, welche Kenntnisse diese Cossisten anderswo bekommen haben, und die Nationalität der Vermittler der fraglichen Kenntnisse nur eine Nebenfrage und zwar hauptsächlich literarischen Interesses ist.

Ich habe sowohl im Titel als auch im Texte dieses Artikels den Ausdruck „rein fachmäßige Behandlung der Geschichte der Mathematik“ benutzt; aus dem Zusammenhange dürfte es klar sein, daß ich darunter eine zweckmäßige Darstellung der Entwickelung der mathematischen Ideen verstehe, und von einer solchen Darstellung fordere, daß sie auch versuchen soll, die scheinbaren Unregelmäßigkeiten der Entwickelung zu erklären. Aber, wie ich schon (6)
bemerkt habe, ist der Grund dieser Unregelmäßigkeiten nicht immer auf dem Gebiete der Mathematik, sondern anderweitig zu suchen, und die Frage wird dann, ob es in solchen Fällen angezeigt ist, eine möglichst vollständige Erklärung zu geben oder nur den betreffenden Grund im Vorübergehen anzudeuten. Handelt es sich um eine ausführliche Spezialuntersuchung, dürfte es wohl im allgemeinen nützlich sein, daß die Erklärung möglichst vollständig wird, auch wenn es für diesen Zweck nötig ist, auf die Lebensumstände und die persönlichen Beziehungen der Mathematiker näher einzugehen; soll dagegen eine Gesamtdarstellung der Geschichte der Mathematik gegeben werden, scheint es mir dringend zu empfehlen, eher zu knapp als zu ausführlich zu sein, sobald man Gegenstände in die Schilderung hereinziehen muß, die gar nicht mathematisch sind.

Ich brauche wohl kaum zu bemerken, daß ich in diesem ganzen Artikel nur eine solche Darstellung der Geschichte der Mathematik, deren Zweck rein wissenschaftlich ist, vor Augen gehabt habe. In einer populären Darstellung kann man zuweilen gezwungen werden, nicht eine Geschichte der mathematischen Ideen sondern eine Geschichte der Mathematiker zu bieten, und auch bei Universitätsvorlesungen, deren Aufgabe zum Teil sein muß, in das Studium der Geschichte der Mathematik einzuführen, kann es unter Umständen nützlich sein etwas mehr Gewicht auf das biographische Element zu legen.

---

[5] Vgl. G. ENESTRÖM, *Über Periodeneinteilung in der Geschichte der Mathematik;* `Bibliotheca Mathematica` $\mathbf{3}_3$, 1902, 4.

Band 5

Über regelmäßige und unregelmäßige historische Entwickelung auf dem Gebiete der Mathematik.

Zusammenfassung:
Mit der Benennung „regelmäßige Entwicklung“ will der Verf. angeben, daß in dem betreffenden Falle die chronologische Ordnungsfolge der besonderen Sätze und Methoden wesentlich mit der systematischen zusammenfällt, und er ist der Ansicht, daß es für die Würdigung der älteren Mathematik von Interesse ist, festzustellen, ob und inwieweit ihr Entwicklungsgang regelmäßig gewesen ist. Freilich hat man behauptet, daß der Wert einer historisch gegebenen Methode nur davon abhängt, ob sie scharfsinnig ist und zur Lösung der Probleme, um deren Erledigung willen sie erfunden worden ist, genügt. Indessen macht der Verf. darauf aufmerksam, daß es einen höheren Standpunkt für die Würdigung der mathematischen Forschungsarbeit gibt, und daß von diesem Standpunkte aus eine Arbeit um so wertvoller ist, je mehr die wirklich erstrebten und erzielten Errungenschaften einen bleibenden Wert besitzen und einen natürlichen Fortschritt der Wissenschaft repräsentieren, d. h. je regelmäßiger die Entwicklung ist.

In betreff der Frage, auf welche Weise man entscheiden kann, ob in einem gewissen Falle die historische Entwicklung regelmäßig oder unregelmäßig gewesen ist, hebt der Verf. hervor, daß eine solche Entscheidung von dem zeitweiligen Stande der Mathematik abhängt, und also nicht für alle Zeiten gültig sein muß. Auf der andern Seite gibt es wirklich Fälle — und der Verf. belegt dies durch Beispiele — in denen man mit hohem Grade von Wahrscheinlichkeit feststellen kann, ob die Entwicklung an sich regelmäßig oder unregelmäßig war.

Der Verf. gibt zu, daß das Studium solcher Fälle, in denen die Entwicklung der Mathematik unregelmäßig gewesen ist, zuweilen großes Interesse bietet, betont aber, daß in einer kürzeren Übersicht der Geschichte der Mathematik gerade die Entwicklung, die regelmäßig gewesen ist, in erster Linie Berücksichtigung finden muß.

Quelle: JFM 35.1904, S. 49

---

(1) Am Anfange des Artikels „Über kulturhistorische und rein fachmäßige Behandlung der Geschichte der Mathematik“[1] habe ich im Vorübergehen von den Fällen gesprochen, in denen keine Erklärung der historischen Entwickelung der Mathematik nötig ist, und

[1] G. Eneström, *Über kulturhistorische und rein fachmäßige Behandlung der Geschichte der Mathematik*; `Biblioth. Mathem.` **4**$_3$, 1903, S. 1.

in solchen Fällen habe ich die Entwickelung als regelmäßig bezeichnet. Damit ist aber nur ausgesagt worden, daß die fragliche Entwickelung von unserem Gesichtspunkte aus als regelmäßig erscheint, und auf die Frage, inwieweit dieselbe auch an sich als regelmäßig betrachtet werden kann, hatte ich damals keinen Anlaß einzugehen. Indessen ist diese letzte Frage für die Würdigung der älteren Mathematik nicht ohne Interesse, und ich werde sie darum hier zum Gegenstand einer näheren Untersuchung machen.

An der soeben zitierten Stelle hatte ich als Kennzeichen der regelmäßigen Entwickelung angegeben, daß die chronologische Ordnungsfolge der besonderen Sätze oder Methoden wesentlich mit der systematischen zusammenfällt. Nun ist es aber klar, daß diese letztere im allgemeinen nicht a priori festgestellt werden kann, sondern daß vielmehr innerhalb einer gewissen Theorie die systematische Ordnungsfolge wenigstens bis zu einem gewissen Grade von dem zeitweiligen Stande dieser Theorie abhängig ist. So z. B. ist ja jetzt die systematische Darstellung der Theorie der Differentialgleichungen eine ganz andere als am Anfange des 19. Jahrhunderts, und der historische Verlauf der Entwickelung dieser Theorie im 18. Jahrhundert, der vor 100 Jahren als wesentlich regelmäßig betrachtet werden konnte, darf gewiß nicht von uns in demselben Sinne regelmäßig genannt werden. Verfolgt man diesen Gedankengang, so könnte man versucht werden zu behaupten, daß wir überhaupt
nie zu beurteilen vermögen, ob der historische Entwickelungsgang auf dem Gebiete einer (2)
besonderen Theorie an sich regelmäßig ist oder nicht, und daß es also durchaus unnütz ist sich mit dieser Frage zu beschäftigen.

Sieht man indessen von dem trivialen Sachverhältnisse ab, daß überhaupt keine Entwickelung *vollständig* regelmäßig oder *vollständig* unregelmäßig sein kann, so ist diese Behauptung kaum stichhaltig. Freilich finden sich viele mathematische Theorien, welche durch die weitere Entwickelung der Wissenschaft in ganz neue Bahnen gebracht werden können, aber auf gewissen Gebieten ist es wohl mit einem sehr großen Grade von Wahrscheinlichkeit vorauszusehen, daß dies nicht der Fall sein wird, und übrigens gibt es Arten von systematischer Anordnung des Stoffes, die von der weiteren Entwickelung der Mathematik wesentlich unabhängig sind. Darum darf man beispielsweise behaupten, daß der historische Verlauf der Theorie der algebraischen Gleichungen insofern wirklich regelmäßig gewesen ist, als zuerst die Gleichungen ersten Grades, dann nacheinander die Gleichungen zweiten, dritten und vierten Grades gelöst worden sind, worauf schließlich der Beweis gebracht wurde, daß die allgemeine Gleichung höheren Grades algebraisch unlösbar ist. Ebenso ist es erlaubt zu sagen, daß eine Theorie, deren historische Entwickelung einen Übergang von Spezialuntersuchungen zu allgemeinen Methoden aufzuweisen hat, in methodischer Hinsicht einen an sich regelmäßigen Verlauf gehabt hat. Aber jedenfalls soll man nicht ohne reifliche Erwägung und ohne Hinzufügung der nötigen Einschränkungen die Entwickelung auf einem gewissen Gebiete als regelmäßig bezeichnen.

Kaum weniger schwierig ist es im allgemeinen zu entscheiden, ob der historische Verlauf in betreff einer besonderen Theorie wirklich unregelmäßig gewesen ist, aber auch hier kann man wenigstens einige Fälle angeben, in denen die Entscheidung ziemlich leicht ist. Hat man sich auf dem fraglichen Gebiete *fortgesetzt* mit Problemen beschäftigt, zu deren Erledigung die zur Verfügung stehenden Hilfsmittel offenbar durchaus unzureichend waren, so kann man wohl hier von einer unregelmäßigen Entwickelung auf diesem Gebiete sprechen[2]; ebenso wenn zufälligerweise ein wichtiger Satz entdeckt worden ist, dessen Wert man lan-

[2] Dagegen kann das Vorhandensein eines einzigen solchen Versuches, Probleme mit offenbar ungenügenden Hilfsmitteln zu lösen, natürlich nicht ein Zeichen sein, daß der Verlauf unregelmäßig gewesen ist.

ge Zeit nicht verstand, so daß die Entdeckung für die Wissenschaft vorläufig unfruchtbar blieb. Ist es auf der anderen Seite vorgekommen, daß man Methoden, die für einen besonderen Zweck mit Erfolg benutzt worden waren, auf solche Fälle anwendete, für die sie nicht
(3) passen, und dadurch zu unrichtigen Resultaten gelangte, so kann auch dieser Verlauf der Entwickelung als unregelmäßig bezeichnet werden.

Ich habe oben bemerkt, daß die Frage der Regelmäßigkeit der Entwickelung für die Würdigung der älteren Mathematik nicht ohne Interesse ist. Freilich kann man sich eine solche Würdigung denken, die von der Frage der Regelmäßigkeit unabhängig ist, wenn man nämlich nur untersucht, ob die in Betracht gezogenen mathematischen Arbeiten zur Lösung der Probleme, um deren Erledigung es sich handelte, genügten, und ob die Lösung scharfsinnig war. Von diesem Gesichtspunkte aus würde z. B. die „Regula falsi" ebenso große historische Bedeutung haben wie die direkten Methoden zur Lösung der Gleichungen ersten Grades, und die Erfindung der prosthaphäretischen Rechnung fast ebenso verdienstvoll sein wie die der Logarithmen.[3] Ich will gewiß nicht in Abrede stellen, daß es Fälle gibt, in denen man ohne Ungelegenheit auf diese Weise argumentieren kann, aber meines Erachtens gibt es einen höheren Standpunkt für die Würdigung der mathematischen Forschungsarbeit. In der Tat kann man wohl behaupten, daß diese Arbeit im allgemeinen um so erfolgreicher wird, je mehr die wirklich erstrebten und erzielten Errungenschaften einen *bleibenden* Wert besitzen, und je mehr die Errungenschaften einen natürlichen Fortschritt der Wissenschaft repräsentieren. Auf diese Weise wird nämlich in der Regel mit der geringsten Kraftanstrengung das möglichst größte Resultat erzielt.

Aber aus dem, was ich soeben gesagt habe, folgt fast unmittelbar, daß gerade der regelmäßige Verlauf der Entwickelung einer besonderen mathematischen Theorie im allgemeinen bei der Behandlung der Geschichte der Mathematik die größte Beachtung verdient. Dabei ist natürlich nicht ausgeschlossen, daß, weil ausnahmsweise z. B. die unrichtige Anwendung einer schon vorhandenen Methode zu neuen Entdeckungen führen kann, zu denen man auf dem richtigen Wege erst weit später hätte gelangen, können, aus diesem Grunde ein einzelner unregelmäßiger Verlauf für die Darstellung der Geschichte der Mathematik von hervorragender Bedeutung sein kann; aber durch solche Ausnahmefälle wird die allgemeine Regel nicht aufgehoben.

(4) Eine sehr wichtige Aufgabe der mathematisch-historischen Forschung ist es also meines Erachtens, die Spuren der regelmäßigen Entwickelung zu entdecken. Zuweilen kann man dabei unsicher sein, ob eine Methode, die im Grunde mit der jetzigen übereinstimmt, aber der Form nach von dieser abweicht, als ein Glied der regelmäßigen Entwickelung betrachtet werden soll oder nicht, und tatsächlich sind in solchen Fällen die Fachgenossen verschiedener Ansichten gewesen. Für meinen Teil bin ich geneigt mehr die Übereinstimmung als die Abweichung zu berücksichtigen, und darum möchte ich nicht sogleich der älteren Mathematik eine Methode aberkennen, nur weil das ältere entsprechende Verfahren gewisse Begriffsbestimmungen vermeidet, die jetzt als notwendige Grundlagen der Methode betrachtet werden. So z. B. wäre es meines Erachtens nicht angebracht, aus dem Umstande, daß die griechischen Mathematiker den Grenzbegriff im strengen Sinne nicht benutzen,

[3] Diesen Standpunkt scheint H. G. Zeuthen in einem kürzlich erschienenen Artikel zu vertreten. „Vaerdien af en i aeldre Tid anvendt Fremgangamaade", sagt er in der *Oversigt over det danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger* 1903, S. 555, „beror ikke paa den större eller mindre ydre Lighed med dem, hvis Nytte vi nu kende, men paa det, hvortil de i sin Tid kunde bruges og virkelig bleve brugte." Aber vielleicht beabsichtigt seine Bemerkung nur hervorzuheben, daß man die ältere Mathematik nicht einseitig vom modernen Gesichtspunkte aus beurteilen soll.

unmittelbar zu folgern, daß ihnen die Exhaustionsmethode unbekannt war.

Es ist schon hervorgehoben worden, daß in einzelnen Ausnahmefällen ein unregelmäßiger Verlauf der Entwickelung besonders beachtet werden muß, und auch sonst kann ein solcher Verlauf dem mathematisch-historischen Forscher großes Interesse darbieten. In einer ausführlichen Darstellung der Geschichte der Mathematik soll man darum auch der unregelmäßigen Entwickelung die gebührende Aufmerksamkeit schenken und dieselbe wenn irgend möglich zu erklären versuchen.[4] Handelt es sich aber darum, in einer Vorlesung oder in einem Lehrbuche eine kurze Übersicht über die Geschichte der Mathematik zu geben, so bin ich der Ansicht, daß die Schilderung der Fälle, wo der Entwickelungsgang unregelmäßig gewesen ist, wesentlich knapper als die übrige Darstellung sein soll.

[4] Vgl. Eneström, a. a. O. S. 1.

Band 6

Über die Bedeutung historischer Hypothesen für die mathematische Geschichtsschreibung.

Zusammenfassung:
Der Verf. bemerkt zuerst, daß in der mathematischen Geschichtsschreibung Hypothesen eigentlich in viel größerer Anzahl benutzt werden, als man anzunehmen geneigt ist, weil man in der Tat, sobald man ohne weiteres eine Notiz aus zweiter Hand entnimmt, die Hypothese macht, daß die Quelle zuverlässig ist. Ein kritischer Forscher versucht natürlich, soviel als möglich Hypothesen der fraglichen Art zu vermeiden; aber nicht selten ist dies unmöglich, und der Verf. erläutert an einem Beispiel, wie schwierig es ist, zu entscheiden, ob man in einem gewissen Falle die aus zweiter Hand entnommene Notiz ausdrücklich als bisher unbestätigt bezeichnen soll oder nicht.

Dann werden die eigentlichen Hypothesen in Betracht gezogen, d. h. die Annahmen, die man macht, um eine Reihe von Tatsachen für einen gewissen Zweck zu ordnen oder zu ergänzen. Ohne solche Hypothesen ist es oft nicht einmal möglich, eine chronologisch geordnete Aufzählung der mathematischen Entdeckungen zu geben, und für eine Entwickelungsgeschichte der Mathematik sind sie durchaus notwendig. Schon aus diesem Grunde ist die Anwendung von Hypothesen auf dem mathematisch-historischen Gebiete berechtigt, und der Verf. lenkt die Aufmerksamkeit darauf, daß sie zuweilen nützlich sein können auch in solchen Fällen, in denen sie nicht notwendig sind.

Hierauf geht der Verf. zu der Frage über, unter welchen Bedingungen Hypothesen berechtigt sind, und hebt als solche Bedingungen in erster Linie hervor, daß jede Hypothese ausdrücklich als solche bezeichnet und erst nach eingehendem Studium der Tatsachen, um deren Erklärung es sich handelt, aufgestellt wird; er zeigt dann an Beispielen, daß auch die von hervorragenden Fachgenossen herrührenden Hypothesen nicht immer diesen anscheinend selbstverständlichen Bedingungen genügen. Ferner betont er, daß Hypothesen unter allen Umständen mit Vorsicht und Sparsamkeit benutzt werden sollen, und macht auf die Übelstände aufmerksam, die eine allzu häufige Anwendung von Hypothesen mit sich führen kann, nicht nur für eine gewisse mathematisch-historische Arbeit, sondern auch für die künftige wissenschaftliche Wirksamkeit des Verf. dieser Arbeit. Besonders warnt er vor allgemeinen Hypothesen, z. B. solchen, die vom kulturhistorischen Gesichtspunkte aus aufgestellt werden.

Quelle: JFM 36.1905, S. 47

---

(1) Es ist mit vollem Rechte bemerkt worden,[1] daß mathematische Geschichtsschreibung überhaupt nicht möglich ist, ohne daß man in gewissen Fällen seine Zuflucht zu Hypothesen nimmt. Dringt man etwas tiefer in die Frage ein, so wird man sogar finden, daß für

[1] Siehe P. Stäckel, *Göttingische gelehrte Anzeigen* 1900, S. 262.

die mathematische Geschichtsschreibung, ebenso wie für jede andere Art von Geschichtsschreibung, historische Hypothesen eine weit größere Rolle spielen, als man bei einer oberflächlichen Überlegung geneigt ist anzunehmen. Schon ein chronologisches Verzeichnis von Notizen, die anscheinend als nackte Tatsachen bezeichnet werden können, birgt in den meisten Fällen eine große Anzahl solcher Hypothesen. In der Tat trifft es nur selten ein, daß man in der Lage ist, die Richtigkeit aller Angaben, die man für eine besondere Arbeit braucht, selbst zu kontrollieren. Vielmehr wird man gewöhnlich gezwungen, eine größere oder kleinere Anzahl von Notizen aus zweiter Hand zu entnehmen, und wenn man keinen besonderen Grund hat zu vermuten, daß diese Notizen unzuverlässig sind, so benutzt man sie natürlich für seinen Zweck, indem man stillschweigend die Hypothese aufstellt, daß sie zuverlässig sind. Wollte man versuchen, Hypothesen dieser Art vollständig zu vermeiden, so würde fast jede umfassendere Einzeluntersuchung und gewiss jede zusammenfassende mathematisch-historische Arbeit unmöglich werden, und das einzige, das hier getan werden kann, ist, daß jeder Forscher soweit möglich die anderswo entnommenen Angaben vor der Benutzung kritisch prüft.

Wie schwierig es zuweilen ist, zu entscheiden, ob die Richtigkeit einer Angabe geprüft werden soll, erlaube ich mir an einem kleinen Beispiel zu zeigen. In meinem Artikel über
JORDANUS NEMORARIUS[2] hatte ich die Handschriften des *Algorithmus demonstratus* ver- (2)
zeichnet, die meines Wissens damals von einem Fachmanne näher untersucht worden waren, und dabei in zweiter Stelle den cod. Dresd. Db. 86 aufgeführt. Ich konnte mich in dieser Hinsicht auf die bestimmte Behauptung von MAX CURTZE[3] berufen, der ja als eine Autorität auf dem Gebiete der mittelalterlichen Mathematik anerkannt worden ist. Aber nichtsdestoweniger ist meine Angabe falsch, denn nach einer freundlichen Mitteilung des Herrn A. A. BJÖRNBO enthält der cod. Dresd. Db. 86 tatsächlich einen anderen Algorismus als den von J. SCHÖNER 1534 herausgegebenen *Algorithmus demonstratus*. Wäre mir die sehr seltene Druckausgabe dieser Schrift zugänglich gewesen, so hätte ich leicht entdecken können, daß die Richtigkeit der CURTZEschen Behauptung[4] verdächtig ist, aber die Druckausgabe stand mir nicht zur Verfügung, und ich hatte gar keinen Anlaß, die Behauptung als bisher unbestätigt hervorzuheben.

Die Hypothesen, von denen ich soeben gesprochen habe, können also unter Umständen sehr schwierig zu vermeiden sein, daß sie aber wenn irgend möglich vermieden werden sollen, darüber gibt es wohl unter den Fachgenossen keine Meinungsverschiedenheit, und Arbeiten, wo sie *unnötigerweise* vorkommen, nennt man mit gutem Rechte unkritisch.

---

[2] G. ENESTRÖM, *Ist Jordanus Nemorarius Verfasser des „Algorithmus demonstratus"?*; `Biblioth. Mathem.` **5**$_3$, 1904, S. 10.

[3] M. CURTZE, *Über eine Handschrift der königlichen Bibliothek zu Dresden*; `Zeitschr. für Mathem.` **28**, 1883; Hist. Abt. S. 4. Vgl. auch M. CURTZE, *Eine Studienreise*; `Centralbl. für Bibliotheksw.` **16**, 1899, S. 284.

[4] Möglicherweise ist der Inhalt des Algorismus des cod. Dresd. Db. 86 hauptsächlich derselbe wie der Inhalt des gedruckten *Algorithmus demonstratus*, so daß CURTZES Versehen leicht erklärlich ist. Dann liegt auch die Annahme nahe, daß gerade der cod. Dresd. Db. 86 den echten Algorismus des JORDANUS enthält, aber gegen diese Annahme spricht der von Herrn DUHEM (`Biblioth. Mathem.` **6**$_3$, 1905, S. 13) hervorgehobene Umstand, daß CHASLES einen von JORDANUS verfaßten Algorismus (vielleicht cod. Mazarin. 1250 ?) erwähnt, der eine Behandlung der praktischen Arithmetik, im arabischen Stil, enthält. In der Tat scheint aus der CURTZEschen Notiz hervorzugehen, daß der Algorismus des cod. Dresd. Db. 86 am Ende den Satz $(a + b + c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$ hat, und dieser allgemeine Satz gehört kaum einer praktischen Arithmetik im arabischen Stil. Hierzu kommt noch, daß WAPPLER in den `Abhandl. zur Gesch. d. Mathem.` **5**, 1890, S. 161 ein Fragment eines angeblich JORDANIschen Algorismus erwähnt, der ein anderer als der des cod. Dresd. Db. 86 zu sein scheint.

Anders liegt die Sache in betreff einer Art von Hypothesen, an die man gewohnt ist in erster Linie zu denken, wenn man das Wort „Hypothese“ hört, nämlich die Annahmen, die man macht, um eine Reihe von Tatsachen für einen gewissen Zweck zu ordnen oder zu ergänzen. Stellen wir uns vor, daß einmal in der Zukunft der literarische Verkehr soweit entwickelt worden ist, daß ein mathematisch-historischer Forscher ohne Schwierigkeit jede Angabe, die sich in einer gedruckten Schrift oder in einem Manuskripte findet, mit der
(3) ursprünglichen Quelle dieser Angabe vergleichen kann, so wird dadurch wenigstens theoretisch die im Vorhergehenden berücksichtigte Art von Hypothesen überflüssig werden. Dagegen wird es immer Fälle geben, wo das mathematisch-historische Material lückenhaft ist, so dass man die Ordnungsfolge oder den inneren Zusammenhang der einzelnen Tatsachen nicht aktenmäßig feststellen kann. In betreff der älteren Mathematik kommt es z. B. sehr oft vor, daß man in einer Schrift Sätze findet, die, soweit bekannt, in keiner früheren Arbeit erwähnt werden, ohne daß man irgend einen Grund hat anzunehmen, daß der erste Mitteiler der Sätze zugleich deren Erfinder ist. In solchen Fällen ist es also nicht einmal möglich, eine chronologisch geordnete Aufzählung der Entdeckungen zu geben, wenn man nicht seine Zuflucht zu einer Hypothese nimmt.

In der Geschichte der neueren Mathematik kann man freilich im allgemeinen ermitteln, von wem eine Entdeckung herrührt, aber auf welchem Wege sie erlangt wurde, ist oft nicht möglich genau festzustellen. Nun hat man ja den Ausweg in solchen Fällen auf die Erforschung des Zusammenhanges zu verzichten, und höchstens auf die verschiedenen Möglichkeiten, die sich von selbst darbieten, aufmerksam zu machen In der Tat ist ein solches Verfahren meines Erachtens zuweilen angebracht, aber wenn man es überall anwendet, so bekommt man keine Entwickelungsgeschichte sondern wesentlich nur eine Entdeckungsgeschichte der Mathematik. Ist man nun der Ansicht, die ich früher vielfach ausgesprochen habe, nämlich daß der eigentliche Zweck der mathematischen Geschichtsschreibung ist, eine Entwickelungsgeschichte zu bearbeiten, so folgt daraus um so sicherer, daß historische Hypothesen unvermeidlich sind.

Aber auch in Fällen, wo die Hypothesen nicht bestimmt notwendig sind, können sie sehr nützlich sein. Herr M. Cantor hat vor ein paar Jahren hervorgehoben,[5] daß sie „der Spezialforschung, welche um so häufiger, je älteren Datums die vermuteten Tatsachen sind, von Nichtmathematikern geübt wird, einen Fingerzeig geben, worauf diese etwa achten sollen“. Zuweilen wird der Bericht über eine größere Anzahl zusammengehörender Tatsachen viel übersichtlicher, wenn man dieselben unter Bezugnahme auf eine besondere Hypothese ordnet. Als Beispiel eines solchen Falles möchte ich auf die von Herrn Cantor benutzte Hypothese[6] hinsichtlich der Entstehung und der Verbreitung der indischen Zahlzeichen hinweisen.

(4) Aus dem soeben Gesagten geht hervor, daß Hypothesen der zweiten Art meines Erachtens nicht nur berechtigt, sondern auch nützlich, und zuweilen sogar notwendig sind bei der Behandlung der Geschichte der Mathematik. Auf der anderen Seite muß ich betonen, daß die Berechtigung nur unter gewissen Bedingungen anerkannt werden soll. Von diesen Bedingungen setze ich in erster Linie die rein formale, daß jede Hypothese ausdrücklich als solche bezeichnet werden wird. Wenn also ein Verfasser in betreff des Satzes $\sum x^3 = \left(\frac{x(x+1)}{2}\right)^2$

[5] M. Cantor, *Wie soll man die Geschichte der Mathematik behandeln?*; `Biblioth. Mathem.` $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 116.

[6] M. Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* $\mathbf{I}^2$, Leipzig 1894, S. 669.

sagt:[7] „nous avons *montré* comment les Grecs connaissaient ce théorème," so halte ich diese Redeweise für durchaus unangebracht, da der fragliche Satz zuerst bei einem römischen Mathematiker vorkommt. Kaum richtiger finde ich die Ausdrucksweise, wenn ein anderer Verfasser in betreff desselben Satzes bemerkt,[8] daß er *natürlich* von keinem Römer entdeckt worden ist, und hinzufügt, es sei *allgemein anerkannt*, daß die Römer nichts schufen. Ich kann sehr wohl zugeben, daß die Hypothese, um die es sich hier handelt, nämlich daß die Griechen den Satz $\sum x^3 = \left(\frac{x(x+1)}{2}\right)^2$ gekannt haben, sehr wahrscheinlich wird, wenn man die von Herrn H. G. ZEUTHEN neuerdings[9] angeführten Gründe in Betracht zieht, aber eine Hypothese bleibt sie jedenfalls, bis der fragliche Satz bei einem griechischen Verfasser angetroffen wird, und auch dann wäre es sehr wohl möglich, daß ein römischer Mathematiker den Satz auf empirischem Wege nachentdeckt hätte.[10] Man könnte ja meinen, daß es ziemlich gleichgiltig ist, welche sprachliche Form ein Verfasser seiner Hypothese gibt, sofern er die Tatsachen erwähnt, worauf er die Hypothese stützt, aber in Wirklichkeit ist es nicht so, denn die bestimmte Behauptung eines hervorragenden Verfassers, etwas sei bewiesen oder etwas gelte als allgemein anerkannt, hat auf die meisten Leser eine fast hypnotische Wirkung, und nachdem die Hypothese in der Fachliteratur den Rang einer Tatsache erworben hat, erfordert es viel Mühe um eine Berichtigung des Fehlers zu erzielen.

Eine zweite sehr wesentliche Bedingung für die Berechtigung einer Hypothese ist meiner Ansicht nach, daß diese erst nach eingehendem Studium der Tatsachen, um deren Erklärung es sich handelt, aufgestellt wird. Sonst kann es nämlich leicht eintreffen, daß die Hypothese zu Resultaten führt, deren Unrichtigkeit durch Benutzung des vorhandenen
Quellenmaterials unmittelbar nachgewiesen werden kann, so daß die Hypothese nicht nur (5)
unnütz sondern direkt irreleitend ist. Auch hier erlaube ich mir ein Beispiel anzuführen. Im zweiten Bande seiner *Vorlesungen*[11] berichtet Herr CANTOR über eine Algorismusschrift, die sich in einem vatikanischen Manuskripte aus der zweiten Hälfte des 14. Jahrhunderts findet, und die nach E. NARDUCCI, der Auszüge aus der Schrift veröffentlicht hat, den Titel *Introductorius liber qui et pulveris dicitur in mathematicam disciplinam* trägt. Herr CANTOR stellt dabei die Frage: „Ist die Schrift im XIV. Jahrhundert verfaßt oder damals nur abgeschrieben?", und beantwortet diese Frage auf folgende Weise: „Wie diese Frage zu beantworten sei, scheint uns kaum zweifelhaft. Der Inhalt, ist so viel geringer als der von irgend anderen im XIV. Jahrhunderte vorhandenen Schriften, daß wir an eine Abschrift zu glauben uns nicht im Stande fühlen. Ein so schwaches Erzeugnis kann in jedem Jahrhunderte einmal niedergeschrieben werden, und der ungerechte Zufall kann es vor dem Untergange bewahren, aber man vervielfältigt es nicht, es sei denn, daß man geschichtliche Forschungen dabei im Auge habe, und das können wir bei einem Abschreiber des XIV. Jahrhunderts einem solchen Schriftchen gegenüber nicht voraussetzen". Gestützt auf seiner Hypothese gelangt Herr CANTOR nun unmittelbar zu dem Resultate, daß der *Introductorius liber* nur einmal, und zwar im 14. Jahrhundert, niedergeschrieben worden ist. Nun verhält

[7] Siehe `Biblioth. Mathem.` **3**$_3$, 1902, S. 146.

[8] Siehe `Biblioth. Mathem.` **4**$_3$, 1903, S. 231.

[9] H. G. ZEUTHEN, *Sur l'arithmétique géométrique des Grecs et des Indiens*; `Biblioth. Mathem.` **5**$_3$, 1904, S. 97–112.

[10] Vgl. G. ENESTRÖM, *Über kulturhistorische und rein fachmäßige Behandlung der Geschichte der Mathematik*; `Biblioth. Mathem.` **4**$_3$, 1908, S. 5.

[11] M. CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* **II**^{2}, Leipzig 1900, S. 155–156.

es sich aber so, daß die von NARDUCCI veröffentlichten Auszüge wesentlich mit dem von B. BONCOMPAGNI 1857 herausgegebenen Traktat: JOANNIS HISPALENSIS *Liber algorismi de pratica arismetrice* übereinstimmen;[12] auf Grund dieses Umstandes ist es erlaubt zu behaupten, daß der Inhalt des *Introductorius liber* wenigstens viermal niedergeschrieben worden ist,[13] und zwar nicht zum erstenmal im 14. Jahrhundert.

Die zwei Bedingungen, mit denen ich mich im Vorhergehenden beschäftigt habe, halte ich für wesentlich in betreff der Benutzung historischer Hypothesen bei der Behandlung der Geschichte der Mathematik. Aber auch wenn sie erfüllt sind, sollen Hypothesen meines Erachtens nur mit Vorsicht benutzt werden. Es ist bemerkt worden,[14] daß, wenn eine Hypothese „alle Tatsachen eines Erscheinungskomplexes in einfacher Weise erklärt, man sie als eine Etappe auf der Reise vom Irrtum zur Wahrheit wird ansehen dürfen". Diese Bemerkung ist ohne Zweifel bis zu einem gewissen Grade richtig, aber wenn es sich um
(6) eine verhältnismäßig unwesentliche Tatsache handelt, so ist es meiner Meinung nach besser, dieselbe unerklärt zu lassen, als eine Hypothese aufzustellen, welche zwar die Tatsache erklärt, aber vielleicht an sich wenig Zutrauen verdient. Um meine Ansicht näher auseinanderzusetzen, nehme ich an, es sei trotz umfassender Nachforschungen unmöglich gewesen, irgend eine Schrift aufzufinden, die mit den von NARDUCCI herausgegebenen Auszügen aus dem *Introductorius liber* übereinstimmt. Dann könnte man allerdings die von Herrn CANTOR aufgestellte Hypothese als eine erste Etappe auf der Reise vom Irrtum zur Wahrheit bezeichnen, aber für meinen Teil würde ich diese Etappe vermeiden. So viel ich verstehe, fußt die Hypothese nämlich auf der Voraussetzung, daß im 14. Jahrhundert gewisse mathematische Kenntnisse gleichsam in der Luft lagen, denn wie ist es sonst möglich zu verstehen, daß jede im 14. Jahrhundert lebende schreibkundige und mit der lateinischen Sprache vertraute Person, die zufälligerweise eine Handschrift des *Introductorius liber* auffand, einsehen mußte, daß es sich um ein sehr schwaches Erzeugnis handelte, das nicht verdiente abgeschrieben zu werden? Aber die soeben erwähnte Voraussetzung möchte ich nicht gutheißen; sie ist von meinem Gesichtspunkte aus nahe verwandt mit der Voraussetzung, welche der rein kulturhistorischen Behandlung der Geschichte der Mathematik zu grunde liegt, und mit der ich mich schon in zwei früheren Artikeln[15] beschäftigt habe.

Überhaupt sind mir die Hypothesen um so verdächtiger, je allgemeiner sie sind, und zwar aus folgenden Gründen. Erstens ist es noch unsicher, ob überhaupt die Gesetze des historischen Geschehens auf dem mathematischen Forschungsgebiete mit größerer Genauigkeit festgestellt werden können, und zweitens ist das vorhandene mathematisch-historische Material noch so unvollständig, daß es jedenfalls nicht genügt, um sichere Folgerungen allgemeiner Art zu ziehen.[16]

Auf der anderen Seite will ich gern anerkennen, daß durch solche allgemeine Hypothesen die mathematisch-historische Forschung indirekt gefördert werden kann und wirklich gefördert worden ist. Es gibt nämlich Verfasser, die dadurch angeregt worden sind, ein sehr umfassendes mathematisch-historisches Material an den Tag zu bringen und zusam-

[12] Vgl. **Biblioth. Mathem.** **5**3t 1904, S. 410–411.

[13] Vgl. **Biblioth. Mathem.** **6**$_3$, 1905, S. 114.

[14] P. STÄCKEL, a. a. O. S. 262.

[15] G. ENESTRÖM, *Über kulturhistorische und rein fachmäßige Behandlung der Geschichte der Mathematik*; **Biblioth. Mathem.** **4**$_3$, 1903, S. 1–6. *Zur Frage über die Behandlung der Geschichte der Mathematik*; **Biblioth. Mathem.** **4**$_3$, 1903, S. 225–233.

[16] Vgl. G. ENESTRÖM, *Über kulturhistorische und rein fachmäßige Behandlung der Geschichte der Mathematik*; **Biblioth. Mathem.** **4**$_3$, 1903, S. 2.

menzustellen, und dies Material hat natürlich seinen Wert, unabhängig von der Richtigkeit oder Unrichtigkeit der Hypothese, um deren willen es herbeigeschafft worden ist. Als Beleg (7)
erlaube ich mir die CANTORschen *Mathematischen Beiträge zum Kulturleben der Völker* anzuführen. Der Satz, den der Verfasser durch diese Beiträge beweisen wollte, lautet bekanntlich:[17] „Wenn bei Völkerschaften eine Ähnlichkeit auf diesem oder jenem Gebiete der Geistesentwickelung stattfindet, so ist das meistens kein Zufall, sondern die Folge von gegenseitiger Einwirkung oder gemeinsamem Ursprunge". Meines Erachtens handelt es sich hier um eine minderwertige Hypothese, denn die fragliche Ähnlichkeit kann ebenso sehr darauf beruhen, daß die Völkerschaften aus Menschen bestehen, und daß die Gleichheit der menschlichen Geisteswirksamkeit unter ähnlichen äußeren Verhältnissen zu gleichen mathematischen Entdeckungen führen wird. Aber, wie ich schon angedeutet habe, hat Herr CANTOR, um seinen Satz zu beweisen, ein wertvolles mathematisch-historisches Material gesammelt und gut bearbeitet den Fachgenossen zugänglich gemacht.[18]

Aber nicht nur mit Vorsicht, sondern auch mit Sparsamkeit sollen Hypothesen benutzt werden. Für einen geistreichen Forscher ist es natürlich verlockend, so sehr als möglich die „nackten Tatsachen" zu erklären oder ihren Zusammenhang aufzuspüren, aber wenn er sich nicht gegen diese Versuchung wappnet, läuft er die Gefahr, sich allmählich einzubilden, daß seine Hypothesen nicht Etappen auf dem Wege, sondern die Endstation selbst, d. h. die Wahrheit repräsentieren. Und eine solche Einbildung kann verschiedene Übelstände mit sich führen. Teils wird der Forscher geneigt, die abweichenden Ansichten seiner Fachgenossen ohne weiteres als unrichtig zu betrachten, teils wird er versucht ein eingehendes Studium des vorhandenen Materials als überflüssig oder weniger notwendig anzusehen, wodurch seine Angaben unzuverlässig werden können.

Selbstverständlich ist die Gefahr, die ich jetzt hervorgehoben habe, um so geringer, je kritischer der fragliche Forscher ist, und ein Beleg hierfür ist gerade der Fachgenosse, der meiner Schätzung nach die meisten Hypothesen angewendet hat, nämlich PAUL TANNERY. Ich bin nicht kompetent, mich über die TANNERYschen Hypothesen zu äußern, deren Begründung auf dem rein philologischen Gebiete zu suchen ist, und es mag sein, daß TANNERY hier zuweilen zu weit gegangen ist, aber jedenfalls hat seine Gewohnheit Hypothesen aufzustellen keinen schädlichen Einfluß auf seine mathematisch-historische Forschungsmethode geübt. Indessen kommt bei TANNERY ein anderer Übelstand der häufigen Anwendung von Hypothesen zum Vorschein, nämlich daß seine Schriften eben auf Grund dieses Umstan- (8)
des zuweilen ermüdend werden; Wenn ein Verfasser zuerst die Tatsachen erwähnt, die zu einem gewissen Gegenstande gehören, und dann seine Mutmaßungen über den Zusammenhang dieser Tatsachen auseinandersetzt, so braucht dies gewiß nicht zu bewirken, daß die Lektüre seiner Arbeit anstrengend wird. Wenn aber die Mutmaßungen im Vergleich mit den erwähnten Tatsachen allzu zahlreich sind, so wird der Leser leicht müde, denn er muß an vielen Stellen das Lesen unterbrechen, um sich zu fragen: „Worauf stützt der Verfasser seine Hypothese?" „Genügen die gesicherten Tatsachen um diese Hypothese wenigstens wahrscheinlich zu machen?". Da nun bei TANNERY die Darstellung sonst sehr verdienstvoll ist, so sehe ich in dem oben hervorgehobenen Umstande, daß seine Schriften zuweilen ermüdend wirken, eine besonders kräftige Bestätigung der Richtigkeit meines Satzes, daß bei der Behandlung der Geschichte der Mathematik historische Hypothesen nicht nur mit Vorsicht, sondern auch mit Sparsamkeit benutzt werden sollen.

[17] Siehe M. CANTOR, *Mathematische Beiträge zum Kulturleben der Völker* (Halle 1863), S. 2.

[18] Vgl. G. ENESTRÖM, *Zur Frage über die Behamdlung der Geschichte der Mathematik*; **Biblioth. Mathem.** $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 229.

Band 7

Die Geschichte der Mathematik als Bestandteil der Geschichte der Wissenschaften.

Zusammenfassung:
Unter Bezugnahme auf einen 1904 erschienenen Artikel von PAUL TANNERY behandelt der Verf. die Frage, ob es möglich ist, eine Geschichte der Wissenschaften zu bearbeiten, die die Geschichte der Mathematik nicht nur als eine von dem Übrigen getrennte Abteilung, sondern als einen wirklichen Bestandteil enthält. TANNERY war der Ansicht, daß eine solche Geschichte der Wissenschaften in betreff der Mathematik eigentlich nur die kulturhistorischen und bibliographisch-literarischen Angaben und überdies die Elementarmathematik berücksichtigen könne, während eine rein fachmännische Geschichte der Mathematik nicht in den Rahmen einer zusammenhängenden Schilderung der Geschichte der Wissenschaften passe. ENESTRÖM pflichtet in vielen Punkten TANNERY bei, modifiziert aber andere Punkte und formuliert zuletzt seine Ansicht auf folgende Weise:

1. Die allgemeine Geschichte der Wissenschaften soll in zusammenhängender Darstellung auch die wichtigsten Errungenschaften der mathematischen Forschung berücksichtigen; hat die Darstellung irgendeinen sehr speziellen Zweck, z. B. für den Universitätsunterricht benutzt zu werden, so soll in jedem einzelnen Falle entschieden werden, inwieweit die Darstellung auf die allgemeinverständlichen Begriffe und Sätze zu beschränken ist;

2. es ist zurzeit angebracht, von der Bearbeitung einer rein fachmännischen Gesamtgeschichte der Wissenschaften abzusehen; aber um dieselbe vorzubereiten, könnte man versuchen, für gewisse Völker oder Zeitabschnitte solche Arbeiten herzustellen.

Quelle: JFM 37.1906, S. 36

---

(1) In meinem Aufsatze *Die Geschichte der Mathematik und der Universitätsunterricht*[1] hatte ich, unter Verweisung auf einen Artikel von PAUL TANNERY, hervorgehoben, daß man von einer allgemeinen Geschichte der Wissenschaften[2] noch keine klare Vorstellung hat. Fast gleichzeitig mit dem Erscheinen meines Aufsatzes veröffentlichte TANNERY eine kleine Arbeit,[3] die ursprünglich dazu bestimmt war, die erste einer Reihe von Vorlesungen

[1] G. ENESTRÖM, *Die Geschichte der Mathematik und der Universitätsunterricht;* `Biblioth, Mathem.` **5**$_3$, 1904, S. 65.

[2] Ich brauche auch in diesem Artikel der Kürze halber das Wort „Wissenschaften" als Übersetzung des französischen „sciences".

[3] P. TANNERY, *De l'histoire des sciences*; `Revue de Synthèse historique` **8**, 1904, S. 1–16.

am „Collége de France“ zu sein, worin er die allgemeine Geschichte der Wissenschaften zu behandeln beabsichtigte. In dieser Arbeit versuchte er einen Beitrag zur Klärung der betreffenden Vorstellung zu bieten und dabei auch die Stellung der Geschichte der besonderen Wissenschaften, (in erster Linie der Mathematik) zu dieser allgemeineren Geschichte zu bestimmen.

Tannery will zwei Arten der Geschichte der Wissenschaften unterscheiden, nämlich die allgemeine und die spezielle Geschichte. Die letztere besteht nach ihm nur aus einer Zusammenstellung der Geschichten der einzelnen Wissenschaften, und zwar soll die Behandlung jeder Wissenschaft von der Art sein, die ich in einem früheren Aufsätze[4] „rein fachmäßig“ genannt habe. Innerhalb der allgemeinen Geschichte der Wissenschaften soll dagegen nach Tannery die Geschichte der Mathematik keine besondere Abteilung bilden, und eine rein fachmäßige Darstellung soll auch nicht vorkommen. Nicht nur solche Gegenstände sind darin zu vermeiden, die von untergeordnetem Interesse sind, sondern
auch solche, die dem gebildeten Publikum unverständlich sein würden. Folglich wird die (2)
allgemeine Geschichte der Wissenschaften in betreff der Mathematik eigentlich die kulturhistorischen und biographisch-literarischen Bestandteile und noch dazu die Elementarmathematik berücksichtigen. Diese Bestandteile, sowie die ähnlichen Bestandteile der Geschichte der anderen Wissenschaften, sollen in chronologischer Ordnungsfolge zusammengearbeitet werden, und dadurch entsteht nach Tannery die allgemeine Geschichte der Wissenschaften.

Tannery ist also der Ansicht, daß die zwei Arten von Geschichte der Wissenschaften, nämlich die allgemeine und die spezielle, sowohl in betreff des Inhaltes als hinsichtlich der Darstellungsweise wesentlich verschieden sein sollen. Ziehe ich zuerst in Betracht die Frage über den Inhalt, so geht unmittelbar aus meinem soeben zitierten Artikel *Über kulturhistorische und rein fachmäßige Behandlung der Geschichte der Mathematik* hervor, daß ich in betreff der speziellen Geschichte der Wissenschaften mit Tannery einig sein muß. Anders liegt dagegen die Sache, wenn es sich um den Inhalt der allgemeinen Geschichte der Wissenschaften handelt. Freilich sind diese Worte nicht so zu deuten, als ob Tannerys Ausführungen meines Erachtens unrichtig wären. Er hat selbst ausdrücklich darauf hingewiesen, daß es verschiedene Ansichten in betreff der allgemeinen Geschichte der Wissenschaften geben kann oder sogar geben muß, und in seiner Arbeit *De l'histoire des sciences* wollte er nur seine persönliche Ansicht darlegen. Er fügte hinzu, daß man augenblicklich, bevor eine allgemeine Geschichte der Wissenschaften wirklich vorhanden ist, nicht sagen darf: so und so *muß* die Geschichte beschaffen sein, sondern nur: so und so *kann* sie beschaffen sein. Nun bin ich selbst der Tanneryschen Meinung, und ich stelle mir also zunächst die vorliegende Frage unter der folgenden Form: Kann die allgemeine Geschichte der Wissenschaften einen anderen mathematischen Inhalt haben als den von Tannery angegebenen?

Zuerst will ich dann bemerken, daß ich sehr gut verstehe, nicht nur wie Tannery zu seiner Auffassung kam, sondern auch daß er von seinem Gesichtspunkte aus fast notwendigerweise zu dieser Auffassung kommen mußte. Wie schon erwähnt, beabsichtigte er als ordentlicher Professor der Geschichte der Wissenschaften am „Collége de France“, wozu er allem Anschein nach als designiert betrachtet werden konnte, Vorlesungen zu halten, und seine kleine Arbeit *De l'histoire des sciences* war ursprünglich dazu bestimmt, die Ein-

[4] G. Eneström, *Über kulturhistorische und rein fachmäßige Behandlung der Geschichte der Mathematik;* `Biblioth. Mathem.` **4**$_3$, 1903, S 1–6.

trittsvorlesung zu sein. Will man aber als Universitätslehrer das Studium der Geschichte der Wissenschaften befördern, so ist es klar, daß man in erster Linie die allgemein verständlichen Bestandteile der Mathematik berücksichtigen muß, und dies um so mehr, wenn man
(3) der erste wirkliche Vertreter der Geschichte der Wissenschaften sein wird. Auf der anderen Seite ist offenbar, daß die Verständlichkeit eines gewissen mathematischen Begriffes oder Satzes nicht ein solches Merkmal ist, das unter allen Umständen entweder vorhanden ist oder durchaus fehlt, sondern daß es verschiedene Grade der Verständlichkeit gibt, und daß der Grad zuweilen nicht nur von den Kenntnissen, sondern auch von der Intelligenz des Schülers abhängig sein muß.

Aus dem Gesagten dürfte unmittelbar hervorgehen, daß die von mir oben gestellte Frage in betreff des Inhaltes der allgemeinen Geschichte der Wissenschaften bejahend beantwortet werden kann, auch wenn man großes Gewicht auf die Gemeinverständlichkeit dieses Inhaltes legt. In der Tat gibt es eine ganze Menge von Begriffen und Sätzen der höheren Mathematik, die fast ebenso leicht verständlich sind wie die der Elementarmathematik. Beispielsweise sind viele Sätze der Zahlentheorie dieser Art, und aus der Theorie der Kurven kann man beliebig viele Begriffe und Sätze entnehmen, die allgemein verständlich sind. Nun liegt es ja nahe zu bemerken, daß die fraglichen *Sätze* freilich leicht verständlich sind, daß aber die *Beweise* der Satze nur von denen verstanden werden können, die höhere mathematische Kenntnisse besitzen. Die Bemerkung ist ohne Zweifel richtig, aber in einer allgemeinen Geschichte der Wissenschaften ist es wegen des ungeheueren Materials nur ausnahmsweise möglich, Beweise der Sätze zu bringen, und es ist wohl wenig angebracht, die verständlichen Satze auszuschließen, nur weil die nicht mitgeteilten Beweise unverständlich wären. Übrigens gibt es gewisse mathematische Sätze, deren Richtigkeit mit einem sehr hohen Grade von Wahrscheinlichkeit ohne besondere mathematische Kenntnisse festgestellt werden kann, z. B. den WILSONschen Satz $1.2.3.\cdots(p-1)+1 \equiv 0 \pmod{p}$.

Wenn es also bewiesen ist, daß die mathematischen Bestandteile einer gemeinverständlichen allgemeinen Geschichte der Wissenschaften nicht nur aus der Elementarmathematik sondern auch aus der höheren Mathematik entnommen werden können, so hat man zu entscheiden, ob es zweckmäßig ist, in dieser Geschichte nur den von TANNERY angegebenen Inhalt zu berücksichtigen. Wie ich schon bemerkt habe, kann ein solches Verfahren ohne Zweifel berechtigt sein, wenn man zum erstenmal Universitätsvorlesungen über allgemeine Geschichte der Wissenschaften halten soll, aber meiner Meinung nach ist es *nur* in diesem Falle zu empfehlen. Offenbar verliert nämlich die Darstellung wesentlich an Interesse, wenn gerade die wichtigsten Errungenschaften der mathematischen Forschung stillschweigend übergangen werden müssen, und besonders muß der Zuhörer (oder Leser) eine verkehrte Vorstellung von der Entwickelung der Mathematik im 19. Jahrhundert bekommen, wenn alles, was sich auf die höhere Mathematik bezieht, ausgeschlossen wird. Ich bin also der
(4) Ansicht, daß eine Universitätsvorlesung über allgemeine Geschichte der Wissenschaften sich nicht auf die Elementarmathematik beschränken, sondern so viel als möglich von den wichtigsten Begriffen und Sätzen der höheren Mathematik mitnehmen soll.

Handelt es sich dagegen um eine Darstellung der allgemeinen Geschichte der Wissenschaften, die für das gebildete Publikum oder für die Gelehrtenwelt bearbeitet wird, möchte ich noch einen Schritt weiter gehen, so daß ich die Gemeinverständlichkeit der mathematischen Bestandteile als eine Nebensache betrachte. Gewiß wird dann der mathematische Inhalt vielen Lesern zum größten Teil unverständlich, aber auf der anderen Seite werden sehr viele Leser wenigstens eine allgemeine Vorstellung von der Bedeutung der mathematischen Forschungsarbeit unserer Zeit bekommen, und schon dies ist meines Erachtens ein großer Gewinn.

Vielleicht wird man geneigt sein, gegen das soeben angeführte einzuwenden, daß es auf diese Weise unmöglich werden wird, eine allgemeine Geschichte der Wissenschaften mit Sachkunde zu bearbeiten. Die Einwendung wäre ohne Zweifel begründet, wenn man voraussetzte, daß eine einzige Person das ganze bearbeiten würde, aber anders liegt die Sache, wenn eine Anzahl von Gelehrten sich zusammenschließen um die Arbeit auszuführen, und in unseren Tagen ist eine solche Anordnung gar nicht ungewöhnlich.

Ich gehe jetzt zu der Frage der Darstellungsweise über. In dieser Hinsicht bin ich mit Tannery darüber einig, daß die Bestandteile der allgemeinen Geschichte der Wissenschaften in chronologischer Ordnungsfolge zusammengearbeitet werden sollen. Ich verstehe auch sehr gut, warum Tannery nicht wagte, dieselbe Darstellungsweise für die spezielle Geschichte der Wissenschaften vorzuschlagen, sondern sich damit begnügte, eine Sammlung von Einzeldarstellungen zu empfehlen. Offenbar hat Tannery an das ungeheure Material gedacht, das eine Gesamtdarstellung umfassen würde, und noch dazu die überaus großen Schwierigkeiten in Betracht gezogen, die die Bearbeitung dieses Materials von rein technischem Gesichtspunkte aus darbieten würde; vielleicht bemerkte er auch, daß eine solche Gesamtdarstellung eigentlich auf keinen großen Leserkreis rechnen konnte. Aus genau denselben Gründen bin ich damit einverstanden, daß man zur Zeit von einer speziellen Gesamtgeschichte der Wissenschaften absieht. Dagegen wäre es wohl nicht ganz unmöglich, dieselbe schon jetzt bis zu einem gewissen Grade vorzubereiten, und zwar dadurch, daß man entweder für einzelne Völker oder für gewisse Zeitabschnitte ähnliche Arbeiten in Angriff nimmt.

Das Resultat der vorangehenden Ausführungen ist also:

1. Die Darstellung der allgemeinen Geschichte der Wissenschaften soll die wichtigsten (5)
Errungenschaften der mathematischen Forschung berücksichtigen. Hat die Darstellung irgend einen sehr speziellen Zweck, z. B. für den Universitätsunterricht benutzt zu werden, so soll in jedem einzelnen Falle entschieden werden, in wie weit die Darstellung auf die allgemein verständlichen mathematischen Begriffe und Sätze zu beschränken ist.

2. Es ist zur Zeit angebracht, von der Bearbeitung einer speziellen Gesamtgeschichte der Wissenschaften abzusehen, aber um dieselbe vorzubereiten, könnte man versuchen, für gewisse Völker oder Zeitabschnitte solche Arbeiten herzustellen.

Band 8

Über planmäßige Arbeit auf dem mathematisch-historischen Forschungsgebiete.

Zusammenfassung:
Der Verf. geht von der Voraussetzung aus, daß das Endziel der mathematisch-historischen Forschung ist, eine Darstellung der Entwickelung der mathematischen Theorien zu bieten. Er untersucht zunächst, ob es möglich sei, dies Ziel dadurch zu erreichen, daß man erst in Monographien die Entwickelung der besonderen Methoden und Sätze schildert und dann eine Gesamtdarstellung bearbeitet; dabei kommt er zu dem Resultate, daß ein solches Verfahren noch nicht zu empfehlen ist, weil zuvor viele literarische Vorarbeiten ausgeführt werden müssen. Er ist darum der Ansicht, daß sich die planmäßige Arbeit vorläufig in erster Linie auf die Bearbeitung der literarischen Geschichte der Mathematik zu richten hat. Wie diese Bearbeitung gemacht werden soll, gibt er ausführlich an, indem er besonders das Altertum, das Mittelalter und die Neuzeit in Betracht zieht. Ferner lenkt er die Aufmerksamkeit auf andere Arten von mathematisch-historischen Untersuchungen, die von Interesse sind, und hebt hervor, daß bei allen diesen Untersuchungen eine wirklich wissenschaftliche Methode zur Anwendung kommen muß, damit die Resultate möglichst zuverlässig werden. Überdies wird angegeben, wie die Arbeit auf dem mathematisch-historischen Gebiete am besten unter die Philologen, die Historiker und die Mathematiker verteilt werden sollte. Zuletzt betont der Verf., daß die von ihm empfohlene planmäßige Arbeit auch von Gesichtspunkte des Literarhistorikers oder des Kulturhistorikers gebilligt werden kann, so daß sein Vorschlag gewissermaßen von der Auffassung des Endziels der mathematisch-historischen Forschung unabhängig ist. Den wesentlichen Inhalt des Artikels faßt er auf folgende Weise zusammen:

1. Eine planmäßige mathematisch-historische Arbeit muß in erster Linie darauf hinzielen, die großen noch vorhandenen Lücken auf dem literarischen Gebiete auszufüllen; an dieser Arbeit ist die Teilnahme der Literatur- und Kulturhistoriker sehr willkommen, die der Philologen sogar notwendig.
2. Gleichzeitig mit dieser Arbeit sollen die Historiker der Mathematik, sofern das schon herbeigeschaffte Material nicht zu unvollständig ist, die Geschichte der einzelnen mathematischen Ideen, vorzugsweise bis gegen das Ende des 18. Jahrhunderts, bearbeiten und, wenn irgend möglich, die produktiven Mathematiker anregen, bei der Behandlung der Geschichte der folgenden Zeit behülflich zu sein.
3. Bei den literarischen Untersuchungen soll, soweit möglich, darauf Bezug genommen werden, daß das Material, das zugänglich gemacht wird, in letzter Linie für eine Entwicklungsgeschichte der Mathematik benutzt werden wird.

Quelle: JFM 38.1907, S. 55

So lange ein Forschungsgebiet nur von wenigen Personen bearbeitet wird, die außer- (1)
dem nicht auf Grund ihres eigentlichen Berufes, sondern sozusagen zufälligerweise in diesem Gebiete tätig sind, lohnt es kaum der Mühe, auch nur einen Versuch zu machen, um planmäßige Arbeit zu bewirken; vielmehr ist es angebrachter, daß jedermann die Untersuchungen vornimmt, die ihn am meisten interessieren. Ist dagegen das Forschungsgebiet schon längere Zeit bearbeitet worden, und hat sich allmählich die Zahl der Teilnehmer vermehrt, so liegt darin ein Anlaß, um wenigstens in Erwägung zu ziehen, ob und auf welche Weise eine planmäßigere Arbeit erzielt werden könnte. Ein Forschungsgebiet der fraglichen Art ist nunmehr die Geschichte der Mathematik, und in diesem Artikel beabsichtige ich auseinanderzusetzen, inwieweit die Arbeit in diesem Gebiete meines Erachtens planmäßig geordnet werden kann. Freilich habe ich den nämlichen Gegenstand beiläufig in einigen früheren Leitartikeln berührt[1], aber derselbe ist meines Erachtens so wichtig, daß es von besonderen Interesse ist darauf zurückzukommen.

Es dürfte von vorne herein klar sein, daß eine wirkliche planmäßige Arbeit auf dem mathematisch-historischen Gebiete erst dann möglich wird, wenn man festgestellt hat, was eine Geschichte der Mathematik eigentlich enthalten soll. Ist man der Ansicht, die ich schon öfter ausgesprochen und begründet habe, nämlich, daß eine solche Geschichte
wesentlich die Entwickelung der mathematischen Ideen zu schildern hat, und zieht man in (2)
Betracht, daß eine Gesamtgeschichte in diesem Sinne erst nach bedeutenden Vorarbeiten mit Erfolg in Angriff genommen werden kann, so liegt es am nächsten, den Fachgenossen die Bearbeitung historischer Monographien über einzelne Ideen oder über mehrere Ideen in einem beschränkteren Zeitraume zu empfehlen. Bei näherer Untersuchung stellt es sich indessen heraus, daß zur Zeit auch nicht solche Monographien immer mit wirklichem Erfolg in Angriff genommen werden können.

Zieht man zuerst in Betracht die ältere Mathematik, so kommt es oft vor, daß man, um der Entwickelung einer gewissen Idee zu folgen, solche Hilfsmittel zur Verfügung haben muß, die nur ausnahmsweise einem Mathematiker zugänglich sind; es kommt auch vor, daß nicht einmal diese Hilfsmittel genügen, sondern daß ganz spezielle bibliographische, literarische oder philologische Vorarbeiten nötig sind, bevor man den Entwickelungsgang der fraglichen Idee genau feststellen, kann. Aber überdies ist es nicht selten unmöglich zu entscheiden, welche Vorarbeiten nötig sind, denn tatsächlich haben zufällige Entdeckungen rein literarischer Art veranlaßt, daß die früheren Ansichten über die Entwickelung gewisser mathematischer Theorien wesentlich modifiziert werden mußten.[2]

In betreff der neueren Mathematik liegt die Sache etwas anders, aber auch hier ist es in vielen Fällen sehr schwierig, einen Überblick des ganzen Entwickelungsganges einer mathematischen Idee zu erzielen, weil die betreffende Literatur zum Teil schwer zugänglich ist und man oft nicht weiß, wo man das Material zu suchen hat.

Aus dem vorangehenden folgt, daß es zwar angebracht sein kann, die Fachgenossen zur Bearbeitung der Geschichte der einzelnen mathematischen Ideen anzuregen, daß es aber noch zu früh ist, auf diesem Wege eine wirklich planmäßige Arbeit zur Herstellung einer Gesamtgeschichte der Mathematik anzuordnen. Vielmehr müssen zuerst bedeutende Vorarbeiten vorliegen, und diese gehören hauptsächlich der literarischen Geschichte der Mathematik an. Die erste Frage wird also sein, inwieweit auf diesem Gebiete eine planmäßige

[1] Vgl. z. B, G. Eneström, *Über literarische und wissenschaftliche Geschichtsschreibung auf dem Gebiete der Mathematik;* `Biblioth. Mathem.` **2**$_3$, 1901, S. 2.

[2] Als Beleg meiner Behauptung genügt es auf die sogenannte Heron-Frage hinzuweisen.

Arbeit erzielt werden kann, und hier muß man, wie schon oben angedeutet wurde, besonders die ältere Mathematik in Betracht ziehen.

Hinsichtlich der Mathematik im Altertum ist es natürlich in erster Linie von Belang, gute Ausgaben nebst Übersetzungen der Werke der wichtigsten Mathematiker, sowie gute Monographien in betreff der übrigen Mathematiker zu haben. In dieser Hinsicht ist ja
(3) schon viel geleistet worden, das meiste freilich von Philologen, die sich die nötigen, mathematischen Kenntnisse verschafft haben, und da es immer gewöhnlicher wird, daß jüngere Philologen Arbeiten über griechische Mathematiker veröffentlichen, so ist es zu hoffen, daß die noch vorhandenen Lücken[3] allmählich ausgefüllt werden. Jedenfalls ist dies wesentlich eine Sache der Philologen.

In betreff der morgenländischen Mathematik im Altertum und Mittelalter sind die Verhältnisse zur Zeit weniger günstig. Die Schriften der morgenländischen Mathematiker sind nämlich noch zum größten Teil unediert und die Handschriften oft den europäischen Forschern unzugänglich; überdies gibt es teils wenige Orientalisten, die sich für Mathematik interessieren, teils nur ausnahmsweise Mathematiker, die orientalische Sprachen studiert haben. Auch hier muß die weitere Arbeit in erster Linie den betreffenden Philologen überlassen werden.

Die mathematische Literatur des christlichen Mittelalters ist meistens nur handschriftlich vorhanden, und ein großer Teil derselben ist noch nicht näher untersucht; hierzu kommt, daß es oft unmöglich ist, ohne eingehende Nachforschungen zu entscheiden, ob eine Originalabhandlung oder lediglich eine Übersetzung vorliegt[4], sowie im ersten Falle wer der Verfasser der Abhandlung[5] ist. Um das handschriftlich vorhandene Material zugänglich zu machen, sind größere philologische Kenntnisse nicht nötig, wohl aber Handschriftenkunde, die allerdings nur in einzelnen Fällen umfassendere Studien zu erfordern braucht, und in solchen Fällen dürfte der Mathematiker ohne allzu große Schwierigkeit einen Handschriftenkenner zu Rate ziehen können. In erster Linie sollte ein Verzeichnis der handschriftlichen mathematischen Literatur des christlichen Mittelalters hergestellt werden,[6] dann sollten teils die wichtigsten noch unedierten Texte herausgegeben, teils über die übrigen genaue Berichte veröffentlicht werden.

(4) Mit der Erfindung der Buchdruckerkunst verändern sich, die Verhältnisse insofern, als die schon im Druck vorliegenden Schriften wesentlich genügen, um eine literarische Geschichte der neueren Zeit fertig zu stellen. Aber unter diesen Schriften gibt es viele, nicht nur aus dem 15. und 16., sondern auch aus dem Anfange des 17. Jahrhunderts, die wegen ihrer Seltenheit fast ebenso schwer zugänglich sind als Handschriften, und gewisse Arbeiten oder Aktenstücke harren noch einem kompetenten Herausgeber. Die sehr seltenen Schriften gehören freilich nicht den wichtigsten Arbeiten an, so daß man vorläufig von einer Neuausgabe absehen könnte, aber jedenfalls ist es von Belang, daß ihr wesentlicher Inhalt durch

---

[3]So z. B. fehlt es noch an einer vollständigen Ausgabe von PTOLEMAIOS Werken nebst Übersetzung derselben; die von HEIBERG in Angriff genommene Ausgabe enthält bekanntlich nur den griechischen Text.

[4]Ich verweise beispielsweise auf die noch nicht endgültig entschiedene Frage, ob der von BONCOMPAGNI (1851) herausgegebene „Liber qui secundum Arabes vocatur algebra et almucabula" eine Übersetzung oder eine Bearbeitung von ALKHWARIZMIS Algebra ist (vgl. A. A. BJÖRNBO, *Gerhard von Cremonas Übersetzung von Alkhwarizmis Algebra und von Euklids Elementen;* `Biblioth. Mathem.` 63, 1905, S. 239–241).

[5]Vgl. G. ENESTRÖM, *Über den Bearbeiter oder Übersetzer des von Boncompagni (1857) herausgegebenen „Liber algorismi depratica arismetrice";* `Biblioth. Mathem.` $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 114.

[6]Vgl. A. A. BJÖRNBO, *Über ein bibliographisches Repertorium der handschriftlichen mathematischen Literatur des Mittelalters;* `Biblioth. Mathem.` $\mathbf{4}_3$, 1908; S. 326–333.

Monographien zugänglicher gemacht wird, sofern solche noch nicht vorhanden sind.[7] Auch kritische Ausgaben der gesammelten Werke gewisser hervorragender Mathematiker des 16. und des Anfanges des 17. Jahrhunderts wären erwünscht.[8]

Mit Descartes beginnt auch vom literarischen Gesichtspunkte aus eine neue Periode, weil von ihm an die mathematischen Quellenschriften zum größten Teil ziemlich leicht zugänglich sind, so daß man hier eine direkte Behandlung der Geschichte der mathematischen Ideen empfehlen könnte. Indessen muß auch die literarische Geschichte der Mathematik nach Descartes weiter bearbeitet werden. Erfreulicherweise sind gesammelte Werke vieler Mathematiker des 17. und 18. Jahrhunderts schon herausgegeben und auch wichtige Sammlungen von Briefen sind veröffentlicht worden. Auf der anderen Seite gibt es noch in dieser Hinsicht viele Lücken, die auszufüllen sind; so z. B. fehlt es bekanntlich an einer Ausgabe von Leonhard Eulers Werken und von seinem Briefwechsel ist bisher nur ein unbedeutender Teil publiziert worden. Eine andere nützliche Arbeit wäre es, Berichte über den mathematischen Inhalt gewisser weniger leicht zugänglicher Zeitschriften des 17. und 18. Jahrhunderts zu bringen, die mehr beiläufig mathematische Artikel enthalten, und deren Inhalt darum leicht der Aufmerksamkeit der mathematisch-historischen Forscher entgeht.[9]

Mit dem Beginn des 19. Jahrhunderts mehrt sich sowohl die Zahl der Mathematiker (5)
als die Durchschnittszahl ihrer Schriften. An Ausgaben der gesammelten Werke der meisten dieser Mathematiker ist es noch zu früh zu denken, aber da ihre Abhandlungen in einer großen Anzahl von Zeit- oder Sammelschriften zerstreut sind, so ist es schon aus diesem Grunde von Interesse, gute Monographien mehr literarischer Art zu bekommen, um bei den Einzeldarstellungen der Entwickelung der mathematischen Ideen im 19. Jahrhundert benutzt zu werden. Aus verschiedenen Gründen ist es im allgemeinen angebracht, für jeden besonderen Mathematiker, der zu den Fortschritten seiner Wissenschaft beigetragen hat, eine solche Monographie zu bearbeiten. Teils ist es viel leichter, unter den Fachgenossen Bearbeiter solcher Monographien zu finden, teils können sich die Verfasser derselben gewöhnlich ohne Schwierigkeit das nötige Material fast vollständig verschaffen; ganz besonders angebracht ist das Verfahren, wenn es sich um Mathematiker handelt, deren Muttersprache nicht eine Kultursprache ist, und die sich in ihren Abhandlungen wenigstens teilweise jener Sprache bedient haben. Auf der anderen Seite ist es gewiß sehr zu empfehlen, schon jetzt Einzeldarstellungen der Entwickelung der mathematischen Ideen im 19. Jahrhundert zu bearbeiten; von solchen Darstellungen gibt es ja eine nicht unbedeutende Anzahl,[10] aber die meisten können keinen Anspruch darauf machen, das ganze Material benutzt zu haben.

Ich habe bisher eigentlich nur von der Herausgabe mathematischer Quellenschriften und Monographien gesprochen, aber natürlich ist es auch von Belang, Übersichten des wesentli-

---

[7] Vgl. z. B. G. Wertheim, *Die Logistik des Johannes Buteo*, `Biblioth. Mathem.` **2**$_3$, 1901, S. 213–219. — H. Bosmans, *Le „De arte magna" de Guillaume Gobbelin;* `Biblioth. Mathem.` **7**$_3$, 1906/7, S. 44–66.

[8] So z. B. fehlt es noch an einer vollständigen Ausgabe von Viètes Werken; die alte Ausgabe von F. van Schooten (1646) ist bekanntlich nicht vollständig (der *Canon mathematicus seu ad triangula cum adpendicibus* fehlt) und auch sonst genügt die Ausgabe jetzt kaum den Anforderungen der Kritik.

[9] Vgl. z. B. G. Loria, *Il „Giornale de' letterati d'Italia" di Venezia e la „Raccolta Calogerà" come fonti per la storia delle matematiche nel secolo XVIII;* `Abhandl. zur Gesch. d. Mathem.` **9**, 1899, S. 241–274.

[10] Bekanntlich sind auf Anregung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung viele Darstellungen dieser Art in Angriff genommen oder veröffentlicht worden; vom historischen Gesichtspunkte aus sind diese von sehr verschiedenem Wert; einige behandeln die Entwickelung nur im Vorübergehen und beschränken sich hauptsächlich auf den gegenwärtigen Stand der betreffenden Theorie.

chen Inhalts der mathematischen Literatur eines gewissen Zeitraumes[11] oder einer größeren Abteilung der Mathematik[12] zu bekommen, noch bevor das ganze für diesen Zweck nötige Material leicht zugänglich gemacht worden ist. Solche Übersichten könnten natürlich auf verschiedene Weise bearbeitet werden. Man kann sich z. B. darauf beschränken, in chronologischer Ordnungsfolge über die betreffenden Schriften zu berichten, und wenn eine solche Arbeit bis auf unsere Tage, oder wenigstens bis zum Jahre 1868, mit dem das *Jahrbuch*
(6) *über die Fortschritte der Mathematik* beginnt, fortgesetzt wäre, so hätte man dadurch ein mathematisch-historisches Nachschlagebuch bekommen, das vorläufig den Forschern gute Dienste leisten könnte. Wertvoll sind zuweilen auch Sammlungen von Ergänzungen und Berichtigungen schon erschienener mathematisch-historischer Arbeiten[13] sowie Hinweise auf die Lücken, die noch von der Forschung auszufüllen sind.[14] Für die Geschichte der älteren Mathematik sind Übersichten der neuesten Errungenschaften auf diesem Gebiete besonders empfehlenswert, weil die betreffenden Schriften oft in philologischen Zeitschriften, die den Mathematikern schwer zugänglich sind, veröffentlicht werden.[15]

In nahem Zusammenhange mit der literarischen Geschichte der Mathematik steht die mathematische Bibliographie. Leider fehlt es uns noch an einer vollständigen Bibliographie dieser Art,[16] und darum können bibliographische Spezial-Untersuchungen, besonders wenn sie die Angaben viel benutzter mathematisch-historischer Arbeiten berichtigen oder ergänzen, sehr dankenswert sein.[17] Dasselbe gilt in gewissen Fällen von rein biographischen Untersuchungen und noch mehr von Beiträgen zur Geschichte des mathematischen Unterrichtes.[18] Wenn man für jede wichtigere Universität eine solche Geschichte bekommen könnte, so würde dadurch die mathematisch-historische Forschung sehr erleichtert werden.

Endlich ist es auch angebracht, von Zeit zu Zeit den Fachgenossen eine gedrängte Übersicht der literarischen Resultate der mathematisch-historischen Forschung mit Verweisen auf die Quellenschriften und die Monographien zu bieten.[19]

(7) Wenn also noch sehr viel auf dem literarischen Gebiete zu tun ist,[20] bevor eine Ent-

---

[11] Vgl. *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik.* Herausgegeben von M. Cantor IV (Leipzig 1907); für den Zeitraum 1759–1799.

[12] Vgl. z. B. A. von Braunmühl, *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie I–II* (Leipzig 1900–1803).

[13] Vgl. die „Kleinen Bemerkungen“ zur letzten Auflage von Cantors *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* in der dritten Folge der `Bibliotheca Mathematica`.

[14] Vgl. die „Anfragen“ der `Bibliotheca Mathematica`.

[15] Vgl. z. B. J. L. Heiberg, *Mathematik, Mechanik und Astronomie;* `Die Altertumswissenschaft`, herausg. von W. Kroll, **I** (1905), S, 129–143. — K. Tittel, *Mathematik, Mechanik und Astronomie* 1902–1905; `Jahresber. für Altertumswiss.` **129**, 1906, S. 113–219.

[16] Es ist noch unbekannt, wann Herr G. Valentin die Bearbeitung des von ihm seit 22 Jahren gesammelten bibliographischen Materials beenden wird, so daß der Druck seiner allgemeinen mathematischen Bibliographie beginnen kann.

[17] Zu welchen unrichtigen Folgerungen ungenaue bibliographische Aufschlüsse zuweilen führen können, habe ich in der `Biblioth. Mathem.` $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 277 durch ein Beispiel gezeigt.

[18] Vgl. z. B. G. H. Müller,*Studien zur Geschichte . . . des mathematischen Unterrichts an der Universität Göttingen im 18. Jahrhundert;* `Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wiss.` **18**, 1904, S. 81–148.

[19] Ein Versuch in dieser Richtung sind z. B. die *Zeittafeln zur Geschichte der Mathematik, Physik und Astronomie bis zum Jahre 1500, mit Hinweis auf die Quellen-Literatur* (Leipzig 1892) von Felix Müller. Im Gebiete der elementaren Mathematik kann J. Tropfkes *Geschichte der Elementar-Mathematik* (I–II, Leipzig 1902–1903) für den fraglichen Zweck benutzt werden.

[20] Wenn K. Tittel (a. a. O. S. 118) bemerkt: „Dagegen kann Eneström in der literarischen Forschung nur eine Tätigkeit von untergeordneter Bedeutung sehen, da er als Spezialist eine. Darstellung der Entwickelung sämtlicher mathematischer Theorien fordert, die zum großen Teile nur für den Mathematiker von Fach verständlich sein werden. Von diesem Standpunkt kommt er dazu, Cantor als einen Forscher

wicklungsgeschichte der Mathematik mit Erfolg bearbeitet werden kann, so bedeutet dies, wie ich schon im vorhergehenden angedeutet habe, gar nicht, daß man vorläufig die Bearbeitung der Entwickelungsgeschichte ganz beiseite lassen soll. Nicht nur für den Zeitraum, der mit DESCARTES beginnt, sondern auch für die ältere Zeit ist es nützlich, daß Einzeldarstellungen dieser Art in Angriff genommen werden,[21] und auch Versuche, auf Grund des schon vorhandenen Materials die ganze Entwickelungsgeschichte der Mathematik zu schildern, sind mit Freuden zu begrüßen.[22] In diesem Zusammenhange erlaube ich mir auch hier auf den großen Nutzen hinzuweisen, die die mathematisch-historische Forschung davon haben kann, daß größere mathematische Unternehmungen (z. B. Enzyklopädien) auch den Entwickelungsgang der mathematischen Theorien berücksichtigen.[23]

Für eine planmäßige mathematisch-historische Arbeit ist es indessen von Belang, nicht nur daß die schon angegebenen Untersuchungen oder Arbeiten ausgeführt werden, sondern auch daß ihre Resultate in formeller Hinsicht den Anforderungen der Wissenschaft genügen. In erster Linie müssen natürlich die Angaben zuverlässig sein und im Bedarfsfalle durch genaue Zitate oder Verweise belegt werden.[24] Dies bedeutet freilich nicht, daß nur Tatsa- (8)
chen aber keine Annahmen erwähnt werden dürfen; zu welchem unfruchtbaren Resultate eine Beschränkung auf nackte Tatsachen führen würde, ersieht man am leichtesten, wenn man einige von BONCOMPAGNIS Abhandlungen[25] studiert. Dagegen sollen die Annahmen, die nötig sind, um den gegebenen Stoff zu bearbeiten, immer mit Vorsicht und Sparsamkeit angewendet werden, und als solche hervorgehoben werden.[26]

Bei den literarischen Untersuchungen über ältere mathematische Arbeiten ist es sehr wünschenswert, daß nicht nur über den hauptsächlichen Inhalt derselben berichtet, sondern auch darauf Bezug genommen wird, ob in den Arbeiten etwas vorkommt, daß als Vorbereitung neuer Theorien betrachtet werden kann. Für die Entwickelungsgeschichte können solche Sachen von großem Interesse sein, auch wenn sie nur beiläufig in den betreffenden Arbeiten vorkommen, und darum von den Verfassern selbst nicht hervorgehoben worden sind; zuweilen können sogar unrichtige Sätze verdienen, besonders notiert zu werden, weil sie die Anfänge neuer Theorien enthalten.[27] Dagegen ist es natürlich unangebracht, in ältere Arbeiten Methoden oder Sätze hineinzulegen, nur weil sie bei flüchtigem Einsehen einer

zu bezeichnen, der nur als Kulturhistoriker wirken kann, und die Mitarbeit der Historiker und Philologen nicht sehr hoch zu schätzen“, so hat er mich durchaus mißverstanden. Schon vor vielen Jahren (vgl. `Biblioth. Mathem.` **2**$_3$, 1901, S. 2) habe ich ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, wie wichtig eingehende mathematisch-literarische Untersuchungen sind, und ich weiß nicht, wie Herr TITTEL dazu gekommen ist, mir die Ansicht zuzuschreiben, die literarische Tätigkeit sei von untergeordneter Bedeutung. Möglicherweise hat er eine Bemerkung von mir, daß „bei der kulturhistorischen Behandlung gewisse Fragen in den Vordergrund treten müssen, die für die Geschichte der mathematischen Ideen von untergeordneter Bedeutung sind“ mißverstanden.

[21] Die oben (S. 5, Anm. 3) zitierte Arbeit von BRAUNMÜHL ist zum Teil dieser Art.

[22] Vgl. H. G. ZEUTHEN, *Geschichte der Mathematik im XVI. und XVII. Jahrhundert* (Leipzig 1903).

[23] Vgl. G. ENESTRÖM, *Ein neues literarisches Hilfsmittel zur Verbreitung mathematisch-historischer Kenntnisse;* `Biblioth. Mathem.` **5**$_3$, 1904, S. 398–406.

[24] Ein abschreckendes Beispiel in betreff unzuverlässiger und unvollständiger Angaben hat uns Herr MAX SIMON durch seine Arbeit *Über die Entwicklung, der Elementar-Geometrie im XIX. Jahrhundert* (Leipzig 1906) zur Verfügung gestellt.

[25] Siehe z. B. die Abhandlung *Intorno ad un trattato d'aritmetica stampato nel 1478;* `Atti dell' accad. pontif. de' Nuovi Lincei` **16**, 1863, 1–64, 101–228, 301–364, 389–452, 503–630, 683–842, 909–1044.

[26] Vgl. G. ENESTRÖM, *Über die Bedeutung historischer Hypothesen für die mathematische Geschichtsschreibung;* `Biblioth. Mathem.` **6**$_3$, 1905, S. 1–8.

[27] Vgl. meine Bemerkung über ALBERTUS DE SAXONIA und Konvergenzbedingungen in der `Biblioth. Mathem.` **7**$_3$ 1906/7, S. 381–382.

Arbeit dort vorzukommen scheinen, obgleich es sich bei näherer Untersuchung ergibt, daß der Wortlaut auf eine ganz andere Weise aufzufassen ist.[28]

Bei den entwickelungshistorischen Untersuchungen ist natürlich besonders die Berücksichtigung des Zusammenhangs der mathematischen Ideen zu empfehlen. Dieser Zusammenhang kann entweder ein äußerer oder ein rein innerer sein. Ein äußerer Zusammenhang findet statt, wenn die Entdeckungen eines Mathematikers nachweislich durch die Vorarbeiten eines Vorgängers angeregt oder veranlaßt worden sind, ein innerer Zusammenhang dagegen, wenn eine Abhängigkeit nicht anzunehmen oder wenigstens nicht nachzuweisen ist, aber die späteren Entdeckungen von methodischem Gesichtspunkte aus als eine un-
(9) mittelbare Fortsetzung älterer Untersuchungen betrachtet werden können. Auch auf das Vorkommen der zweiten Art von Zusammenhang mathematischer Ideen aufmerksam zu machen ist meines Erachtens von großen Interesse.[29]

In zweiter Linie erlaube ich mir zu bemerken, daß allzu breite Darstellungen, wenn irgend möglich, vermieden werden sollten. Unter Umständen kann es ja nützlich sein, ausführliche Auskunft über gewisse ältere Schriften oder über die Geschichte einer Theorie zu bekommen, aber wenn die Darstellung zu ausführlich ist, werden viele Leser leicht abgeschreckt, davon Kenntnis zu nehmen.[30] Natürlich ist die Ausführlichkeit oft eine Geschmackssache, und das Urteil darüber von der Abschätzung der Bedeutung des behandelten Gegenstandes abhängig.

Ich habe schon oben betont, das in betreff der Geschichte der Mathematik im Altertum und zum Teil auch im Mittelalter die Herbeischaffung des Quellenmaterials wesentlich eine Aufgabe der Philologen ist. Die übrige Arbeit liegt natürlich in erster Linie den eigentlichen mathematisch-historischen Forschern ob, und es ist klar, daß diese besonders geeignet sind, die vorzugsweise literarischen Untersuchungen auszuführen. Dagegen könnte es scheinen, als ob man das beste Resultat erzielen würde, wenn man imstande wäre produktive Mathematiker zu bewegen, Einzeldarstellungen der Entwickelung der mathematischen Ideen zu bearbeiten. In der Tat ist ein solches Verfahren meines Erachtens in betreff der Geschichte des 19. und eines Teiles des 18. Jahrhunderts zu empfehlen, aber weniger angebracht hinsichtlich der älteren Zeit. Der produktive Mathematiker interessiert sich nämlich im allgemeinen nur für die Geschichte seines Gebietes und er bekümmert sich weniger um die älteren Untersuchungen auf diesem Gebiete, die vielleicht jetzt einen vollständig überwundenen Standpunkt repräsentieren.[31] Freilich hat es produktive Mathematiker gegeben, die zugleich wirkliche Historiker waren, und auch jetzt gibt es ausnahmsweise solche, aber mit
(10) der Entwickelung der Geschichte der Mathematik zu einer wirklichen Wissenschaft, die

[28] Vgl. z. B. meine Bemerkung über das angebliche Vorkommmen des Satzes $u_{x+2} = u_x + 2\Delta u_x + \Delta^2 u_x$ bei Nikomachos (*Biblioth. Mathem.* $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 379) und des Satzes von der Gleichungskonstante bei Cardano (*Biblioth. Mathem.* $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 212–213).

[29] Vgl. z. B. meine Bemerkung über die Waessenaer-Newtonsche Methode zur Auffindung der rationalen Wurzeln einer Gleichung (*Biblioth. Mathem.* $\mathbf{8}_3$l 1907, S. 94).

[30] Vgl. z. B. die noch nicht beendete Arbeit von H. Burkhardt, *Entwicklungen nach oscillirenden Functionen und Integration der Differentialgleichungen der mathematischen Physik* (*Jahresber. d. deutschen Mathem.-Verein.* **10**), deren schon erschienene Hefte zusammen etwa *vierzehnhundert* Druckseiten enthalten.

[31] Vgl. C. H. Müller, *Mathematik; Mitteil. d. Gesellsch. für deutsche Erziehungs- und Schulgeschichte* **15**, 1905, S. 1 des Sonderabzuges. Als charakteristisch für die Auffassung in gewissen Kreisen von Mathematikern verdient der folgende Ausspruch eines englischen Mathematikers zitiert zu werden: „Si vous étudiez l'histoire des sciences mathématiques, vous resterez sans faire des progrès" (*L'enseignement mathém.* **9**, 1907, S. 307).

eine ganz besondere Schulung und umfassende Kenntnisse erfordert, werden Mathematiker dieser Art immer seltener werden. Für die Bearbeitung der Entwickelungsgeschichte der Mathematik vor der Mitte des 18. Jahrhunderts müssen also die eigentlichen Historiker Sorge tragen.[32] Dagegen gibt es eine Weise, wodurch die produktiven Mathematiker der jetzigen und der künftigen historischen Forschung besonders nützlich sein können, nämlich durch Veröffentlichungen wissenschaftlicher Biographien kürzlich verstorbener Mathematiker.

Bei den vorangehenden Ausführungen habe ich vorausgesetzt, daß der Endzweck der mathematisch-historischen Forschung ist, zuletzt eine Geschichte der Entwicklung der mathematischen Ideen zu bringen. Indessen ist es klar, daß auch wer die Geschichte der Mathematik lediglich als eine Geschichte der mathematischen Literatur, also als einen Zweig der allgemeinen Literaturgeschichte betrachtet, ein nützlicher Teilnehmer an der von mir oben empfohlenen planmäßigen Arbeit auf dem mathematisch-historischen Forschungsgebiete sein kann, denn ein großer Teil dieser Arbeit, z. B. die Herausgabe der gesammelten Werke von Mathematikern bezieht sich auf die Geschichte der mathematischen Literatur. Dasselbe gilt auch von denen, die in der Geschichte der Mathematik wesentlich eine Geschichte der mathematischen Charakterzüge des Kulturlebens[33] sehen, wollen, denn um eine solche Geschichte zu bearbeiten, müssen ja zuerst die Schriften, die diese Charakterzüge enthalten, zugänglich gemacht und planmäßig untersucht werden, etwa auf die von mir oben vorgeschlagene Weise.

Dagegen ist vor einigen Jahren eine besondere Auffassung der Geschichte der Mathema- (11)
tik in die Öffentlichkeit gelangt[34] nach welcher, soviel ich sehen kann, eine ganz andere Art von planmäßiger Arbeit erforderlich sein würde. Nach dieser Auffassung sollte es die Aufgabe der mathematischen Geschichtsschreibung sein, die folgende Frage zu beantworten: „Was bedeutet und was hat zu den verschiedenen Zeiten die Mathematik für die Kultur bedeutet?“. Zieht man hier zuerst in Betracht die materielle Kultur, so scheint es, als ob es eigentlich nur nötig wäre, die Entwickelung und den gegenwärtigen Stand der technischen Mathematik zu schildern, um die Frage genügend zu beantworten. Geht man. dann zu der geistigen Kultur über, so wäre es wohl zwecklos, die ganze mathematische Literatur durchzuforschen, um ausfindig zu machen, was die Mathematik für diese Kultur bedeutet hat, denn es scheint mir offenbar, daß viele mathematische Ideen keinen merkbaren Einfluß

[32] Wenn J. Tropfke in seinem Artikel *Mathematik* (`Jahresber. über das höhere Schulwesen` **20**, 1905, S. 13 des Sonderabzuges) sagt: „Der letztere [Eneström] zielt darauf hin, daß dem produktiven Mathematiker das historische Material immer schön gesichtet zur Hand liegt“, so schreibt er mir eine Ansicht zu, die ich nur zum Teil billigen kann. Meines Erachtens ist es von großem Belang, daß das historische Material schön gesichtet zur Hand liegt, aber nicht nur um von den produktiven Mathematikern benutzt zu werden. Noch weniger kann ich die Ausführungen des Herrn Tropfke gutheißen, wenn er zuerst M. Cantor und mich als Vertreter zwei verschiedener Arten der mathematischen Geschichtsschreibung nennt, und dann hinzufügt: „Cantor ... legt Wert auf die Herausarbeitung des eigentlichen Ideengehaltes“, woraus man folgern muß, daß ich nur geringen Wert darauf lege. Im Gegenteil lege ich das größte Gewicht gerade auf die Entwickelung der mathematischen Ideen. Herr Tropfke beruft sich freilich auf den oben (S. 9, Anm. 8) zitierten Artikel von C. H. Müller, scheint aber ein paar darin vorkommende Bemerkungen mißverstanden zu haben.

[33] Diese Definition entnehme ich dem Artikel von M. Cantor: *Wie soll man die Geschichte der Mathematik behandeln?* (`Biblioth. Mathem.` **4**$_3$, 1903, S. 115; digital `http://www.ub.uni-heidelberg.de/archiv/13419`.

[34] Siehe S. 53 der S. 6, Anm. 6 zitierten Abhandlung von C. H. Müller; da Herr Müller hervorhebt, daß er Herrn F. Klein eine große Reihe von Gesichtspunkten und Auffassungen verdankt, so kann ich nicht entscheiden, ob diese Auffassung von C. H. Müller selbst oder von F. Klein herrührt.

auf dieselbe gehabt haben können. Oder darf man wirklich behaupten, daß z. B. das Fundamentaltheorem der Algebra und die verschiedenen Beweise desselben eine nachweisliche Bedeutung für die Kultur haben? Jedenfalls ist die fragliche Auffassung der Geschichte der Mathematik wesentlich von der diesem Artikel zugrunde liegenden verschieden[35], und von der Seite der Vertreter jener Auffassung ist kaum eine Teilnahme an einer planmäßigen mathematisch-historischen Arbeit auf die von mir angegebene Weise zu erwarten.

Zuletzt fasse ich den wesentlichen Inhalt dieses Artikels in folgende Punkte zusammen:

1. Eine planmäßige mathematisch-historische Arbeit muß in erster Linie darauf hinzielen, die großen noch vorhandenen Lücken auf dem literarischen Gebiete auszufüllen; an dieser Arbeit ist die Teilnahme der Literar- und Kulturhistoriker sehr willkommen, die der Philologen sogar notwendig.

2. Gleichzeitig mit dieser Arbeit sollen die Historiker der Mathematik, sofern das schon
(12) herbeigeschaffte Material nicht zu unvollständig ist, die Geschichte der einzelnen mathematischen Ideen vorzugsweise bis gegen das Ende des 18, Jahrhundert bearbeiten und wenn irgend möglich die produktiven Mathematiker anregen, bei der Behandlung der Geschichte der folgenden Zeit behilflich zu sein.

3. Bei den literarischen Untersuchungen soll, so weit möglich, darauf Bezug genommen werden, daß das Material, das zugänglich gemacht wird, in letzter Linie für eine Entwickelungsgeschichte der Mathematik benutzt werden wird.

[35] Meiner Ansicht nach kann man von einem gewissen Standpunkt sehr gut sagen, daß es die Aufgabe der Geschichte des *mathematischen Unterrichts* in letzter Linie ist, die Frage zu beantworten: „Was hat zu verschiedenen Zeiten der mathematische Unterricht für die Kultur bedeutet?“. Dagegen ist es mir noch nicht recht verständlich, wie man die Geschichte der *Mathematik* behandeln soll, wenn man für dieselbe eine entsprechende Definition aufstellt.

Band 9

Über kritische Behandlung der Geschichte der Mathematik.

Zusammenfassung:
Dieser Artikel wendet sich scharf gegen die bisher allzu oft vorkommende dilettantenmäßige Behandlung der Geschichte der Mathematik, deren Vorhandensein durch Belege aus den neuesten Arbeiten auf diesem Gebiete nachgewiesen wird. Als Kennzeichen dieser Behandlungsart hebt der Verf. hervor teils ungenügende Kenntnis der vorhandenen mathematisch-historischen Literatur, teils unkritische Bearbeitung des benutzten Materials, und den Grund, warum die Behandlungsart so oft vorkommt, findet er darin, daß die meisten Bearbeiter der Geschichte der Mathematik keine wirkliche Schulung bekommen haben. Darum enthalten die bisher erschienenen Gesamtdarstellungen der Geschichte der Mathematik eine außerordentlich große Zahl von unrichtigen, unzuverlässigen oder irreleitenden Angaben, und die Verbesserung dieser Angaben stellt der Verf. als eine sehr wichtige Aufgabe der mathematisch-historischen Forschung auf. Eine andere ebenso wichtige Aufgabe dieser Forschung soll sein, die Vermehrung der schon vorhandenen unrichtigen Angaben zu verhindern, und für diesen Zweck wird empfohlen, durch eingehende Kritik der dilettantenmäßigen Darstellungen die Aufmerksamkeit der Fachgenossen auf den Wert der mathematisch-historischen Schulung zu lenken. Zum Schluß befürwortet der Verf. dringend, mathematisch-historische Arbeiten, die ganz besonders eine solche Schulung erfordern, z. B. Gesamtdarstellungen der Geschichte der Mathematik, nur unter Mitwirkung der eigentlichen Fachmänner erscheinen zu lassen. Andererseits betont der Verf. ausdrücklich, daß spezielle Untersuchungen, die in erster Linie bezwecken, neues Material zu bringen, in vielen Fällen von andern Mitarbeitern ohne Ungelegenheit ausgeführt werden können.

Quelle: JFM 39.1908, S. 51

In meinem vorangehenden Leitartikel[1] habe ich ausführlich dargelegt, wie umfassend die Gebiete der mathematisch-historischen Forschung sind, die bisher unvollständig untersucht worden sind, und mehr im Vorübergehen lenkte ich die Aufmerksamkeit auf den Wert einer kritischen Behandlung des Materials. Jetzt werde ich diese letztere Frage eingehend in Betracht ziehen und dabei zuerst untersuchen, ob das schon herbeigeschaffte und bearbeitete mathematisch-historische Material derart ist, daß eine besondere kritische Nachbehandlung desselben angebracht sein kann. Für diesen Zweck ist es nötig zu wissen, ob die unrichtigen Angaben die in den neuesten Darstellungen der Geschichte der Mathematik vorkommen, zahlreich sind und auf welche Weise sie entstanden. (1)

Daß auch der sachkundige und kritische Forscher zuweilen zu Resultaten gelangen wird,

[1] G. Eneström, *Über planmäßige Arbeit auf dem mathematisch-historischen Forschungsgebiete; Biblioth. Mathem.* $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 1–12.

die durch spätere Untersuchungen modifiziert werden müssen, liegt in der Natur der Sache, denn der Forscher ist offenbar bis zu einem gewissen Grade von den zugänglichen Quellenschriften abhängig. Indessen gibt es in den bisherigen Darstellungen der Geschichte der Mathematik eine höchst bedeutende Zahl von unrichtigen Angaben oder Urteilen, die nicht von dem soeben angedeuteten Umstande bedingt sind, sondern auf unzureichender Sachkunde oder Kritik beruhen. Sehr gewöhnlich ist es, daß Angaben, die in älteren Arbeiten vorkommen, ohne jede Prüfung als richtig angesehen werden, und auf diese Weise werden noch heute viele nachweisliche Unrichtigkeiten weiter verbreitet. Ein Universalmittel, um die Fehler, die von älteren unrichtigen Angaben herrühren zu vermeiden, gibt es natürlich nicht, sofern man sich nicht auf Geschichtsschreibung im BONCOMPAGNIschen
(2) Stil[2] beschränkt, aber ein wirksames Mittel für diesen Zweck ist jedenfalls eine eingehende Berücksichtigung der „Literatur der Frage“. Diese Literatur vollständig auszunützen, ist oft sehr schwierig, zuweilen sogar unmöglich, und auch der gewissenhafteste Forscher kann die Gefahr laufen, gewisse frühere Untersuchungen zu übersehen. Auf der anderen Seite gibt es Arbeiten, die jeder Fachgenosse kennen und benutzen *sollte*, wenn er auf seinem Gebiete literarisch tätig sein will. Hierzu rechne ich in erster Linie die neuesten zusammenfassenden Darstellungen der Geschichte der Mathematik, die auf wirklichen Quellenstudien gegründet sind, sowie wenigstens die letzten Jahrgänge der mathematisch-historischen Fachzeitschriften.[3] Selbstverständlich enthalten auch die älteren Jahrgänge wertvolle Artikel, aber es ist klar, daß viele Artikel derselben solche Angaben bringen, die auf Grund neuerer Untersuchungen veraltet sind, und daß die wirklich wertvollen Resultate älteren Datums schon in den neuesten Gesamtdarstellungen der Geschichte der Mathematik mehr oder weniger vollständig verwertet sind, was in betreff der letzten Jahrgänge im allgemeinen nicht der Fall ist. Leider kommt es noch allzu oft vor, daß sich mathematisch-historische Verfasser nicht einmal der Mühe unterziehen, die neuesten Jahrgänge der Fachzeitschriften auszunützen und darum die älteren unrichtigen oder wenigstens unzuverlässigen Angaben unnötigerweise wiederholen. Zahlreiche Belege für diese meine Behauptung finden sich z. B. in der letzten Auflage der CANTORschen Vorlesungen; hier will ich ein einziges Beispiel erwähnen, das meines Erachtens aus mehr als einem Gesichtspunkte lehrreich ist.

Im Jahre 1857 veröffentlichte B. BONCOMPAGNI[4] nach einer Pariser Handschrift[5] eine Algorismusschrift unter dem Titel IOANNIS HISPALENSIS *Liber algorismi de pratica arismetrice.* In der Tat beginnt die von BONCOMPAGNI benutzte Handschrift mit den Worten „Incipit prologus in libro alghoarismi de pratica arismetrice. Qui editus est a magistro IOHANNE YSPALENSI“ und unter
(3) Bezugnahme hierauf legte Herr CANTOR diese Schrift sowohl in seinen *Beiträgen zum Kulturleben der Völker*[6] als in der ersten Auflage seiner *Vorlesungen*[7] ohne weiteres dem JOHANNES HISPA-

[2]Siehe G. ENESTRÖM, a. a. O. S. 8.

[3]Da Herr CANTOR in seinem Einleitungsvortrag in Heidelberg 1904 (***Verhandlungen des Mathematikerkongresses in Heidelberg*** 1904, Leipzig 1906, S. 600) unter den existierenden mathematisch-historischen Zeitschriften zuerst das *Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche*, und dann die *Bibliotheca Mathematica* erwähnt, so erlaube ich mir zu bemerken, daß das *Bollettino* des Herrn LORIA in erster Linie eine mathematische Literaturzeitung ist, was schon aus dem Titel hervorgeht; „bibliografia“ bedeutet nämlich hier nicht „Bibliographie“, sondern „Rezensionen“, und beispielsweise enthält der Jahrgang 1904 nur zwei mathematisch-historische Abhandlungen, die zusammen 13 Druckseiten betragen. Aus welchem Grunde Herr CANTOR in erster Linie das ***Bollettino*** aufführte, ist mir nicht bekannt, jedenfalls ist die Ordnungsfolge weder alphabetisch noch chronologisch.

[4]B. BONCOMPAGNI, *Trattati d'aritmetica* **2**, Rom 1867, S. 25–136.

[5]Bibl. nat. anc fonds No. 7359.

[6]M. CANTOR, *Mathematische Beiträge zum Kulturleben der Völker*, Halle 1863, S. 273.

[7]M. CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* **1**, Leipzig 1880, S. 685.

LENSIS bei. Indessen machten WAPPLER[8] und STEINSCHNEIDER[9] einige Jahre vor dem Erscheinen der zweiten Auflage der *Vorlesungen* darauf aufmerksam, daß es eine andere Handschrift gibt, wo der Traktat dem GHERARDO CREMONESE zugeschrieben wird, und schon hieraus geht hervor, daß nunmehr JOHANNES HISPALENSIS nicht ohne weiteres als Übersetzer oder Bearbeiter des Traktates bezeichnet werden darf. Darum veröffentlichte ich vor einigen Jahren in der ***Bibliotheca Mathematica*** eine Anfrage[10], worin ich besonders hervorhob, daß die Verfasserfrage bisher gar nicht erledigt worden sei. Nichtsdestoweniger hat Herr CANTOR noch in der ***dritten*** Auflage seiner *Vorlesungen*[11] ohne weiteres die Angaben der ersten Auflage wiederholt. Daß er selbst die Frage einer näheren Prüfung unterworfen und dabei seine Angabe bestätigt gefunden habe, halte ich für durchaus unwahrscheinlich und zwar aus folgenden Gründen.

In der mathematisch-historischen Literatur sind meines Wissens bisher folgende Handschriften des Traktates erwähnt worden:

A. Ms. Paris, bibl. nat. 16202 [= Sorb. 972], Bl, 50–81, wahrscheinlich ans dem Anfange des 13. Jahrhunderts[12];

B. Ms. Paris, bibl. nat. 15461 [= Sorb. 981], Bl. l–14, wahrscheinlich aus der zweiten Hälfte des 13. Jahrhunderts[13];

C. Ms. Paris, bibl. Mazarin. 3642 [früher 1258], Bl. 105–117, wahrscheinlich aus dem 13. Jahrhundert[14];

D. Ms. Paris, bibl. nat. 7359 Bl. 85–111, wahrscheinlich etwa 1300 geschrieben[15];

E. Ms. Erfurt. Amplon. Qu. 355, Bl. 85–115, aus dem 14, Jahrhundert[16];

F. Ms. Dresden C, 80, Bl. 129–134, aus dem 15. Jahrhundert.[17]

Hierzu kommt noch eine Handschrift, die höchstwahrscheinlich eine Abschrift des Traktates ist, obgleich dieselbe den Titel: „Introductorius liber qui et pulveris dicitur in mathematicam disciplinam" hat und mit einem kurzen Anhang über römische Bruchrechnung versehen ist, nämlich

G. Ms. bibl. Vatic. reg. Suec. 1285, Bl. 14–20, aus der zweiten Hälfte des 14. Jahrhunderts.[18]

Von diesen Handschriften sind *A, F* und *G* anonym; in der Handschrift *B* wird der Traktat als „editus a magistro IOHE" und in der Handschrift *C* ebenfalls als „editus a magistro JOHANNE" bezeichnet, ohne daß angegeben wird, welcher JOHANNES gemeint ist; da beide Handschriften aus dem 13. Jahrhundert herzurühren scheinen, könnte man sehr wohl an JOHANNES DE SACROBOSCO (4)
denken, und der Umstand, daß im Inhaltsverzeichnisse der Handschrift *B* eine neuere Hand JOHANNES HISPALENSIS als Verfasser angibt, bedeutet natürlich gar nichts. Nimmt man jetzt hinzu, daß die einzige Handschrift, wo der Traktat dem JOHANNES HISPALENSIS beigelegt wird, mehr als 100 Jahre nach dessen Tode geschrieben ist, so muß wohl klar sein, daß die Angabe der 3. Auflage der CANTORschen *Vorlesungen* als unzuverlässig betrachtet werden muß.

Nun könnte es scheinen, als ob diese Unzuverlässigkeit eigentlich recht belanglos wäre, so daß es genügte, überall wo Herr CANTOR „die Schrift des JOHANNES HISPALENSIS" oder etwas Ähnliches

[8]E. WAPPLER, *Beitrag zur Geschichte der Mathematik*; ***Abhandl. zur Gesch. d. Mathem.*** **5**, 1890, S. 168–159.

[9]M. STEINSCHNEIDER, *Über die mathematischen Handschriften der amplonianischen Sammlung*; ***Biblioth. Mathem.*** 1891, S. 47.

[10]Siehe ***Biblioth. Mathem.*** $\mathbf{6}_3$, 1906, S. 114.

[11]M. CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* $\mathbf{1}^3$, Leipzig 1907, S. 800.

[12]Vgl. G. LIBRI, *Histoire des sciences mathématiques en Italie* **2**, Paris 1838, S. 300.

[13]Vgl. LIBRI, a. a. O. S. 300.

[14]Vgl. M. CHASLES, ***Comptes rendus de l'acad. d. sc.*** [de Paris] **13**, 1841, S. 523.

[15]Vgl. G. ENESTRÖM, ***Biblioth. Mathem.*** $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 186.

[16]11) Vgl. STEINSCHNEIDER, a. a. O. S. 47.

[17]12) Vgl. WAPPLER a. a. O. S. 158.

[18]Vgl. ENESTRÖM, ***Biblioth. Mathem.*** $\mathbf{5}_3$, 1904, S.410–411.

sagt, den Ausdruck „die Schrift, die in einer Handschrift dem Johannes Hispalensis zugeschrieben wird“ einzusetzen. Aber in Wirklichkeit ist die Sache gar nicht so einfach, denn der Traktat *De pratica arismetrice* wird von Herrn Cantor im Kapitel über die Mathematik der Westaraber erwähnt, offenbar nur aus dem Grunde, weil der angebliche Übersetzer[19] desselben in Spanien lebte, und wenn man in Betracht zieht, teils daß keine Handschrift des Traktats aus der Zeit vor 1200 bekannt ist, teils daß man keine zuverlässige Angabe in betreff des Bearbeiters des Traktates besitzt, so dürfte hieraus folgen, daß die Schrift erst im zweiten Bande der *Vorlesungen* behandelt werden sollte; die Verfasserfrage hat also in diesem Falle einen wesentlichen Einfluß auf die Darstellung.

Aber abgesehen von der Frage, ob die Algorismusschrift, die den Titel *Liber algorismi de pratica arismetrice* hat, wirklich dem Johannes Hispalensis beizulegen sei, gibt es noch einen Punkt, in dem die Cantorsche Darstellung unzuverlässig ist. Herr Cantor nimmt nämlich ohne weiteres an, daß alles, was Boncompagni im zweiten Hefte der *Trattati d'aritmetica* veröffentlichte, dem Traktate angehört, aber Wappler[20] und Steinschneider[21] haben darauf hingewiesen, daß die von ihnen erwähnte Handschrift nicht dies alles enthält. Bemerkt man jetzt, daß der eigentliche Algorismus schon auf S. 93 der Boncompagnischen Ausgabe endet und dann mit der Überschrift: „Hic incipiunt regule“ eine Sammlung von Sätzen aus Arithmetik, Proportionslehre und Algebra beginnt, die mit dem vorangehenden Algorismus nichts zu tun hat, so wird man veranlaßt anzunehmen, daß die Boncompagnische Ausgabe zwei verschiedene Arbeiten enthält, von denen nur die erste ***möglicherweise*** dem Johannes Hispalensis beigelegt werden könnte, während die andere Arbeit (oder richtiger Sammlung von Excerpten) auch in der von Boncompagni benutzten Handschrift anonym ist. Auf diesen Umstand habe ich ebenfalls in meiner oben zitierten Anfrage aufmerksam gemacht, aber dennoch weist Herr Cantor in der 3. Auflage seiner *Vorlesungen* genau wie früher den ganzen Inhalt des zweiten Heftes der *Trattati d'aritmetica* dem Johannes Hispalensis zu. Gewisse Ausführungen des Herrn Cantor im Kapitel über die Mathematik der Westaraber müssen darum meines Erachtens als sehr unzuverlässig bezeichnet werden und durchaus unrichtig ist es sogar, den Namen des Johannes Hispalensis mit dem neunzelligen magischen Quadrat in Verbindung zu setzen, da sich dies Quadrat, soweit bekannt ist, nur in einer einzigen Handschrift, nämlich der von Boncompagni benutzten, findet.[22]

(5) Wenn es also dringend zu empfehlen ist, die vorhandene mathematisch-historische Literatur gebührend zu beachten, um Wiederholen von unrichtigen Angaben zu vermeiden, so ist ein solches Beachten nicht weniger empfehlenswert, um die Zahl der unrichtigen Angaben nicht zu vermehren. Eigentlich könnte man wohl mit Recht fordern, daß ein mathematisch-historischer Verfasser, der einen gewissen Gegenstand seiner Wissenschaft behandeln will, außer den schon angedeuteten Gesamtdarstellungen und Zeitschriftenbänden wenigstens die wichtigsten schon vorhandenen Spezialarbeiten über diesen Gegenstand kennt und benutzt. Daß aber dieser Forderung noch allzu wenig Genüge geleistet wird, zeigen uns deutlich gewisse neuere mathematisch-historische Werke, von deren Verfassern man eigentlich eine genaue Beachtung der „Literatur der Frage“ erwartet hätte; ich beschränke mich hier darauf, zwei Beispiele zu erwähnen.

In seiner kürzlich erschienenen *Geschichte der Mathematik* widmet Herr S. Günther etwas

[19] Daß der Traktat kaum als eine eigentliche Übersetzung betrachtet werden kann, geht schon aus den Anfangsworten: „Qviquis in ***quatuor matheseos disciplinis*** efficacius uult perficere“ hervor, und wird noch, durch den Ausdruck: „Cuius rei scientia ... ad totam ***quadruui disciplinam*** ualde est necesaaria“ (siehe die Ausgabe von Boncompagni S. 72) bestätigt.

[20] E. Wappler, a. a. O. S. 158–159.

[21] M. Steinschneider, a. a. O. S. 47.

[22] Siehe G. Eneström, ***Biblioth. Mathem,*** $\mathbf{8}_3$ 1907/8, S. 186.

mehr als eine Druckseite[23] dem *Tesoro universale*[24] des TAGLIENTE, und motiviert sein Verfahren damit, daß von dem „inhaltreichen Sedezbüchlein noch recht wenig in der Literatur die Rede war, so daß ein Verweilen bei demselben gebilligt werden dürfte“. Nun gibt es seit Jahrzehnten eine sehr verdienstvolle Arbeit, die jedermann, der über ältere italienische mathematische Bücher schreiben will, kennen und benutzen `sollte`, nämlich RICCARDIS *Biblioteca matematica italiana*, und zieht man diese Arbeit zu Rate, so ergibt sich, daß RICCARDI[25] auf 7 Spalten teils 27 verschiedene Auflagen des Rechenbuches von TAGLIENTE genau beschreibt, teils zum Schluß ein kurzes aber gutes Résumé des wesentlichen Inhalts des Buches bringt. Überdies verweist RICCARDI wiederholt auf eine ausführliche Abhandlung von BONCOMPAGNI, und wenn man diese Abhandlung einsieht, so findet man, daß die Behandlung des Rechenbuches von TAGLIENTE darin nicht weniger als 165 Druckseiten in großem Quartformat in Anspruch nimmt[26], also einen Raum, der der Hälfte der ganzen *Geschichte der Mathematik* des Herrn GÜNTHER entspricht! Die Angabe, daß von dem fraglichen Rechenbuche noch recht wenig in der Literatur die Eede war, ist also durchaus unrichtig, und wenn sich Herr GÜNTHER die Mühe gegeben hätte, wenigstens die Arbeit von RICCARDI einzusehen, so würde er noch eine unrichtige und eine unsichere Angabe vermieden haben können. Die unrichtige Angabe ist, daß die von Herrn GÜNTHER benutzte Auflage vom Buchdrucker ANTONIO DE UBERTI in Venedig herrührt. Die Worte; „Opus LUCHA ANTONIO DE UBERTI fē in vinetia“, die am Ende vieler (oder vielleicht aller?) Auflagen vorkommen, beziehen sich nämlich nicht auf den Druck, sondern auf eine Multiplikationstafel und der fragliche UBERTI ist identisch mit dem von Herrn GÜNTHER S. 344 erwähnten Arithmetiker, dessen angebliches Rechenbuch von 1548 in Wirklichkeit nur eine Auflage (die siebente bei RICCARDI) des Rechenbuches von TAGLIENTE ist. Die unsichere Angabe ist, daß die von Herrn GÜNTHER benutzte Auflage ein Inkunabel ist; die älteste datierte Ausgabe ist vom Jahre 1515 und weder BONCOMPAGNI noch RICCARDI hat mit (6)
Sicherheit ermitteln können, daß irgendeine der undatierten Ausgaben älter als 1515 sei; im Gegenteil erwähnt GIROLAMO TAGLIENTE im Vorworte der ersten datierten Auflage von 1515, daß er „in verde e iuuenil etade“ sei, und es ist wahrscheinlich, daß TAGLIENTE noch 1515 sehr jung war. Ich gebe gern zu, daß die hier bemerkten Unrichtigkeiten nicht von besonders großem Belang sind, denn in der GÜNTHERschen Arbeit könnte man ohne Schaden den ganzen Passus über TAGLIENTE streichen, aber das ganze Verfahren ist unwissenschaftlich und darum unangebracht.

Das zweite Beispiel entnehme ich aus den CANTORschen *Vorlesungen.*

Noch in der zweiten Auflage, ganz wie in der ersten, kommt im 61. Kapitel des zweiten Bandes folgender Passus vor[27]:

> Die sechste, siebente und achte [Aufgabe am Schlusse der RUDOLFFschen Algebra] sind kubische Gleichungen, welche aufgelöst werden, nämlich $x^2(10-x) = 68$ mit $x = 3$, ferner $\dfrac{x^3 - x^2}{2} = 605$ mit $x = 11$, endlich $x^3 = 10x^2 + 20x + 48$ mit $x = 12$. Aber wie findet RUDOLFF diese Wurzelwerte? Durch fein ausgeklügelte, in jedem dieser Einzelfälle gerade zutreffende Kunststückchen. Die letzte Gleichung z.B. behandelt er folgendermaßen. Zuerst addiert er 8 auf beiden Seiten, dann dividiert er durch $x+2$, erhält also der Reihe nach $x^3 + 8 = 10x^2 + 20x + 56$ und $x^2 - 2x + 4 = 10x + \frac{56}{x+2}$.

[23] S. GÜNTHER, *Geschichte der Mathematik* **1**. *Von den ältesten Zeiten bis Cartesius*, Leipzig 1908, S. 318–319.

[24] Der Haupttitel des Buches ist *Libro de abacho.*

[25] P. RICCARDI, *Biblioteca matematica italiana* **1**:2, Modena 1873–1876, Sp. 482–489.

[26] B. BONCOMPAGNI , *Intorno ad un trattato d'aritmetica stampato nel 1478;* `Atti dell'accad. pontif. de'Nuovi Lincei` **16**, 1863, S. 139–304.

[27] M. CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* $\mathbf{2}^1$, Leipzig 1892, S. 391; $\mathbf{2}^2$, Leipzig 1900, S. 426–427.

> Aus dieser letzteren Gleichung bildet er zwei $x^2 - 2x = 10x$ und $4 = \frac{56}{x+2}$, welchen beiden $x = 12$ genügt. Das ganz Zufällige dieser Auflösung leuchtet ein. In der vorgelegten Gleichung stimmt die Zerlegung, in anderen würde sie Widersprechendes zutage fördern. RUDOLFF ... tastete nach allerlei Kunstgriffen, welche diese Wurzelwerte ihn finden ließen, aber daß er auch nur auf dem Wege zu einem methodischen Auflösungsverfahren gewesen sei, kann man nicht behaupten.

Hier wird also dem RUDOLFF eine bestimmte Behandlungsweise der Gleichung $x^3 = 10x^2+20x+48$ beigelegt, und daraus werden gewisse Folgerungen gezogen. Nun gibt es in betreff der deutschen Algebra im 16. Jahrhundert eine Arbeit von TREUTLEIN, die auf eingehendem Quellenstudium gegründet ist, und sehr zuverlässige Notizen über denselben Gegenstand bringt GERHARDTS *Geschichte der Mathematik in Deutschland.* Zieht man diese zwei Arbeiten zu Rate, so findet man:

1. daß TREUTLEIN[28] die zwei Aufgaben, die auf die Gleichungen $x^2(10-x) = 68$ und $\dfrac{x^3 - x^2}{2} = 605$ führen, erwähnt und dann hinzufügt: „RUDOLFF fügt freilich ihre Lösungen ($x = 8$ und $x = 11$) bei, kennt aber natürlich kein allgemeines Verfahren zu deren Auffindung“;
2. daß GERHARDT[29] ebenfalls diese zwei Aufgaben erwähnt mit der Bemerkung: „RUDOLFF fügt auch die Wurzeln hinzu, ohne sich jedoch über den Weg der Lösung auszusprechen“.

Weder TREUTLEIN noch GERHARDT spricht also von der Gleichung $x^3 = 10x^2 + 20x + 48$ und aus GERHARDTS Bemerkung geht hervor, daß bei RUDOLFF überhaupt keine „fein ausgeklügel-
(7) ten Kunststückchen“ vorkommen. In der Tat bezieht sich der CANTORsche Bericht nicht auf die Originalausgabe der RUDOLFFschen Algebra, sondern auf die von Herrn CANTOR benutzte, 29 Jahre später erschienene und wesentlich ergänzte Neuansgabe von STIFEL, und überdies führt die 8. Aufgabe bei RUDOLFF-STIFEL nicht auf die Gleichung $x^3 = 10x^2 + 20x + 48$ (diese Gleichung ist ein Zusatz von STIFEL bei der Behandlung der ***siebenten*** Aufgabe), sondern auf die Gleichung $x^3 + 75x^2 + 1875x + 15\,625 = 42\,875$, die sofort auf $(x+25)^3 = 42\,875$ reduziert werden kann. Durch ungenügende Berücksichtigung der Arbeiten von TREUTLEIN und GERHARDT hat Herr CANTOR also unnötigerweise unrichtige Angaben gebracht. Es ist wahr, daß das CANTORsche Referat wesentlich verbessert werden kann, wenn man nur STIFEL statt RUDOLFF einsetzt, aber als STIFEL die neue Ausgabe von RUDOLFFS Algebra redigierte, kannte er schon die ***allgemeine*** Lösung der kubischen Gleichungen, so daß das Referat ohne Interesse ist. Jedenfalls werden die ***Folgerungen*** hinfällig, die daraus gezogen worden sind.

Außer den unrichtigen Angaben, die hauptsächlich auf ungenügender Literaturkenntnis beruhen, gibt es in den neuesten mathematisch-historischen Arbeiten noch eine sehr große Anzahl, die von Mißverständnissen verschiedener Art herrühren. Zuweilen liegt es so nahe, eine ältere Angabe zu mißverstehen, daß es kaum vermieden werden kann, z. B. wenn ein mathematisch-historischer Verfasser bemerkt, daß bei BERNELINUS „das Einmaleins“ mit Ausnahme der Produkte gleicher Faktoren vorkommt[30] und ein anderer diese Bemerkung dahin deutet, daß bei BERNELINUS die Diagonalreihe frei gelassen ist[31]; hier ist es ja fast unmöglich zu erraten, daß „das Einmaleins“ nicht das gewöhnliche Einmaleins, sondern eine Sammlung von 36 besonderen Multiplikationsregeln bedeutet.[32] Zuweilen wird eine Stelle einer Quellenschrift ungenau wiedergegeben oder übersetzt oder unrichtig gedeutet. Viele unrichtige oder wenigstens unzuverlässige Angaben sind dadurch entstanden, daß

---

[28] P. TREUTLEIN, *Die deutsche Coss*; **Abhandl. zur Gesch. d. Mathem.** **2**, 1879, S. 88.
[29] C. I. GERHARDT, *Geschichte der Mathematik in Deutschland,* München 1877, S. 59.
[30] Siehe M. CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* $\mathbf{1}^3$, S. 881.
[31] Siehe J. TROPFKE, *Geschichte der. Elementarmathematik* **1**, Leipzig 1902, S. 69.
[32] Siehe G. ENESTRÖM, ***Biblioth, Mathem.*** $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 415.

man aus einer allgemeinen Hypothese, die nur in einem sehr beschränkten Sinne richtig sein kann, weitgehende Folgerungen gezogen hat.[33] In den meisten der erwähnten Fälle beruhen die Fehler in erster Linie auf unkritischer Behandlung des benutzten Materials. Natürlich stößt man zuweilen auch auf reine Flüchtigkeit-, Schreib- oder Druckfehler.

Daß die im vorhergehenden erwähnten unrichtigen, unzuverlässigen oder irreleitenden Angaben älteren und neueren Datums früher oder später berichtigt werden müssen, kann wohl kaum in Abrede gestellt werden, denn für eine historische Wissenschaft ist es gewiß nicht gleichgültig, ob in den neuesten Darstellungen Hunderte von Fehlern vorkommen.
Dagegen könnte es zweifelhaft sein, ob es angebracht sei, schon jetzt besondere Arbeit (8)
für den fraglichen Zweck aufzuwenden. Solange nämlich große Gebiete der Geschichte der Mathematik höchst unvollständig bearbeitet sind, könnte man meinen, daß es besser wäre, wenn die Fachgenossen in erster Linie diese Gebiete behandelten und sieh vorläufig auf Verbesserung der wichtigsten Unrichtigkeiten beschränkten. Die übrigen Fehler könnten ja gelegentlich berichtigt werden im Zusammenhang mit Neubearbeitungen der betreffenden Gegenstände.

Dieser Ansicht kann ich indessen nicht beipflichten. Zuerst ist es oft recht schwierig zu ermitteln, welche Fehler weniger wichtig sind, denn aus anscheinend unwesentlichen Angaben können zuweilen wichtige Folgerungen gezogen werden, und wenn die Angaben zum Teil unrichtig sind, so werden auch die Folgerungen davon beeinflußt. Aber ausschlaggebend für meine Auffassung ist der Umstand, daß die zahlreichen, in gewissen der neuesten Darstellungen vorkommenden, Ungenauigkeiten mit einer bisher allzu gewöhnlichen unwissenschaftlichen Behandlung der Geschichte der Mathematik zusammenhängen. Welche diese Behandlungsweise ist, dürfte aus dem Vorhergehenden klar sein: sie wird durch ungenügende Berücksichtigung der vorhandenen mathematisch-historischen Untersuchungen und unkritische Bearbeitung des benutzten Materials gekennzeichnet, und sie ist dadurch veranlaßt worden, daß die älteren Verfasser auf mathematisch-historischem Gebiete keine wirkliche Schulung hatten, sondern mehr oder weniger dilettantenmäßig arbeiteten. Solange nun Darstellungen dieser Art neu herausgegeben und fast überall wesentlich lobend erwähnt werden, ist es zu fürchten, daß jüngere Verfasser auf dem mathematisch-historischen Gebiete sich derselben unwissenschaftlichen aber bequemen Arbeitsmethode bedienen werden. Denken wir uns z. B., daß ein ordentlicher Professor an einer größeren deutschen Universität kürzlich eine Darstellung der höheren Analysis veröffentlicht hätte, in der er unter Berufung auf die *Lectiones mathematicae* des Johann Bernoulli die Formel $\int x^m dx = \dfrac{x^{m+1}}{m+1}$ auch für den Fall $m = -1$ benutzte und also das unbestimmte Integral $\int \frac{dx}{x}$ gleich ∞ setzte, so ist es wohl fast sicher, daß einige seiner Schüler, die nur seine Arbeit eingehend studiert hatten, dadurch veranlaßt sein würden, dasselbe Verfahren anzuwenden und die Richtigkeit der Formel $\int \frac{dx}{x} = \log x$ anderer Verfasser zu bezweifeln; unter solchen Umständen wäre ja die Hervorhebung der Unrichtigkeit des Satzes $\int \frac{dx}{x} = \infty$ fast als eine Pflicht zu betrachten. Nun ist freilich die von mir gemachte Voraussetzung so undenkbar, daß sie
geradezu lächerlich erscheinen muß, aber in betreff der Geschichte der Mathematik findet (9)
wirklich etwas Ähnliches statt[34], und solange man nicht kräftige Maßregeln ergreift, um für die Zukunft die Veröffentlichung von Darstellungen der Geschichte der Mathematik zu

[33] Siehe hierüber G. Eneström, *Über die Bedeutung historischer Hypothesen für die mathematische Geschichtsschreibung;* `Biblioth. Mathem.` $\mathbf{6}_3$, 1906; S. 1–8.

[34] Vgl. meine Besprechung der 3.Auflage des **1.** Bandes der Cantorschen *Vorlesungen* in der `Biblioth. Mathem.` $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 398-400

vermeiden, die rein elementare Fehler enthalten, kann man nicht hoffen, daß die ältere unwissenschaftliche mathematisch-historische Arbeitsmethode bald in Fortfall kommt und die Folgen derselben beseitigt werden. Wie es jetzt ist, kann die Mühe, die junge Fachgenossen bei ihren mathematisch-historischen Untersuchungen aufwenden, in gewissen Fällen nicht nur unnütz, sondern sogar für die mathematisch-historische Forschung schädlich werden.

Aber die unwissenschaftliche Behandlung der Geschichte der Mathematik, von der ich schon gesprochen habe, führt mit sich auch einen anderen Übelstand. Wenn nämlich Mathematiker, die nicht zugleich Historiker sind, ersehen, daß auch sehr gelobte mathematisch-historische Arbeiten eine große Zahl von unzuverlässigen Angaben und unkritischen Behauptungen enthalten, so bekommen sie leicht die Ansicht, daß die Geschichte der Mathematik als wirkliche Wissenschaft noch nicht existiere, und daß eigentlich keine besondere Sachkunde oder Schulung nötig sei, um eine mathematisch-historische Arbeit zu verfertigen. Haben sie dann irgendeinen Anlaß, historische Artikel über gewisse mathematische Gegenstände zu wünschen, so kann es leicht eintreffen, daß sie sich für diesen Zweck an Personen wenden, denen gewisse sehr wichtige Voraussetzungen für wirklich wissenschaftliche Forschung auf dem mathematisch-historischen Gebiete durchaus fehlen. Auf diese Weise kann eine angeblich mathematisch-historische Arbeit verfertigt und zum Druck befördert werden, wodurch die schon vorhandene Zahl von unrichtigen Angaben sehr vergrößert wird und die alten Unrichtigkeiten weiter verbreitet werden. Wir brauchen nicht weit zu gehen, um ein Beispiel einer Arbeit dieser Art zu bekommen.

Im Jahre 1906 erschien als 1. Ergänzungsband des ***Jahresberichts der deutschen Mathematiker-Vereinigung*** ein Bericht *Über die Entwicklung der Elementar-Geometrie im XIX. Jahrhundert* von Herrn Max Simon. Mit Recht hat Herr Felix Müller hervorgehoben[35], daß die Aufgabe, die Entwickelung der Elementargeometrie im 19. Jahrhundert darzustellen, eine äußerst schwierige ist; nimmt man jetzt hinzu, daß die früheren Arbeiten des Herrn Simon auf dem mathematisch-historischen Gebiete ganz besonders durch Mangel an wissenschaftlicher Arbeitsform und an Objektivität sowie durch eine ungewöhnlich große Zahl von Flüchtigkeitsfehlern gekennzeichnet sind, so ist es klar, daß man im vor-
(10) aus Herrn Simon als durchaus inkompetent, den Bericht zu erstatten, betrachten konnte, und daß seine Arbeit jedenfalls sehr viele Unrichtigkeiten enthalten mußte. In Wirklichkeit wird dies vorläufige Urteil durch die Arbeit selbst auf eine geradezu verblüffende Weise bestätigt; die Zahl der Unrichtigkeiten ist so groß, und die verschiedenen Arten von Fehlern sind so vollständig darin vertreten, daß man den „Bericht" als ein lehrreiches Beispiel, wie eine wissenschaftliche Arbeit ***nicht*** verfaßt werden sollte, benutzen kann. Eigentlich darf man kaum sagen, daß die Arbeit ***verfasst*** ist, denn sie ist vielmehr eine zum Abdruck gebrachte Sammlung von unbearbeitetem oder ungenügend bearbeitetem Material zu einer literarischen Arbeit. Unter solchen Umständen muß man staunen, wenn man im Vorworte des Herrn Simon liest, daß der angebliche Bericht, der ursprünglich für die *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* bestimmt war, nicht sofort, sondern erst nach vier Jahren abgelehnt wurde; kaum weniger fällt es auf, daß derselbe auf Anregung des Herrn F. Klein mit dem oben angeführten Titel unter den Schriften einer wissenschaftlichen Gesellschaft veröffentlicht worden ist. Meines Erachtens kann dies nur so erklärt werden, daß die Existenz der wirklich wissenschaftlichen mathematisch-historischen Forschung einem der leitenden deutschen Mathematiker unserer Zeit unbekannt geblieben ist. Es mag sein, daß die Resultate der von Herrn Simon im Interesse der Sache aufgewandten Mühe

[35] Felix Müller, ***Biblioth. Mathem.*** $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S.407.

verdienen konnten, den Mathematiklehrern zugänglich gemacht zu werden, aber für diesen Zweck hätte man ein anderes Verfahren anwenden sollen. Zuerst ist der Titel sehr irreleitend; eigentlich sollte er etwa: „Vorarbeiten zu einer Materialsammlung in betreff der Entwickelung der Geometrie, vorzugsweise im 19. Jahrhundert“ lauten. Noch irreleitender ist die Veröffentlichung der Arbeit unter den Schriften einer wissenschaftlichen Gesellschaft[36], und besonders sind die Worte des im August 1905 datierten Vorwortes, daß der Vorstand der Deutschen Mathematikervereinigung die Anregung des Herrn F. Klein „willkommen (11)
hieß“, zu bedauern; im August 1905 zählte der Vorstand nämlich unter seinen Mitgliedern die Herren A. Pringsheim und P. Stäckel, die beide wirklich wissenschaftliche[37] mathematisch-historische Untersuchungen ausgeführt haben. Alle diese Umstände ***müssen*** dazu beitragen, daß die meisten Leser, die natürlich nicht sachkundig sein können, ohne weiteres den Simonschen „Bericht“ als eine vorzügliche Arbeit betrachten, und daß die meisten der Sachkundigen aus persönlichen Gründen wenig geneigt sind, ihr wirkliches Urteil über die Arbeit öffentlich auszusprechen. Welchen bedauerlichen Einfluß auf die Verbreitung unrichtiger mathematisch-historischer Notizen dies haben wird, ist leicht einzusehen; hier erwähne ich nur ein einziges Beispiel dieser Art. In einem kleinen Orte in Rußland wohnt ein Herr, der sich besonders damit beschäftigt, die Anfragen des *Intermédiaire des mathématiciens* zu beantworten. Findet er nun eine Anfrage über einen Gegenstand der Elementargeometrie, so schlägt er seinen Simon auf, schreibt die dort vorkommenden Angaben ab und schickt sie an die Redaktion der Zeitschrift, die dann diese Angaben gewissenhaft zum Abdruck bringt.[38] Ohne Zweifel werden wenigstens einige unrichtige Angaben auf diese Weise viel weiter verbreitet.

Aus den jetzt angeführten Gründen ist es meines Erachtens sehr wichtig, daß die schon vorhandenen zusammenfassenden Darstellungen der Geschichte der Mathematik einer kritischen Behandlung unterzogen werden. Unter den fraglichen Darstellungen sind ja die Cantorschen *Vorlesungen* die am meisten benutzten, und darum habe ich seit neun Jahren für diesen Zweck eine besondere Abteilung der *Bibliotheca Mathematica* angeordnet, die schon viele hunderte kritischer Bemerkungen enthält. Von Belang sind ebenfalls kritische Besprechungen anderer neuerschienener Gesamtdarstellungen der Geschichte der Mathematik und auch in dieser Hinsicht habe ich versucht, durch die *Bibliotheca Mathematica* dem Wiederholen älterer oder neuerer Unrichtigkeiten entgegenzuarbeiten.

[36] Aus gewissen Anzeigen der Teubnerschen Verlagsbuchhandlung scheint hervorzugehen, daß man ursprünglich beabsichtigte, die Simonsche Arbeit in der Teubnerschen Sammlung von „Lehrbüchern“ oder in den *Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften* zu veröffentlichen. Die 100. Ausgabe des Teubnerschen „Verzeichnisses“ zeigt nämlich (S. 221) eine „Geschichte der Elementargeometrie in Problemen“ von Max Simon für die Sammlung von „Lehrbüchern“ an, und das Heft 1904:2 der Teubnerschen „Mitteilungen“ bringt (S. 30) die Voranzeige einer „Geschichte der Elementargeometrie in Problemen mit besonderer Berücksichtigung des 19. Jahrhunderts“ von Max Simon, die angeblich für die *Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften* bestimmt war. Meiner Ansicht nach wären die schädlichen Wirkungen des Simonschen Buches etwas geringer geworden, wenn es wenigstens ***nicht*** im Namen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung veröffentlicht worden wäre.

[37] Wenn ich in diesem Artikel zwischen „wirklich wissenschaftlicher“ und „unwissenschaftlicher“ oder „dilettantenmäßiger“ Arbeitsmethode unterschieden habe, so will ich dennoch nicht behaupten, daß in betreff derselben ein absoluter Gegensatz stattfinde. Auch eine Arbeitsmethode der ersten Art kann zum Teil unvollkommen sein, und es ist gar nicht unmöglich, daß sie in einigen Jahrzehnten als zu wenig wissenschaftlich bezeichnet wird, Ich meine nur, daß sie wenigstens von den systematischen Fehlern frei ist, die ich als für die „unwissenschaftliche“ Arbeitsmethode charakteristisch hervorgehoben habe.

[38] Siehe *L'intermédiaire des mathématiciens* **14**, 1907, S. 15, 44, 46, 87, 131, 139, 142, 211; **15**, 1908, S. 67.

Über den Wert einer kritischen Behandlung des Materials, das für `neue` mathematisch-
(12) historische Untersuchungen herbeigeschafft wird, ist es ja unnötig, hier etwas hinzuzufügen, denn ich habe gerade mit Rücksicht hierauf die kritische Nachbehandlung des schon `vorhandenen` Materials dringend empfohlen. Dagegen könnte es angebracht sein, in Erwägung zu ziehen, ob noch etwas anderes getan werden sollte, um die Aufmerksamkeit der Fachgenossen auf den Wert einer kritischen Behandlung des neuen Materials zu lenken. Dabei liegt es nahe, an die Bearbeitung einer besonderen „Anleitung zu mathematisch-historischen Forschungen" zu denken; diese Anleitung sollte also teils direkte Aufschlüsse über die wissenschaftliche mathematisch-historische Arbeitsmethode bieten, teils durch ausgewählte Beispiele aus der vorhandenen mathematisch-historischen Literatur nachweisen, zu welchen Unrichtigkeiten oder Ungenauigkeiten eine fehlerhafte Arbeitsmethode unmittelbar geführt hat und wie schwierig oder unmöglich es gewesen ist zu bewirken, daß diese Unrichtigkeiten nicht weiter verbreitet wurden. Gewiß würde eine solche Arbeit nützlich sein, aber dieselbe als besondere Schrift zu veröffentlichen dürfte mit Rücksicht auf die kleine Zahl der eigentlichen mathematisch-historischen Forscher noch nicht der Mühe lohnen. Dagegen könnte eine „Anleitung" dieser oder ähnlicher Art meines Erachtens sehr gut für den Schlußband der *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* passen.

Nun setzt, wie gesagt, jede wirklich kritische Untersuchung eine gewisse mathematisch-historische Schulung voraus, und man könnte meinen, daß es für die mathematisch-historische Forschung schädlich wäre, wenn man zu großen Wert auf diese Schulung legte. Dadurch würde man nämlich viele Mitarbeiter verlieren können, die nicht in der Lage sind, sich diese Schulung zu verschaffen und deren Beistand jedenfalls bei der Bearbeitung gewisser Gegenstände nützlich wäre. In bezug hierauf bemerke ich, daß die besondere mathematisch-historische Schulung in erster Linie bei zusammenfassenden Darstellungen der Geschichte der Mathematik sowie bei gewissen Spezialuntersuchungen nötig oder wenigstens sehr empfehlenswert ist. Dagegen gibt es viele Gegenstände, deren Behandlung geringe Literaturkenntnis oder geringe kritische Begabung erfordert. Beispielsweise kann man die Geschichte des Abelschen Theorems sehr wohl darstellen, ohne auch nur zu wissen, daß überhaupt eine Fachzeitschrift für Geschichte der Mathematik existiert, und ob die allgemeine Lösung der kubischen Gleichung vor oder nach Euklides entdeckt wurde. Ebenso kann man über eine besondere Arbeit des 17. Jahrhunderts einen guten und nützlichen Bericht erstatten, auch wenn man z. B. der Ansicht ist, daß jede Schrift, worin die Form Archimenides vorkommt, eine direkte und wörtliche Übersetzung aus dem Arabischen sein ***muß***. Auf dem mathematisch-historischen Forschungsgebiete gibt es also Arbeit
(13) genug für solche, die in diesem Gebiete tätig sein wollen, ohne Fachmänner im eigentlichen Sinne zu sein. Was ich bewirken will, ist nur, daß sich diese sozusagen „freiwilligen Mitarbeiter" auf Gebiete beschränken, die sie imstande sind zu behandeln, ohne unnötigerweise die schon sehr bedeutende Zahl von unrichtigen mathematisch-historischen Angaben zu vermehren.

Viel schwieriger ist es dagegen zu entscheiden, inwieweit man damit einverstanden sein soll, daß Personen ohne hinreichende mathematisch-historische Schulung zusammenfassende Darstellungen bearbeiten. Tatsächlich ist es von Interesse, neue Darstellungen dieser Art zu haben, die den Bedürfnissen bestimmter Gruppen von Lesern entsprechen. So z. B. brauchen wir eine sehr kurze Geschichte der Mathematik für Studenten, etwa wie Balls *Primer of the history of mathematics*, ferner eine etwas ausführlichere Darstellung für Studenten und Lehrer, wo die literarische Seite etwas mehr als in den zwei bekannten

ZEUTHENschen Büchern berücksichtigt wird, also etwa wie BALLS *Account of the history of mathematics*, und endlich eine viel ausführlichere Arbeit für Historiker der Mathematik, etwa wie die CANTORschen *Vorlesungen*. Ebenso kann es nützlich sein, einige speziellere Gesamtdarstellungen zur Verfügung zu haben, z. B. eine Geschichte der Elementargeometrie. Soll man nun festhalten, daß eine ähnliche Arbeit erst dann veröffentlicht werden soll, wenn eine Person mit hinreichender mathematisch-historischer Schulung geneigt ist, dieselbe zu übernehmen? Die Frage ist, wie ich schon bemerkt habe, sehr schwierig, und meines Erachtens muß sie in verschiedenen Fällen verschieden beantwortet werden. Ist es zurzeit unmöglich, einen wirklich sachkundigen Bearbeiter zu bekommen, und kann man eine andere Person finden, die wenigstens bis zu einem gewissen Grade sachkundig ist, so kann es angebracht sein, derselben die Arbeit zu überlassen, aber nur unter der Bedingung, daß das Manuskript vor dem Drucke von einer kompetenten Person durchgesehen wird. Ganz besonderes Gewicht soll darauf gelegt werden, daß *keine* neue Auflage einer älteren Geschichte der Mathematik, die einen wissenschaftlichen oder pädagogischen Zweck verfolgen will, ohne Mitwirkung eines wirklich sachkundigen Historikers herausgegeben wird. Nur in einem Falle könnte vielleicht gebilligt werden, daß Gesamtdarstellungen, ohne solche Mitwirkung erscheinen, nämlich wenn es sich um Kompendien der Geschichte der Mathematik handelt, die *ausdrücklich für Liebhaber* dieses Gegenstandes bestimmt sind. Die Kompendien dieser Art, die schon existieren, sind nämlich zum größten Teil sehr minderwertig, und auch eine Person ohne besondere mathematisch-historische Schulung könnte sehr wohl eine bessere Arbeit bringen.

Der wesentlichste Inhalt der vorangehenden Ausführungen kann auf folgende Weise zusammengefaßt werden.

1. Die Zahl der unrichtigen, unzuverlässigen oder irreleitenden Angaben der neueren zu- (14)
sammenfassenden Darstellungen der Geschichte der Mathematik ist so groß, daß besondere Maßregeln ergriffen werden sollen, um dieselben zu verbessern;

2. die fraglichen fehlerhaften Angaben beruhen zum größten Teile darauf, daß die meisten bisherigen Verfasser solcher Darstellungen keine besondere Schulung gehabt haben und sich darum oft einer unwissenschaftlichen Arbeitsmethode bedient haben;

3. die kritische Behandlung der schon vorhandenen Darstellungen der Geschichte der Mathematik soll zum Zwecke haben, nicht nur die Unrichtigkeiten zu verbessern, sondern noch mehr die Aufmerksamkeit der Fachgenossen auf den Wert einer mathematisch-historischen Schulung zu lenken;

4. mathematisch-historische Arbeiten, die eine solche Schulung voraussetzen, sollten nur von den eigentlichen Fachmännern besorgt und jedenfalls nicht ohne ihre Mitwirkung herausgegeben werden, während spezielle Untersuchungen, die in erster Linie bezwecken, neues Material zu bringen, in vielen Fällen von anderen Mitarbeitern ausgeführt werden können.

Band 10

Zur Frage der verschiedenen Arten mathematischer Geschichtsschreibung.

Zusammenfassung:
In diesem Artikel, der durch einige Ausführungen von Loria im vorhergehenden Bande der „Bibliotheca mathematica“ veranlaßt worden ist, präzisiert der Verf. seine schon in einigen früheren Leitartikeln angegebenen Ansichten über die Aufgabe der mathematischen Geschichtsschreibung sowie über die Art und Weise, wie diese Aufgabe behandelt werden soll. Er geht davon aus, daß die mathematische Geschichtsschreibung nicht nur über die Tatsachen Auskunft geben, sondern auch diese erklären soll, und untersucht, auf welchen verschiedenen Wegen die Erklärung erzielt werden kann. Unter den Arten von Erklärungen hebt er besonders die kulturhistorische und die mathematisch-historische hervor; jene will bei der Erklärung auf das gesamte Kulturleben Bezug nehmen, diese beschränkt sich dabei auf den Entwicklungsgang der Mathematik selbst. Ferner nimmt er in Betracht, welches die Tatsachen sind, die in erster Linie erklärt werden sollen, und welche Art von Erklärungen in jedem Falle die angebrachteste ist. Das Ergebnis seiner Untersuchung faßt er auf folgende Weise zusammen:

A. Durch Heranziehen der Kulturgeschichte kann nur ein verhältnismäßig geringer Teil der mathematisch-historischen Tatsachen befriedigend erklärt werden; in betreff der Geschichte der mathematischen Theorien sind Erklärungen dieser Art im allgemeinen minderwertig.

B. Die kulturhistorische Behandlung der anderen Arten von Geschichte der Mathematik (z. B. Geschichte der mathematischen Literatur oder des mathematischen Unterrichts) ist bis zu einem gewissen Grade zu empfehlen; aber auch wenn diese Behandlung theoretisch berechtigt ist, setzt sie oft Kenntnisse voraus, die ein Mathematiker sich nur selten verschaffen kann.

C. Dagegen ist die mathematisch-historische Behandlung der Geschichte der Mathematik unter allen Umständen zu empfehlen, vorausgesetzt, daß die nötige Sachkunde vorhanden ist. Erzielt man dadurch nicht ein endgültiges Ergebnis, so hat man jedenfalls den Fachgenossen ein wertvolles Material zur Verfügung gestellt.

D. Umfassende Kenntnisse auf verschiedenen Gebieten sind bei mathematisch-historischen Forschungen immer nützlich, zuweilen sogar notwendig. Allein in erster Linie muß man Mathematik verstehen, wenn man sich mit der Entwicklungsgeschichte der *Wissenschaft*, die diesen Namen trägt, beschäftigen will.

Quelle: JFM 40.1909, S. 47

In seinem Artikel *Developpements relatifs au projet d'un „Manuel pour les recherches sur l'histoire des mathématiques"*[1] hat Herr LORIA auch die Frage der verschiedenen Arten mathematischer Geschichtsschreibung und der Bewertung dieser Arten gegeneinander behandelt. Da ich selbst die nämliche Frage früher zum Gegenstand einiger Aufsätze[2] gemacht habe, und da die Resultate, zu denen ich dabei gelangte, nicht überall mit den Ausführungen des Herrn LORIA übereinstimmen, so werde ich hier die betreffende Abteilung seines Artikels einer näheren Untersuchung unterziehen. (1)

Der wesentliche Inhalt der fraglichen Ausführungen scheint mir auf folgende Weise zusammengefaßt werden zu können:

1. Die Aufgabe der mathematischen Geschichtsschreibung ist nicht nur, über Tatsachen Auskunft zu geben, sondern auch diese zu erklären und ihre Bedeutung als Kulturfaktoren anzugeben;

2. Nur wenn man die allgemeine Kulturgeschichte heranzieht, ist es möglich, die mathematisch-historischen Tatsachen befriedigend zu erklären;

3. Folglich ist die kulturhistorische Behandlung der Geschichte der Mathematik dringend zu empfehlen; (2)

4. Diese Behandlungsart ist in Wirklichkeit von maßgebender Seite fast einstimmig empfohlen oder sogar angewandt worden.

Im folgenden werde ich diese vier Thesen auf ihre Richtigkeit prüfen. Aber vorher muß festgestellt werden, in welchem Sinne der Ausdruck „Geschichte der Mathematik" hier gefaßt werden soll, und überdies ist es angebracht, die Bedeutung des Ausdruckes „kulturhistorische Erklärung" zu präzisieren. Daß bei Herrn LORIA „Mathematik" nicht nur die strenge Wissenschaft bedeutet, geht aus seinem ganzen Artikel hervor, aber andererseits schließt er nicht die mathematischen Theorien aus[3]; als Gegenstand der Geschichte der Mathematik in seinem Sinne dürfte man also überhaupt alles bezeichnen können, das „mathematisch" genannt zu werden verdient, besonders mathematische Literatur, mathematischen Unterricht, mathematische Theorien und überdies die Mathematiker selbst.

Der Ausdruck „kulturhistorische Erklärung" rührt von mir her. Herr LORIA selbst unterscheidet zwei Arten mathematischer Geschichtsschreibung, nämlich die pragmatische und „die höhere", die man die kulturhistorische nennen kann (Herr LORIA selbst wendet freilich nicht diese Benennung an); jene beschäftigt sich ausschließlich mit den mathematisch-historischen Tatsachen, diese will auch das gesamte Kulturleben berücksichtigen. In beiden Fällen können Erklärungen der behandelten Tatsachen versucht werden,

[1] G. LORIA, *Developpements relatifs au projet d'un „Manuel pour les recherches sur l'histoire des mathématiques"*; `Biblioth. Mathem.` **9**$_3$, 1908/9, S. 227–236, siehe besonders S. 228–233.

[2] G. ENESTRÖM, *Über literarische und wissenschaftliche Geschichtsschreibung auf dem Gebiete der Mathematik*; `Biblioth. Mathem.` **2**$_3$, 1901, S. 1–4. — *Über kulturhistorische und rein fachmäßige Behandlung der Geschichte der Mathematik*; a. a. O. **4**$_3$, 1903, S. 1–6. — *Zur Frage über die Behandlung der Geschichte der Mathematik*; a. a. O. **4**$_3$, 1903, S. 225 – 233. — *Über regelmäßige und unregelmäßige historische Entwickelung auf dem Gebiete der Mathematik*; a. a. O. **5**$_3$, 1904, S. 1–4. — *Über die Bedeutung historischer Hypothesen für die mathematische Geschichtsschreibung*; a. a O. **6**$_3$, 1905, S. 1–8. — *Die Geschichte der Mathematik als Bestandteil der Geschichte der Wissenschaften*; a. a. O. **7**$_3$, 1906/7, S. 1–5. — *Über planmäßige Arbeit auf dem mathematisch-historischen Forschungsgebiete*; a. a. O. **8**$_3$, 1907/8, S. 1–12. — *Über kritische Behandlung der Geschichte der Mathematik*; a. a. O. **9**$_3$, 1908/9, S. 1–14.

[3] Siehe beispielsweise a. a. O. S. 228–229.

und der Kürze halber nenne ich die Erklärung im ersten Falle „mathematisch-historisch", im zweiten Falle „kulturhistorisch", sofern sie von der mathematisch-historischen verschieden ist.

1.

Ich bin wie Herr LORIA der Ansicht, daß die mathematische Geschichtsschreibung nicht nur über die Tatsachen Auskunft geben, sondern diese auch erklären sollte, aber meines Erachtens ist eine Darstellung nicht notwendigerweise um so wertvoller, je größer die Zahl der erklärten Tatsachen ist; denn man muß ebensosehr die Art und die Zuverlässigkeit der Erklärungen in Betracht ziehen. Von rein erkenntnistheoretischem Gesichtspunkte aus könnte man vielleicht behaupten, daß der Wert einer Erklärung von ihrer Art unabhängig sei, allein eine einfache Überlegung zeigt, daß der erkenntnistheoretische Gesichtspunkt nicht immer maßgebend ist. Man erklärt ja eine Tatsache, indem man als ihren Grund eine andere Tatsache oder eine allgemeinere Erfahrung angibt, und wenn die erklärende
(3) Tatsache selbst wenigstens scheinbar ebenso zufällig wie die ursprüngliche ist, so kann es sehr leicht eintreffen, daß die Erklärung minderwertig wird. Aber auch abgesehen von diesem Umstände kann eine Erklärung fast wertlos werden, wenn die erklärende Tatsache einem ganz anderen Gebiete als die ursprüngliche gehört. Es trifft nämlich nicht selten ein, daß der Zweck der Erklärung ist, eine Erweiterung oder Bestätigung gewisser Kenntnisse zu bieten.

Was ich jetzt bemerkt habe, werde ich an einem Beispiel erläutern. Bekanntlich hat L. EULER im Jahre 1738 eine Abhandlung über die Form der Wurzeln einer allgemeinen Gleichung n-ten Grades veröffentlicht[4], die nach P. H. FUSS am 2. November 1733 der Petersburger Akademie vorgelegt wurde. In dieser Abhandlung hat EULER die Mutmaßung ausgesprochen, daß die Lösung einer Gleichung n-ten Grades immer auf die Lösung einer Gleichung $(n-1)$ten Grades zurückgeführt werden kann, und zwar so, daß die Wurzeln der ursprünglichen Gleichung von der Form

$$\sqrt[n]{X_1} + \sqrt[n]{X_2} + \ldots + \sqrt[n]{X_{n-1}}$$

sein müssen, wobei $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$ die Wurzeln der Gleichung $(n-1)$ten Grades sind; EULER hat auch versucht, diese Mutmaßung näher zu begründen. Nun wissen wir ja, daß diese für $n > 4$ unrichtig ist, und es muß also die Aufgabe des Geschichtsschreibers der Mathematik sein, zu erklären, wie ein so scharfsinniger Mathematiker auf seine unrichtige Ansicht kommen konnte. Für diesen Zweck kann man auf verschiedene Weisen vorgehen; ich nehme beispielsweise an, daß sich fünf Historiker der Mathematik, die Herren **A, B, C, D, E**, mit der Frage beschäftigt haben und zwar mit folgendem Erfolg.

> Historiker **A** hat ermittelt, daß EULER gegen Ende des Jahres 1733 kränklich gewesen sein soll, so daß er nur mit Schwierigkeit anstrengendere Gedankenarbeit ausführen konnte.
>
> Historiker **B** will ausfindig gemacht haben, teils daß EULER auf gespanntem Fuß mit JAKOB HERMANN stand, teils daß dieser wiederholt die Unmöglichkeit der algebraischen Lösung der Gleichungen höherer Grade hervorgehoben hat.
>
> Historiker **C** behauptet, daß die schweizerischen Mathematiker überhaupt und die Baseler Mathematiker in Besonderheit gerade auf dem Gebiete der

[4] L. EULER, *De formis radicum aequationum cujusque ordinis conjectatio;* `Comment. acad. sc. Petrop.` **6** (1732/3), 1738, S. 216–231.

Theorie der Gleichungen keine nennenswerten Entdeckungen gemacht haben, und daß sogar auf diesem Gebiete viele grobe Fehler von ihnen begangen worden sind.

Historiker **D** hat untersucht, bis zu welchem Grade die unvollständige Induktion am Anfang des 18. Jahrhunderts in der Politik und der Literatur zur (4)
Anwendung kam; es hat sich dabei nach seiner Aussage herausgestellt, daß diese Anwendung fast als ein Charakterszug der Zeit betrachtet werden kann.

Historiker **E** hat seine Aufmerksamkeit ausschließlich auf die Geschichte der Funktionentheorie vor Euler gerichtet und dabei gefunden, daß man noch am Anfang des 18. Jahrhunderts keine Ahnung von der wirklichen Natur der Funktionen, die nicht explizit algebraisch sind, hatte; man mußte darum als selbstverständlich annehmen, daß eine implizite algebraische Funktion auch explizit algebraisch sei.

Auf Grund dieser Überlegungen werden nun die fünf Historiker vielleicht geneigt sein, als Erklärungsgründe der fraglichen Tatsache vorzuschlagen:

Historiker **A**: Eulers Gesundheitszustand;
Historiker **B**: Eulers Abneigung gegen Hermann;
Historiker **C**: Eulers Nationalität und Erziehung;
Historiker **D**: Die politischen und literarischen Zeitverhältnisse;
Historiker **E**: Den Stand der Funktionentheorie zu Eulers Zeit.

Die erste Erklärung ist offenbar von großem Interesse, wenn es sich um eine Geschichte der Mathematiker handelt, und ebenso wenn man den Einfluß der Gesundheit auf die Geistesarbeit studieren will. Aber sonst ist die Erklärung fast wertlos, weil die Frage: „Warum beschäftigte sich Euler mit der Theorie der Gleichungen, bevor er ganz gesund geworden war" nicht beantwortet worden ist und sicherlich ebenso schwierig wie die gestellte Frage sein muß. Die drei folgenden Erklärungen können von verschiedenen Gesichtspunkten aus interessant sein. Aber auf die wichtige Frage: „Warum erwies sich gerade in diesem Fall der als Erklärungsgrund vorgeschlagene Umstand so wirkungsvoll" bekommt man dadurch keine Antwort. Dieselbe Bemerkung gilt auch in betreff der fünften Erklärung. Aber wenn wir annehmen, daß es sich um eine Geschichte der mathematischen Theorien handelt, so ist es klar, daß gerade diese Erklärung an sich großes Interesse bietet, weil man dadurch einen Einblick in den Entwickelungsgang eines wichtigen mathematischen Begriffes bekommt.

Nun kann man ja einwerfen, daß keine der fünf Erklärungen besonders gelungen ist, und daß die Sache ganz anders liegen würde, wenn man einen Erklärungsgrund entdeckt hätte, dem ein sehr hoher Grad von Wahrscheinlichkeit zukommt. In diesem Fall würden nämlich die übrigen Erklärungsversuche in Fortfall kommen, unabhängig von ihrer Art. Der Einwurf ist nicht ganz unberechtigt, und ich werde weiter unten auf ihn zurückkommen.
Hier genügt es konstatiert zu haben, daß eine Erklärung unter gewissen Umständen fast (5)
wertlos werden kann, wenn sie ein Ereignis auf ein anderes Ereignis zurückführt, das ebenso zufällig wie das ursprüngliche ist, oder wenn man die Erklärung für einen besonderen Zweck zu bekommen wünscht.

Daß die Bedeutung, die die mathematischen Errungenschaften für die Kultur haben, von der mathematischen Geschichtsschreibung berücksichtigt werden soll, hat Herr Loria mehr im Vorübergehen bemerkt[5], und meines Erachtens mit gutem Recht, weil diese

[5] Loria, a. a. O. S. 236. Herr Loria bemerkt in betreff der mathematisch-historischen Tatsachen, daß

Bedeutung nur verhältnismäßig selten festgestellt werden kann.[6] Ich begnüge mich daher, hervorzuheben, daß ich prinzipiell mit ihm einverstanden bin, daß aber das Resultat der folgenden Untersuchung unabhängig ist von der Stellung, die man zu dieser Frage einnimmt.

2.

Wie Herr Loria durch Belege nachweist, gibt es gewisse mathematisch-historische Tatsachen, die nur dann befriedigend erklärt werden können, wenn man die allgemeine Kulturgeschichte heranzieht, und in erster Linie ist dabei der Stand der Mathematik zu einer gewissen Zeit oder bei einem gewissen Volke zu nennen. Es ist ja ohne weiteres klar, daß die mathematische Forschungsarbeit besonders gedeihen muß, wenn die geistige Kultur einen gewissen Aufschwung aufzuweisen hat, und ebenso klar ist es z. B., daß die Richtung der mathematischen Forschung zum Teil von dem Kulturleben abhängig ist, und daß die politischen Verhältnisse einen gewissen Einfluß auf die schnellere oder langsamere Verbreitung der mathematischen Errungenschaften haben müssen. Auch gewisse mathematisch-historische Tatsachen von etwas speziellerer Art können kulturhistorisch erklärt werden. Aber je mehr man auf die Einzelheiten eingeht, um so unsicherer werden solche Erklärungen und um so mehr wird es wünschenswert, daß der Geschichtsschreiber eine umfassende Sachkunde und einen kritischen Blick besitzt. Daß gewisse Zweige der Mathematik nicht selten von anderen Wissenschaften beeinflußt worden sind, kann man nicht in Abrede stellen, und selbstverständlich soll der Geschichtsschreiber auf Fälle dieser Art aufmerksam machen; daß andererseits die Forschungsarbeit der Mathematiker zuweilen von politischen oder sozialen Verhältnissen abhängig gewesen ist, soll auch nicht bezweifelt werden. Aber wenn man bestimmte mathematisch- historische Tatsachen auf diese Wei-
(6) se erklären will, muß man meines Erachtens außerordentlich vorsichtig sein. Gerade das Beispiel, das Herr Loria anführt, um zu zeigen, daß mathematisch-historische Tatsachen zuweilen nur durch Hinweis auf politische Verhältnisse eine befriedigende Erklärung finden können, ist meines Erachtens ein Beleg für die Notwendigkeit einer solchen Vorsicht. Dieses Beispiel bezieht sich auf die Cantorsche Erklärung des Streites zwischen Newton und Leibniz; als Grund, warum sich dieser Streit so zuspitzen konnte, verweist Cantor[7] bekanntlich darauf, daß Newton ein fanatischer Tory, Leibniz dagegen der Berater des Thronkandidaten der Whigs war. Aber diese Erklärung ist höchst unsicher, denn es gibt zahlreiche Belege dafür, daß hartnäckige Streitigkeiten zwischen Mathematikern, die nicht politische Gegner waren, vorgekommen sind, so daß diese Streitigkeiten vorzugsweise andere Ursachen haben müssen; ich verweise nur auf den Streit zwischen Jakob und Johann Bernoulli. Nebenbei bemerke ich, daß die Bedeutung der Prioritätsstreitigkeiten für die Geschichte der Mathematik meiner Ansicht nach ziemlich klein ist, so daß der von Herrn Loria angeführte Beleg nicht besonders beweiskräftig gewesen wäre, auch wenn man die Cantorsche Erklärung als richtig anerkannte. Wenn es dagegen möglich wäre, aus politischen Verhältnissen befriedigend zu erklären, warum die Infinitesimalrechnung gleichzeitig von zwei Mathematikern entdeckt wurde, von welchen der eine einen phoronomischen, der andere einen analytischen Ausgangspunkt benutzte, so würde ich einer Erklärung dieser Art einen weit höheren Wert zumessen.

Es kann von Interesse sein, näher zu präzisieren, auf welchen Gebieten kulturhistorische

---

es nötig ist, „en fixer la signification et la place dans l'histoire générale de la pensée".

[6] Vgl. G. Eneström, *Über planmäßige Arbeit auf dem mathematisch-historischen Forschungsgebiete;*; `Biblioth. Mathem.` $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 11.

[7] M. Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* $\mathbf{3}^2$, Leipzig 1901, S. 67.

Erklärungen als besonders zulässig zu betrachten sind. In erster Linie möchte ich dabei die Geschichte des mathematischen Unterrichts nennen; diese ist ja eine Abteilung der Geschichte des Unterrichts, die selbst eine Abteilung der Kulturgeschichte ist. Wenn Herr Loria also als Beleg für den Wert der kulturhistorischen Erklärung auf eine Abhandlung von C. H. Müller hinweist, so gebe ich gern zu, daß dieser Hinweis beweiskräftig ist, aber freilich nicht in betreff der Geschichte der Mathematik im allgemeinen, sondern nur in betreff der Geschichte des mathematischen Unterrichts. Der historische Teil der Abhandlung des Herrn Müller bezieht sich nämlich ausschließlich auf diesen Gegenstand, obgleich er in der Einleitung einige allgemeine Ausführungen über die Geschichte der Mathematik bringt.

Die mathematische Literatur hat ohne Zweifel einige Berührungspunkte mit den übrigen Literaturzweigen, und bei einer Geschichte der mathematischen Literatur kann es darum zuweilen nützlich sein, die Kulturgeschichte heranzuziehen, z. B. wenn es sich darum (7)
handelt zu erklären, daß große mathematische Werke, für die man kaum auf viele Käufer rechnen konnte, zum Druck befördert worden sind. Je mehr man dagegen auf den wirklich mathematischen Inhalt von Arbeiten, die nicht Lehrbücher sind, eingeht, um so geringer wird der Nutzen, den die Heranziehung der Kulturgeschichte bietet.[8]

Auch die Geschichte der Mathematiker kann in gewissem Sinne als eine Abteilung der Kulturgeschichte betrachtet werden. Der Mathematiker ist ja gewöhnlich nicht nur mathematischer Forscher, sondern auch Lehrer, zuweilen überdies Politiker oder Staatsmann. Es ist darum natürlich, daß er von dem gesamten Kulturleben beeinflußt werden muß, und oft selbst einen Einfluß auf seine Zeit üben wird. Aber sobald er speziell als mathematischer Forscher wirksam ist, muß er sich gerade auf Grund des Gegenstandes seiner Forschungen von seiner Umgebung isolieren, und es ist mir darum nicht recht verständlich, was Herr Loria meint, wenn er mit Bedauern bemerkt, daß bei den modernen Mathematikern eine Tendenz, sich von der Außenwelt zu isolieren, zu konstatieren sei.[9]

Wenn ich bisher mit den Ausführungen des Herrn Loria in vielen Punkten einig gewesen bin, so wird die Sachlage eine wesentlich andere, sobald ich die Geschichte der mathematischen Theorien in Betracht ziehe. Herr Loria gibt allerdings zu, daß es im allgemeinen keine erheblichen Übelstände mit sich führt, wenn man die Geschichte einer mathematischen Theorie pragmatisch behandelt, behauptet aber, daß es eine höhere Behandlungsart gebe, und bei dieser Art müsse man die Kulturgeschichte und die Geschichte der anderen Wissenschaften heranziehen. Wäre es in Wahrheit möglich, auf diese Weise für die mathematisch-historischen Tatsachen mit an Gewißheit streifender Wahrscheinlichkeit die richtigen Erklärungen zu finden, so würde Herr Loria ohne Zweifel Recht haben. Aber wie ich schon hervorgehoben habe, wird die kulturhistorische Erklärung im allgemeinen um so unsicherer, je mehr man auf die Einzelheiten eingeht, und dies trifft besonders zu hinsichtlich der mathematischen Sätze und Methoden. Man kann darum sagen, daß in diesem Falle das Verzichten auf kulturhistorische Erklärungen nicht nur keine Übelstände mit (8)
sich bringt, sondern sogar zu empfehlen ist, und daß ein Versuch, die Entdeckungen der

[8] Darum bin ich nicht ganz mit Herrn Loria einverstanden, wenn er a. a. O. S. 233 die Geschichte der mathematischen Literatur mit der Geschichte der Literatur im gewöhnlichen Sinne vergleicht, ohne die wesentliche Verschiedenheit in betreff des Inhaltes zu erwähnen. Meines Erachtens wäre es vielmehr am Platze, die Geschichte der Mathematik z. B. mit der Geschichte der Philosophie zu vergleichen.

[9] Dagegen bin ich mit ihm einverstanden, wenn er gleichzeitig daraufhinweist, daß die Forschungen auf dem Gebiete der reinen Mathematik auf die Errungenschaften der Nachbargebiete Rücksicht nehmen sollen. Allein dies ist eine ganz andere Sache, die dem Gegenstand meines Artikels fern liegt.

mathematischen Sätze und Methoden kulturhistorisch zu erklären, in den meisten Fällen geradezu lächerlich werden würde. Die meisten mathematischen Entdeckungen beruhen nämlich teils auf dem Stande der Mathematik zu dem Zeitpunkt der Entdeckung, teils auf der individuellen Begabung des Entdeckers, teils endlich auf der Eigenart der mathematischen Wissenschaft selbst, und wenn man diesen Gedanken gang verfolgt, so gelangt man zu dem Resultate, daß die individuelle mathematische Begabung und die Reihenfolge der mathematischen Begriffe die zwei wichtigsten Erklärungsgründe der mathematischen Entdeckungen sind. Daß die individuelle mathematische Begabung vielleicht in einigen hundert Jahren kulturhistorisch erklärt werden kann, ist an sich nicht undenkbar; aber zurzeit fehlt es uns an jeder Möglichkeit, auch nur einen ernsten Versuch in dieser Richtung zu machen.[10]

Wenn es also ausgemacht ist, daß man im allgemeinen auf eine befriedigende kulturhistorische Erklärung der mathematischen Entdeckungen verzichten muß, so hat man zunächst in Erwägung zu ziehen, ob überhaupt eine befriedigende Erklärung möglich sei, oder ob man vielleicht die kulturhistorische Erklärung zuletzt als Notbehelf gutheißen muß. Indessen geht aus dem vorhergehenden unmittelbar hervor, daß es zwei andere Erklärungsarten gibt, die viel näher liegen, nämlich die sozusagen psychologische und die mathematisch-historische. Selbstverständlich kann eine psychologische Erklärung von Interesse sein. Wenn man jedoch bedenkt, daß die Geschichte der meisten mathematischen Theorien nicht ohne eingehende mathematische Kenntnisse behandelt und auch nicht ohne mathematische Kenntnisse verstanden werden kann, so bekommt schon hierdurch die mathematisch-historische Erklärung ein ganz besonderes Interesse. Noch größer wird der Wert dieser Erklärung, wenn es erlaubt ist anzunehmen, daß die Entwickelung der Mathematik im wesentlichen regelmäßig verläuft, so daß eigentlich nur bei den Unregelmäßigkeiten eine eingehendere Erklärung nötig ist. Unter solchen Umständen kann zuweilen eine geschickte Zusammenstellung der sukzessiven Errungenschaften auf einem gewissen mathematischen Gebiete ohne weiteres eine befriedigende Erklärung der Tatsachen enthalten. In betreff der Frage, ob die soeben erwähnte Annahme wirklich gutgeheißen werden kann, verweise ich auf einen früheren Artikel.[11]

(9) **3.**

Durch den Nachweis, daß die kulturhistorische Behandlung im allgemeinen nicht für die Geschichte der mathematischen Theorien paßt, ist die Frage, ob die kulturhistorische Erklärung der mathematisch-historischen Tatsachen dringend zu empfehlen sei, gewissermaßen auf die folgende Frage zurückgeführt: „Inwieweit sind Untersuchungen über die Entwickelung der einzelnen mathematischen Theorien zu empfehlen?“ und diese Frage ist auch an sich von großer Bedeutung, denn in Wahrheit beschäftigen sich die meisten Historiker der Mathematik gerade mit der Geschichte der mathematischen Theorien. In betreff dieser letzten Frage erlaube ich mir zuerst auf zwei frühere Artikel zu verweisen, in denen ich nachgewiesen habe, teils daß große Gebiete der Geschichte dieser Theorien bisher nur sehr unvollständig oder fast gar nicht untersucht worden sind, teils daß die schon vorhandenen Darstellungen der Geschichte der Mathematik eine sehr große Zahl von unrichtigen

[10] Vgl. G. Eneström, *Über kulturhistorische und rein fachmäßige Behandlung der Geschichte der Mathematik; Biblioth. Mathem.* **4**$_3$, 1903, S. 1–2. — *Zur Frage über die Behandlung der Geschichte der Mathematik*; a. a. O, **4**$_3$, 1903, S. 228, Fußnote 1.

[11] G. Eneström, *Über regelmäßige und unregelmäßige historische Entwickelung auf dem Gebiete der Mathematik; Biblioth. Mathem.* **5**$_3$, 1904, S. 1–4.

oder unzuverlässigen Angaben enthalten.[12] Natürlich genügen diese Umstände nicht, um zu **beweisen**, daß die Behandlung der Geschichte der einzelnen mathematischen Theorien empfehlenswert sei, aber sie bekommen eine wirkliche Bedeutung für diesen Zweck, wenn man sie mit zwei anderen Umständen zusammenstellt. Der erste dieser Umstände ist die mehr und mehr zunehmende Gewohnheit, in rein mathematische Arbeiten historische Notizen einzufügen. Es ist nämlich klar, daß das Fehlen von vollständigen und zuverlässigen Vorarbeiten über die Geschichte der mathematischen Theorien dazu veranlassen muß, daß die fraglichen Notizen oft unrichtig oder wenigstens wesentlich unvollständig werden, und selbstverständlich ist dies ein Übelstand, für dessen Beseitigung die nötigen Maßregeln, wenn irgend möglich, ergriffen werden sollten. Beispielsweise enthält die deutsche Ausgabe der *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* eine ziemlich große Zahl von unrichtigen historischen Notizen, und es wäre leicht, solche Notizen auch in anderen kürzlich erschienenen Arbeiten hervorragender Mathematiker unserer Zeit nachzuweisen. Der zweite der von mir angedeuteten Umstände ist die ausgedehnte Berücksichtigung der geschichtlichen Entwickelung der Mathematik bei dem mathematischen Unterricht, die in unseren Tagen von vielen Seiten gefordert wird. Auch hier ist es klar, daß es sehr bedauerlich wäre, wenn die jetzt allzuoft in den mathematisch-historischen Arbeiten vorkommenden unrichtigen Angaben durch Mathematiklehrer an den Schulen und Universitäten verbreitet würden, und daß es darum dringend zu empfehlen ist, durch neue mathematisch-historische Unter- (10)
suchungen die alten Angaben zu berichtigen und zu ergänzen.

Der Umstand, daß ich aus den angegebenen Gründen die nicht kulturhistorische Behandlung der mathematischen Theorien in erster Linie befürworte, bedeutet natürlich nicht, daß ich die kulturhistorische Behandlung der Geschichte der Mathematik als nicht empfehlenswert bezeichnen will. Indessen kann ich nicht umhin, zu bemerken, daß diese Behandlungsart vorzugsweise den geschulten Kulturhistorikern überlassen werden sollte. Teils gibt es für Mathematiker, die sich mit historischen Untersuchungen beschäftigen wollen, so viel Arbeit auf dem mathematisch-historischen Gebiete, die nur von Mathematikern ausgeführt werden kann, teils würde der Mathematiker nur ausnahmsweise imstande sein, sich die Kenntnisse zu verschaffen, die nötig sind, Geschichte der Mathematik kulturhistorisch und zugleich **streng wissenschaftlich** zu behandeln. Leider ist es allzu leicht, Beispiele zu finden, die bezeugen, wie dilettantenmäßig die meisten bisherigen Vertreter der kulturhistorischen Behandlung der Geschichte der Mathematik gearbeitet haben, und wie geringen wissenschaftlichen Wert ihre Arbeiten darum besitzen. Freilich hat Herr Loria ein „Manuel“ in Aussicht genommen, das gerade alles enthalten soll, was nötig ist, um Geschichte der Mathematik kulturhistorisch zu behandeln; allein meiner Ansicht nach hat er den Nutzen dieses „Manuel“ bedeutend überschätzt. Wenn das Werk wirklich zustande kommt, wird es sich bald zeigen, daß es für seinen Zweck kaum mehr zu bedeuten hat, als eine Sprachlehre für das Schreiben einer Sprache; nur durch wirkliche Schulung wird man sich allmählich die nötige Kompetenz verschaffen können.

[12] G. Eneström, *Über planmäßige Arbeit auf dem mathematisch-historischen Forschungsgebiete*; *Biblioth. Mathem.* $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 1–12. — *Über kritische Behandlung der Geschichte der Mathematik*; a. a. O. $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 1–14.

4.

Um zu beweisen, daß die kulturhistorische Behandlung der Geschichte der Mathematik fast einstimmig von Autoritäten empfohlen worden ist, verweist Herr Loria auf Aussprüche oder Arbeiten von G. Libri, A. Arneth, C. I. Gerhardt, M. Cantor, C. H. Müller und F. Klein. Wenn man indessen diese Belege näher untersucht, so findet man, daß die meisten nur bezeugen, daß die kulturhistorische Behandlung der Geschichte der Mathematik in gewissen Fällen empfehlenswert sei.

In erster Linie nennt Herr Loria seinen Landsmann Libri und legt großen Wert auf den Umstand, daß dieser ein leidenschaftlicher Sammler von Büchern und Manuskripten war, so daß man bei ihm nicht ein Vorurteil gegen Spezialforschung voraussetzen kann. Nun hat Libri bekanntlich am Anfang des ersten Bandes seiner *Histoire des sciences mathématiques en Italie* einen „Discours préliminaire“ gebracht, der 190 Druckseiten enthält, und worin
(11) er den Versuch macht, die Quellen der geistigen Kultur Italiens nachzuweisen. Ebenso hat Libri versucht, die Entwickelung der mathematischen und der allgemeinen Kultur in Italien in ihrem Zusammenhang darzustellen. Aber bekanntlich besteht die Librische Arbeit zur Hälfte aus „Notes“, die wertvolle Beiträge zur Geschichte der mathematischen Theorien bieten[13], und Libri hat nicht einmal versucht, das meiste Material, das in diesen „Notes“ enthalten ist, kulturhistorisch zu behandeln. Auf die Geschichte der einzelnen Theorien geht Libri übrigens nur selten ein, und dann ist seine Darstellung nicht kulturhistorisch. Nebenbei bemerke ich, daß die Sammlermonomanie Libris meines Erachtens nicht geeignet ist, den Wert seines Versuches zu erhöhen, und daß sich dieser Versuch nur auf die ältere Mathematik bezieht; der letzte von Libri behandelte Mathematiker ist Galilei.

Aus der Einleitung zur *Geschichte der reinen Mathematik* von Arneth zitiert Herr Loria den Ausspruch[14]: „Als Geschichte des reinen Denkens … darf sie [die Geschichte der Mathematik] nicht getrennt werden von der Entwickelungsgeschichte des menschlichen Geistes, also von der allgemeinen Kulturgeschichte“. Aber wenn man nachsieht, wie Arneth wirklich die Geschichte der neueren Mathematik behandelt hat[15], so findet man, daß sie nur nebenbei einige vereinzelte Betrachtungen über die Entwickelungsgeschichte des menschlichen Geistes enthält, und aus seiner Darstellung ist nicht einmal möglich zu erkennen, daß eine **ausführliche** Geschichte der mathematischen Theorien kulturhistorisch behandelt werden **kann**.

Noch geringeren Wert hat ein von Herrn Loria angeführter Ausspruch Gerhardts im Vorwort zur *Geschichte der Mathematik in Deutschland*[16]: „Ich hatte die Absicht, die Geschichte der Mathematik in Deutschland auf dem Hintergrund der allgemeinen deutschen Kulturgeschichte zu zeichnen“. Die Geschichte der deutschen Mathematik bringt nur Bruchstücke einer Geschichte der mathematischen Theorien, und die mathematisch-historische Erklärung kann darum weniger oft zur Anwendung kommen, sofern man sich
(12) wie Gerhardt wirklich auf die deutsche Mathematik beschränkt; andererseits gibt es bei

[13] Herr Loria verwundert sich (a. a. O. S. 229 Fußnote 4) darüber, daß B. Lefebvre die Librische Arbeit lediglich als eine Sammlung von Noten und Aktenstücken bezeichnet hat, und formell ist diese Angabe natürlich unrichtig, da die Arbeit überdies eine zusammenhängende historische Darstellung enthält, die die Hälfte des Umfanges in Anspruch nimmt. Andererseits beschäftigt sich diese Darstellung nur in zweiter Linie mit der Geschichte der mathematischen Theorien, so daß die Noten und Aktenstücke vom mathematisch-historischen Gesichtspunkte aus von größerem Interesse als der eigentliche Text sind.

[14] A. Arneth, *Die Geschichte der reinen Mathematik in ihrer Beziehung zur Geschichte der Entwicklung des menschlichen Geistes*, Stuttgart 1852, S. 5.

[15] A. Arneth, a. a. O. S. 228–291.

[16] C. I. Gerhardt, *Geschichte der Mathematik in Deutschland*, München 1877, S. IX.

der Behandlung der Mathematik in einem einzelnen Lande einen bestimmten Anlaß, die kulturhistorische Darstellung, so weit möglich, anzuwenden. Aber ob Gerhardt kompetent war, eine solche Darstellung durchzuführen, ist höchst unsicher; jedenfalls hat er keinen Versuch gemacht, seine Absicht zu verwirklichen.

Wie Herr Loria richtig bemerkt, hat Cantor teils in den *Mathematischen Beiträgen zum Kulturleben der Völker*, teils im **ersten** Bande seiner *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* eine kulturhistorische Darstellung zu bieten versucht. Allein in den zwei folgenden Bänden, die weit mehr als der erste Beiträge zur Geschichte der mathematischen Theorien enthalten, fehlt im wesentlichen diese Darstellungsart, und man könnte vielmehr daraus folgern, daß eine kulturhistorische Behandlung der Geschichte der neueren Mathematik ***nicht*** zu empfehlen oder nicht möglich sei.

Daß die Abhandlung von C. H. Müller hier nicht in Betracht kommen kann, weil sie sich ausschließlich mit der Geschichte des mathematischen Unterrichts beschäftigt, habe ich schon oben bemerkt; in betreff der Frage, ob die Ausführungen, die in der Einleitung der Abhandlung vorkommen, für die Geschichte der mathematischen Theorien passen, verweise ich auf einen früheren Artikel.[17]

Zuletzt zitiert Herr Loria einen Passus von F. Klein, worin bemerkt wird, daß es angebracht sein kann, gewisse Einzelheiten der Geschichte der mathematischen Literatur auf den Hintergrund der allgemeinen Geschichte zu beziehen. Mit der Bemerkung bin ich einverstanden; aber daraus folgt gar nicht, daß die Geschichte der mathematischen Theorien auf diesen Hintergrund bezogen werden kann oder soll. Am Anfang meines Artikels habe ich angegeben, wie der wesentliche Inhalt der Ausführungen des Herrn Loria meines Erachtens zusammengefaßt werden zu können ***scheint***. In der Tat gibt es bei Herrn Loria gewisse Bemerkungen, die darauf hindeuten, daß seine Ansichten nicht besonders weit von den meinigen verschieden sind, und daß er also nicht ohne Vorbehalt die vier Thesen als eine Zusammenfassung seiner Ausführungen anerkennen will. Beispielsweise identifiziert er die von ihm als „höhere" bezeichnete Behandlung der Geschichte der Mathematik mit der Darstellung, die ich in einem früheren Artikel[18] „wissenschaftlich" genannt habe, (13)
und verweist in diesem Zusammenhang auf Montucla und Hankel. Aber diese „wissenschaftliche" Darstellung ist im wesentlichen dieselbe, die ich gemeint habe, als ich von „mathematisch-historischer Erklärung" gesprochen habe, und wenn man die von Herrn Loria zitierten Stellen bei Montucla und Hankel liest, so findet man, daß keiner von diesen die kulturhistorische Erklärung empfiehlt; Montucla hebt nur hervor, daß die Geschichte der Mathematik eine Geschichte der mathematischen Theorien, nicht eine Geschichte der Mathematiker oder der mathematischen Schriften sein soll, während Hankel bemerkt, daß die Geschichte der Mathematik eine Entwickelungsgeschichte, nicht nur eine Entdeckungsgeschichte zu bieten hat. Ebenso sucht Herr Loria die Notwendigkeit der „höheren" Behandlung der Geschichte der Mathematik dadurch zu begründen, daß er auf den Nutzen hinweist, den P. Tannery von seinen kulturhistorischen Studien hatte, als er die Lebenszeit des Diophantos feststellen wollte. Aber hier handelt es sich nicht um die ***Erklärung*** einer mathematisch-historischen Tatsache, und man könnte darum meinen, daß Herr Loria in Wahrheit den Historikern der Mathematik die Kulturgeschichte nicht als Erklärungsgrund dieser Tatsachen, sondern vielmehr als ***Studiengegenstand*** empfehlen will.

[17] G. Eneström, *Über planmäßige Arbeit auf dem mathematisch-historischen Forschungsgebiete*; **Biblioth. Mathem.** **8**$_3$, 1907/8, S. 11.

[18] G. Eneström, *Über literarische und wissenschaftliche Geschichtsschreibung auf dem Gebiete der Mathematik*; **Biblioth. Mathem.** **2**$_3$, 1901, S. 1–4.

Ferner hebt Herr Loria selbst im Vorübergehen am Ende einer langen Fußnote[19] hervor, wie gefährlich es zuweilen sein kann, bei der Bearbeitung eines gegebenen mathematisch-historischen Materials die „höhere“ Behandlungsweise zu versuchen.

Aber auch wenn sich die von mir nachträglich ausgesprochene Mutmaßung als richtig erweisen würde, so habe ich dennoch keinen Grund, meinen Artikel als unnötig zu betrachten. Ich halte nämlich daran fest, daß ein Leser der Ausführungen des Herrn Loria höchstwahrscheinlich zu der Überzeugung kommen wird, daß die vier Thesen die Ansichten des Verfassers wiedergeben. Gegen diese Thesen – mögen sie von Herrn Loria als die seinigen gutgeheißen werden oder nicht – stelle ich die folgenden auf:

A. Durch Heranziehen der Kulturgeschichte kann nur ein verhältnismäßig geringer Teil der mathematisch-historischen Tatsachen befriedigend erklärt werden; in betreff der Geschichte der mathematischen Theorien sind Erklärungen dieser Art im allgemeinen minderwertig, und es ist darum irreleitend, wenn es sich um diese Theorien handelt, die kulturhistorische Geschichtsschreibung „höher“ zu nennen.

B. Die kulturhistorische Behandlung der anderen Arten von Geschichte der Mathematik
(14) ist bis zu einem gewissen Grade zu empfehlen; aber auch wenn diese Behandlung
theoretisch berechtigt ist, setzt sie oft Kenntnisse voraus, die ein Mathematiker sich
nur selten verschaffen kann,

C. Dagegen ist die mathematisch-historische Behandlung der Geschichte der Mathematik unter allen Umständen zu empfehlen, vorausgesetzt, daß die nötige Sachkunde vorhanden ist. Erzielt man dadurch nicht ein endgültiges Ergebnis, so hat man jedenfalls den Fachgenossen ein wertvolles Material zur Verfügung gestellt.

D. Umfassende Kenntnisse auf verschiedenen Gebieten sind bei mathematisch-historischen Forschungen immer nützlich, zuweilen sogar notwendig. Allein in erster Linie muß man Mathematik verstehen, wenn man sich mit der Entwickelungsgeschichte der **Wissenschaft**, die diesen Namen trägt, beschäftigen will.

[19] G. Loria, a. a. O. S. 229 Z. 5–7 v. u.

Band 11

Über Probleme der mathematischen Geschichtsschreibung.

Zusammenfassung:
„Probleme der mathematischen Geschichtsschreibung“ nennt Eneström gewisse Fragen, die zuweilen erledigt werden müssen, bevor man auf Grund des gesammelten mathematisch-historischen Materials die eigentliche Darstellung in Angriff nehmen kann. In betreff der Entdeckungsgeschichte der Mathematik hängen diese Fragen gewöhnlich von der Unvollständigkeit oder Unzuverlässigkeit des Materials ab, und sie sind besonders häufig, wenn es sich um die Geschichte des Altertums handelt; in anderen Fällen treten die Fragen auf Grund der Schwerverständlichkeit einer Quellenschrift auf. Für die Entwicklungsgeschichte beziehen sich die Fragen in erster Linie auf die Auffindung des Zusammenhanges zwischen gewissen Tatsachen, und Eneström zeigt durch Beispiele, wie schwierig die richtige Behandlung eines solchen Gegenstandes nicht selten sein kann. Er macht auch darauf aufmerksam, daß diese Schwierigkeit leider oft übersehen wird, so daß man glaubt, eine wissenschaftliche mathematisch-historische Abhandlung anzufertigen, wenn man erst die Quellenwerke aufsucht, daraus die nötigen Exzerpte macht und endlich dieses Material etwa wie einen Artikel einer politischen Zeitung bearbeitet. In Wirklichkeit kann das Ergebnis auf diese Weise leicht minderwertig werden, weil man unterlassen hat, gewisse Probleme zu erledigen, die vor Inangriffnahme der eigentlichen historischen Darstellung gelöst werden müssen.

Quelle: JFM 41.1910, S. 47

Wie jede andere historische Wissenschaft hat auch die mathematische Geschichtsschreibung teils ein besonderes Material zu sammeln, teils dasselbe nach gewissen Grundsätzen zu ordnen, und wenn die Grundsätze leicht anzuwenden sind, kann die Reihenfolge der Bestandteile des Materials im großen und ganzen als eindeutig bestimmt betrachtet werden. Denken wir uns zum Beispiel, daß das Material aus Sätzen über Thetafunktionen, die im 19. Jahrhundert veröffentlicht worden sind, besteht, und nehmen wir an, daß diese chronologisch nach den Druckjahren der Schriften, in denen sie zuerst veröffentlicht wurden, geordnet werden sollen, so bietet die Arbeit, sobald das ganze Material gesammelt und mit den nötigen Angaben versehen worden ist, kaum irgendwelche Schwierigkeiten dar. Fordert man dagegen, daß die Sätze alphabetisch nach den Namen der ersten Entdecker geordnet werden sollen, wird die Sache schon ein wenig verwickelt, denn bevor man das Ordnen beginnen kann, muß man in gewissen Fällen besondere Untersuchungen anstellen, die vielleicht nicht immer zu einem sicheren Ergebnis führen. Noch verwickelter wird die (1)

Arbeit, wenn man z. B. verlangt, daß die Bedeutung der Sätze für die Funktionentheorie bei ihrem Ordnen in Betracht gezogen werden soll, so daß die wichtigsten Sätze eine besondere Abteilung bilden. In diesem und ähnlichen Fällen müssen also gewisse Fragen erledigt werden, bevor die eigentliche historische Darstellung in Angriff genommen werden kann, und diese Fragen nenne ich Probleme der mathematischen Geschichtsschreibung.

Man sieht sofort ein, daß diese Probleme nicht nur von der Art des Materials, sondern auch von dem Zweck der Darstellung abhängen, und je wichtiger das Ergebnis ist, das man durch die historische Darstellung erzielen will, um so schwieriger werden die Probleme, die zu lösen sind. Bezweckt man beispielsweise, zu ermitteln, was die mathematischen
(2) Theorien für die Kultur bedeutet haben[1], sind die Schwierigkeiten meines Erachtens so groß, daß es noch nicht der Mühe lohnt, auch nur einen Versuch zu machen, sie zu besiegen.[2] Um nur auf eine einzige Schwierigkeit aufmerksam zu machen, bemerke ich, daß man vorläufig das folgende Problem lösen muß: „Vorausgesetzt, daß ein wesentlicher Teil der Geistesarbeit, die bisher für die Entwickelung der mathematischen Theorien verwendet worden ist, einem anderen Gebiete der Kultur zu Nutzen gekommen wäre, wie würde unsere Kultur dann aussehen?“, und dieses Problem ist meiner Ansicht nach bis auf weiteres unlösbar. Aber dann ist es ja nicht einmal möglich, zu entscheiden, ob im großen und ganzen die Mathematik für die Kultur nützlich oder schädlich gewesen ist.

Ein anderes wichtiges Problem der mathematischen Geschichtsschreibung, das tatsächlich gestellt worden ist, bezieht sich auf die Entwickelung und den Verfall der griechischen Mathematik. Das Problem lautet[3]: „Welches waren die Ursachen des Verfalles der griechischen Mathematik, und welche Maßregeln sollten also ergriffen werden, um für die Zukunft einen ähnlichen Verfall der mathematischen Forschungsarbeit zu vermeiden?“ Auch dieses Problem möchte ich als bis auf weiteres unlösbar bezeichnen, und sogar wenn man annimmt, daß der erste Teil des Problems erledigt werden kann, stelle ich in Abrede, daß man daraus schließen darf, wie die zweite Frage beantwortet werden soll.

Allerdings können geistreiche Verfasser, wenn sie auf dem mathematisch-historischen Gebiete sachkundig sind, interessante Bemerkungen über Probleme der soeben genannten Art bringen, aber im allgemeinen ist es dringend zu empfehlen, sich auf die Behandlung einfacherer Probleme zu beschränken. Schon bei der Bearbeitung einer Entdeckungsgeschichte der Mathematik treten sehr oft Fragen auf, die Probleme genannt werden könnten. Teils sind die Quellenwerke, aus denen der Rohstoff entnommen werden soll, oft unvollständig oder unzuverlässig, teils haben die früheren Arbeiter auf dem mathematisch-historischen Gebiete nicht selten das von ihnen benutzte Material unkritisch oder nachlässig bearbei-
(3) tet. Im letzten Falle kann die Frage durch Zurückgehen auf die Quellen erledigt werden, aber viel schwieriger wird natürlich die Sache, wenn die Quellen selbst unvollständig oder unzuverlässig sind oder auf mehr als eine Weise gedeutet werden können.

Besonders häufig kommen die Probleme in der Entdeckungsgeschichte der Mathematik des Altertums vor, und ihre Erledigung erfordert im allgemeinen besondere philologische oder literaturhistorische Kenntnisse. Oft genügen auch nicht solche Kenntnisse, um die

---

[1] Vgl. Conrad H. Müller, *Studien zur Geschichte der Mathematik insbesondere des mathematischen Unterrichts an der Universität Göttingen im 18. Jahrhundert;* `Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wiss.` **18**, 1904, S. 63.

[2] Vgl. G. Eneström, *Über planmäßige Arbeit auf dem mathematisch-historischen Forschungsgebiete;* `Biblioth. Mathem.` $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 11.

[3] Siehe P. Tannery, *Le vrai problème de l'histoire des mathématiques anciennes;* `Bullet, d. sc. mathém.` $\mathbf{9}_2$, 1885, S. 104–120. Wieder abgedruckt: *La géométrie grecque,* Paris 1887, S. 1–17.

Probleme endgültig zu lösen, z. B. in betreff der Fragen: Hat Pythagoras den pythagoreischen Lehrsatz gekannt? Wann lebte Heron? Was meinte Euklides mit der 4. Definition des 1. Buches der Elemente: „Die Gerade ist die Linie, die auf gleiche Weise ($\epsilon\xi\ \iota\sigma o\upsilon$) in betreff ihrer Punkte gelegen ist.“ Die letzte Frage ist besonders interessant, weil es sich herausgestellt hat, daß die wahre Bedeutung des Ausdruckes $\epsilon\xi\ \iota\sigma o\upsilon$ schon zu Zeiten des Proklos verloren gegangen war. Auch in der Entdeckungsgeschichte der Mathematik des Mittelalters spielen die Probleme zuweilen eine wichtige Rolle; ich brauche nur beispielsweise auf die folgenden Fragen hinzuweisen: Wann lebte Jordanus Nemorarius? Und welches ist die von ihm verfaßte Algorismusschrift ? Hinsichtlich der ersten Frage ist es bis auf weiteres zweifelhaft, ob sie jemals befriedigend erledigt werden wird, und für die definitive Beantwortung der zweiten Frage ist noch nicht genügendes Material gesammelt worden.

Dagegen werden Probleme, die von der Natur der Quellen abhängen, um so seltener, je mehr man der Neuzeit näher rückt, weil die Quellenwerke immer vollständiger und zuverlässiger werden. Allerdings kann auch die Entdeckungsgeschichte der modernen Mathematik Probleme dieser Art bieten, die nicht ganz leicht gelöst werden dürften, und hier unten bringe ich einen Beleg dafür.

Vor einiger Zeit bemerkte ich in einem kleinen Artikel über die Geschichte der krummlinigen Koordinaten[4], daß es am richtigsten sein dürfte, diese Geschichte mit Gauss beginnen zu lassen. Die Bemerkung veranlaßte einen geschätzten Mitarbeiter der ***Bibliotheca Mathematica*** mir brieflich mitzuteilen, er halte für sehr wahrscheinlich, daß schon Euler krummlinige Koordinaten benutzte und er verwies mich auf eine Stelle der Eulerschen *Adversaria.* An der fraglichen Stelle[5] bezeichnet Euler die Koordinaten eines beliebigen Punktes einer gegebenen Fläche durch t, u, v und bemerkt, daß jede dieser drei Größen als Funktion von zwei anderen voneinander unabhängigen Veränderlichen r und s ausgedrückt (4)
werden kann. Ferner betrachtet Euler zwei Punkte r und s der gegebenen Fläche, und nimmt an, daß für den Punkt r nur die Größe r, für den Punkt s nur die Größe s variabel sei. Dann hat in Wirklichkeit der Ort des Punktes r die Gleichung $s =$ Konst., der Ort des Punktes s die Gleichung $r =$ Konst.; diese Örter sind also tatsächlich zwei Parameterlinien der gegebenen Fläche und die Veränderlichen r, s folglich krummlinige Koordinaten. Anderseits deutet Euler selbst nicht mit einem einzigen Worte an, daß er diese Veränderlichen als **räumliche** Gebilde betrachtet. Wenn man Euler auf Grund der fraglichen Stelle die Benutzung krummliniger Koordinaten zuschreiben will, muß man also seinen Worten einen Sinn geben, der nicht **ausdrücklich** darin enthalten ist, und die Frage ist: „Kann man annehmen, daß Euler nicht selbst die wahre geometrische Bedeutung der Veränderlichen r und s erkannt hat?“ Ein moderner Mathematiker muß geneigt sein, diese Frage sofort mit Nein zu beantworten, für den Historiker enthält sie ein Problem, das freilich nicht wie die Fragen der älteren Entdeckungsgeschichte der Mathematik durch philologische oder literarhistorische Kenntnisse mehr oder weniger vollständig erledigt werden kann.

Die Probleme, die nicht von den Quellen selbst veranlaßt worden sind, können oft sehr leicht gelöst werden. Als Beispiele nenne ich die Fragen: War Leonardo Pisano Kaufmann? Hat Leibniz krummlinige Koordinaten benutzt? Ein wenig verwickelter, aber jedenfalls nicht besonders schwierig ist z. B. die Frage: Hat J. Pell die Pellsche Glei-

---

[4] G. Eneström, *Über das angebliche Vorkommen krummliniger Koordinaten bei* Leibniz; *Biblioth. Mathem.* **10**$_3$, 1909/10, S. 47.

[5] L. Euler, *Opera postuma* **1**, Petropoli 1862, S. 494–496.

chung behandelt? Sehr schwierig ist zuweilen die Erledigung, wenn es sich um verdächtige Angaben früherer Historiker handelt, für welche gar keine Belege gebracht worden sind. Beispielsweise kommen in einer 1857 erschienenen Abhandlung von M. Marty: *Wie man vor 1000 Jahren lehrte und lernte* gewisse unbelegte Angaben über Rechenunterricht im Mittelalter vor, und es dürfte nicht ganz leicht gewesen sein nachzuweisen, daß diese Angaben keinen geschichtlichen Wert besitzen, wenn man nicht vom Verfasser selbst erfahren hätte, daß er in der Abhandlung seine eigenen Vermutungen als historische Tatsachen dargestellt hat.

Ich komme jetzt zu den Problemen der Entwickelungsgeschichte der Mathematik. Hier handelt es sich nicht um die Richtigkeit oder Unrichtigkeit einzelner Angaben, sondern um die Auffindung eines Zusammenhanges zwischen Tatsachen, wenn dieser Zusammenhang nicht unmittelbar aus den Quellen hervorgeht. Die am meisten vorkommenden Probleme sind die zwei folgenden:

1. Man weiß, daß ein gewisser Mathematiker einen wichtigen Satz, der früher nicht nachweislich bekannt war, aufgestellt hat; es wird gefragt, auf welchem Wege er zu diesem Satz gekommen ist.

(5) 2. Es handelt sich um die Entdeckung einer gewissen mathematischen Theorie; es wird verlangt zu untersuchen, welche früheren mathematischen Errungenschaften als Vorarbeiten für diese Theorie betrachtet werden können.

Hinsichtlich des ersten Problemes kann man zwei Fälle unterscheiden, je nachdem der fragliche Satz wahr oder falsch ist. Ist der Satz falsch, kann das Aufstellen desselben ganz einfach als ein Versehen oder aus der individuellen Begabung des betreffenden Mathematikers erklärt werden, aber unter Umständen ist es von Interesse zu untersuchen, ob nicht das Versehen teilweise mathematisch-historisch erklärt werden kann. Da ich indessen in einem früheren Artikel den Gegenstand ziemlich ausführlich behandelt habe, erlaube ich mir auf diesen Artikel zu verweisen.[6]

Ist der Satz dagegen wahr, muß man sich in erster Linie genaue Kenntnis der Geschichte des betreffenden Zweiges der Mathematik verschaffen und überlegen, ob der Mathematiker wirklich imstande gewesen ist, den Satz selbst zu entdecken. Wenn dies nicht der Fall ist, muß man natürlich versuchen seine Quelle ausfindig zu machen. Selbstverständlich können in jedem Falle nur solche Wege in Betracht kommen, die der Entdecker des Satzes nachweislich oder wenigstens wahrscheinlich benutzen konnte. Aber je verwickelter das Verfahren und je willkürlicher der Ausgangspunkt desselben ist, um so weniger befriedigend wird die Lösung des gestellten mathematisch-historischen Problems und um so mehr ist es zu empfehlen, entweder von der ganzen Sache Abstand zu nehmen oder eine bessere Lösung zu suchen. Als Beispiel einer Lösung, die aus dem soeben angeführten Grunde verfehlt sein muß, nenne ich den Versuch G. Wertheims, die bei Heron vorkommende Annäherungsformel $\sqrt[3]{m} = a + \dfrac{(a+1)d_1}{(a+1)d_1 + ad_2}$ herzuleiten, wo $a = E(\sqrt[3]{m})$, $d_1 = m - a^3$, $d_2 = (a+1)^3 - m$. Wertheim nimmt an, daß Heron die Methode des doppelten falschen Ansatzes benutzt hat, und daß er $-(a+1)d_1$ und ad_2 als die Fehler, die den Annahmen a und $a+1$ entsprechen, betrachtet hat. Allein tatsächlich gibt es keinen Beleg dafür, daß die griechischen Mathematiker überhaupt die Methode des doppelten falschen

[6] G. Eneström, *Zur Frage der verschiedenen Arten mathematischer Geschichtsschreibung;* `Biblioth. Mathem.` $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 3–4.

Ansatzes kannten, und die Voraussetzung inbetreff der zwei Fehler ist nicht nur durchaus willkürlich, sondern überdies höchst unwahrscheinlich.[7]

Die Ermittlung des Weges, auf dem ein Mathematiker zu einem wichtigen Satz gekom- (6)
men ist, hat ohne Zweifel für die Geschichte der Mathematik großes Interesse, aber viel wichtiger ist meines Erachtens die zweite Art von Problemen, die ich oben erwähnt habe. In Wahrheit ist es ja der Hauptzweck der Entwickelungsgeschichte der Mathematik, über den Zusammenhang der mathematischen Ideen Auskunft zu geben, und in der zweiten Art von Problemen handelt es sich gerade darum, die aktenmäßigen Angaben über diesen Zusammenhang zu ergänzen. Allein für diesen Zweck ist es fast immer nötig, gewisse Hypothesen über den allgemeinen Gang der Entwickelung einer gegebenen Idee aufzustellen. Nun habe ich mich schon in einem früheren Artikel[8] über die Hypothesen der mathematischen Geschichtsschreibung geäußert und dabei hervorgehoben, daß eine Hypothese erst dann berechtigt wird, wenn sie auf eingehendem Studium des Quellenmaterials gegründet ist. Aber für die Hypothesen, die hier in Betracht kommen, ist es ebenso wichtig, daß man in jedem einzelnen Falle genau untersucht, ob und auf welche Weise frühere Errungenschaften der Mathematik als Vorbereitung zu einer neuen Theorie zu bezeichnen sind. Leider übersieht man nicht selten die Wichtigkeit dieses Verfahrens und stellt gleich anfangs Hypothesen auf, wodurch die soeben erwähnte Untersuchung verhindert wird, oder man unterläßt dieselbe aus anderen Gründen. Einen besonders lehrreichen Fall dieser Art bieten die Darstellungen der Vorgeschichte der Koordinatengeometrie.

Im Jahre 1877 veröffentlichte S. Günther eine Abhandlung über diesen Gegenstand[9], worin er drei Stufen des Koordinatbegriffes unterschied, nämlich: 1. man nimmt zwei schon vorhandene oder zwei beliebige gleichartige Linien als Achsen an, und die Punkte der Operationsfläche werden auf diese bezogen; 2. man konstruiert zu bestimmten Abszissen die Ordinaten und verbindet die so erhaltenen Punkte durch einen Zug; 3. man stellt eine Kurve durch eine wirkliche Gleichung zwischen zwei als Koordinaten aufgefaßten veränderlichen Größen dar. Er untersuchte weiter, welche Vertreter die drei Stufen gehabt haben, und gelangte dabei zu dem Ergebnis, daß die Griechen noch nicht zur zweiten Stufe vorgedrungen (7)
waren. Dagegen sei diese Stufe im Mittelalter von Oresme erreicht worden, während die dritte Stufe erst bei Fermat und Descartes nachgewiesen werden könne.

Gegen diese Darstellung der Entwickelung des Koordinatenbegriffs hat H. G. Zeuthen hervorgehoben[10], daß sie von einer willkürlichen Voraussetzung ausgeht, und diese Bemerkung ist meines Erachtens durchaus begründet. Günther hat nämlich nicht bewiesen, daß die zwei ersten Stufen für das Hervortreten des vollständigen Koordinatenbegriffs not-

[7] G. Wertheim, *Herons Ausziehung der irrationalen Kubikwurzeln;* `Zeitschr. für Mathem.` **44**, 1899, Hist. Abt. S. 1–3. Vgl. *`Biblioth. Mathem.`* $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 412. — Um zu ersehen, zu welchen eigentümlichen Ergebnissen die letzte Voraussetzung Wertheims führt, braucht man nur $m = 3$, also $a = 1$, $d_1 = 2$, $d_2 = 5$ zu setzen. Dann sind in Wirklichkeit die Fehler, die den Annahmen $\sqrt[3]{m} = a$ und $\sqrt[3]{m} = a + 1$ entsprechen, $-0,442$ und $+0,558$, während sie nach der Voraussetzung Wertheims -4 und 5 werden, also mehr als achtmal größer als die wirklichen! Freilich sucht Wertheim den Konsequenzen zu entgehen, indem er als Fehler nicht die ***wirklichen*** Fehler, sondern die Größen $-d_1$ und d_2 betrachtet, aber man sieht leicht, daß die Sache dadurch nur wenig verbessert wird, wenn a eine große Zahl ist.

[8] G. Eneström, *Über die Bedeutung historischer Hypothesen für die mathematische Geschichtsschreibung;* `Biblioth. Mathem.` $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 1–8.

[9] 2) S. Günther, *Die Anfänge und Entwickelungsstadien des Coordinatenprincipes;* `Abhandl. d. naturf. Ges. zu Nürnberg` **6**, 1877, S. 3–50. Italienische Übersetzung: *Le origini ed i gradi di sviluppo del principio delle coordinate*; `Bullett. di bibliogr. d. sc. Matem.` **10**, 1877, S. 363–406.

[10] H. G. Zeuthen, *Note sur l'usage des coordonnées dans l'antiquité et sur l'invention de cet instrument;* `Bullet, de l'acad. danoise des sciences` 1888, S. 139–140.

wendig sind, und er hat nicht einmal nachgewiesen, daß sich der Begriff auf diese Weise entwickelt hat Es ist nicht ungewöhnlich, daß ein mathematischer Begriff zuerst bei der Behandlung einer speziellen Frage, für welche die Benutzung des Begriffs eine fast selbstverständliche Sache ist, hervortritt, und daß man erst viel später die Bedeutung des Begriffs für eine ganze Theorie entdeckt. Meines Erachtens liegt gerade in betreff des Koordinatenbegriffs ein solcher Fall vor.

Aber auch mit der ZEUTHENschen Darstellung der Geschichte des Koordinatenbegriffs kann ich nicht einverstanden sein. ZEUTHEN hat selbst hervorgehoben, daß er die Anwendung der Koordinaten bei den Griechen als eine Tatsache betrachtet[11], und ich will nicht behaupten, daß er dabei durchaus unrecht hat. Dagegen hat er meiner Ansicht nach mit Unrecht unterlassen, **genau** zu untersuchen, bis zu welchem Grade die Koordinatenanwendung der Griechen als eine wirkliche Koordinatengeometrie betrachtet werden darf. Allerdings weist er nach, daß bei APOLLONIUS die Gerade und die Kegelschnitte durch Größen definiert werden, die tatsächlich Koordinaten sind, so daß man aus den Definitionen **sofort** ihre Gleichungen in rechtlinigen Koordinaten herleiten kann. Allein die Grundeigenschaften der Gerade und der Parabel sind eben der Art, daß ihre Definitionen sofort durch zwei Koordinaten ausgedrückt werden können; für die Ellipse und die Hyperbel findet ein ähnliches Verhältnis statt, aber dennoch ist es kaum richtig, daß die Definitionen dieser Kurven bei APOLLONIUS unzweideutig als Gleichungen zwischen **zwei** Koordinaten aufgefaßt werden müssen. Im Gegenteil könnte man sagen, daß in den Definitionen drei Koordinaten vorkommen, nämlich eine Ordinate und zwei Abszissen, und daß APOLLONIUS die Bedeutung eines im voraus bestimmten Anfangspunktes des Koordinatensystems weder explizit noch implizit andeutet, so daß man eigentlich nicht von einer **Koordinaten**geometrie, sondern
(8) nur von einer **Ordinaten**geometrie sprechen kann.[12] Noch weniger kann man behaupten, daß APOLLONIUS einen Fingerzeig gegeben hat, wie andere Kurven durch eine Relation zwischen zwei Koordinaten definiert werden können.

Außer den oben erwähnten Arten von mathematisch-historischen Problemen gibt es natürlich noch andere, aber die meisten dieser Probleme sind sehr nahe mit jenen verwandt und die übrigen sind meines Erachtens entweder unlösbar oder von untergeordneter Bedeutung. Ein von gewissen Verfassern mit besonderer Vorliebe behandeltes Problem ist das folgende: Zwei Mathematiker haben etwa gleichzeitig dieselbe oder fast dieselbe Entdeckung gemacht; es wird verlangt, zu ermitteln, inwieweit sie voneinander unabhängig gewesen sind. Allerdings sind diese Probleme nicht selten von Interesse, aber wenn ihre Behandlung mit einer vollständigen Darstellung der Prioritätsstreitigkeiten, wozu die gleichzeitige Entdeckung Anlaß gegeben hat, verbunden wird, kann die Behandlung leicht so ausführlich werden, daß sie nicht durch die Bedeutung der Frage motiviert ist.

Bisher habe ich von Problemen gesprochen, deren Lösung für eine vollständige und zuverlässige Darstellung der Geschichte der Mathematik notwendig oder wenigstens wünschenswert ist. Indessen gibt es auch Fragen ähnlicher Art, deren Erledigung recht eigentlich den Zweck hat, die historische Darstellung wertvoller und interessanter zu machen. Hierzu gehört zum Beispiel die Würdigung der verschiedenen Errungenschaften auf einem bestimmten Gebiete oder der wissenschaftlichen Wirksamkeit eines bestimmten Ma-

[11] ZEUTHEN, a. a. O. S. 128.

[12] Das hat auch ZEUTHEN selbst später anerkannt (siehe *Geschichte der Mathematik im XVI. und XVII. Jahrhundert,* Leipzig 1903, S. 195: „die Ordinaten sind bei ihnen [den griechischen Mathematikern] mehr im allgemeinen von der Lage des Punktes auf der Abszissenachse, von dem sie ausgehen, als gerade von der Abszisse dieses Punktes abhängig gemacht").

thematikers, und da es sich nicht um nackte Tatsachen handelt, könnte man auch diese Fragen mathematisch-historische Probleme nennen. Ihre Behandlung stimmt auch insofern mit der der eigentlichen Probleme überein, als in beiden Fällen wirkliche Sachkunde und kritische Schulung nötig sind. Wie leicht man sonst zu unzuverlässigen Ergebnissen kommt, zeigt u. a., was M. Cantor in seinen *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* von der „bahnbrechenden" Arbeit des Jordanus Nemorarius auf einem gewissen Gebiete zu erzählen hat.[13]

Diese bahnbrechende Arbeit des Jordanus besteht nach Cantor darin, daß jener in seiner *Arithmetica* fortwährend allgemeine Buchstaben statt besonderer Zahlen benutzt.
Allein erstens kann man diese Benutzung nicht „bahnbrechend" nennen, da Jordanus (9)
nicht verstanden hat, die Endergebnisse der von ihm ausgeführten Rechnungen vermittels der ursprünglich gewählten Buchstaben darzustellen; aus diesem Grunde erwies sich die fragliche Bezeichnungsweise in den meisten Fällen als unzweckmäßig, so daß sie nur ausnahmsweise zur Anwendung kommen konnte. Zweitens wird die Bezeichnungsweise, von der Cantor spricht, mit der Euklidischen identisch, wenn man die bei diesem in Zusammenhang mit den Buchstaben vorkommenden Linien streicht, und diese einfache Modifikation kann kaum bahnbrechend genannt werden.[14] Drittens besitzen wir nicht die Originalmanuskripte der Schriften des Jordanus, so daß wir nicht definitiv entscheiden können, ob dieser wirklich Buchstaben ohne Linien benutzt hat oder ob vielleicht das Weglassen der Linien von späteren Abschreibern herrührt. Die Art und Weise, wie Cantor in diesem Falle die Bedeutung des Jordanus würdigt, kann also von drei verschiedenen Gesichtspunkten aus als unzuverlässig bezeichnet werden.

Ein anderes Beispiel derselben Art befindet sich in einer kürzlich erschienenen Abhandlung über Ludolf van Ceulen.[15] Es wird darin bemerkt, daß die Schrift van Ceulens *Van den Circkel* (Delft 1596) eine merkwürdige Methode der abgekürzten Division enthalte, und daß diese die erste gedruckte der fraglichen Art sei.[16] Wenn man indessen den Bericht über das Verfahren van Ceulens näher untersucht, so findet man, daß es aus zwei Teilen besteht, von denen allerdings der eine methodisch genannt werden kann, nämlich die vorläufige Berechnung einer Tabelle der Zahlen $n \cdot D$, wo D der Divisor und $n = 1, 2, 3, \dots, 9$ ist, und Anwendung dieser Tabelle bei der Division. Allein dieses Vorgehen war in der zweiten Hälfte des 16. Jahrhunderts allgemein bekannt[17], so daß es gar nicht als eine Entdeckung van Ceulens bezeichnet werden kann, und übrigens ist das Vorgehen keine abgekürzte Division im gewöhnlichen Sinne des Wortes. Anderseits ist es richtig, daß der zweite Teil des Verfahrens eine Art von abgekürzter Division ist, aber es ist bis auf weiteres höchst unwahrscheinlich, daß die Abkürzungen nach irgendeiner *Methode* ausgeführt worden sind. van Ceulen will die Zahl 3 104 408 582 051 595 051 714 durch die Zahl 4 876 393 597 557 198 936 703 dividieren, und die Abkürzung besteht darin, daß er allmählich bei den Subtraktionen die letzten Ziffern der oben erwähnten Divisorentabelle wegläßt, so daß der letzte Subtrahendus nur 5 Ziffern enthält, während die entsprechende Zahl der Tabelle 23 stellig ist. Überdies kürzt van Ceulen an ein paar Stellen auch, den Dividendus (10)
auf ähnliche Weise ab. Er hat also erkannt — was jeder geübte Rechner sofort einsehen muß

[13] M. Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* **2**^{2}, Leipzig 1900, S. 61–62.

[14] Vgl. G. Eneström, *Biblioth. Mathem.* **7**$_3$, 1906/7, S. 85 – 86.

[15] H. Bosmans, *Un émule de Viète*: *Ludolphe van Ceulen*; *Annales de la société scientifique de Bruxelles* **34**:2, 1910, S. 88–139.

[16] H. Bosmans, a. a. O. S. 109–111.

[17] Vgl. G. Eneström, *Biblioth. Mathem.* **10**$_3$, 1909/10, S. 180.

—, daß die letzten Ziffern eines großen Divisors im Laufe einer langen Annäherungsdivision bedeutungslos werden, aber ein methodisches Verfahren sucht man bei ihm vergebens. Im Gegenteil rundet er nicht einmal die Zahl 859 ab, wenn diese durch Streichung der letzten Ziffer 9 der Zahl 8599 erhalten worden ist. Es ist darum meines Erachtens eine unrichtige Würdigung der Verdienste VAN CEULENS um die abgekürzte Division, wenn man behauptet, daß er die erste *Methode* dieser Art veröffentlicht hat.

Die vorhergehenden Zeilen beanspruchen gar nicht, den Gegenstand erschöpfend behandelt zu haben. Ihr Zweck ist in erster Linie, die Schwierigkeiten hervorzuheben, die mit einer exakten Bearbeitung der Geschichte der Mathematik verbunden sind. Leider ist die Ansicht noch sehr verbreitet, daß man eine wissenschaftliche Abhandlung auf diesem Gebiete anfertigen kann, wenn man erst die Quellenwerke aufsucht, daraus die nötigen Exzerpte macht und endlich dieses Material etwa wie einen Artikel einer politischen Zeitung bearbeitet. Allerdings kann die Veröffentlichung des Materials, das in einer solchen Abhandlung enthalten ist, sehr nützlich sein, aber die Urteile, die gefällt werden, werden leicht minderwertig, weil der Verfasser nicht erkennt, daß er es mit mathematisch-historischen Problemen zu tun hat, die nach den oben von mir angegebenen Gründen behandelt werden sollen.

Band 12

Über die Bedeutung von Quellenstudien bei mathematischer Geschichtsschreibung.

Zusammenfassung:
Der Zweck der Hauptableitung dieses Artikels ist, nachzuweisen, daß bei der Behandlung eines mathematisch-historischen Gegenstandes das Zurückgehen auf die ersten Quellen nicht unter allen Umständen zu empfehlen ist, auch wenn keine offenbaren Hindernisse (z. B. sprachlicher oder paläographischer Natur) dafür vorliegen. Durch die Benutzung der Quellen kann der Bearbeiter des Gegenstandes allerdings vermeiden, gewisse Fehler seiner Vorgänger zu wiederholen; aber es ist sehr wohl möglich, daß er andere noch größere Fehler sich zuschulden kommen läßt, wenn er nicht durch gewissenhafte Studien eingehende und umfassende Kenntnisse auf dem mathematisch-historischen Gebiete sich verschafft hat. Leider wird die Tatsache, daß das Benutzen der Quellen der Geschichte der Mathematik oft schwer ist und ganz besondere Kenntnisse erfordert, von den Verfassern mathematisch-historischer Arbeiten allzu selten berücksichtigt. Wie schwierig zu verstehen die älteren mathematischen Schriften sein können, weist ENESTRÖM durch viele Belege nach, und er macht auch darauf aufmerksam, daß die Geschichte der neueren Mathematik zuweilen von Personen bearbeitet worden ist, die nicht einmal die nötigen mathematischen Kenntnisse besitzen, Daß es sogar gefährlich sein kann, eine Quellenschrift zur Verfügung zu haben, wenn man nicht einsieht, wie wenig kompetent man ist, diese zu benutzen, wird ebenfalls durch ein Beispiel belegt. Darum wird empfohlen, in der Regel die Benutzung der Quellenschriften dem geschulten Historiker der Mathematik zu überlassen und im Bedarfsfalle zuverlässige Berichte über deren Inhalt, wenn solche wirklich vorliegen, zu Rate zu ziehen. Freilich gibt es Verf., die auch solche Berichte mißverstehen, und als Beleg hierfür wird die Darstellung CANTORS in betreff des Versuches von WHITE (1648), die Oberfläche eines schiefen Kegels zu berechnen, beleuchtet.

Der Schluß des Artikels bezieht sich auf die Frage: „Welche Quellenschriften sollen bei der Behandlung eines bestimmten Zeitabschnittes der Geschichte der Mathematik berücksichtigt werden?“ ENESTRÖM betont, daß in einer Entdeckungsgeschichte der Mathematik alle Schriften benutzt werden sollen, die zuverlässige Aufschlüsse über den zu behandelnden Gegenstand enthalten, also auch solche Schriften, die erst nach dem Ende des Zeitabschnittes im Druck vorlagen oder noch heute ungedruckt sind. Bei der Behandlung der Entwicklungsgeschichte der Mathematik empfiehlt er ebenfalls, die fraglichen Schriften zu Rate zu ziehen, allerdings so, daß genau untersucht wird, ob sie wirklich Aufschlüsse über die Entwicklung der mathematischen Theorien innerhalb des Zeitabschnittes geben können. Zuletzt wird hervorgehoben, daß es gewisse *gedruckte* Schriften gibt, die erst lange Zeit nach ihren Erscheinen eine entwicklungsgeschichtliche Bedeutung bekommen

haben, während andererseits der Historiker der Mathematik zuweilen nicht nur auf gedruckte und ungedruckte Schriften, sondern überdies auf die *mündliche* Überlieferung Bezug nehmen soll.

Quelle: JFM 42.1911, S. 49

---

(1) Es gibt wohl keinen wirklichen Historiker der Mathematik, der nicht damit einverstanden ist, daß eine mathematisch-historische Arbeit **exakte** Angaben über ihren Gegenstand bringen soll. Anderseits ist es nicht schwer, zahlreiche Belege dafür zu finden, daß die Historiker irre geleitet worden sind, wenn sie ihre Angaben nicht aus den Quellen, sondern aus zweiter oder dritter Hand entnommen haben. Es liegt darum sehr nahe, geltend zu machen, daß ein Verfasser auf dem mathematisch-historischen Gebiete immer, soweit die Quellen zugänglich sind, auf diese zurückgehen soll[1], und dann gelangt man leicht zu der Ansicht, daß eine mathematisch-historische Arbeit um so zuverlässiger wird, je mehr die Quellen benutzt worden sind.

Indessen zeigt schon eine einfache Überlegung, daß diese Ansicht nicht ohne wesentliche Beschränkungen richtig sein kann. Die meisten unrichtigen Angaben, die noch in den Handbüchern vorkommen, rühren ganz gewiß ursprünglich von Verfassern her, die aus den Quellen schöpften. Allerdings muß man anerkennen, daß bei diesen Verfassern nicht selten Flüchtigkeitsfehler (Druckfehler, Schreibfehler, Übersetzungsfehler, Gedächtnisfehler usw.) zu finden sind, und Unrichtigkeiten dieser Art kann man ja entgehen, wenn man die Quellen zu Rate zieht.

Wenn also MONTUCLA in betreff der Bemerkungen des *Commercium epistolicum* sagt[2]: „c'est mal-à-propos qu'on observe dans ces apostilles que LEIBNITZ avoit avancé qu'il pouvoit trouver l'arc par le sinus“, so ist diese unrichtige Angabe von der Art, daß man leicht vermeidet, sie zu bringen, wenn man das *Commercium epistolicum* selbst studiert. Dort steht nämlich ausdrücklich
(2) in dem Briefe LEIBNIZens an OLDENBURG vom 16. Oktober 1674[3]: „Eadem methodo etiam arcus cujuslibet, cujus sinus datur, geometrice exhiberi per ejusmodi seriem valor potest.“

Allein bei vielen mathematisch-historischen Verfassern, die auf ihren Gebieten keine Vorgänger gehabt haben, kommen oft unrichtige Angaben vor, die nicht lediglich auf einfachen Flüchtigkeitsfehlern beruhen können, und die Erklärung dieser Tatsache ist leicht ausfindig zu machen: ***das Benutzen der Quellen der Geschichte der Mathematik ist oft schwer und erfordert ganz besondere Kenntnisse***.

Wenn es sich um die Behandlung der Geschichte der neueren Mathematik (etwa von der Mitte des 17. Jahrhunderts an) handelt, bietet die Benutzung der Quellenschriften im allgemeinen keine besonderen Schwierigkeiten dar. Allerdings war die Bezeichnungsweise und die Terminologie noch gegen das Ende des 17. Jahrhunderts und sogar im 18. Jahrhundert zum Teil von der unsrigen verschieden, und dadurch können zuweilen Mißverständnisse oder Unsicherheit veranlaßt werden.

Beispielsweise dürfte einem modernen Mathematiker die Bedeutung der folgenden Definition[4] NEWTONS: „Lateris cujusque generantis Coefficiens est quantitas, quae oritur applicando Genitam

---

[1]Vgl. M. CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* **3**^{2}, Leipzig 1901, 8. 496–497: „Die Angaben [HEILBRONNERS] sind ... brauchbar ... wenn man ... stets auf die ersten Quellen zurückgeht, eine Vorschrift, welche man eigentlich bei geschichtlichen Untersuchungen nicht nötig haben sollte, besonders einzuschärfen.“

[2]J. E. MONTUCLA, *Histoire des mathématiques*, Nouv. éd. 3, Paris an X, 1802, S. 107.

[3]Vgl. G. ENESTRÖM, *Biblioth. Mathem,* **11**$_3$, 1910/11, S. 260.

[4]I. NEWTON, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, lib. II lemma 2; Ausgabe Cambridge 1713, S. 224.

ad hoc latus“ nicht sofort klar sein, auch wenn er Latein ebensogut wie seine Muttersprache versteht und überdies weiß, daß „Genita“ ein Produkt von der Form $A^m B^n C^p D^q \dots$ bedeutet und jede der Größen $A, B, C, D, \dots$ ein „latus“ der „Genita“ ist. Freilich liegt es für den Historiker recht nahe zu vermuten, daß man, wenn es sich um den Koeffizienten von A handelt, die „Genita“ auf die Form KA bringen sollte, und daß K eben der Koeffizient des „latus“ sei; VIÈTE[5] hatte ja das Wort „adplicare“ als wesentlich gleichbedeutend mit „dividere“ angewandt. Aber ganz sicher wird auch nicht der Historiker sein, bevor er den Satz NEWTONS[6]: „Momentum Genitae aequatur Momentis laterum singulorum generantium in eorundem laterum indices dignitatum et coefficientia continue ductis“ gelesen hat, denn an sich könnte der Koeffizient von $A^m B^n C^p D^q \dots$ in bezug auf A fast ebensogut $B^n C^p D^q \dots$ sein.

Auch die Zeichensprache kann zuweilen das Verständnis einer Schrift aus dem 17. oder 18. Jahrhundert erschweren. Beispielsweise kann man nicht **sofort** wissen, daß der Titel der Abhandlung[7]: *Investigatio formulae integralis* $\int \frac{x^{m-1}dx}{(l+x^k)^n}$, *casu quo post integrationem statuitur* $x = \infty$ **genau**: „Über den Wert des bestimmten Integrales $\int\limits_0^\infty \frac{x^{m-1}dx}{(l+x^k)^n}$“ bedeutet.

Nicht ganz ungewöhnlich ist es, daß man bei den Quellenstudien auf Mathematiker
stößt, deren Darstellungsweise unklar ist, so daß man den richtigen Sinn ihrer Ausführungen (3)
nur mit großer Mühe ausfindig machen kann. Ein solcher Mathematiker war CONDORCET
und auch die Abhandlungen von D'ALEMBERT sind nicht immer leicht zu verstehen.

Ich habe bisher stillschweigend vorausgesetzt, daß der Benutzer der Quellenschriften wenigstens so viel **Mathematik** versteht, daß das Studium der Schriften ihm aus diesem Grunde keine Schwierigkeiten darbietet. Ist diese Voraussetzung nicht erfüllt, kann natürlich jede neuere mathematische Schrift Mißverständnisse veranlassen. Am leichtesten werden solche Mißverständnisse auf Gebieten, die dem Benutzer wenig bekannt sind, auftreten, aber auch sonst können oberflächliche mathematische Kenntnisse unrichtige Angaben bewirken.

Ein auffälliges Beispiel dieser Art bietet der Bericht über das Verfahren MACLAURINS bei Wurzelausziehung aus selbst mit Irrationalitäten behafteten Binomien, den CANTOR in seinen *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* bringt.[8] Hier unten drucke ich nebeneinander teils den Wortlaut bei MACLAURIN[9], teils den Bericht CANTORS ab.

---

[5] Siehe F. VIÈTE, *Opera mathematica*, ed. F. VAN SCHOOTEN, Leiden 1646, S. 6.
[6] NEWTON, a. a. O. S. 224.
[7] Siehe L. EULER, *Opuscula analytica* **2**, Petropoli 1785, S. 43–54.
[8] CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* $\mathbf{3}^2$, S. 590–591.
[9] C. MACLAURIN, *A treatise of algebra*, London 1748, S. 118.

For extracting the higher Roots of a Binomial, whose two Members being squared are commensurable Numbers, there is the following Rule:

Let the Quantity be $A \pm B$, whereof A is the greater Part, and c the Exponent of the Root required. Seek the least Number n whose Power n^c is divisible by $AA - BB$, the Quotient being Q. Compute $\sqrt[c]{A+B} \times \sqrt{Q}$ in the nearest integer Number, which suppose to be r. Divide $A\sqrt{Q}$ by its greatest rational Divisor, and let the Quotient be s, and let $\dfrac{r+\frac{n}{r}}{2s}$, in the nearest integer Number, be t, so shall the Root required be $\dfrac{ts \pm \sqrt{t^2s^2 - n}}{\sqrt[2c]{Q}}$, if the c Root of $A \pm B$ can be extracted.

Sei $A > B$ und die c-te Wurzel aus $A \pm B$ zu ziehen, welche in der Form $x \pm y$ angenommen wird. Dann ist ... $(x+y)^c = A + B$, $(x-y)^c = A - B$. Vervielfachung der beiden Gleichungen mit einander liefert $(x^2-y^2)^c = A^2 - B^2$, $\quad x^2 - y^2 = \sqrt[c]{A^2 - B^2} = n$. Ein angenäherter Werth von $\sqrt[c]{A+B}$ (oder von $x+y$) sei r, so wird

$$\frac{n}{r} = \frac{x^2-y^2}{x+y} = x - y = 2x - (x+y) = 2x - r$$

und $2x = r + \frac{n}{r}$, ein Wert, den man zu berechnen imstande ist und der $2t$ genannt wird, so dass $x = t = \dfrac{r+\frac{n}{r}}{2}$. Man entnimmt daraus $x^2 = t^2 = \left(\dfrac{r+\frac{n}{r}}{2}\right)^2$, $y^2 = x^2 - (x^2 - y^2) = t^2 - n$, $y = \sqrt{t^2 - n}$, $x \pm y = \sqrt[c]{A \pm B} = t \pm \sqrt{t^2 - n}$. Voraussetzung dieser Entwicklung war freilich, daß sich $A^2 - B^2$ als eine c-te Potenz enthüllte ... [Hiernach folgt eine Regel für den Fall, in dem $\sqrt[c]{A^2 - B^2}$ nicht rational ist.]

(4) Um seine Regel zu erläutern, gibt MacLaurin einige Beispiele, von denen das erste $\sqrt[3]{\sqrt{968}+25}$ ist.[10] Hier ist $A^2 - B^2 = 343$, also $n = 7$, $Q = 1$. Ferner ist $\sqrt{968} + 25 \sim 56$, folglich $r = 4$, und da $\sqrt{968} = 22\sqrt{2}$, wird $s = \sqrt{2}$. Der Wert von $\dfrac{r+\frac{n}{r}}{2s}$ ist mithin $\dfrac{5\frac{3}{4}}{2\sqrt{2}}$, woraus $t = 2$. Der gesuchte Wert ist also nach der Regel MacLaurins $2\sqrt{2} + \sqrt{8-7} = 2\sqrt{2} + 1$, und wie man leicht findet, ist dieser Wert auch der richtige. Nach dem Cantorschen Berichte braucht r nicht eine ***ganze*** Zahl zu sein; wählt man indessen wie MacLaurin für r den Wert 4, wird $n = 7$, $x = t = \dfrac{4+\frac{7}{4}}{2} = 2\frac{7}{8}$, folglich $\sqrt{\sqrt{968}+25} = 2\dfrac{7}{8} + \sqrt{\dfrac{529}{64} - 7} = 2\dfrac{7}{8} + \sqrt{\dfrac{81}{64}} = 4$. Man ist also nach dem Cantorschen Berichte auf den Näherangswert r, von dem man ausging, zurückgekommen, und dieses Resultat kann man auch sofort aus der Cantorschen Formel erhalten, so daß sein Bericht vollständig mißlungen ist.[11] Offenbar hat Cantor nicht auf die von MacLaurin im § 127 angegebene Regel, sondern auf eine Stelle[12] des § 129 Bezug genommen, deren Fehler jeder Mathematiker sofort entdecken sollte[13], und die überdies mit den Worten „when A is ***rational***“ beginnt.

Man sieht also, daß nicht einmal in betreff der Geschichte der neueren Mathematik die Benutzung der Quellenschriften unbedingt zu empfehlen ist. Wenigstens sollten die Verfasser, die sich mit Untersuchungen auf diesem Gebiete beschäftigen wollen, so gründliche

[10] MacLaurin, a. a. O. S. 118–119.

[11] Vgl. Eneström, ***Biblioth. Mathem.*** **11**$_3$ 1910/11, S. 88–89.

[12] MacLaurin, a. a. O. S. 122–123.

[13] Bekanntlich wurde die Algebra von MacLaurin erst nach dem Tode seines Verfassers veröffentlicht, und da die Handschrift an einigen Stellen noch nicht druckfertig war, mußten die Herausgeber diese Stellen für den Druck bearbeiten.

mathematische Kenntnisse besitzen, daß sie feststellen können, ob eine Formel für $\sqrt[c]{A+B}$ einen exakten Wert geben kann oder nicht.

Noch größere Schwierigkeiten gibt es indessen bei dem Studium der älteren mathematischen Literatur, und zwar sind diese Schwierigkeiten von mehreren Umständen abhängig. Die meiner Ansicht nach wichtigsten werde ich im folgenden erwähnen. Ich sehe dabei sowohl von den rein sprachlichen wie von den paläographischen Schwierigkeiten ab, und ebenso beschäftige ich mich nur ausnahmsweise mit solchen Fragen, die ich „Probleme der mathematischen Geschichtsschreibung“ nenne.[14]

Bis gegen das Ende des 16. Jahrhunderts gab man die algebraischen Formeln entweder in Worten oder nur durch Zahlenbeispiele an, und im letzteren Falle ist es nicht immer leicht, die richtige Formel zu finden.

Am leichtesten ist natürlich die Erledigung der Frage, wenn es sich um eine `bekannte` Formel handelt. Beispielsweise steht in einer Agrimensorenschrift[15] folgende Regel für die Summierung von Kubikzahlen: „[Facio] XZ, fit II s[emis], item X. II s[emis], fit XXV, undecies XXV, fit CCLXXV, (5)
et iterum XI. CCLXXV, fit III XXV: erit ab asse usque X in quibo“; und wenn man diese Regel analytisch ausdrückt, bekommt man die Formel $1^3+2^3+\ldots+10^2 = \left(\frac{10}{2}\right)^2 \cdot 11 \cdot 11$. Nun weiß man ja, daß $1^3+2^3+\ldots+n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \left(\frac{n}{2}\right)^2 (n+1)(n+1)$; setzt man also zweimal $10+1$ statt 11 in das Zahlenbeispiel, hat man sofort die richtige Form $1^3+2^3+\ldots+10^3 = (\frac{10}{2})^2(10+1)(10+1)$ bekommen, und der Sinn der römischen Regel ist klar. Sonst wäre es gewiß nicht leicht gewesen, die Frage endgültig zu entscheiden, denn es wäre ja möglich, daß der eine Faktor 11 als $10+1$, der andere Faktor 11 als die Zahl 11 gedeutet werden sollte, so daß die römische Regel $1^3+2^3+\ldots+10^3 = 11(\frac{n}{2})^2(n+1)$ lauten würde. Allerdings wird in diesem Falle die Unsicherheit durch die unmittelbar folgende Bemerkung des Textes: „Item ab asse usque X in quibo. Numerus in trigonum, fit LV, ipsum in se, fit III XXV“ entfernt, aber in den meisten Fällen sind die Verhältnisse nicht so günstig.

Tatsächlich haben sich sogar Kenner der Geschichte der älteren Mathematik bei der Deutung ähnlicher Angaben geirrt, wie aus den zwei folgenden Belegen hervorgeht.

Bei Heron kommt folgende Regel für Kubikwurzelausziehung vor[16]: „Wie man $\sqrt[3]{100}$ zu bestimmen hat, werden wir nunmehr angeben. Nimm die 100 nächstkommende Kubikzahl, sowohl die nächstgrößere als die nächstkleinere. Es sind 125 und 64. $125-100=25$, $100-64=36$, $5\times 36=180$, $180+100=280$, $\frac{180}{280}=\frac{9}{14}$. $4+\frac{9}{14}=4\frac{9}{14}$. So groß wird annähernd $\sqrt[3]{100}$ sein.“ Bei seinem ersten Versuche, diese Regel zu deuten, nahm Curtze an[17], daß der erste Faktor 5 der Zahl 180 die Quadratwurzel aus 25 bedeute, und 100 in der Identität $180+100=280$ die gegebene Zahl sei, so daß die Formel

$$\sqrt[3]{a^3+b} = a + \frac{b\sqrt{(a+1)^3-a^3-b}}{a^3+b+b\sqrt{(a+1)^3-a^3-b}}$$

lauten würde. Indessen wies Wertheim darauf hin[18], daß 5 sicherlich als die Kubikwurzel der

[14] Siehe Eneström, *Über Probleme, der mathematischen Geschichtsschreibung*; `Biblioth. Mathem.` **11**$_3$, 1910/11, S. 1–10.

[15] Siehe N. Burnov, *Gerberti Opera mathematica*, Berlin 1899, S. 550.

[16] Heron, *Opera* **3**, rec. H. Schöne, Leipzig 1903, S. 178–179.

[17] M. Curtze, *Quadrat- und Kubikwurzeln bei den Griechen;* `Zeitschr. für Mathem.` **42**, 1897, Hist. Abt. S. 119.

[18] G. Wertheim, *Herons Ausziehung der irrationalen Kubikwurzeln;* `Zeitschr. für Mathem.` **44**, 1899, Hist. Abt. S. 1.

größeren Kubikzahl 125 und 100 als $4(125-100)$ aufzufassen sei, so daß die Formel

$$\sqrt[3]{a^3+b} = a + \frac{(a+1)b}{(a+1)b + a[(a+1)^3 - a^3 - b]}$$

wird. Diese Deutung wird auch in Wirklichkeit dadurch bestätigt, daß die letzte Formel auf eine sehr natürliche Weise hergeleitet werden kann, und die Deutung dürfte jetzt von allen Historikern gutgeheißen worden sein.[19]

(6) Der arabische Mathematiker El-Hassar[20] gibt als Näherungswerte von $\sqrt{5}$ erst $2+\frac{1}{2\cdot 2} = 2\frac{1}{4}$, weiter $2\dfrac{1}{4} - \dfrac{\frac{1}{16}}{2\cdot 2\frac{1}{4}} = 2\dfrac{17}{72}$ an und fährt dann fort: „Wenn du noch eine größere Annäherung willst, so verdopple $2\frac{17}{74}$, benenne nach dem Resultat $(\frac{1}{72})^2$ und was du so erhältst, subtrahiere von $2\frac{17}{72}$, so ist das Ergebnis noch angenäherter als die erste und zweite Wurzel; so kannst du fortfahren so weit du willst.“ Aus diesen Worten hat Suter gefolgert[21], daß El-Hassar zwar die zwei ersten Näherungswerte von $\sqrt{A}$ nach der Rekursionsformel $a_{n+1} = a_n - \dfrac{a_n^2 - A}{2a_n}$ berechnet, in der a_n und a_{n+1} zwei sukzessive Werte sind, daß aber, wenn man den zweiten Wert $a+\frac{p}{q}$ schreibt, der dritte Wert El-Hassars durch den Ausdruck $a + \dfrac{p}{q} - \dfrac{(\frac{1}{q})^2}{2(a+\dfrac{p}{q})}$ dargestellt wird und also nicht nach der Rekursionsformel zu berechnen ist. Aber wenn man bemerkt, daß $(\frac{1}{72})^2 = (2\frac{17}{72})^2 - 5$ und ferner auf die Worte „so kannst du fortfahren, so weit du willst“ Bezug nimmt, wird es fast sicher, daß El-Hassar auch den dritten Wert nach der Rekursionsformel berechnet hat[22], und Suter selbst ist jetzt mit dieser Erklärung einverstanden.

Nicht selten ist die Darstellungsweise der älteren Mathematiker wesentlich von derjenigen der modernen Wissenschaft verschieden, und dadurch kann man bei dem Studium einer Schrift veranlaßt werden, entweder auf Grund der ungewöhnlichen Form einen wesentlichen Punkt zu übersehen, oder zu wenig auf den wirklichen Gedankengang Rücksicht zu nehmen, so daß man in die Darstellung die moderne Auffassung hineinliest. Als Belege weise ich teils auf die Behandlung der Gleichungen bei Viète, teils auf die Darstellung der Grundlagen der analytischen Geometrie bei Descartes hin.

Es ist bekannt, daß Viète für die Wurzeln x_1, x_2, x_3 einer kubischen Gleichung $x^3 - a_1x^2 + a_2x - a_3 = 0$ mit drei positiven Wurzeln die Formeln $a_1 = x_1 + x_2 + x_3$, $a_2 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$, $a_3 = x_1x_2x_3$ angegeben hat, und es ist ebenso bekannt, daß er bei der Behandlung der Gleichungen nur die positiven Wurzeln in Betracht zieht. Es scheint also von vornherein ausgeschlossen zu sein, daß Viète den Satz über die Bildung der Koeffizienten aus den Wurzeln auch auf Gleichungen mit negativen Wurzeln erweitern konnte, und wahrscheinlich werden die meisten modernen Mathematiker, die die Werke Viètes studieren, vergebens bei ihm eine solche Erweiterung suchen. Allein in Wirklichkeit hat Viète für die Wurzeln x_1, x_2, x_3 der Gleichung $x^3 - a_2x + a_3 = 0$ Sätze ausgesprochen, die inhaltlich mit den Formeln $0 = x_1 + x_2 + x_3$, $-a_2 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$, $-a_3 = x_1x_2x_3$
(7) übereinstimmen, und Viète wußte, daß diese Gleichung nicht drei positive Wurzeln hat. Dieser scheinbar auffällige Umstand wird dadurch erklärt, daß Viète auf einem Umweg negative Wurzeln in Betracht zieht. Er weiß nämlich, daß die negative Wurzel der Gleichung $x^3 - a_2x + a_3 = 0$ die positive Wurzel der Gleichung $x'^3 - a_2x' - a_3 = 0$ ist, und er weiß auch, daß, wenn x_1 und x_2 die zwei (positiven) Wurzeln der ersten Gleichung, x_1' die (positive) Wurzel der zweiten Gleichung ist, die Re-

---

[19] Vgl. Eneström, **Biblioth. Mathem.** $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 412; $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 5.
[20] Siehe H. Suter, *Das Rechenbuch des Abu Zakarija El-Hassar*; **Biblioth. Mathem.** $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 37–38.
[21] Suter, **Biblioth. Mathem.** $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 105.
[22] Siehe Eneström, **Biblioth. Mathem.** $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 166.

lation $x_1' = x_1 + x_2$ stattfindet.[23] Ferner beweist er[24], daß $a_2 = x_1^3 + x_2^2 + x_1 x_2$, $a_2 = x_1 x_2 (x_1 + x_2)$, und da $x_3 = -x_1'$ erhält man sofort die Formeln $0 = x_1 + x_2 + x_3$, $-a_3 = x_1 x_2 x_3$ Endlich folgt aus der Identität $x_1 + x_2 = x = -x_3$, daß $(x_1 + x_2)^2 = -(x_1 + x_2)x_3 = -x_1 x_2 - x_2 x_3$, und da $-a_3 = -x_1^2 - x_2^2 - x_1 x_2 = -(x_1 + x_2)^2 + x_1 x_2$, wird $-a_3 = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1$.

Daß DESCARTES der Begründer der analytischen Geometrie ist, steht in jedem Lehrbuche dieses Gegenstandes, das historische Notizen bringt, und unsere analytische Geometrie geht ja von dem Koordinatenbegriff aus. Es liegt darum für einen modernen Mathematiker nahe, bei dem Studium der *Géométrie* von DESCARTES als selbstverständlich zu betrachten, daß der Koordinatenbegriff die Grundlage dieser Arbeit sei, so daß er nicht näher untersucht, wie DESCARTES selbst sich die Sache denkt. In Wirklichkeit bezieht dieser die Punkte einer Kurve nicht auf zwei Koordinatenachsen, sondern auf die Punkte einer festen Geraden, und man könnte darum mit besserem Rechte seine analytische Geometrie eine Ordinateugeometrie als eine Koordinatengeometrie nennen.[25]

Die Terminologie der älteren mathematischen Literatur ist zuweilen schwer zu verstehen. Ganz besonders ist dies bei VIÈTE der Fall; aber auch bei anderen Mathematikern findet etwas Ähnliches statt.

Als Beispiel drucke ich hier den folgenden Passus[26] aus der *Ars magna* CARDANOS ab: „Ubi plures [impares] denominationes numero comparantur, etiam si mille forent, una erit aestimatio rei vera, et nulla ficta". Hier bedeutet „denominatio" eine Potenz der Unbekannten, multipliziert mit einer bekannten Größe, „numerus" bedeutet die Gleichungskonstante, „aestimatio" ist die Wurzel, „res" die Unbekannte, „vera" positiv und „ficta" negativ: CARDANO behauptet folglich, daß die Gleichung $a_0 x^{2n+1} + a_1 x^{2n-1} + \ldots + a_n x = a_{n+1}$, wo alle a positive Größen sind, immer eine positive, aber keine negative Wurzel hat.

Rein stilistisch ist die Darstellungsweise der älteren Mathematiker oft unklar. In einigen (8)
Fällen kann man keinen besonderen Grund dazu angeben, in anderen Fällen fehlt es dem Verfasser offenbar an der sprachlichen Übung, die nötig ist, um den Gedanken eine passende Form zu geben. Auch diese Bemerkung will ich an ein paar Beispielen erläutern.

In einer mittelalterlichen Algorismusschrift[27] lautet ein Satz: „Proportionales numeri et si abinvicem eque distiterint proportionales erunt." Allerdings bemerkt der Verfasser, daß er zwei Paare $a_1, a_2; b_1, b_2$ von Zahlen, deren jede aus einer einzigen Ziffer mit oder ohne eine Folge von Nullen besteht, als äquidistant betrachtet, wenn gleichzeitig $a_2 = a_1 10^n$, $b_2 = b_1 10^n$; aber auch nach dieser Definition dürfte es nicht leicht sein, den Sinn des Satzes zu finden. Ursprünglich hielt ich den Wortlaut für verstümmelt, aber nach genauerem Einsehen des Beweises des Satzes kam ich zu der Ansicht, daß die richtige Deutung sei: „Wenn vier Zahlen eine Proportion bilden, so wird die Proportion bestehen, wenn man die zwei ersten Zahlen mit 10^p, die zwei letzten Zahlen mit 10^q multipliziert", und diese Deutung betrachte ich noch als die richtige.

---

[23] Siehe VIÈTE a. a. O. S. 126: „Si B planum in $A - A$ cubo, aequatur Z solido, & rursus E cubus $-B$ piano in E, aequetur Z solido: sunt tres proportionales, quarum quadrata juncta, conficiunt B planum, summa autem extremarum ducta in mediae quadratum, vel altera extremarum in aggregatum quadratorum à duabus reliquis, facit Z solidum. & fit A alterutra extremarum, E vero earundem summa."

[24] Siehe VIÈTE a. a. O. S. 106: „Proponatur B planum in $A - A$ cubo, aequari Z solido, & rursus B planum in $E - E$ cubo, aequari Z solido ... Est igitur B planum aggregatum quadratorum à duobus de quibus quaeritur lateribus, adjunctum ei quod sub iis fit piano: & oritur ex applicatione differentiae cuborum ad differentiam laterum: ut est generaliter constitutum." Auf die Bedeutung der im Texte erwähnten zwei Sätze hat, soviel ich weiß, erst ZEUTHEN aufmerksam gemacht (*Geschichte der Mathematik im XVI. und XVII. Jahrhundert*, Leipzig 1903, S. 108).

[25] Vgl. ENESTRÖM, *Bibl. Mathem.* **11**$_3$, 1910/11, S. 241–243.

[26] H. CARDANUS, *Ars magna sive de regulis algebraicis*, cap. I § 4; Ausgabe Basel 1570, S. 7.

[27] Siehe ENESTRÖM, *Über eine dem Jordanus Nemorarius zugeschriebene kurze Algorismusschrift*; *Biblioth. Mathem.* **8**$_3$, 1907/08, S. 142.

Bei J. Widman kommt[28] folgender Satz vor: „wann du multiplicierest das centrum das ist die zale dy do ist von centrum biss in winnckel wider inn sich selber vn̄ des product mit 3 vn̄ darnach ra. desselben product ist ein seytten vn̄ ist recht.“ Es handelt sich um die Berechnung der Seite eines gleichseitigen Dreiecks, wenn man den Radius des umgeschriebenen Kreises kennt, und diesen Radius bezeichnet Widman im vorangehenden Satze durch das Wort „centrum“, so daß die Worte: „das ist die zale dy do ist von centrum biss in winnckel“ eigentlich eine Erklärung des Termes „centrum“ sein sollen; aber deutlich kann man seine Ausdrucksweise jedenfalls nicht nennen.

Endlich wird das Verständnis der älteren mathematischen Schriften zuweilen durch wirkliche Denkfehler erschwert, und wenn die Darstellung aus einem der oben angegebenen Griiade an sich schwer verständlich ist, kann es durchaus unmöglich werden, den Sinn einer Behauptung ausfindig zu machen.[29]

Aus den vorangehenden Ausführungen und Belegen dürfte ersichtlich sein, daß und warum die Benutzung der Quellenschriften nicht unter allen Umständen bei mathematischer Geschichtsschreibung zu empfehlen ist. Durch das Zurückgehen auf die Quellen wird ein mathematisch-historischer Verfasser freilich gewisse Fehler seiner Vorgänger vermeiden können, aber es ist sehr wohl möglich, daß er andere und vielleicht noch größere Fehler sich
(9) zuschulden kommen läßt. Die Frage wird also, unter welchen Bedingungen die Quellenstudien einem solchen Verfasser wirklichen Nutzen bringen werden.

In erster Linie sollten natürlich die Quellen von den geschulten mathematisch-historischen Forschern benutzt werden. Aber um ein solcher zu werden, muß man sich erst durch gewissenhafte Studien eingehende und umfassende Kenntnisse auf diesem Gebiete verschafft haben, und für diesen Zweck ist meines Erachtens nötig, daß man wenigstens die vom historischen Gesichtspunkte aus wichtigsten mathematischen Schriften selbst gelesen hat. Für einen mathematisch-historischen Verfasser kommen also zwei Arten von Quellenstudien in Betracht, nämlich teils die vorbereitenden, die erledigt werden sollen, bevor er daran denkt, als Verfasser aufzutreten, teils die speziellen, die bei der Anfertigung einer bestimmten Arbeit nötig werden.

Indessen gibt es Fälle, in denen das Zurückgehen auf die Quellen zu empfehlen sein kann, auch wenn die Hauptbedingung nicht erfüllt worden ist. Unter diesen Fällen ist wohl der wichtigste das Bearbeiten von Monographien über einen bestimmten Mathematiker oder ein sehr spezielles Problem. Ohne Zweifel kann auch in diesem Falle die fehlende Schulung unrichtige Angaben veranlassen, aber bei Monographien sind gewöhnlich umfassende Kenntnisse weniger notwendig; je schwieriger es wegen der Seltenheit der Bücher oder aus sprachlichen Gründen ist, die Quellenschriften zu benutzen, um so angebrachter ist es, von der Bedingung in betreff der Schulung abzusehen. Ein anderer Fall ist, wenn man recht einfache literarische Aufschlüsse sucht, z. B. das Druckjahr oder den Druckort eines Buches; für diesen Zweck sind ja mathematisch-historische Kenntnisse überhaupt unnötig.

Dagegen ist bei der Anfertigung von mathematisch-historischen Arbeiten das Quellenstudium im allgemeinen von zweifelhaftem Nutzen, wenn der Verfasser nur oberflächliche oder allzu lückenhafte mathematisch-historische Kenntnisse besitzt. Wenn ein solcher Verfasser z. B. Auskunft über die Behandlung der Theorie der Gleichungen bei Cardano sucht und wenn er für diesen Zweck die *Ars magna* selbst studiert, so bringt ihm ja der oben zitierte Passus: „Ubi plures [impares] denominationes numero comparantur, etiam si mille

[28] J. Widman, *Behennde vnnd hübsche Rechnung auff allen Kauffmanschafften*, Ausgabe Augsburg 1526, Bl. 169 a.

[29] Vgl. z. B. Eneström, *Biblioth. Mathem.* **11**$_3$, 1910/11, S. 164–165.

forent, una erit aestimatio rei vera, et nulla ficta" gar keine Belehrung. Direkt schädlich kann das Quellenstudium werden, wenn der Verfasser nicht versteht, wie unvollständig seine mathematisch-historischen Kenntnisse sind, und in diesem Falle kann es sogar gefährlich sein, eine Quellenschrift zur Verfügung zu haben, weil der Verfasser dadurch verlockt werden kann, sich über Sachen zu äußern, die ihm durchaus fremd sind. Ich erlaube mir, einen recht auffälligen Beleg hierfür zu bieten.

Vor ein paar Jahren veröffentlichte K. Bopp einen Artikel[30], worin er den kleinen Traktat des (10)
Regiomontanus *De compositione metheoroscopii* noch einmal zum Abdruck brachte und mit einer Erläuterung versah. Seine Vorlage war ein Exemplar einer älteren Ausgabe, das, wie er selbst mitteilt, ihm „vor kurzem der Buchhandel in die Hände führte", und in betreff der Ausgabe, die kein Druckjahr hatte, bemerkte Bopp: „wir glauben aus der ganzen Form und den Abbreviaturen unseres Exemplars, welches klein in 4^o ist, den Schluß ziehen zu dürfen, daß wir es hier mit einer zu Lebzeiten Regiomontans oder kurz nach seinem Tode aus seiner Nürnberger Offizin hervorgegangenen Inkunabel zu tun haben, uns noch nähere Vergleichung der Ausgaben vorbehaltend"; überdies brachte Bopp ein Faksimile der Titelseite seiner Vorlage. Nun steht auf dieser Seite rechts unten der Buchstabe H, und daraus ersieht der Bibliograph sofort, daß man höchstwahrscheinlich mit einem Ausschnitte aus einem Buche mit wenigstens 60 Druckseiten zu tun hat. Aber es ist kaum anzunehmen, daß ein solches Buch, wenn es zu Lebzeiten des Regiomontanus oder kurz nach seinem Tode, also spätestens um 1480, erschien, bisher unbekannt geblieben wäre. Noch unwahrscheinlicher wird Bopps Schlußfolgerung, wenn man seine Vorlage einsieht. Ich erkenne offen an, daß ich mich nur oberflächlich mit dem Studium der Wiegendrucke beschäftigt habe; aber dennoch wage ich zu behaupten, daß man auf den ersten Blick die Unrichtigkeit der Folgerung erkennen muß: die Vorlage Bopps ist kein Wiegendruck, und am wenigsten kann sie aus der Zeit vor 1480 stammen. Bopp macht auf die Abbreviaturen aufmerksam; aber wenn er die Originalausgabe des *Opus novum de proportionibus* Cardanos, die 1570 erschien, sich angesehen hätte, so würde er sofort gefunden haben, daß daselbst dieselben Abbreviaturen vorkommen.[31]

Allein bei diesem wesentlich negativen Ergebnis braucht man nicht stehen zu bleiben. Bekanntlich haben Houzeau und Lancaster eine *Bibliographie générale de l'astronomie* veröffentlicht, und obgleich diese Arbeit nicht besonders zuverlässig ist, sollte man nicht unterlassen, sie zu Rate zu ziehen, wenn man über eine astronomische Schrift vorläufige Auskunft haben will. In dieser Arbeit findet man nun folgende Schriften verzeichnet:[32]

> Regiomontanus , J., Epistola ad Bessarionem de compositione meteoroscopi. 4^o, Marpurgi, 1537.
>
> Dryander, J., Annulorum trium diversi generis instrumentorum astronomicorum componendi ratio atque usus. 4^o, Marpurgi, 1537; fig. sur bois.

Wenn man diese zwei Angaben mit dem Umstand zusammenstellt, daß die Vorlage Bopps auf dem Titelblatt den Buchstaben H hat, kann man kaum umhin, anzunehmen, daß das von Bopp benutzte Exemplar ein Ausschnitt aus dem Buche Dryanders sei, und diese Annahme ist auch wirklich richtig. Ich besitze selbst ein Exemplar des Buches, und Blatt H1a meines Exemplars enthält eben die Titelseite, die Bopp im Faksimile reproduziert hat; die folgenden drei Seiten bringen den von Bopp abgedruckten Text, und nach dem Traktate von Regiomontanus folgen (11)
noch 28 Druckseiten. Voran geht teils ein Titelbogen (8 Druckseiten), teils die Bogen A–G (nur 48 Druckseiten, weil der letzte dieser Bogen sowohl die Signatur F als die Signatur G hat), so

[30] K. Bopp, *Ein Sendschreiben Regiomontans an den Cardinal Bessarios*; **Arch. für d. Gesch. d. Naturw. und d. Technik 1**, 1909, S. 395–401.

[31] 2) H. Cardanus, *Opus novum de proportionibus numerorum motuum, ponderum, sonorum, aliarumgue rerum mensurandarum*, Basel 1570. In betreff der Abbreviaturen der Boppschen Vorlage siehe z. B. S. 20 Z. 1, 7, 13, 16, 35, 40; S. 35 Z. 31 bei Cardano.

[32] J. C. Houzeau et A. Lancaster, *Bibliographie générale de l'astronomie* **1** : 1, Bruxelles 1887, S. 554, 573.

daß die ganze Schrift 88 unpaginierte Seiten enthält. Die Schrift ist übrigens in den öffentlichen Bibliotheken gar nicht selten; ein Exemplar befindet sich nicht weit von Heidelberg, nämlich in der Stadtbibliothek in Frankfurt a. M.[33]

Wenn ich den jetzt erwähnten Fall als einen Beleg für die Gefährlichkeit, eine Quellenschrift zur Verfügung zu haben, angeführt habe, so habe ich nicht daran gedacht, daß die Leser des Artikels von Bopp irregeführt werden können, denn es handelt sich um eine Angabe, die für die Geschichte der Mathematik von sehr untergeordneter Bedeutung ist, sondern ich habe an Bopp selbst gedacht Für ihn kann es unter keinen Umständen angenehm sein, auch nur eine Vermutung ausgesprochen zu haben in betreff einer Frage, worüber er durchaus inkompetent war, sich zu äußern. Anderseits gibt es zahlreiche Belege dafür, daß Verfasser mit ungenügenden mathematisch-historischen Kenntnissen, wenn sie versucht haben, auf die Quellen zurückzugehen, irrtümliche Ansichten über wichtige mathematisch-historische Fragen verbreitet haben. Am schlimmsten kann das Ergebnis werden, wenn ein solcher Verfasser eine reiche Phantasie besitzt, und wie ein neuer Irrtum dann durch eine frühere Unrichtigkeit veranlaßt wird, habe ich an dem Vortrag über die Geschichte der Infinitesimalrechnung, den Cantor 1900 in Paris hielt, erläutert.[34]

Loria hat kürzlich bemerkt[35], daß die mathematisch-historische Forschungsarbeit scheinbar eine wahre Sisyphusarbeit sei. Er nimmt dabei auf den Umstand Bezug, daß die Lösungen vieler mathematisch-historischer Fragen durch Entdeckung von neuem Material als unrichtig oder wenigstens unsicher nachgewiesen worden sind, so daß die schon ausgeführte Arbeit wiederholt unnütz geworden ist, und er hat als Beleg die Heron-Frage genannt. Die Bemerkung von Loria ist gewiß richtig, aber der Grund, warum die mathematisch-historische Arbeit als eine Sisyphusarbeit erscheint, ist meiner Ansicht nach in erster Linie ein anderer. Daß die älteren Verfasser von mathematisch-historischen Handbüchern sehr viele unrichtige Angaben gebracht haben, ist eine bedauerliche Tatsache, die noch den Fachgenossen große Ungelegenheit verursacht; aber die Verbesserung dieser unrichtigen Angaben würde man ja früher oder später erzielen können. Allein eine wirkliche Sisyphusarbeit muß die mathematisch-historische Arbeit werden, solange es Personen mit ungenügenden Kenntnissen gibt, die sich vornehmen, die Geschichte der Mathematik zu
(12) bearbeiten und dabei versuchen, die Quellen zu benutzen, ohne zu verstehen, wie wenig sie die nötige Kompetenz besitzen. Auf diese Weise werden nämlich immer neue Unrichtigkeiten zu verbessern sein, und eine wie große Zahl von neuen Irrtümern ein einziger Verfasser sich zuschulden kommen lassen kann, weiß der Sachkundige, der mit Aufmerksamkeit die Cantorschen *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* studiert hat.

Es wäre also sehr erwünscht, wenn man die Verfasser, die keine wirkliche mathematisch-historische Schulung besitzen, bewegen könnte, nur in den oben erwähnten Fällen auf die Quellen zurückzugehen, aber sonst, soweit möglich, sich der schon vorhandenen mathematisch-historischen Literatur zu bedienen, natürlich so, daß sie die zuverlässigsten Arbeiten zu Rate ziehen. Dadurch würde man wenigstens in den meisten Fällen vermeiden können, die schon allzu große Zahl von unrichtigen Angaben zu vermehren. Allerdings muß man auch hier voraussetzen, daß die mathematischen Kenntnisse des Verfassers nicht allzu oberflächlich sind; sonst kann es leicht eintreffen, daß auch der deutlichste und korrekteste Bericht über den Inhalt einer älteren mathematischen Schrift mißverstanden wird

---

[33] *Stadtbibliothek Frankfurt a. M. Katalog der mathematischen Abteilung*, Frankfurt a. M. 1909, S. 214.

[34] Siehe Eneström, *Biblioth. Mathem.* **11**$_3$, 1910/11, S. 346.

[35] G. Loria, *Bollett. di bibliogr. d. sc. matem.* **13**, 1911, S. 59.

und dadurch neue unrichtige Angaben veranlaßt. Ein schlagender Beleg hierfür ist in den folgenden Zeilen zu finden.

Im Jahre 1648 veröffentlichte der englische Mathematiker RICHARD WHITE (ALBIUS) ein Buch mit dem Titel *Hemisphaerium dissectum*, worin er auch die Frage, die krumme Oberfläche eines schiefen Kreiskegels zu berechnen, behandelte. Das Ergebnis seiner Untersuchungen war der folgende Satz:[36]

> Superficies conica coni scaleni aequalis est circulo, cuius radius est medius proportionalis inter radium basis coni scaleni et lineam quae media est in ratione arithmetica inter omnes perpendiculares, quae a vertice ipsius coni ad omnes tangetes in punctis circuli ducutur.

Nachdem WHITE diesen Satz bewiesen hat, fügt er nachträglich[37] 28 Druckzeilen hinzu, die einen Versuch enthalten, das arithmetische Mittel der im Satze erwähnten Perpendikel ausfindig zu machen. Nach seiner Mutmaßung könnte man dieses Mittel auf folgende Weise erhalten: „Quaeratur media arithmetica inter aggregatum ex AD [d. h. die größte Seite des Kegels] et DB [d. h. die kleinste Seite des Kegels] et duplum lateris coni recti super eadem basi et in eadem altitudine constituti."

Einen ausführlichen Bericht über den Satz von WHITE nebst dessen Beweise hat KÄSTNER in seiner *Geschichte der Mathematik* gegeben.[38] Nachdem KÄSTNER den Wortlaut des Satzes abgedruckt hat, bemerkt er:

> Das Verfahren scheint mir richtig, wenn man den Umfang der Grundfläche in Elemente zerlegt, und jedes als Grundlinie eines Dreyecks ansieht, dessen Scheitel in des Kegels Spitze ist, so ist des Kegels Fläche die Summe dieser Dreyecke und jedes Dreyeek ist halb so groß als ein Product aus dem Elemente in ein Perpendikel auf des Elements (13)
> Verlängerung oder auf die Tangente.
>
> Von dem arithmetischen Mittel zwischen allen diesen Perpendikeln läßt sich folgende Vorstellung geben: Man fällt ein Loth von des ungleichseitigen Kegels Spitze auf die Ebene der Grundfläche; durch dieses Loth und der Grundfläche Mittelpunkt legt man eine Ebene. Sie schneidet die Grundfläche in einem Durchmesser, und die Kegelfläche in einem Paar einander gegenüberstehenden Seiten deren eine unter allen Seiten die größte ist, die andere die kleinste, jede von ihnen ist zugleich senkrecht auf die Tangente der Grundfläche an dem Punkte wo die Seite auf die Grundfläche trifft.
>
> Nun stellt sich RICHARD, einen anderen Durchmesser der Grundfläche vor, an dessen beyde Enden Tangenten gezogen, und auf jede derselben von des Kegels Spitze ein Perpendikel. Er beweist geometrisch, ein Paar solcher zusammengehöriger Perpendikel, betrage am meisten, wenn das eine des Kegels größte Seite ist, das andere die kleinste. Auch sey das geringste was ein Paar solche Perpendikel betragen, das doppelte der Seite eines gleichseitigen Kegels, der mit dem ungleichseitigen gleiche Grundfläche, und Höhe hat. ... Da verhält sieh nun R. so: Er addiert die größte und kleinste Seite, des ungleichseitigen Kegels, und zwo gleiche Seiten des erwähnten gleichseitigen; Die Summe dieser vier Größen dividirt er mit vier, das meynt er solle das verlangte arithmetische Mittel geben. Geometrisch erwiesen sey es nicht, so lange aber nicht bewiesen wird, daß diese Vorschrift falsch ist, hält er sie für richtig.
>
> RICHARDS Verfahren zeigt viel geometrischen Scharfsinn.

Dieser durchaus korrekte Bericht von KÄSTNER ist ja so deutlich wie möglich, und überdies ist der Gegenstand elementar, so daß von vornherein ein Mißverständnis ausgeschlossen zu sein scheint Aber in den CANTORschen *Vorlesungen* wird auf Grund des Berichtes (CANTOR hat nämlich das Buch von WHITE nicht selbst gesehen) die folgende Darstellung des Verfahrens gegeben[39]:

[36] R. ALBIUS, *Hemisphaerium dissectum,* Rom 1648, S. 286.

[37] ALBIUS, a. a. O. S. 288–289.

[38] A. G. KÄSTNER, *Geschichte der Mathematik* **3**, Göttingen 1799, S. 216–218.

[39] CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* $\mathbf{2}^2$, Leipzig 1900, S. 892.

> Beim schiefen Kegel gibt es unendlich viele Kegelseiten paarweise in je einer durch die Kegelspitze und den Mittelpunkt des Grundkreises hindurchgehenden Ebene gelegen, und das arithmetische Mittel aller dieser Seiten muß statt s in die beim geraden Kreiskegel giltige Formel [πrs, wo s die Seite, r der Halbmesser des Grundkreises ist] eingesetzt werden. Zwei Paare von Seiten zeichnen sich aus, erstens das Paar, welches in der Ebene liegt, die durch die senkrechte Höhe des Kegels hindurchgeht, zweitens das Paar, welches in der zur genannten Ebene senkrechten Ebene sich befindet. Das erste Paar besteht aus der größten und kleinsten Seite, das zweite Paar ist das einzige gleichseitige. Die Summe des ersten Paares ist die größte, die des zweiten die kleinste der überhaupt möglichen Summen. Den vierten Teil dieser vier ausgezeichneten Kegelseiten nimmt WHITE als das arithmetische Mittel aller Kegelseiten. Geometrisch bewiesen sei es allerdings nicht, aber so lange nicht bewiesen werde, daß die Vorschrift falsch sei, halte er sie für richtig. Bequemer kann man sich eine Beweisführung in der Mathematik gewiß nicht machen.

Wenn ein Mathematiker nur diese Darstellung liest, ohne den Bericht von KÄSTNER zu kennen,
(14) muß er natürlich die Auffassung bekommen, daß WHITE ein schlechter Mathematiker war, denn bei der Berechnung der Oberfläche des schiefen Kegels hat man ja keinen Anlaß, das arithmetische Mittel der ***Seiten*** in Betracht zu ziehen. Aber wenn man die CANTORsche Darstellung mit dem KÄSTNERschen Berichte vergleicht, sieht man sofort, daß der schlechte Mathematiker nicht WHITE, sondern CANTOR ist, und daß CANTOR in Wirklichkeit den Lesern der *Vorlesungen* ein Zerrbild des Verfahrens von WHITE gebracht hat. In dem CANTORschen Berichte kommen zwei Ebenen vor, die beide durch die Kegelspitze und den Mittelpunkt des Grundkreises gehen und zueinander senkrecht sind; jede dieser Ebenen bestimmt ein Paar von Seiten des schiefen Kegels. Allein WHITE selbst benutzt gar nicht die zweite Ebene, sondern spricht, wie auch KÄSTNER in seinem Berichte deutlich angibt, von einem Paar der Seiten des schiefwinkligen Kegels und einem Paar der Seiten des rechtwinkligen Kegels mit derselben Grundfläche und derselben Höhe. Arn schlimmsten ist selbstverständlich, daß CANTOR die von WHITE in Betracht gezogenen Perpendikel mit den Seiten des schiefwinkligen Kegels verwechselt hat, denn dadurch bekommt der Leser der *Vorlesungen* eine durchaus unrichtige Auffassung des Grundgedankens der Regel von WHITE. Allerdings benutzt WHITE zwei besondere Seiten dieses Kegels, aber nicht weil sie Seiten sind, sondern weil sie ausnahmsweise mit den Perpendikeln auf die Tangenten zusammenfallen. Diese Unrichtigkeit der CANTORschen Darstellung hängt damit zusammen, daß gerade das Interessanteste des WHITEschen Verfahrens von CANTOR gar nicht erwähnt wird. WHITE betrachtet, wie aus seiner eigenen Darstellung und ebenso aus dem KÄSTNERschen Berichte deutlich hervorgeht, die krumme Oberfläche als die Summe einer unendlich großen Zahl von Dreiecken mit unendlich kleinen Grundlinien von gleicher Länge, setzt dann statt jedes Dreieckes das halbe Produkt der Höhe und der Grundlinie, und bekommt endlich, da die Grundlinien Elemente des Umfanges des Grundkreises sind, als Ausdruck für die Summe das Produkt aus diesem Umfang und dem halben arithmetischen Mittel der Höhen, d. h. der Perpendikel, die von der Kegelspitze auf die Tangenten des Grundkreises gezogen werden Was CANTOR als Hauptsache bei WHITE hervorhebt, nämlich den kühnen, aber selbstverständlich mißlungenen Versuch, den Grenzwert der Summe zu bestimmen, ist für WHITE selbst eine Nebensache, und die Schlußworte des CANTORschen Berichtes: „Bequemer kann man sich eine Beweisführung in der Mathematik gewiß nicht machen", sind darum durchaus unangebracht.

In Fällen der jetzt erwähnten Art genügt es offenbar nicht, den Verfasser auf zuverlässige mathematisch-historische Arbeiten zu verweisen, sondern um der Sisyphusarbeit zu entgehen, müßte man ihn bewegen, überhaupt von solchen Gegenständen, bei deren Behandlung mathematische Kenntnisse nötig sind, Abstand zu nehmen.

— — —

Da ich mich in diesem Artikel mit der Art und Weise, wie die mathematisch-historischen Quellenschriften benutzt werden sollen, beschäftigt habe, erlaube ich mir nachträglich eine Frage zu berühren, die damit recht nahe zusammenhängt, nämlich die folgende: Welche Quellenschriften sollen bei der Behandlung eines bestimmten Zeitabschnittes der Geschichte der Mathematik berücksichtigt werden? Da diese Frage verschieden beantwortet werden kann, je nachdem man auf die Entdeckungsgeschichte oder auf die Entwicklungsgeschichte (15)
der Mathematik Bezug nimmt, werde ich die zwei Fälle nacheinander in Betracht ziehen.

In betreff der Entdeckungsgeschichte der Mathematik dürfte klar sein, daß alle Quellenschriften benutzt werden sollen, die zuverlässige Auskunft über die Entdeckungen der fraglichen Periode und die Zeitfolge dieser Entdeckungen bringen. Für die Zeit nach der Erfindung der Buchdruckerkunst sind also nicht nur gedruckte Bücher, sondern auch nachgelassene Handschriften, Briefe usw. zu benutzen, sofern sie wirklich zuverlässige Aufschlüsse über den zu behandelnden Gegenstand enthalten. Natürlich kann es zuweilen schwierig sein, zu entscheiden, ob Handschriften echt oder gefälscht sind; aber wenn man keinen besonderen Grand hat, eine Fälschung anzunehmen, ist eine nachgelassene Handschrift auch als Quellenschrift anzusehen. Beispielsweise wurde das *Triparty en la science des nombres* von CHUQUET erst etwa 400 Jahre nach dem Tode seines Verfassers gedruckt, aber dennoch soll der Traktat bei der Behandlung der Geschichte des 15. Jahrhunderts benutzt werden, so lange man keinen Grund hat, die einzige bekannte Handschrift als untergeschoben oder interpoliert zu betrachten.

Etwas schwieriger wird die Beantwortung der Frage, wenn man mit der Entwicklungsgeschichte der Mathematik zu tun hat. In diesem Falle liegt ja das Hauptgewicht auf den Umständen, die die Entwicklung der Wissenschaft beeinflußt haben, und wenn man diese Umstände die Entwicklungsmomente der Mathematik nennt, sollten also eigentlich nur die Quellenschriften benutzt werden, die über diese Momente Auskunft geben. Anderseits ist klar, daß, sofern es sich um die Zeit nach der Erfindung der Buchdruckerkunst handelt, im allgemeinen nur in den gedruckten Schriften die Entwicklungsmomente zu finden sind; denn was nur handschriftlich vorhanden ist, kann gewöhnlich keinen oder fast gar keinen Einfluß auf die Entwicklung der Wissenschaft haben. Für die Entwicklungsgeschichte einer bestimmten Periode sind also in erster Linie als Quellenschriften zu betrachten die gedruckten Bücher, die vor dem Ende der Periode erschienen sind und zuverlässige Aufschlüsse über die Geschichte der Mathematik während der Periode geben. Aber auch die Handschriften sollen zu Rate gezogen sein, sofern es nicht nachgewiesen oder wenigstens höchst wahrscheinlich ist, daß ihr Inhalt nicht als ein Entwicklungsmoment betrachtet werden kann. Hierbei ist indessen zu bemerken, daß nicht nur eine besondere Entdeckung, sondern auch der ganze Stand der Mathematik an einem gewissen Zeitpunkte ein Entwicklungsmoment sein kann, und natürlich geben die nachgelassenen Handschriften eines verstorbenen Mathematikers bis zu einem gewissen Grade Auskunft über den Stand der Mathematik zu seinen Lebzeiten.

Übrigens kann eine mathematische Entdeckung nicht nur als Entwicklungsmoment, (16)
sondern auch als **Resultat** der Entwicklung betrachtet werden, und von diesem letzteren Gesichtspunkte aus kann sie sehr wohl eine entwicklungsgeschichtliche Bedeutung haben, auch wenn es konstatiert wird, daß sie selbst gar keinen Einfluß auf die mathematischen Theorien in einem bestimmten Zeitabschnitte gehabt hat. In der Tat kann man ja in gewissen Fällen den Wert einer neuen Methode nicht abschätzen, ohne zu untersuchen, bis zu

welchem Grade und wie rasch wichtige Resultate durch diese Methode erzielt worden sind. Aus diesem Grunde kann zuweilen eine Entdeckung, die nur handschriftlich vorliegt und den Zeitgenossen des Entdeckers durchaus unbekannt geblieben ist, für die Entwicklungsgeschichte der Mathematik von Bedeutung sein. Man kommt also auch hier im wesentlichen zu demselben Ergebnis als in betreff der Entdeckungsgeschichte, nämlich daß alle Quellenschriften, die zuverlässige Aufschlüsse über den Stand der Mathematik während der Periode geben, benutzt werden sollen. Freilich bekommen in diesem Falle die gedruckten Schriften größeren Wert als Quellenschriften, weil der Inhalt im allgemeinen größeren und nachweislicheren Einfluß auf die Entwicklung gehabt hat. Darum soll man auch bei der Darstellung ausdrücklich angeben, ob eine Entdeckung in einer gedruckten oder in einer ungedruckten Schrift zu finden sei, und im letzteren Falle untersuchen, inwieweit die Entdeckung schon zu Lebzeiten des betreffenden Mathematikers bekannt wurde.

Die meisten bisher erschienenen Darstellungen der Geschichte der Mathematik behandeln entweder wesentlich nur die Entdeckungsgeschichte oder eine Vereinigung von Entdeckungsgeschichte und Entwicklungsgeschichte. Es ist darum natürlich, daß sie im allgemeinen sowohl die gedruckten Schriften wie die Handschriften als Quellenschriften betrachten, ohne im allgemeinen einen Unterschied zwischen diesen zwei Arten zu machen. Nur in den CANTORschen *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* kommt, soviel ich weiß, ein Versuch vor, den zwei Arten verschiedene Anwendung zuzuweisen.

Ursprünglich scheint CANTOR ohne Unterschied gedruckte Schriften und Handschriften als Quellenmaterial benutzt zu haben; so z. B. brachte er 1891 im 1. Heft des 2. Bandes der *Vorlesungen*[40] einen ausführlichen Bericht über das *Triparty en la science des nombres* von CHUQUET, ohne besonders zu begründen, warum er eine 1484 verfaßte, aber erst 1880
(17) gedruckte Schrift als Quellenschrift für die Geschichte des 15. Jahrhunderts benutzte; nur im Vorübergehen lenkte er die Aufmerksamkeit darauf, daß das *Triparty en la science des nombres* von einem Verfasser des 16. Jahrhunderts umfassend benutzt worden war. Ebenso berichtete CANTOR im 14. Abschnitte[41], der sich auf die Zeit 1550–1600 bezieht, ohne weiteres über eine Arbeit von VIÈTE, die nach CANTORS eigener Aussage wahrscheinlich nicht zu Lebzeiten des Verfassers († 1603) erschien, und für welche er keine frühere Druckausgabe als die *Opera* vom Jahre 1646 angeben konnte. Allein bei der Bearbeitung des 3. Bandes der *Vorlesungen* scheint CANTOR auf den Gedanken gekommen zu sein, daß das Handschriftenmaterial auf andere Weise als die gedruckten Schriften zu benutzen sei. in diesem Bande kommen nämlich folgende Bemerkungen vor[42]:

> Keineswegs Unerhebliches, könnte man uns hier vorwerfen, haben wir bereits im II. Bande vorweggenommen. Wir haben FERMATS zahlentheoretische Leistungen dort insgesammt zur Sprache gebracht, und doch sind dessen Anmerkungen zu DIOPHANT erst 1670, seine *Opera Varia* erst 1679, Briefe zahlentheoretischen Inhaltes von FERMAT, von BROUNCKER, von FRENICLE, von WALLIS erst 1693 in der Ausgabe von WALLIS' Werken gedruckt worden. Man könnte uns vorwerfen, wir seien in unserer Erzählung der Geschichte vorausgeeilt, wir hätten gegen das geschichtliche Gesetz uns verfehlt, daß Erfindungen und Erfinderrechte kein früheres Datum tragen als das der Veröffentlichung.[43] So bereit-

[40] CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* **2**^{1}, Leipzig [1891–] 1892, S. 319–330.
[41] CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* **2**^{1}, S. 579–581.
[42] CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* **3**^{1}, Leipzig 1898, S. 94–95, 381.
[43] Allerdings bemerkte Herr CANTOR schon im 2. Bande (S. 740 der ersten Auflage) der *Vorlesungen*,

> willig wir diesen Vorwürfen Berechtigung zugestehen, so können wir doch zwei wesentliche Entschuldigungsgründe für unser Verhalten in Anspruch nehmen. Erstlich blieben Fermats zahlentheoretische Leistungen durchaus nicht ganz geheim. Durch Briefe und Gespräche wurden viele seiner Sätze bekannt, lange bevor sie gedruckt waren. Zweitens aber hat eine Bestreitung von Fermats Anrecht an seine zahlentheoretischen Erfindungen niemals stattgefunden und konnte auch nicht stattfinden. Vor der Veröffentlichung wie nach der Veröffentlichung blieben die Fermatschen Sätze sein ausschließliches Eigentum.
>
> . . . .
>
> Erst 1745 kam der Aufsatz [von Nikolaus I. Bernoulli über das New- (18)
> tonsche Verfahren zur Aufsuchung von Faktoren eines Polynoms] in dem Briefwechsel zwischen Johann Bernoulli und Leibniz zur Veröffentlichung. Mit Rücksicht darauf, daß der Aufsatz doch schon im Mai 1708 jenen beiden großen Mathematikern bekannt war, berichten wir gleich hier [d. h. im Abschnitte 1700–1726] über ihn.

Indessen dürfte es zweifelhaft sein, ob Cantor durch diese Bemerkungen beabsichtigte, eine allgemein gültige methodologische Regel aufzustellen. Vielleicht war der Zweck der Bemerkungen nur, eine aus subjektiveren Gründen schon gewählte Darstellungsweise zu motivieren. Einen Anlaß, dies zu vermuten, bekommt man, wenn man von den folgenden Zeilen desselben Bandes der *Vorlesungen*[44] Kenntnis nimmt:

> Bei ungedruckten Arbeiten ist es ... meistens ziemlich gleichgiltig, wo man sie geschichtlich einreiht, es sei denn, daß man aus ihnen für den Verfasser ein geistiges Erstlingsrecht, oder mindestens die Unabhängigkeit seines Gedankenganges sichern will.

Jedenfalls hat Cantor bei der Bearbeitung der 2. Auflage des 2. Bandes der *Vorlesungen* keinen Versuch gemacht, die methodologische Regel, die man aus den Bemerkungen herauslesen könnte, anzuwenden. Beispielsweise berichtet er wie früher im Abschnitte 1450–1500 über das *Triparty en la science des nombres* von Chuquet[45], obgleich er weder behaupten kann, daß diese Arbeit vor 1500 zwei großen Mathematikern bekannt war, noch daß eine Bestreitung von Chuquets Anrecht an seine Erfindungen niemals stattgefunden hat — in Wirklichkeit ist ja der Inhalt der Chuquetschen Arbeit bis auf unsere Tage zum Teil fast unbekannt gewesen, zum Teil De la Roche zugewiesen worden.

Dagegen hat Cantor im Schlußkapitel des sogenannten 4. Bandes der *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* eine bestimmtere Behauptung in betreff der Benutzung des handschriftlichen Quellenmaterials eingeschaltet, nämlich die folgende[46]:

> Was handschriftlich in den Aufbewahrungsräumen einer Akademie verschlossen liegt, kann nun und nimmermehr als wirksam in dem Sinne betrachtet

daß „die Geschichte unwiderruflich die Veröffentlichungszeit als allein maßgebend betrachten muß, wo Erstlingsrrechte zu vergeben sind“, aber wenn man die folgenden Seiten liest, so findet man, daß er ohne jede besondere Begründung im Kapitel 77, das der Periode 1600–1668 angehört, über Schriften von Fermat berichtet, die erst 1679 erschienen. Die zitierte Bemerkung kann sich also gar nicht auf die von mir behandelte Frage beziehen.

[44] Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* $\mathbf{3}^1$, S. 317.

[45] Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* $\mathbf{2}^2$, S. 347–359.

[46] *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik.* Herausg. von M. Cantor, Leipzig 1908, S. 1079.

> werden, daß es sich befruchtend und fördernd erwiesen habe, und demzufolge ist für die Geschichte der Mathematik unserer Ansicht nach erst das Druckjahr einer Abhandlung ihr Geburtsjahr,

(19) und er hat hieraus gefolgert, daß eine Geschichte der Mathematik von 1759 bis 1799 nicht auf die Schriften von Euler, die nach 1799 von der Petersburger Akademie veröffentlicht worden sind, Rücksicht nehmen soll, obgleich Euler bekanntlich schon 1783 gestorben ist.

Es dürfte unnötig sein, auf eine ausführliche Kritik des Cantorschen Ausspruches, daß das Druckjahr einer mathematischen Arbeit ihr Geburtsjahr sei, einzugehen. Für die Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter mit Ausnahme der letzten Jahrzehnte ist ja der Ausspruch sinnlos, und vielleicht will Cantor selbst seine Regel nur für die neuere Zeit aufrechthalten. Allerdings ***kann*** man einen Bericht über die mathematischen Entdeckungen der neueren Zeit in chronologischer Folge nach den ***Druckjahren*** bearbeiten und diesen Bericht eine Geschichte der Mathematik ***nennen***, aber soviel ich weiß, ist bisher niemand auf den Gedanken gekommen, einen solchen Bericht unter dem Titel „Geschichte der Mathematik“ zu veröffentlichen. Auf ganz dieselbe Weise könnte man behaupten, daß eine Geschichte der Mathematik von 1759 bis 1799 ***keine*** Entdeckungen von Lagrange (geb. 1736, gest. 1813) berücksichtigen sollte, denn man ***kann*** ja einen Bericht über die Entdeckungen chronologisch entweder nach den ***Geburtsjahren*** oder nach den ***Todesjahren*** der Entdecker ordnen und den Bericht „Geschichte der Mathematik“ ***nennen***.

In betreff der Frage, ob es bei der Behandlung der Entwicklungsgeschichte der Mathematik genügt, nur die Entdeckungen, die sich schon direkt befruchtend und fördernd erwiesen haben können, in Betracht zu ziehen, verweise ich auf das, was ich oben bemerkt habe. Man könnte sich ja die Aufgabe stellen, eine Geschichte der Mathematik zu bearbeiten, die nur die ***wichtigsten*** Entwicklungsmomente behandelt, und ich gebe gern zu, daß die Bearbeitung einer solchen Geschichte von großem Interesse sein würde; es ist nicht unmöglich, daß dieser Gedanke Cantor dunkel vorgeschwebt hat, als er die oben zitierten Zeilen schrieb.[47] Allein bei der Vorbereitung einer Geschichte der fraglichen Art genügt es nicht, die Quellen in zwei Gruppen: „gedruckte Schriften“ und „ungedruckte Schriften“ zu verteilen und ausschließlich die erste Gruppe zu berücksichtigen. Es gibt gedruckte Schriften, die sofort nach ihrem Erscheinen befruchtend und fördernd geworden sein ***könnten***, aber dennoch lange Zeit im Druck vorgelegen haben, bevor sie einen Einfluß
(20) auf die Entwicklung der mathematischen Theorien bekamen. Eine solche Schrift ist beispielsweise *Die lineale Ausdehnungslehre* (1844) von H. Grassmann, und F. Engel hat in seiner ausführlichen Schilderung von Grassmanns Leben diesen Umstand gebührend hervorgehoben.[48] Anderseits gibt es nicht nur ungedruckte, sondern sogar ungeschriebene Quellen, die für die Entwicklungsgeschichte der Mathematik von wesentlicher Bedeutung

[47] Beiläufig erlaube ich mir zu bemerken, daß es irreleitend ist, eine solche spezielle Entwicklungsgeschichte schlechthin Geschichte der Mathematik zu nennen, ganz besonders, wenn dieser Ausdruck in einer Arbeit vorkommt, die wie der sogenannte vierte Band der Cantorschen *Vorlesungen* wesentlich eine Entdeckungsgeschichte der Mathematik ist.

[48] Siehe F. Engel, *Grassmanns Leben*, Leipzig 1911, S. 97: „So erlebte denn Grassmann das, was dem Verfasser eines neuen Werkes das Schmerzlichste sein muß: sein Buch fand nirgends Beachtung, es wurde in der Öffentlichkeit vollständig totgeschwiegen, niemand fand sich, der eine Besprechung geliefert, der es auch nur öffentlich getadelt hätte, und auch die Mathematiker, denen er das Werk zugeschickt hatte, äußerten sich zwar nicht unfreundlich, zum Teil sogar wohlwollend darüber, aber wirklich studiert hatte es keiner von ihnen.“

gewesen sind. Mit Recht hat P. Stäckel vor einigen Jahren darauf hingewiesen[49], daß Weierstrass' Neubegründung der Funktionenlehre zum großen Teil durch seine Schüler mündlich verbreitet worden ist, und daß ein künftiger Geschichtsschreiber des 19. Jahrhunderts zu ganz falschen Ergebnissen kommen müßte, wenn er diese mündliche Quelle der Überlieferung vernachlässigen wollte.

[49] P. Stäckel, *Göttingische gelehrte Anzeigen* 1900, S. 261.

Band 13

Wie kann die weitere Verbreitung unzuverlässiger mathematisch-historischer Angaben verhindert werden?

Zusammenfassung:
Einleitungsweise behandelt ENESTRÖM die Frage, ob es wirklich der Mühe lohnt, zu versuchen, die Aufmerksamkeit auf die unzuverlässigen Angaben, die die mathematisch-historischen Handbücher bringen, durch besondere Anordnungen zu lenken und sie dadurch, so weit möglich, unschädlich zu machen. Er glaubt diese Frage bejahen zu sollen, und als die einzige zur Zeit mögliche Anordnung betrachtet er diejenige, die er seit 1900 benutzt, nämlich das Unterbringen gelegentlicher Berichtigungen der unzuverlässigen Angaben an einer allen Fachgenossen leicht zugänglichen Stelle. In betreff der Form dieser Berichtigungen hebt er hervor, daß es, sofern es sich um die CANTORschen „Vorlesungen" handelt, nicht genügt, ganz einfach die unrichtigen Angaben zu verbessern. Es ist nämlich überdies von Belang, die Aufmerksamkeit auf den Grund der CANTORschen Fehler, das heißt, auf CANTORS mangelhafte Kenntnisse und unbefriedigende Arbeitsmethode, zu lenken. Auf diese Weise erzielt man nämlich, daß die Angaben der „Vorlesungen" überhaupt nur mit großer Vorsicht benutzt werden, und da die CANTORsche Arbeit als die gefährlichste Fehlerquelle der mathematisch-historischen Darstellungen zu betrachten ist, verhindert man dadurch am besten, daß unzuverlässige mathematisch-historische Angaben verbreitet werden.

Quelle: JFM 43.1912, S. 62

---

(1) Im Leitartikel des vorhergehenden Bandes[1] habe ich gewisse Maßregeln erwähnt, die meiner Ansicht nach ergriffen werden sollten, um zu vermeiden daß die Darstellungen der Geschichte der Mathematik ***neue*** unzuverlässige Angaben bringen werden; in betreff der schon vorhandenen Angaben dieser Art bemerkte ich nur,[2] daß sie früher oder später verbessert werden. Indessen kann es für die wissenschaftliche Forschung nicht gleichgültig sein, ob man noch lange Zeit ertragen muß, daß zahlreiche unzuverlässige Notizen in den mathematisch-historischen Handbüchern vorkommen, und aus diesem Grunde habe ich vor einigen Jahren[3] eine kritische Nachprüfung der Angaben, die diese Handbücher bringen,

[1] G. ENESTRÖM, *Über die Bedeutung von Quellenstudien bei mathematischer Geschichtsschreibung*; *Biblioth. Mathem*, **12**$_3$, 1911/12, S. 12–14.

[2] G. ENESTRÖM, a. a. O. S. 11.

[3] G. ENESTRÖM, *Über kritische Behandlung der Geschichte der Mathematik; Biblioth. Mathem.* **9**$_3$,

empfohlen. Prinzipiell dürfte gegen diesen Vorschlag nichts einzuwenden sein; anderseits kann man mit Recht bemerken, daß die Nachprüfung nur sehr langsam ausgeführt werden wird, wenn man nicht versucht, sie durch ganz besondere Anordnungen zu beschleunigen. Die nächste Frage wird nun sein: „Lohnt es wirklich der Mühe, solche Anordnungen zu treffen?“ Auch mit dieser Frage habe ich mich früher, hauptsächlich wegen ihrer methodologischen Bedeutung beschäftigt[4]; hier werde ich dieselbe von einem anderen Gesichtspunkte aus in Betracht ziehen.

Zuerst dürfte klar sein, daß es Fälle gibt, in denen das Vorhandensein unrichtiger mathematisch-historischer Angaben recht bedeutungslos ist. Beispielsweise hat J. Boyer
in seiner *Histoire des mathématiques* (Paris 1900) eine beträchtliche Zahl solcher Angaben (2)
gebracht, aber meiner Erfahrung nach sind die Fehler bisher unschädlich gewesen, und es ist kaum zu befürchten, daß sie künftighin wiederholt werden. Als etwas gefährlicher könnten vielleicht die Ungenauigkeiten gewisser anderer Handbücher kleineren Umfangs betrachtet werden und eine Verbesserung derselben wäre natürlich immer wünschenswert, aber für diesen Zweck dürfte es in den meisten Fällen genügen, durch Rezensionen oder auf andere ähnliche Weise auf die Fehler aufmerksam zu machen. Ein entsprechendes Verfahren möchte ich auch in betreff der unrichtigen Angaben, die hier und da in gewissen mathematisch-historischen Monographien vorkommen, empfehlen.

Ganz anders liegt die Sache in betreff der größeren mathematisch-historischen Handbücher, die noch allgemein benutzt werden, und da die Cantorschen *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* die bisher umfangreichste Darstellung des Gegenstandes bieten, muß man in erster Linie versuchen, die weitere Verbreitung der darin vorkommenden Fehler zu verhindern. Daß diese Fehler besonders gefährlich sind, versteht man ja leicht, da man weiß, daß Cantor lange Zeit eine leitende Stellung als Historiker der Mathematik eingenommen hat und überdies (ob nicht in erster Linie wegen seiner mathematisch-historischen Schriften?) Professor der Mathematik an einer deutschen Staatsuniversität geworden ist. Die Wirkung der Fehler könnte man beseitigen entweder durch Herausgabe eines besonderen Bandes, der die nötigen Verbesserungen, soweit möglich, vollständig enthielte, oder dadurch, daß man allmählich gelegentliche Berichtigungen von Sachkundigen an einer allen Fachgenossen leicht zugänglichen Stelle unterbrächte. Das erste Verfahren setzt indessen voraus, daß es Fachgenossen gäbe, die sich der großen Mühe unterziehen wollten, die drei Bände der *Vorlesungen* Seite für Seite durchzuarbeiten und mit den von Cantor benutzten Quellen genau zu vergleichen; bis auf weiteres dürfte darum das zweite Verfahren das einzige praktisch anwendbare sein.

Diese Überlegung veranlaßte mich, als ich 1899 die dritte Folge der *Bibliotheca Mathematica* vorbereitete, für jedes Heft der Zeitschrift eine Abteilung „Kleine Bemerkungen zu Cantors Vorlesungen über Geschichte der Mathematik“ in Aussicht zu stellen. Ich hatte schon selbst eine nicht unerhebliche Zahl von Ungenauigkeiten der Cantorschen Arbeit notiert und ich war überzeugt, daß meine Fachgenossen auch viele nicht von mir notierte Stellen verbessern könnten. Anderseits war ich damals nicht in der Lage, direkt zu entscheiden, ob die Fehler der *Vorlesungen* verhältnismäßig zahlreich oder selten waren. Teils hatte ich vor 13 Jahren wenig Zeit zu meinen mathematisch-historischen Forschungen und diese Zeit wollte ich in erster Linie gewissen selbständigen Untersuchungen widmen;

1908/9, S. 11–12.

[4] G. Eneström, *Über kritische Behandlung der Geschichte der Mathematik; Biblioth. Mathem.* $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 8–9.

(3) aus diesem Grunde hatte ich die drei Cantorschen Bände noch nicht vollständig durcharbeiten können. Teils war mir die Literatur, die ich nötig hätte, um die Richtigkeit der Cantorschen Angaben zu prüfen, nur sehr unvollständig zugänglich, und endlich war ich noch von der damals allgemein verbreiteten Auffassung[5], die *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* seien ein wirkliches „Standard work", beeinflußt. Ich mußte darum geneigt sein, anzunehmen, daß die Zahl der Fehler der *Vorlesungen* verhältnismäßig recht gering wäre, und daß sie als zufällige Fehler zu betrachten wären.

Ich unterbreche jetzt meine Erzählung, um an einem Beispiel zu erläutern, was ich mit „zufälligen Fehlern" im Gegensatz zu „systematischen Fehlern" meine.

In seiner *Geschichte der Mathematik* hat H. Wieleitner[6], nachdem er einen Artikel von Euler über Primzahlen in den *Nouveaux mémoires de l'académie des sciences de Berlin* 1776 (gedruckt 1779) erwähnt, hinzugefügt, daß Euler „10 Jahre später allgemeine Kennzeichen gegeben hat, um zu entscheiden, ob eine vorgelegte Zahl Primzahl ist oder nicht", und dabei auf eine Abhandlung in den *Nova acta academiae scientiarum Petropolitanae* **14** (1797/8, gedruckt 1805) hingewiesen. Diese Angabe wurde in einer Besprechung[7] von E. Löffler als schlecht redigiert bezeichnet, weil Euler schon 1783 gestorben sei und also nicht 10 Jahre nach 1776 eine wissenschaftliche Untersuchung ausführen könnte. Natürlich ist die Bemerkung Löfflers als Ausstellung gegen Wieleitner richtig, anderseits hat Löffler selbst einen kleinen Fehler begangen, indem er ohne weiteres annimmt, daß der Artikel von Euler aus dem Jahre 1776 herrührt, während in Wirklichkeit der Titel des Artikels: *Extrait d'une lettre de M. Euler à M. Beguelin, en Mai 1778* lautet. Diesen kleinen Fehler von Löffler nenne ich einen zufälligen Fehler; die Frage, ob der Artikel von Euler 1776 oder 1778 verfaßt wurde, ist nämlich in diesem Falle bedeutungslos, und es ist anzunehmen, daß das Übersehen, das sich Löffler zuschulden kommen ließ, eben von diesem Umstand abhängt. Auch bei Wieleitner kommt indessen, abgesehen von der schlechten Redaktion, ein Fehler vor, denn die 1805 gedruckte Abhandlung von Euler war schon im März 1778, also vor dem Briefe an Beguelin fertig, so daß die Worte „10 Jahre später" durchaus unrichtig sind. Auch diesen Fehler betrachte ich als „zufällig", weil er davon beeinflußt sein dürfte, daß die ganze Frage für die Darstellung bedeutungslos ist, und weil ich bei der Durchsicht der Wieleitnerschen Arbeit zu der Auffassung gekommen bin, daß ähnliche Fehler darin nur ausnahmsweise vorkommen. Wie leicht man bei der Anfertigung einer größeren Arbeit einen Fehler *dieser* Art begehen kann, weiß ich übrigens aus meiner eigenen Erfahrung.

Aus dem soeben Gesagten folgt, daß „zufällige Fehler" meiner Ansicht nach in „systematische
(4) Fehler" übergehen können, wenn sich die Fehler auf sehr wichtige Fragen beziehen, oder wenn Fehler ebenderselben Art bei einem Verfasser wiederholt vorkommen. Besonders ist es nach meinem Dafürhalten bedenklich, aus einer Angabe eine für die Darstellung *wichtige* Folgerung zu ziehen, ohne genau untersucht zu haben, ob die Angabe wirklich richtig sei, während ich als verzeihlich — allerdings nicht als empfehlenswert — betrachte, in betreff einer durchaus bedeutungslosen Frage eine nicht ganz korrekte Notiz zu geben.

Ich setze jetzt meine oben abgebrochene Erzählung fort, indem ich wiederhole, daß ich 1899 die Fehler der Cantorschen *Vorlesungen* wesentlich als zufällige Fehler betrachtete. Aus diesem Grunde stellte ich als Ziel meiner „Kleinen Bemerkungen" die einfache Verbesserung dieser zufälligen Fehler auf und ich berechnete, daß anfangs in jedem Heft der

[5] Wer genaue Auskunft über diese Auffassung wünscht, soll den Bericht über die Cantorschen *Vorlesungen* in den *Göttingischen gelehrten Anzeigen* 1900, S. 251–264 lesen. Dieser Bericht ist noch wegen der von Stäckel eingefügten scharfsinnigen Bemerkungen über gewisse mathematisch-historische Fragen zu empfehlen, aber ich wollte wetten, daß Stäckel selbst nunmehr seine unbedingt lobenden Aussprüche über die *Vorlesungen* nicht gutheißen wird.

[6] H. Wieleitner, *Geschichte der Mathematik. II. Teil. Von Cartesius bis zur Wende des 18. Jahrhunderts,* Leipzig 1911, S. 81.

[7] *Archiv der Mathem.* $\mathbf{20}_3$, 1912, S. 168.

Bibliotheca Mathematica nur einige Seiten und nach einigen Jahren vielleicht nur ein paar Seiten dafür nötig sein würden.

Im Laufe der folgenden Jahre veränderte sich allmählich meine Auffassung. Ich bekam mehr Zeit für mathematisch-historische Untersuchungen, ich konnte mir den wichtigsten Teil der von CANTOR benutzten Schriften verschaffen und ich hatte wiederholt Anlaß nachzusehen, welche Auskunft die *Vorlesungen* über besondere mathematisch-historische Fragen brachten. Ich fand dabei zu meiner Überraschung, daß die unzuverlässigen Angaben so zahlreich waren, daß sie kaum als zufällige Fehler gelten konnten. Bei der fortgesetzten Untersuchung entdeckte ich auch den Grund, warum in den *Vorlesungen* systematische Fehler vorkommen mußten. Die mathematischen Kenntnisse CANTORS waren offenbar so oberflächlich und lückenhaft gewesen, daß sie nicht für einen Bearbeiter der Geschichte der mathematischen Theorien genügen konnten, und abgesehen von gewissen besonderen Gebieten hatte es ihm auch an gründlichen mathematisch-historischen Kenntnissen gefehlt. Hierzu kam noch eine andere offenbare Fehlerquelle, nämlich die unbefriedigende Arbeitsmethode CANTORS, wodurch er oft zu falschen Behauptungen geführt wurde, auch wenn weder mathematische noch mathematisch-historische Kenntnisse durchaus nötig waren. Zu welchen Ergebnissen man durch diese Arbeitsmethode kommen kann, habe ich an vielen Stellen der „Kleinen Bemerkungen“ nachgewiesen; hier werde ich einen neuen Beleg dafür geben.

In dem CANTORschen Berichte über den NEWTON-LEIBNIZschen Prioritätsstreit kommt[8] folgender Passus vor:

> Das Stärkste, was gegen LEIBNIZ als gestattet galt, sollte bald folgen. Im Januar 1715 brachte Nr. 342 der P. T. einen langen Bericht über das *Commercium epistolicum.* Zu den Beschuldigungen, welche, theils offen theils versteckt, in jenem Buche enthalten waren, traten neue. ***Der zweite*** NEWTONsche ***Brief vom 24. Oktober 1676 habe zu Ende des gleichen Monats oder am Anfang November*** LEIBNIZ ***in London vorgelegen.***

Da CANTOR die Behauptung, die er „Beschuldigung“ nennt, selbst durch gesperrte Schriften (5)
besonders hervorgehoben hat, und da er den Absatz mit den Worten: „Das Stärkste ... sollte bald folgen“ beginnt, ist klar, daß er die fragliche Behauptung als für LEIBNIZ sehr herabsetzend betrachtet. Über die Seite der *Philosophical transactions*, wo die Behauptung sich befindet, gibt CANTOR gar keine Auskunft, obgleich der Bericht, wie er selbst erwähnt, recht lang (52 Seiten) ist, aber er verweist[9] auf die entsprechende Stelle der „Recensio libri“ vom Jahre 1722, die wesentlich eine lateinische Übersetzung des englischen Berichtes ist. Diese Stelle lautet[10]:

> Haec NEWTONI epistola data 24 Octob. 1676. in fine mensis illius vel initio sequentis visa est LEIBNITIO Londini; ejusque exemplar Hanoveriae ei obtigit initio veris insequentis,

und wenn man die entsprechende Stelle der *Philosophical transactions* aufsucht, findet man die Worte[11]:

> This letter of Mr. NEWTON's dated Octob. 24. 1676, came to the hands of Mr. LEIBNITZ in the end of the winter or beginning of the spring following.

---

[8] M. CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* $\mathbf{3}^2$, Leipzig 1901, S. 318–319.

[9] CANTOR, a. a. O. S. 319, Fußnote 1.

[10] *Commercium epistolicum J. Collins et aliorum de analysi promota,* publ. par J. B. BIOT et F. LEFORT, Paris 1856, S. 25.

[11] *Philosophical transactions* [of the Royal society] **29** (1714/6), S. 194.

Die Behauptung, die CANTOR so kräftig beanstandet, kommt also in der Nummer der Philosophical transactious, um die es sich handelt, gar nicht vor!

Vielleicht könnte der Nichtsachkundige geneigt sein, einzuwerfen, daß der hier von mir hervorgehobene Umstand recht bedeutungslos sei, da die sogenannte „Beschuldigung" tatsächlich in der lateinischen Übersetzung stehe, so daß es sich bei CANTOR eigentlich nur um eine rein stilistische Ungenauigkeit handelt, die durch Änderung einiger Worte verbessert werden könne. In betreff dieses Einwurfes bemerke ich erst, daß er vielleicht bis zu einem gewissen Grade gebilligt werden könnte, wenn die Ungenauigkeit für die historische Darstellung durchaus belanglos gewesen wäre. Wenn z. B. in der „Recensio libri" überall „Lübnits" statt LEIBNIZ gestanden hätte und wenn CANTOR, ***ohne den Bericht vom Jahre 1715 einzusehen***, behauptet hätte, diese Verstümmelung des Namens stehe auch dort, so wäre es vielleicht möglich gewesen, die Ungenauigkeit als „zufälligen Fehler" zu bezeichnen. Allein in Wirklichkeit zieht CANTOR aus seiner unrichtigen Angabe eine wichtige Folgerung, und wie ich bei der Erläuterung der Bedeutung des Ausdruckes: „zufälliger Fehler" bemerkt habe, muß man hier von einem „systematischen Fehler" sprechen. Beiläufig mache ich darauf aufmerksam, daß die stilistische Verbesserung der CANTORschen Darstellung nicht so einfach ist, als man glauben könnte; CANTOR gibt nämlich in chronologischer Ordnungsfolge über die Aktenstücke des Prioritätsstreits Auskunft und der Bericht der ***Philosophical transactions*** wird schon S. 318, die „Recensio libri" dagegen S. 326 behandelt.

Ich habe jetzt in Betracht gezogen, wie der CANTORsche Fehler von nicht sachkundigem Gesichtspunkte aus beurteilt werden sollte; noch ungünstiger muß das Urteil des sachkundigen Lesers werden. Wenn die von CANTOR beanstandete Behauptung wirklich schon am Anfange der Jahres 1715 ausgesprochen worden wäre, hätte man einen gewissen Anlaß gehabt, sie eine unbestätigte „Beschuldigung" zu nennen. NEWTON war ja nicht zugegen, als LEIBNIZ Ende Oktober 1676 in London COLLINS besuchte, und seine Angabe könnte er wohl am Anfange des Jahres 1715 nur aus
(6) einer alten brieflichen Mitteilung von COLLINS entnommen haben. Allein als COLLINS 1683 starb, gab es noch keinen Prioritätsstreit, und es ist darum nicht besonders wahrscheinlich, daß COLLINS seinem Freunde in Cambridge mit peinlichster Genauigkeit über die Umstände, die mit dem Besuche LEIBNIZens verbunden, waren, Bericht erstattet hätte. Ganz anders lag die Sache im Jahre 1722, als die „Recensio libri" erschien. Am Ende des Jahres 1715 hatte nämlich LEIBNIZ selbst in.einem Briefe an CONTI indirekt zugegeben, daß er 1676 bei COLLINS den NEWTONschen Brief vom 24. Oktober 1676 gesehen hatte.[12] Was im Jahre 1715 möglicherweise eine „Beschuldigung" hätte genannt werden können war mithin im Jahre 1722 eine von LEIBNIZ selbst bestätigte Angabe, und jetzt sieht man unmittelbar ein, zu welchem schlechten Ergebnis die unbefriedigende CANTORsche Arbeitsmethode in diesem Falle geführt hat.

Da es sich also herausstellte, daß die unzuverlässigen Angaben der CANTORschen *Vorlesungen* teils überaus zahlreich waren, teils nicht zufällige Fehler genannt werden konnten, sondern als Ergebnisse einerseits der mangelhaften Arbeitsmethode, anderseits der unzureichenden Kenntnisse des Verfassers zu betrachten waren, mußte die Aufgabe der „Kleinen Bemerkungen" auch eine andere werden Jetzt genügte es nicht mehr, die Fehler ganz einfach zu berichtigen, sondern die Aufmerksamkeit der Fachgenossen mußte gleichzeitig darauf gerichtet werden, daß die Angaben der *Vorlesungen* nur mit größter Vorsicht benutzt und immer, soweit möglich, kontrolliert werden sollten, bevor sie weiter verbreitet wurden. Allein in betreff einer Arbeit, die lange Zeit als ein „Standard work" betrachtet worden war, konnte die neue Aufgabe der „Kleinen Bemerkungen" nicht ohne eine wesentliche Modifikation derselben erledigt werden. Darum wurde nunmehr in zahlreichen Fällen angegeben, welche Quellen CANTOR zur Verfügung gestanden hatten, und hervor-

[12]Siehe *Den Briefwechsel von G. W. Leibniz mit Mathematikern*, herausgeg. von C. I. GERHARDT, **1**, Berlin 1899, S. 264; vgl.***Biblioth. Mathem.*** **11**$_3$, 1910/11, S. 265–267.

gehoben, wie oberflächlich oder nachlässig er sich dieser Quellen bedient hatte; in vielen Fällen wurde darauf hingewiesen, wie wenig seine Kenntnisse genügten, um die von ihm zuversichtlich ausgesprochenen Urteile begründen zu können, und wie schief diese Urteile darum oft ausfallen mußten.

Wie wesentlich die ursprüngliche Form der „Kleinen Bemerkungen“ auf diese Weise modifiziert werden mußte, werde ich an der Bemerkung[13] über den 10. Satz des 2. Buches der Newtonschen *Principia* erläutern.

Nach einigen einleitenden Worten wird der betreffende Passus der *Vorlesungen* wörtlich abgedruckt und dann werden aus den Schriften, die Cantor wiederholt benutzt hat, mehrere Stellen zitiert, aus denen er sofort richtige Auskunft über den Gegenstand hätte bekommen können. Weiter wird darauf hingewiesen, daß die zweite Ausgabe der *Principia* wirklich in betreff des fraglichen Satzes einen anderen Text als die erste bringt, und daß dieser Text nachträglich durch Neudruck einiger schon gedruckter Seiten jener Auflage eingeschaltet worden ist. Ferner wird dargelegt, worauf die fehlerhafte Lösung der ersten Auflage wirklich beruhte und zuletzt werden einige Bemerkungen (7)
über die Bedeutung der fehlerhaften Darstellung bei Cantor hinzugefügt. Untersucht man nun, wie die Bemerkung nach dem ursprünglichen Plan ausgesehen hätte, so findet man, daß in diesem Falle wenigstens $^2/_3$ hätten gestrichen werden können; die Bemerkung nimmt jetzt mehr als 3 Druckseiten in Anspruch, von denen etwas mehr als 2 Druckseiten auf die neue Form kommen. Nun gibt es ja viele Fachgenossen, die die *Bibliotheca Mathematica* zu Rate ziehen, nur um richtige Auskunft über mathematisch-historische Gegenstände zu bekommen, und diese würden entschieden die kürzere Form der Bemerkung vorziehen; auch für mich selbst wäre es sowohl angenehmer, wie bequemer, diese Form zu benutzen. Allein die neue Form ist, wie ich oben hervorgehoben habe, für einen ganz bestimmten Zweck gewählt worden, so daß die Ungelegenheiten derselben bis auf weiteres unvermeidlich sind.

Daß die neue Form der „Kleinen Bemerkungen“ im Grunde polemisch ist, geht ja schon aus ihrem Zweck hervor, und es lag nahe, in Erwägung zu ziehen, ob dieser Zweck nicht noch besser erreicht sein würde, wenn man das polemische Moment auch durch die Ausdrucksweise hervorhöbe. Ein solches Verfahren könnte um so angebrachter erscheinen, als Cantor selbst bei seinen Urteilen starke Ausdrücke benutzt hat, sogar wenn dadurch das Urteil durchaus schief geworden ist. Ich erinnere beispielsweise an seinen Ausspruch „freche Lüge“[14] in betreff einer ungenauen Angabe der Herausgeber des *Commercium epistolicum*, welche Angabe höchst wahrscheinlich auf einer unabsichtlichen Verwechselung zweier Aktenstücke mit ungefähr demselben Inhalt beruht. Ich erinnere weiter an das im wesentlichen schiefe Urteil Cantors über die historischen Notizen der Algebra von Wallis: „Es ist überhaupt kein geschichtlicher Theil, sondern eine von englischem übermäßigem Nationalstolze beeinflußte Parteischrift.“[15] Ich erinnere endlich an gewisse Stellen des Cantorschen Berichtes über Newton als Mathematiker und Mensch[16], wodurch Cantor ohne jeden wirklichen Grund Newton nicht nur als einen recht schlechten Mathematiker, sondern überdies als Lügner und Fälscher erscheinen läßt. Wenn man an diese und ähnliche schiefe Urteile denkt und sich gleichzeitig der alten Regel: „similia similibus curantur“ erinnert, könnte man vielleicht geneigt sein, zu empfehlen, daß das polemische Moment der „Kleinen Bemerkungen“ auch durch die Ausdrucksweise ersichtlich sein würde. Indes-

---

[13] Cantor, a. a. O. S. 316; vgl. *Biblioth. Mathem.* $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 262–265.

[14] Cantor, a. a. O. S. 327; vgl. *Biblioth. Mathem.* $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 83–84

[15] Cantor, a. a. O. S. 4; vgl. *Biblioth. Mathem.* $\mathbf{12}_3$, 1911/12, S. 69–73, 159.

[16] Cantor, a. a. O. 171–173, 175, 316, 318 – 320, 326; vgl. *Biblioth. Mathem.* $\mathbf{11}_3$, 1911/12, S. 172–173, 253–255, 262–269, 349.

sen gehören meiner Ansicht nach Aussprüche wie die oben erwähnten CANTORschen nicht in eine wissenschaftliche Untersuchung und ich habe darum von der Anwendung der oben zitierten lateinischen Regel Abstand genommen. Nur in betreff einer kleinen Zahl der CANTORschen Angaben habe ich Ausdrücke wie „verblüffend", „überraschend", „auffällig" usw.
(8) angewandt oder den Unterschied zwischen CANTOR und wirklich sachkundigen Historikern der Mathematik hervorgehoben.

Daß die neue Form der „Kleinen Bemerkungen" nicht unnütz gewesen ist, habe ich schon mehr als einmal Gelegenheit gehabt zu konstatieren; hier teile ich einen Beleg dafür mit. Ein Mitarbeiter der ***Bibliotheca Mathemathica***, der eigentlich Mathematiker ist und als Historiker ausschließlich die Geschichte des 19. Jahrhunderts behandelt, mithin keinen Anlaß gehabt hat, für seine historischen Arbeiten die CANTORschen *Vorlesungen* zu Rate zu ziehen, hatte vor einiger Zeit in einer nicht mathematischen Zeitschrift eine ungenaue Angabe von CANTOR über die Geschichte der älteren Mathematik wiederholt und dabei seinen Gewährsmann als eine Autorität ersten Ranges hervorgehoben. Ich machte den fraglichen Mitarbeiter darauf aufmerksam, daß er in diesem Falle von CANTOR, irregeführt worden sei, deutete an, daß die Angaben von CANTOR nur mit großer Vorsicht benutzt werden sollten und verwies dabei auf die „Kleinen Bemerkungen" der ***Bibliotheca Mathematica***. Nachdem der Mitarbeiter sich meines Verweises bedient hatte, schrieb er mir: „Sie haben uns unseres mathematisch-historischen Gottes beraubt", und ich bin überzeugt, daß er nicht mehr dazu beitragen wird, die unzuverlässigen CANTORschen Behauptungen weiter zu verbreiten. Anderseits gibt es leider noch mathematisch-historische Verfasser, die daran festhalten, daß die CANTORschen *Vorlesungen* eine Arbeit ersten Ranges seien, und um dies zu begründen, ist sogar eine besondere Theorie ausgesonnen worden. Daß die CANTORschen *Vorlesungen* eine sehr große Zahl von Angaben bringen, die als unrichtig nachgewiesen sind, wagt man nicht in Abrede zu stellen; ausschlaggebende Belege hierfür befinden sich ja in den „Kleinen Bemerkungen". Allein diese Tatsache drückt man durch die verschönernde Umschreibung, die Arbeit sei „verbesserungsfähig", aus. Anderseits stellt man ohne weiteres den Satz auf, daß die CANTORschen Angaben als Resultate der neuesten mathematisch-historischen Forschung zu betrachten sind, bis richtigere Resultate im Druck vorliegen. Man betrachtet also die *Vorlesungen* gewissermaßen als ein Gesetzbuch, dessen Vorschriften gelten müssen, bis sie von besseren Vorschriften ersetzt worden sind.

Ob diese Theorie ursprünglich von CANTOR selbst herrührt, weiß ich nicht, aber ich bin überzeugt, daß sie wesentlich mit seiner eigenen Auffassung übereinstimmt. Soviel ich verstehe, existiert für CANTOR der Begriff ,,exakte mathematisch-historische Forschung"
(9) gar nicht[17], und für ihn ist dieser Ausdruck sicherlich ebenso sinnlos, als ob man von

[17]Es scheint auch eine — allerdings ***sehr*** billige — Theorie zu geben, die den Zweck hat, die Nichtexistenz einer besonderen exakten mathematisch-historischen Forschung darzulegen. Diese Theorie dürfte auf folgende Weise formuliert werden können: „Alles, was menschlich ist, ist unvollkommen und besonders findet dieses in betreff historischer Angaben statt; mithin gibt es auch nicht eine absolut exakte mathematisch-historische Forschung und der angebliche Unterschied zwischen dieser und der dilettantenmäßigen Arbeit wird hinfällig." Auf Grund dieser Theorie wird es leicht nachzuweisen, daß das Verfahren der „Kleinen Bemerkungen" nur zu einem fast wertlosen „regressus in infinitum" führt. Die „Kleinen Bemerkungen", die die CANTORschen Angaben berichtigen sollen, können natürlich nicht absolut zuverlässig sein, sondern erfordern selbst gewisse Verbesserungen, diese Verbesserungen ferner neue Berichtigungen usw. usw. ins Unendliche. Wenn man einwerfen wollte, daß es dennoch bei der Korrektur eines Druckbogens ein großer Gewinn ist, daß 1000 Druckfehler berichtigt werden, auch wenn der Setzer dabei 10 neue Druckfehler einführt, würde dieser Einwurf sicherlich keine Wirkung auf die Vertreter der Theorie haben. Übrigens rührt die Theorie offenbar von Personen her, deren allgemeine Bildung recht mangelhaft ist; die Begründung des Unwertes der „Kleinen Bemerkungen" ist ja wesentlich dieselbe, deren sich der griechische Philosoph bediente, um

einer „exakten Romanschreibung“ oder von einer „exakten Malerei“ sprechen wollte. Als Beleg dürften die folgenden Zeilen dienen können, die in einem vor 10 Jahren von CANTOR verfaßten Artikel sich befinden[18]:

> ***Si duo faciunt idem non est idem*** sagten … die Alten, die Neuzeit spricht vom Rechte der Individualität. Jeder malt, baut, komponiert, denkt, schreibt wie seine Begabung es fordert. Wohl gibt es Regeln, denen die Lebenden einer Zeitperiode sich zu fügen mehr oder weniger stillschweigend übereingekommen sind, aber diese Regeln sind meistens Verbote, nicht Gebote, und sie gelten genau so lang wie auf ewige Zeit geschlossene Staatsverträge, nämlich bis sie gebrochen und damit abgeschafft werden.
>
> Was folgt nun aus dem soeben Geäußerten für die Behandlung der Geschichte der Mathematik? Ich denke, man kann zweierlei folgern. Erstlich ist das höchste erreichbare Ziel nur, daß schon vorhandene Leistungen durch das neu Gebotene übertroffen werden. Zweitens kann jeder nur so schreiben, wie seine Individualität es mit sich bringt.[19]

Selbstverständlich ist es durchaus unnütz, mit Personen, die eine solche Auffassung (10)
haben, über die Zulässigkeit der oben erwähnten Theorie zu verhandeln. Ich bemerke in-

---

die Unmöglichkeit jeder Bewegung zu beweisen.

[18]M. CANTOR, *Wie soll man die Geschichte der Mathematik behandeln?* ***Biblioth. Mathem.*** $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 114.

[19]Es ist nicht ohne Interesse, die oben abgedruckten CANTORschen Ausführungen mit den wenig schonenden Urteilen der *Vorlesungen* hinsichtlich der Schriften gewisser älterer mathematisch-historischer Verfasser, z. B. DECHALES (siehe CANTOR, *Vorlesungen* $\mathbf{3}^2$ S. 5 Z. 17–22; vgl. ***Biblioth. Mathem.*** $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S.269–270), STOCKHAUSEN (siehe CANTOR, *Vorlesungen* $\mathbf{3}^2$, S. 500 Z. 11 –19; vgl.***Biblioth. Mathem.*** $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 84–87) und besonders WALLIS (siehe oben S. 7) zusammenzustellen. CANTOR leugnet ja sogar, daß die *Algebra* von WALLIS historisch sei, obgleich auf dem Titelblatte: „both historical and practical“ steht und die Arbeit tatsächlich ganze Kapitel bringt, die ausschließlich historischen Inhalts sind. In Wirklichkeit ist WALLIS gar kein besonders schlechter Historiker, wenn man auf die buchhändlerischen und literarischen Verhältnisse seiner Zeit Bezug nimmt; nur wenn es sich direkt oder indirekt um DESCARTES handelt, wird er sehr unzuverlässig. Allein, vorausgesetzt, daß die CANTORsche Auffassung in betreff des WALLIS richtig wäre, wird man versucht zu fragen: „Warum darf WALLIS sich nicht auf das „Recht der Individualität“ berufen und den Satz: „si duo [d. h. JOHN WALLIS und MORITZ CANTOR] faciunt idem, non est idem“ für sich in Anspruch nehmen? Nach CANTOR konnte ja WALLIS jedenfalls nur so schreiben, wie seine Individualität es mit sich brachte?“ Ein CANTORianer würde vielleicht antworten: „Das Recht der Individualität ist auf diesem Gebiete nicht durchaus unbegrenzt, sondern bei einer mathematisch-historischen Darstellung müssen die Angaben richtig und die Urteile unparteisch sein, was nicht hinsichtlich der *Algebra* von WALLIS zutrifft.“ Allein wenn die Antwort so lautet, wird es leicht nachzuweisen, daß man dem Begriffe: „exakte mathematisch-historische Forschung“ schon sehr nahe gekommen ist. Dann müssen nämlich gründliche Kenntnisse und eine richtige Arbeitsmethode vorhanden sein, wenn man die Geschichte der Mathematik schreiben will. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, darf man nicht als Entschuldigung der Fehler darauf hinweisen, daß „jeder nur so schreiben kann, wie seine Individualität es mit sich bringt“. Vielmehr sollte man sich auf solche Gegenstände beschränken, bei deren Behandlung die Kenntnisse und die Arbeitsmethode genügen können, und wenn man wirklich etwas über allgemeine Geschichte der Mathematik schreiben will, sollte man durch den Titel (z. B. „Aus dem Leben der älteren Mathematik. Dichtung und Wahrheit“) deutlich angeben, daß die Arbeit nicht beansprucht, exakte Resultate zu bieten. Im letzteren Falle wäre sogar erlaubt, Erzählungen wie die folgende (siehe *Die Algebra des Initius Algebras*, herausg. von M. CURTZE; ***Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wiss.*** **13**, 1902, S. 466) einzuführen: „NICHOMACHUS der gross Arismetrist hatte etliche Bucher jn Mathematica, die wolten kaufen ARISTEUS vnnd APOLONIUS; … vnd also khamen sie zu BOETIO dem grosen jnterpreten …“ Bekanntlich lebte APOLLONIOS im dritten vorchristlichen Jahrhundert, während BOETIUS erst etwa 480 nach Chr. geboren ist, also rund 700 Jahre nach dem Tode des APOLLONIOS.

dessen, daß die Cantorschen Angaben natürlich nicht als Ergebnisse der mathematisch-historischen Forschung gelten können, nachdem dargelegt worden ist, daß sein Vorstudium allzu ungenügend, seine Arbeitsmethode allzu mangelhaft gewesen ist, um auch die gröbsten Irrtümer zu vermeiden. Gleichzeitig mache ich darauf aufmerksam, daß die Angaben einer wissenschaftlichen Arbeit nicht mit den Vorschriften eines Gesetzbuches verglichen werden können, wenigstens nicht bevor jene von wirklich sachkundigen Personen genau nachgeprüft worden sind.

Übrigens ist es leicht nachzuweisen, wie unmöglich es sein muß, die ganze Theorie eben auf die Cantorsche Arbeit anzuwenden. Ich werde für diesen Zweck einen besonderen Fall in Betracht ziehen.

Bekanntlich bat Nikomachos in der „Einleitung in die Arithmetik“, einen Satz über Entstehung der Kubikzahlen aus der Summe der ungeraden Zahlen angegeben, der in moderner Zeichensprache

$$\sum_{r=1}^{r=n} (n^2 - n - 1 + 2r) = n^3$$

(11) geschrieben werden kann, und eine fast wörtliche Übersetzung dieses Satzes befindet sich in der Schrift *De institutione arithmetica* von Boetius. Diese Schrift ist seit 1867 durch die Friedleinsche Ausgabe[20] allen Fachgenossen leicht zugänglich und ihr wesentlicher Inhalt muß darum als bekannt betrachtet werden. Überdies hat B. Boncompagni 1875 in einer Abhandlung[21] auf das Vorkommen des Satzes bei Boetius aufmerksam gemacht. Aber als 1880 der erste Band der Cantorschen *Vorlesungen* erschien, fand man darin inbetreff des Boetius als Zahlentheoretiker folgende Bemerkung[22]: „Es ist kein ebenbürtiger Bearbeiter, der sich an den griechischen Zahlentheoretiker [d. h. Nikomachos] gewagt hat. Gerade den feinsten arithmetischen Dingen ist er aus dem Wege gegangen. Sein Griechisch reichte aus zur Übersetzung, seine Mathematik nicht“, und als Begründung dieser Bemerkung gibt Cantor an, daß „unter den weggebliebenen Dingen jener Satz des Nikomachus enthalten ist, der von der Entstehung der Kubikzahlen aus der Summe ungrader Zahlen handelt“. Nun ist die Frage: „War die Cantorsche Bemerkung noch im Jahre 1880 als ein Resultat der mathematisch-historischen Forschung zu betrachten, obgleich jeder Sachkundige ihre Unrichtigkeit sofort ausfindig machen mußte?“ Beantwortet man diese Frage mit Nein, so muß diese Autwort auch in betreff einer Menge der von Cantor selbst herrührenden unzuverlässigen Angaben gelten. Allein dadurch ist ja nachgewiesen worden, daß die *Vorlesungen* in sehr zahlreichen Fällen ***nicht*** die Resultate der mathematisch-historischen Forschung enthalten und ihre Angaben nur mit großer Vorsicht zu benutzen sind. Beantwortet man dagegen die obige Frage mit Ja, so entstehen andere Schwierigkeiten, die kaum beseitigt werden können. Die nächste Frage dürfte dann sein: „Bis zu welchem Zeitpunkte war die Cantorsche Bemerkung vom Jahre 1880 als Resultat der mathematisch-historischen Forschung zu betrachten?“ Die Bemerkung mit der Begründung wurde sowohl in der zweiten[23] wie in der dritten Auflage[24] des Bandes unverändert zum Ausdruck gebracht; anderseits hatte P. Tannery 1902 im Vorübergehen auf das Vorkommen des Satzes bei Boetius hingewiesen.[25] Sollte die Cantorsche Angabe also 1902 aufhören, ein Forschungsresultat

[20] *De institutione arithmetica libri duo*, ed. G. Friedlein, Leipzig 1867, S. 136; vgl. `Biblioth. Mathem.` **7**$_3$, 1906/7, S. 283.

[21] B. Boncompagni, *Intorno una proprietà de'numeri dispari;* `Bullett. di bibliogr. d. sc. matem.` **8**, 1875, S. 54.

[22] Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* **1**, Leipzig 1880, S. 491.

[23] Cantor, a. a. O. $\mathbf{1}^2$, Leipzig 1894, S. 539–540.

[24] Cantor, a a. O. $\mathbf{1}^3$, Leipzig 1907, S. 580.

[25] P. Tannery, *Sur la sommation des cubes entiers dans l'antiquité;* `Biblioth. Mathem.` **3**$_3$, 1902, S. 257.

zu sein? Sollte sie dann 1907 bei dem Erscheinen der dritten Auflage noch einmal die Stellung als Forschungsresultat bekommen und diese Stellung bis auf weiteres behalten?

Man sieht aus diesem Beispiel, daß die Theorie ohne eigentliche Schwierigkeiten auf solche unrichtige Angaben angewendet werden könnte, die schon früher in fast allen mathematisch-historischen Arbeiten vorkamen und deren Unrichtigkeit nicht vor CANTOR nachgewiesen worden war.

Sehr gut paßt die Theorie für formell richtige Angaben (d. h. Angaben, die unter Bezugnahme auf *das vorhandene Material* als richtig betrachtet werden müssen), die aber durch Entdeckung von neuem Material unrichtig werden. Für *neue* Angaben, die sowohl
formell wie reell unrichtig sind, und eben diese machen vorzugsweise die CANTORschen (12)
Vorlesungen zu einer unzuverlässigen Arbeit, paßt dagegen die Theorie im allgemeinen *nicht*.

Da der Zweck der neuen Form der „Kleinen Bemerkungen“ also noch nicht vollständig erreicht worden ist, muß diese Form bis auf weiteres beibehalten werden. An Material fehlt es glücklicherweise (oder leider) noch nicht; ich habe berechnet, daß die Verbesserungen der noch nicht behandelten Ungenauigkeiten der *Vorlesungen*, die ich bisher notiert habe, so zahlreich sind, daß ich während der nächsten Zeit etwa 100 „Kleine Bemerkungen“ jährlich veröffentlichen kann.

Bisher habe ich mich ausschließlich mit den CANTORschen *Vorlesungen* beschäftigt und ich habe am Anfange dieses Artikels angegeben, warum man sie a priori als die gefährlichste Fehlerquelle der mathematisch-historischen Darstellungen betrachten muß. Daß diese Betrachtungsweise richtig ist, dürfte auch a posteriori leicht bestätigt werden können Beispielsweise würde A. STURM ganz gewiß in seiner kurzen *Geschichte der Mathematik* viele Ungenauigkeiten vermieden haben können[26], wenn er gewußt hätte, wie unzuverlässig die CANTORsche Arbeit ist. Daß in WIELEITNERS *Geschichte der Mathematik* die meisten Unrichtigkeiten der *Vorlesungen* fehlen dürften, beruht auf einem ganz besonderen Umstand und auch nicht WIELEITNER hat gewagt, die Darstellung des NEWTON-LEIBNIZschen Prioritätsstreites, die BRAUNMÜHL aus CANTOR, exzerpiert hatte, bei der Drucklegung vollständig zu verbessern, weil er nicht auf eine Darstellung hinweisen konnte, die die unzuverlässigen CANTORschen Behauptungen berichtigte; darum kommt bei WIELEITNER z. B. die offenbar unrichtige Behauptung vor[27], NEWTON habe die Autorschaft des „Account“ abgeleugnet.

In betreff der übrigen Handbücher der Geschichte der Mathematik habe ich schon bemerkt, daß in gewissen Fällen die Verbesserung ihrer Ungenauigkeiten erwünscht wäre. Ich könnte in Wirklichkeit ein paar solche recht neue Handbücher nennen, die in erster Linie in Betracht kommen sollten, aber da ich kein besonderes Vorgehen für diesen Zweck vorschlagen will, erwähne ich ihren Verfasser nicht.

Eine besondere Stellung nimmt indessen die *Geschichte der Elementarmathematik* von J. TROPFKE ein, und darum werde ich hier einige Zeilen dieser Arbeit widmen. Obgleich sie nur etwa 850 Druckseiten enthält, kann sie auf Grund der Reichhaltigkeit ihrer Angaben zu den größeren Handbüchern gerechnet werden. Vor vielen Jahren habe ich in meinen
ausführlichen Besprechungen[28] das Handbuch als eine im großen und ganzen gute Arbeit (13)
bezeichnet. Ich bin noch derselben Ansicht, aber im Laufe der letzten zehn Jahre sind zwei

[26] Siehe meine Rezension in der *Biblioth. Mathem.* **12**$_3$, 1911/12, S. 269–277.
[27] Siehe WIELEITNER, a.a.O. S. 147 und *Biblioth. Mathem.* **11**$_3$ 1910/11, S. 267–268, 349.
[28] *Biblioth. Mathem.* **4**$_3$, 1903, S. 213–218, 404–412.

Umstände hinzugekommen, die jetzt bei der Beurteilung der Arbeit zu berücksichtigen sind. Einerseits hat die mathematisch-historische Forschung seit 1902 ein höchst bedeutendes neues Material herbeigeschafft, wodurch viele Angaben bei Tropfke nunmehr als unrichtig oder wenigstens sehr unvollständig erscheinen müssen. Anderseits weiß man jetzt, daß ein Werk, das 1902 als sehr zuverlässig betrachtet wurde, und aus dem Tropfke oft ohne weiteres seine Angaben entnommen hat, wenn er nicht auf die eigentliche Quellenschrift zurückgehen konnte, in Wirklichkeit allzu unzuverlässig ist, um ohne besondere Vorsicht benutzt werden zu dürfen. Auf Grund dieser zwei Umstände ist die Arbeit Tropfkes jetzt zum Teil schon als veraltet anzusehen und es wäre zu wünschen, daß der Verfasser recht bald in die Lage käme, durch Bearbeitung einer neuen Auflage die veralteten Angaben zu entfernen.

Bevor ich diesen Artikel schließe, möchte ich darauf aufmerksam machen, daß die Gefahr der weiteren Verbreitung unzuverlässiger mathematisch-historischer Angaben wesentlich vermindert wird, wenn die großen mathematischen Werke, die auch historische Notizen bringen, dabei als Regel aufstellen, wenn irgend möglich, entweder die Quellenschriften selbst oder gute Handbücher zu Rate zu ziehen. In betreff der französischen Ausgabe der mathematischen Enzyklopädie ist diese Regel schon durchgeführt worden für die einzigen Abteilungen, die hier in Betracht kommen, nämlich die rein mathematischen. Ob auch die deutsche Ausgabe sich künftighin desselben Verfahrens bedienen wird, weiß ich nicht, hoffe aber, daß die Leiter derselben recht bald dazu kommen werden, keine historische Angabe der Cantorschen *Vorlesungen* zu benutzen, ohne daß sie kontrolliert worden ist; zum mindesten sollte immer angegeben werden, ob eine Angabe ohne weitere Kontrolle aus dieser Arbeit entnommen worden ist.

Band 14

Die mathematisch-historische Forschung und der mathematisch-historische Schulunterricht.

Zusammenfassung:
Eneström bemängelt die bisherigen Ansätze, den Wert des historischen Elementes bei dem mathematischen Schulunterrichte hervorzuheben, weil sie fast vollständig stillschweigend die Frage übergehen, ob und bis zu welchem Grade der Mathematiklehrer irgendein Gewicht auf Mitteilung korrekter historischer Angaben zu legen braucht. Er betont, daß Korrektheit der Notizen allerdings nicht besonders wichtig sei, wenn man nur beabsichtigt, durch die Einführung des historischen Elementes den Unterricht erfolgreicher und angenehmer zu machen; dagegen muß man vom prinzipiellen Gesichtspunkte aus eine möglichst große Korrektheit fordern, weil es eben der Zweck des Unterrichts ist, richtige Kenntnisse mitzuteilen. Da es anderseits gegenwärtig für die meisten Schullehrer unmöglich ist, zu entscheiden, inwieweit die Angaben der ihnen zugänglichen Handbücher der Geschichte der Mathematik richtig sind, kommt Eneström zu dem Ergebnis, daß für eine *durchgeführte* Berücksichtigung des historischen Elementes die Zeit noch nicht gekommen ist. Um eine solche Berücksichtigung recht bald zu ermöglichen, regt er die Bearbeitung einer mathematisch-historischen Exzerptensammlung mit Übersetzungen in deutscher Sprache und erläuternden Anmerkungen an. Die Exzerpte sollten natürlich aus den eigentlichen Quellenschriften entnommen werden, so daß man ein speziell für den mathematischen Schulunterricht abgefaßtes mathematisch-historisches Lesebuch bekäme.

Quelle: JFM 44.1913, S. 41

---

1. Schon seit längerer Zeit ist die Ansicht ausgesprochen und begründet worden, daß (1)
das Studium der Mathematik durch historische Behandlung des Gegenstandes erleichtert wird und eine natürliche Konsequenz dieser Ansicht ist der seit Jahrzehnten immer lebhaftere Kampf für die Berücksichtigung der Geschichte der Mathematik im Schulunterrichte.[1] So viel ich weiß, ist man dabei immer so vorgegangen, daß man erst die Gründe, warum die Berücksichtigung des historischen Elementes bei dem mathematischen Schulunterricht nützlich wäre, auseinandergesetzt und daraus ohne weiteres gefolgert hat, daß eine solche

[1] Vgl. P. Treutlein, *Das geschichtliche Element im mathematischen Unterrichte der höheren Lehranstalten*, Braunschweig 1890. — M. Gebhardt, *Die Geschichte der Mathematik im mathematischen Unterrichte der höheren Schulen Deutschlands*, Leipzig 1912.

Berücksichtigung zu empfehlen sei. Man hat also vorausgesetzt, daß den Schullehrern die nötigen und nützlichen mathematisch-historischen Notizen ohne besonders große Mühe zur Verfügung stehen. Nun ist ja sofort klar, daß die Mathematiklehrer nur ausnahmsweise in der Lage sind, selbständige historische Untersuchungen zu machen, und es ist bekannt, daß an den Universitäten nur ausnahmsweise mathematisch-historischer Unterricht erteilt wird. Diese Umstände sind nicht unbeachtet gelassen worden, sondern man hat eben auf Grund derselben das Vorhandensein gewisser mehr oder weniger ausführlicher Darstellungen der Geschichte der Mathematik hervorgehoben und die Sache dadurch als erledigt betrachtet. Nicht einmal die Frage, ob und bis zu welchem Grade die historischen Notizen, die der Mathematiklehrer seinen Schülern bieten soll, *korrekt* zu sein brauchen, hat man eingehend untersucht. Und doch scheint mir diese Frage aus ganz besonderen Gründen von wesentlicher Bedeutung zu sein. Wenn es sich um ein Lehrfach, wie z. B. die lateinische Sprachlehre, handelt, die seit Jahrhunderten wissenschaftlich behandelt worden ist, wäre es natürlich durchaus überflüssig, zu untersuchen, ob die Schullehrer selbst sich die Kenntnisse verschaffen können, die sie den Schülern mitteilen sollen. Die wichtigsten dieser
(2) Kenntnisse müssen sie ja schon besitzen, bevor sie Lehrer werden können, und jedenfalls wäre es unsinnig vorauszusetzen, daß ein Lehrer nicht ohne Mühe ausfindig machen könnte, ob „ich hatte" lateinisch „habevi" oder „habui" heißt. Allein in betreff der Geschichte der Mathematik liegt die Sache ganz anders. Die meisten Bearbeiter dieser Wissenschaft sind entweder schlechthin Dilettanten oder nur auf sehr beschränkten Gebieten derselben sachkundig gewesen, und abgesehen von diesen Gebieten sind ihre Angaben und Urteile nur mit großer Vorsicht zu benutzen. Wie ich mehr als einmal in den Leitartikeln der einzelnen Bände dieser Zeitschrift hervorgehoben habe, enthalten darum die meisten mathematisch-historischen Handbücher eine recht große Zahl von mehr oder weniger groben Fehlern, und in der Regel ist dies um so mehr der Fall, je ausführlicher die Darstellung des Handbuches ist. Aber gerade solche ausführliche Handbücher braucht der Schullehrer in erster Linie, weil die Kompendien der Geschichte der Mathematik nur wenige Angaben über die Entwicklung der Elementarmathematik während der neueren Zeit bringen. Die ersten Fragen, die erledigt werden müssen, sind also: Braucht der Mathematiklehrer überhaupt irgendein Gewicht darauf zu legen, daß seine historischen Angaben korrekt sind? Und wenn diese Frage mit Ja zu beantworten ist, *bis zu welchem Grade* müssen die fraglichen Notizen korrekt sein?

2. Nimmt man lediglich auf die Gründe Bezug, die für die Berücksichtigung der Geschichte der Mathematik im Schulunterrichte angeführt worden sind, wird man vielleicht geneigt, die erste Frage mit Nein zu beantworten. Als Hauptgrund für die Berücksichtigung ist wohl ziemlich einstimmig hervorgehoben worden, daß der mathematische Unterricht wesentlich durch den Einblick in den Werdegang der Mathematik erleichtert wird, und daß das an sich abstrakte Lehrfach dadurch auch für die Mehrzahl der Schüler angenehmer erscheint. Aber für diesen Zweck braucht ja ein phantasiereicher Lehrer die Geschichte der Mathematik nur ganz oberflächlich studiert zu haben; das meiste, das er den Schülern bieten will, kann er dann selbst nach Belieben einschalten oder hinzufügen, und das Phantasiebild der Entwicklung der Elementarmathematik, das er auf diese Weise bekommt, kann sogar ansprechender als die Darstellung der wirklichen Entwicklung werden. Denken wir uns zum Beispiel, daß er seinen Schülern Auskunft über die älteren Zeichen für unbekannte Größen geben will, und daß er nur folgendes ausfindig gemacht hat:

1. Diofantos selbst hat vielleicht die Unbekannte durch ein Kompendium für die zwei ersten Buchstaben des Wortes $\alpha\varrho\iota\vartheta\mu o\varsigma$ bezeichnet und in den bis auf unsere Zeit aufbewahrten Handschriften seiner Arithmetik sieht das Kompendium so aus, daß es sehr einem Schlußsigma ähnelt.[2] — 2. Die arabischen Mathematiker nannten gewöhnlich die (3)
Unbekannte „šai“, das Sache bedeutet.[3] — 3. Im christlichen Mittelalter wurde zuweilen der Anfangsbuchstabe š des fraglichen arabischen Wortes durch x transkribiert.[4] — 4. Einige Mathematiker der Renaissance benutzten für die Unbekannte ein Zeichen, das in den Handschriften und später in den Druckschriften die Form ꝛ bekam.[5] — 5. Descartes wendet für diesen Zweck eben den Buchstaben x an.[6]

Unter Bezugnahme auf diese Tatsachen konnte der Schullehrer das folgende Bild der historischen Entwicklung der fraglichen Bezeichnungsweise konstruieren:

> Als Zeichen für die unbekannte Größe benutzte Diofantos ein Zeichen, dessen Form und Bedeutung nicht mit Sicherheit ermittelt werden kann, aber von den Abschreibern seiner Arithmetik oft als ein Schlußsigma gedeutet wurde Die arabischen Mathematiker, denen das wahre Diofantische Zeichen unbekannt war, nannten, um ihre Unkenntnis hervorzuheben, die Unbekannte ganz einfach Sache (arabisch „šai“). Da nun dies arabische Wort im christlichen Mittelalter mit gewöhnlichen lateinischen Buchstaben „xai“ geschrieben wurde, wählten die Mathematiker der Renaissance als Zeichen der Unbekannten eben den Buchstaben x, aber die Abschreiber und nach ihnen die Buchdrucker gaben dem Zeichen die Form ꝛ. Erst Descartes entdeckte die Bedeutung des Zeichens und gab demselben definitiv die wahre Form x.

Wenn man als Zweck der Berücksichtigung des historischen Elements aufstellt, den mathematischen Schulunterricht leichter und angenehmer zu machen, dürfte die obige, **wesentlich falsche**[7] historische Darstellung wenigstens ebenso gut wie die korrekte sein.

Untersucht man auch die übrigen Gründe, aus denen man die fragliche Berücksichtigung empfohlen hat, findet man, daß der wesentliche Zweck ebenfalls erreicht werden kann, auch wenn die historischen Angaben zum großen Teil unrichtig sind. Beispielsweise hat man darauf aufmerksam gemacht, daß unter den Personen, die von der Nachwelt als große Männer gewürdigt werden, eben die Mathematiker eine allzu untergeordnete Stelle einnehmen. Aber die Schüler können ja einen großen Mathematiker würdigen lernen, auch wenn die Angaben über seine Verdienste nicht besonders zuverlässig sind. Sagt man ih- (4)
nen z. B., daß Hermite die Transzendenz der Zahl π endgültig und einwandfrei bewiesen hat, so ist dieser Ausspruch tatsächlich ungenau, aber für die gebührende Würdigung des großen Mathematikers ist dieser Umstand recht belanglos.

Sieht man dagegen von dem besonderen Zweck des mathematisch-historischen Schulunterrichts ab, bekommt die Frage: „Braucht man bei diesem Unterricht überhaupt irgendein

[2]Siehe T. L. Heath, *Diophantus of Alexandria*, Cambridge 1910, S. 32–87.

[3]Siehe z.B. F. Wöpcke, *L'algebre d'Omar Alkhayyami*, Paris 1861, S. 6; *Extrait du Fakhrî*, Paris 1853, S. 48. — H. Suter, *Das Rechenbuch des Abu Zakarija el-Hassar;* `Bibliotb. Mathem.` **2**$_3$, 1901, S. 82.

[4]Siehe P. de Lagarde, *Woher stammt das x der Mathematiker?* `Götting. gelehrte Nachr.` 1882, S. 409–418. Vgl. G. Eneström, *Sur l'origine du symbole x employé comme signe d'une quantité inconnue*; `Biblioth. Mathem.` 1885, Sp. 41–44.

[5]Siehe z. B. E. Wappler, *Zur Geschichte der deutschen Algebra im 15. Jahrhundert,* Zwickau 1887, S. 6. Chr. Rudolff, *Behend vnnd hubsch Rechnung durch die kunstreichen regeln Algebre*, Straßburg 1526, Bl. D 2^v.

[6]Descartes, *La géométrie*, Ausgabe Paris 1886, S. 6.

[7]Vgl. z B. G. Eneström, `Biblioth. Mathem.` **6**$_3$, 1905, S. 316–317, 406–406.

Gewicht auf *korrekte* Angaben zu legen?“ eine ganz andere Bedeutung. Es ist nämlich an sich klar, daß ein historischer Unterricht, wobei nicht korrekte Angaben mitgeteilt werden, eigentlich kein *Unterricht* im wahren Sinne des Wortes ist, ebensowenig wie eine falsche Münze in Wirklichkeit eine Münze ist. Jedenfalls ist man also berechtigt, ohne weitere Untersuchung zu behaupten: Von rein prinzipiellem Gesichtspunkte aus muß großes Gewicht darauf gelegt werden, daß die mathematisch-historischen Angaben, die die Schullehrer mitteilen, richtig sind, und eigentlich sollte ihnen verboten werden, andere Angaben zu bringen. Nun verhält es sich indessen oft so, daß ein Ausspruch, der prinzipiell einwandfrei ist, unter Bezugnahme auf die tatsächlichen Verhältnisse mehr oder weniger modifiziert werden muß, und aus diesem Grunde sollen wir uns jetzt mit der zweiten Frage beschäftigen.

3. Daß jeder historische Unterricht fast unmöglich wäre, wenn man von demselben forderte, daß sein Inhalt für alle Zeiten vollständig richtig bliebe, liegt in der Natur der Sache, und besonders gilt die Bemerkung augenblicklich in betreff des mathematisch-historischen Unterrichts, weil die exakte Forschung auf dem mathematisch-historischen Gebiete noch recht jung ist Allerdings könnte der Mathematiklehrer die historischen Notizen, die er bringen will, so formulieren, daß er sich ausdrücklich auf seine Quelle beruft, und nur beansprucht, seine Notizen daraus richtig entnommen zu haben. Bei dem privaten Studium und vielleicht auch für den Universitätsunterricht könnte dieses Verfahren als Notbehelf geduldet werden, aber für den Schulunterricht paßt es meines Erachtens nicht. Die wenigen Stunden, die in der Schule dem mathematischen Lehrfache zugewiesen worden sind, dürfen nicht für einen Unterricht dieser Art verwendet werden; nur unter der Voraussetzung, daß die Quellen, worauf der Lehrer sich beruft, die neuesten und zuverlässigsten Resultate der wissenschaftlichen Forschung enthalten, kann das Verfahren gebilligt werden, Warum sollte übrigens gerade in betreff der Mathematik eine solche minderwertige Unterrichtsart zur Anwendung kommen dürfen? Man denke eich nur einen Lehrer für französische Sprache, der seinen Schülern sagt: die Worte „ich bin gewesen“ sollte man eigentlich französisch durch „je suis été“ wiedergeben, obgleich ich in einer französischen Sprachlehre die Wor-
(5) te durch „j'ai été“ übersetzt gefunden habe! Man werfe nicht ein, daß. etwas Ähnliches nicht aus den vorhandenen mathematisch-historischen Handbüchern entnommen werden kann; in Wirklichkeit gibt es in einer oft gelobten Geschichte der Mathematik zahlreiche Behauptungen, die ebenso fehlerhaft sind wie die Übersetzung „je suis été“.

Beiläufig bemerke ich, daß es für den ganzen Schulunterricht schädlich sein kann, wenn die Schüler erfahren, daß in verschiedenen Schulen oder sogar von verschiedenen Mathematiklehrern derselben Schule einander widersprechende Angaben mitgeteilt werden, z. B. in einer Schule, daß das x als Zeichen für eine unbekannte Größe zuerst von Descartes eingeführt wurde, in einer anderen Schule aber, daß das Zeichen mit derselben Bedeutung schon in Schriften aus dem 15. Jahrhundert vorkommt.

Durch die vorhergehenden Ausführungen glaube ich in aller Kürze die Ansicht begründet zu haben, daß die Schullehrer nur die zuverlässigsten Resultate der neuesten mathematisch-historischen Forschung mitteilen sollen, und die nächste Frage wird: Haben die Schullehrer zur Verfügung Arbeiten, die diese Resultate enthalten?

4. Die Arbeit, an die man bei der Beantwortung dieser Frage in erster Linie denken sollte, ist meiner Ansicht nach die *Geschichte der Elementarmathematik in systematischer Darstellung* (Leipzig 1902–1903) von J. Tropfke. Über den Wert dieser Arbeit habe ich mich schon teils in zwei ausführlichen Rezensionen, teils im Leitartikel des vorhergehenden Bandes dieser Zeitschrift[8] ausgesprochen und ich habe nichts Weiteres hinzuzufügen. Die zuverlässigsten Resultate der neuesten mathematisch-historischen Forschung kann die Arbeit nicht überall enthalten, da sie schon vor mehr als 10 Jahren veröffentlicht wurde, und die Forschung während der letzten. Zeit eine ganze Menge älterer Angaben berichtigt oder wesentlich ergänzt hat. Anderseits bringt sie natürlich eine sehr große Zahl von Angaben, die noch als exakt zu betrachten sind, aber diese Angaben können die Schullehrer im allgemeinen nicht von den anderen unterscheiden.

In zweiter Linie sollten wohl die Cantorschen *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* in Betracht kommen. Allerdings will Cantor die Entwicklung der ganzen Mathematik schildern, und darum spielt in den letzten Bänden seiner Arbeit die Geschichte der Elementarmathematik eine recht untergeordnete Rolle. Außerdem ist seine Arbeit in erster Linie eine Geschichte der Mathematiker und ihrer Schriften, so daß die Entwicklung der Theorien oft recht unvollständig dargestellt wird. Nichtsdestoweniger bringt Cantor eine beträchtliche Zahl von Notizen zur Geschichte der Elementarmathematik, die Tropfke wegen der konzentrierten Form seiner Darstellung übergehen mußte. Leider hat es (6)
sich herausgestellt, daß Cantor teils wegen seiner ungenügenden mathematischen und mathematisch-historischen Kenntnisse, teils wegen seiner unbefriedigenden Arbeitsmethode recht unzuverlässig ist[9], so daß seine Angaben nur mit größter Vorsicht zu benutzen sind. Darum müssen die Schullehrer davor gewarnt werden, sich auf die *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* zu verlassen, wenn sie sich korrekte Auskunft über die Geschichte der Elementarmathematik verschaffen wollen.

Außer den zwei soeben genannten Arbeiten gibt es auch viele Kompendien der Geschichte der Mathematik sowie verschiedene spezielle Werke (darunter auch einige Zeitschriften) mathematisch-historischen Inhalts, die der Mathematiklehrer benutzen könnte. Allein die Kompendien sind für seinen Zweck allzu unvollständig; aus den Monographien und Zeitschriftenartikeln können allerdings nützliche Angaben entnommen werden, denn in ihnen sind eben die zuverlässigsten Resultate der neuesten Forschung enthalten, aber nur wenige Lehrer können Zeit und Lust haben, diese Schriften zu Rate zu ziehen; die Schriften in italienischer Sprache dürften übrigens vielen deutschen Lehrern schwer verständlich sein. Die dritte Frage muß also augenblicklich mit Nein beantwortet werden.

5. Aus den Antworten auf die von mir gestellten drei Fragen dürfte ersichtlich sein, daß die Voraussetzung, die man stillschweigend gemacht, als man die Berücksichtigung des historischen Elementes im mathematischen Schulunterricht empfohlen hat, hinfällig wird, und daß darum die Gründe, die für die fragliche Berücksichtigung angeführt wurden, bis auf weiteres nicht stichhaltig sind. Auf der anderen Seite gibt es ja Schullehrer, die selbst als Forscher auf dem mathematisch-historischen Gebiete wirksam sind, und für diese hat der Umstand, daß meine dritte Frage mit Nein beantwortet worden ist, keine entscheidende Bedeutung. Ebenso gibt es historische Angaben, die die meisten Mathematiklehrer ohne besonders große Mühe auf ihre Richtigkeit prüfen können, und solche Angaben können sie natürlich ohne Ungelegenheit ihren Schülern mitteilen. Allein für eine *durchgeführte* Berücksichtigung des historischen Elementes im mathematischen Schulunterrichte ist die Zeit noch nicht gekommen, und meiner Ansicht nach würde augenblicklich ein Versuch

[8]Siehe G. Eneström, *Wie kann die weitere Verbreitung unzuverlässiger mathematisch-historischer Angaben verhindert werden?* Biblioth. Mathem. **13**$_3$, 1912/13, S. 12 und die daselbst in der Fußnote 3 zitierten Stellen.

[9]Siehe G. Eneström, *Wie kann die weitere Verbreitung unzuverlässiger mathematisch-historischer Angaben verhindert werden?* Biblioth. Mathem. **13**$_3$, 1912/13, S. 2–12.

in dieser Richtung schädlich sein, nicht nur für den Schulunterricht sondern auch für die mathematisch-historische Forschung. Man müßte nämlich auf diese Weise in weiten Kreisen eine ganz unrichtige Vorstellung von dem wissenschaftlichen Gehalte der neuesten Forschung auf diesem Gebiete bekommen, weil die Arbeiten, die die Schullehrer ohne allzu
(7) große Mühe benutzen können, nur ausnahmsweise den heutigen Stand dieser Forschung repräsentieren.[10] Darum verfuhr man meines Erachtens in Schweden vor fünf Jahren ganz richtig, als neue methodische Anweisungen für den Gymnasialunterricht zusammengestellt wurden. Ursprünglich beabsichtigte man, in betreff des mathematischen Lehrfaches die Mitteilung historischer Notizen besondere zu empfehlen. Indessen nahm man nach näherer Untersuchung von der Einführung einer solchen Empfehlung Abstand, eben weil man nicht voraussetzen konnte, daß die schwedischen Gymnasiallehrer durch eigene Forschungen ausfindig machen würden, inwieweit die Angaben der mathematisch-historischen Handbücher richtig seien, und weil man der Ansicht war, daß das Verzichten auf historische Notizen der Mitteilung unzuverlässiger Angaben vorzuziehen sei.

6. Wer lebhaft überzeugt ist, daß der mathematische Schulunterricht durch Mitteilung historischer Notizen wesentlich befördert wird, kann natürlich nicht damit befriedigt sein, daß auf die Dauer keine durchgeführte Berücksichtigung des historischen Elementes stattfindet. Er muß vielmehr sich überlegen, wie die Hindernisse für eine solche Berücksichtigung sobald als möglich beseitigt werden sollen, und zwar dadurch, daß man den Mathematiklehrern die korrekten historischen Aufschlüsse, die sie brauchen, zugänglich macht.

(8) Meiner Ansicht nach wäre der beste Ausweg, ihnen direkt das Quellenmaterial zu bieten, worauf sich die zuverlässigsten Resultate der neuesten mathematisch-historischen Forschung stützen. Man sollte also möglichst kurze Auszüge aus den eigentlichen Quellenschriften anfertigen, denselben wenn nötig Übersetzungen in deutscher Sprache beifügen und dieses Material systematisch oder chronologisch ordnen. Allein da das direkte Quellenstudium auf dem mathematisch-historischen Gebiete oft recht schwer ist[11], müssen im Bedarfsfalle Erläuterungen gebracht werden.

[10] Es ist darum zu bedauern, daß Gebhardt in seiner oben zitierten Abhandlung (S. 124) in erster Linie seinen Kollegen die Cantorschen Vorlesungen empfiehlt. Noch bedauerlicher ist die Ausdrucksweise, deren er sich dabei bedient: „Voranstellen möchte ich unseren Altmeister M. Cantor. Es müßte jeder zum mindesten einige Abschnitte aus dessen großem, in seltenem Grade vollständigen vierbändigen Werke: „Vorlesungen über Geschichte der Elementarmathematik (!!)“ im Zusammenhange studiert haben.“ Allerdings fügt Gebhardt hinzu, daß Berichtigungen, die sich aus neueren Forschungen ergeben, in der ***Bibliotheca Mathematica*** veröffentlicht werden, und dadurch kann ja der Schullehrer wenigstens ersehen, daß die *Vorlesungen* nicht durchaus zuverlässig sind. Allein, daß die Arbeit von falschen Angaben und schiefen Urteilen wimmelt, die von den mangelhaften Kenntnissen und der unbefriedigenden Arbeitsmethode des Verfassers herrühren, kann man natürlich nicht aus dem Gebhardtschen Ausspruche erraten. Ein wenig irreleitend ist auch der Schreibfehler „Elementarmathematik“ statt „Mathematik“, sowie der Ausspruch „in seltenem Grade vollständig“. Auf Grund des Schreibfehlers muß der Schullehrer annehmen, daß die *Vorlesungen* eben für seinen Zweck angepaßt sind, was ja gar nicht der Fall ist, und auch der soeben zitierte Ausspruch gibt eine unrichtige Vorstellung von der empfohlenen Arbeit. In Wirklichkeit sollte man wenigstens „ausführlich“ statt „vollständig“ setzen, denn die Cantorschen *Vorlesungen* sind im Grunde sehr lückenhaft und was für den nicht Sachkundigen als Zeichen der Vollständigkeit erscheint, erklärt sich zum großen Teil dadurch, daß Cantor nicht selten Angaben über recht unbedeutende Sachen bringt, die eigentlich in eine weit ausführlichere Darstellung gehören sollten. Nun ist allerdings Gebhardt keine Autorität auf dem mathematisch-historischen Gebiete, aber seine Abhandlung ist vom Deutschen Unterausschusse der internationalen mathematischen Unterrichtskommission herausgegeben worden, und hat dadurch sozusagen ein offizielles Gepräge bekommen.

[11] Siehe G. Eneström, *Über die Bedeutung von Quellenstudien bei mathematischer Geschichtsschreibung*, ***Biblioth. Mathem.*** **12**$_3$, 1911/12, S. 2–8.

Man könnte vielleicht wundernehmen, daß ich nicht die Bearbeitung eines neuen Handbuches der Geschichte der Elementarmathematik befürwortet habe. In Wahrheit würde wohl ein solches denselben Nutzen mit sich führen, wie eine Exzerptensammlung mit Erläuterungen, vorausgesetzt daß im Handbuche die Belege für die Richtigkeit der Darstellung gebracht werden. Die Bemerkung ist nicht unrichtig, aber meiner Ansicht nach erzielt man durch die von mir vorgeschlagene Anordnung, daß die Schullehrer sich gewöhnen, die Auszüge aus den Quellen als die Hauptsache zu betrachten und die Erläuterungen zu Rate ziehen, nur wenn, die Auszüge ihnen keine hinreichende oder klare Auskunft bieten. Bringt man dagegen erst eine zusammenhängende Darstellung und dann als Belege die Auszüge, liegt die Gefahr nahe, daß die Lehrer diese als etwas Nebensächliches betrachten und darum oft unterlassen, von denselben Kenntnis zu nehmen. Wenn man also schon durch die Anordnung die Belege hervorhebt, lernen die Lehrer auch allmählich, sich nicht kritiklos auf die Angaben der vorhandenen Handbücher zu verlassen, und um dies noch besser zu bewirken, wäre es vielleicht angebracht, gelegentlich Anmerkungen einzuschalten, worin auf die Fehler der fraglichen Handbücher aufmerksam gemacht wird.

Die Idee der Arbeit, deren Anfertigung ich jetzt angeregt habe, ist nicht ganz neu, denn in Wirklichkeit handelt es sich um ein mathematisch-historisches Lesebuch, und nicht nur ist der Nutzen solcher Lehrbücher schon früher hervorgehoben worden, sondern es gibt schon einige solche.[12]

Selbstverständlich sollten auf Grund neuer Forschungen gewisse Auszüge früher oder später in Fortfall kommen und andere hinzugefügt werden, so daß die Arbeit allmählich veraltet wird. Allein, wenn man annehmen darf, daß jeder Mathematiklehrer sich ein Exemplar derselben verschafft, werden auch allmählich neue Auflagen nötig werden, so daß der Inhalt von Zeit zu Zeit mit dem Stande der neuesten mathematisch-historischen Forschung in Übereinstimmung gebracht werden kann.

[12] Vgl. Gebhardt, a. a. O. S. 128–132.