INAUGURAL - DISSERTATION

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Naturwissenschaftlich-Mathematischen Gesamtfakultät

der

Ruprecht-Karls-Universität

Heidelberg

vorgelegt von

Miriam Weigel M.Sc.

aus

Weinheim

Tag der mündlichen Prüfung:

Jacobiformen und L-Funktionen

Betreuer: Prof. Dr. Winfried Kohnen

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen bedanken, die mich während meiner Promotion unterstützt haben.

An erster Stelle gilt mein Dank meinem Doktorvater Herrn Prof. Dr. Kohnen von der Fakultät für Mathematik und Informatik für seine fachliche Unterstützung während der gesamten Bearbeitungsphase meiner Dissertation. Durch die zahlreichen Besprechungen und sein Feedback konnte ich neue Ideen entwickeln und meine Arbeit kontinuierlich verbessern.

Johann Franke, der ebenfalls an der Fakultät für Mathematik und Informatik der Universität Heidelberg promoviert, danke ich für die interessanten Gespräche, fachlichen Diskussionen und Anmerkungen, die mich neue Aspekte und Ansätze entdecken ließen.

Außerdem möchte ich mich bei meinem Vorgesetzten Herrn Prof. Dr. Hübl an der DHBW Mannheim für seine Unterstützung bedanken. Meinen Mannheimer Kollegen aus dem Hochschulverbundprojekt optes danke ich für ihre Herzlichkeit und die tolle Zeit im Projekt.

Mein besonderer Dank gilt meinen Eltern, Uschi und Michael Weigel, die mich stets ermutigen und immer für mich da sind. Abschließend möchte ich mich bei meinem Ehemann, Adrian Weigel, bedanken der mir großen Rückhalt gibt, mich bestärkt und motiviert und auf den ich mich 100% verlassen kann

Abstract

In this thesis we will calculate explicitly the Fourier coefficients of the kernel function of [Mar14]. Using the Fourier representation of the kernel function we will prove a non-vanishing result for L-functions associated to Jacobi cusp forms and for the derivatives of L-functions with the method of [Koh97].

Jacobiforms, L-functions, non-vanishing

Zusammenfassung

In der vorliegenden Dissertation werden die Fourierkoeffizienten der Kernfunktion aus [Mar14] explizit berechnet. Mit Hilfe der Fourierdarstellung der Kernfunktion wird dann das Nicht-Verschwinden der zu Jacobi-Spitzenformen assoziierten L-Funktionen und der Ableitungen der L-Funktionen mit der Methode aus [Koh97] gezeigt.

Jacobiformen, L-Funktionen, Nicht-Verschwinden

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die vorliegende Arbeit studiert Jacobiformen, deren L-Reihen und insbesondere Nicht-Verschwindungsaussagen für spezielle Werte.

Jacobiformen sind eine Mischung aus elliptischen Funktionen und Modulformen einer Variablen. Genauer gesagt, ist eine Jacobiform vom Gewicht $k \in \mathbb{N}$ und Index $m \in \mathbb{N}$ eine holomorphe Funktion in den Veränderlichen $\tau \in \mathbb{H}$ und $z \in \mathbb{C}$ bezüglich der Gruppe $SL_2(\mathbb{Z})$, welche die Transformationsformeln

1. $\phi\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}, \frac{z}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^k \exp\left(2\pi i \frac{mcz^2}{c\tau+d}\right)\phi(\tau,z) \quad (\forall \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{Z}))$
2. $\phi(\tau, z+\lambda\tau+\mu) = \exp\left(-2\pi i m(\lambda^2\tau + 2\lambda z)\right)\phi(\tau,z) \qquad (\forall (\lambda\ \mu) \in \mathbb{Z}^2)$

erfüllt und eine Fourierentwicklung der Form

$$\phi(\tau,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{r\in\mathbb{Z} \\ r^2 \le 4mn}} c(n,r)\exp(2\pi i(n\tau + rz))$$

besitzt. Bekannte Beispiele für Jacobiformen sind Thetafunktionen in zwei Variablen und die Fourierkoeffizienten-Funktionen von Siegel-Modulformen auf der symplektischen Gruppe $Sp_4(\mathbb{Z})$. Die Weierstraß-$\wp$-Funktion ist ein Beispiel für eine meromorphe Jacobiform.
Jacobiformen spielen eine wichtige Rolle in vielen Gebieten der Zahlentheorie und Physik, z.B. in der Theorie der Siegelschen Modulformen, beim Studium zentraler L-Werte und Ableitungen von L-Reihen getwisteter elliptischer Kurven und in der String Theorie.

In [EZ85, §4 Hecke Operators, S.41] werden Hecke-Operatoren für Jacobiformen eingeführt. Es wird gezeigt, dass der Raum der Jacobiformen eine Basis aus simultanen Hecke-Eigenformen besitzt. Ein weiteres Resultat ist, dass wenn eine Jacobiform ϕ vom Gewicht k und Index 1 eine Eigenfunktion für alle Hecke-Operatoren ist, es eine Hecke-Eigenform im Raum der Modulformen vom Gewicht $2k-2$ mit denselben Eigenwerten gibt [EZ85, Corollary 3, S.66].

Jacobiformen stehen in einem engem Zusammenhang mit Modulformen und Siegelschen Modulformen. Eine Beziehung zwischen elliptischen Modulformen vom Gewicht $2k-2$ und Siegelschen Modulformen vom Gewicht k (mit $k \in 2\mathbb{N}$) wurde unabhängig voneinander von H. Saito und N. Kurokawa [Kur78] beschrieben und von A. N. Andrianov [And79], H. Maaß [Maa79] und D. Zagier [Zag81] bewiesen: Bei numerischen Berechnungen von Eigenwerten von Hecke-Operatoren der vollen Siegelschen Modulgruppe vermuteten H. Saito und N. Kurokawa, dass es eine Abbildung gibt, die Modulformen vom Gewicht $2k-2$ und Index 1 auf Siegelsche Modulformen vom Gewicht k und Stufe 1 abbildet. Diese Abbildung ist ein Isomorphismus zwischen M_{2k-2} und einem speziellen Unterraum des Raumes der Siegelschen Modulformen, der sogenannten Spezialschar. Eisensteinreihen werden auf Eisensteinreihen, Spitzenformen auf Spitzenformen und Hecke-Eigenformen auf Hecke-Eigenformen abgebildet.

Nach dem Beweis der Saito-Kurokawa-Vermutung entwickelten M. Eichler und D. Zagier in [EZ85] systematisch die Theorie der Jacobiformen analog zur Theorie der Modulformen. Neben grundlegenden Eigenschaften der Jacobiformen wird die folgende Komposition von Isomorphismen erläutert:

$$\begin{array}{c} \text{Maaß Spezialschar} \subset M_k(Sp_4(\mathbb{Z})) \\ \downarrow \\ \text{Jacobiformen vom Gewicht } k \text{ und Index } 1 \\ \downarrow \\ \text{Kohnens „+“-Raum} \subset M_{k-\frac{1}{2}}(\Gamma_0(4)) \\ \downarrow \\ M_{2k-2}(SL_2(\mathbb{Z})). \end{array}$$

Der erste Isomorphismus bildet die Siegelsche Modulform

$$F\left(\begin{smallmatrix} \tau & z \\ z & \tau' \end{smallmatrix}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \phi_m(\tau, z)\, \exp(2\pi i m \tau') \quad (z \in \mathbb{C},\ \tau, \tau' \in \mathbb{H},\ \text{mit } \Im(z)^2 < \Im(\tau)\Im(\tau'))$$

auf ϕ_1 ab. Der zweite Isomorphismus ist durch

$$\sum_{n\geq 0} c(n)\, e^{2\pi i n\tau} \to \sum_{n\geq 0}\sum_{r^2\leq 4n} c(4n-r^2)\, \exp(2\pi i(n\tau + rz))$$

gegeben und der letzte Isomorphismus ist die Shimura-Korrespondenz [Shi87] zwischen Modulformen ganzen und halbganzen Gewichts, so wie in [Koh80] geeignet modifiziert.

Aus der Theorie der Modulformen ist bekannt, dass einer Modulform $f(\tau) = \sum_{n\geq 0} a(n)\, e(n\tau) \in M_k$ formal eine L-Reihe $L(f,s) = \sum_{n\geq 1} \frac{a(n)}{n^s}$ zugeordnet werden kann. Das bekannteste Beispiel einer L-Reihe ist die Riemannsche ζ-Funktion

$$\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s} \qquad \text{für } \Re(s) > 1.$$

Die Funktion $\pi^{-\frac{s}{2}}\, \Gamma(\frac{s}{2})\, \zeta(s)$ besitzt eine meromorphe Fortsetzung auf die komplexe Ebene, sie ist holomorph bis auf einfache Polstellen bei $s=0$ und $s=1$ und invariant unter der Transformation $s \mapsto 1-s$. Die Zetafunktion spielt in der Theorie der Verteilung der Primzahlen eine wichtige Rolle, denn es gilt

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ prim}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \qquad \text{für } \Re(s) > 1.$$

Aus dieser Darstellung als Euler-Produkt folgt, dass die Zetafunktion für $\Re(s) > 1$ nicht verschwindet. Zusammen mit der Funktionalgleichung ergibt sich, dass die Funktion $\zeta(s)$ außerhalb des kritischen Streifens $\{s \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \Re(s) \leq 1\}$ nur in den Stellen $-2, -4, -6, \ldots$ Nullstellen besitzt, die sog. trivialen Nullstellen. Die Riemannsche Vermutung besagt, dass alle nicht-trivialen Nullstellen auf der Geraden $\{s \in \mathbb{C} \mid \Re(s) = \frac{1}{2}\}$ liegen.
Betrachtet man die zu einer Spitzenform $f \in S_k$ assoziierte vervollständigte L-Reihe

$$L^*(f,s) = (2\pi)^{-s}\, \Gamma(s)\, L(f,s),$$

so liegen ihre nicht-trivialen Nullstellen im kritischen Streifen $\frac{k-1}{2} \leq \Re(s) \leq \frac{k+1}{2}$ und nach der verallgemeinerten Riemannschen Vermutung sogar ausschließlich auf der Geraden $\{s \in \mathbb{C} \mid \Re(s) = \frac{k}{2}\}$. In [Koh97] werden Hecke-Eigenformen

$f \in S_k$ betrachtet und Nicht-Verschwindungsaussagen über die dazugehörigen L-Funktionen im kritischen Streifen gezeigt.

Für Jacobiformen lassen sich ebenfalls L-Funktionen konstruieren. Ist $\phi \in J_{k,m}^{cusp}$ eine Jacobi-Spitzenform mit der Fourierentwicklung

$$\phi(\tau, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{r \in \mathbb{Z} \\ r^2 \leq 4mn}} c(n,r) \exp(2\pi i(n\tau + rz))$$

und setzen wir $c_r(D) := c(n,r)$ für $D = 4mn - r^2$ und 0 sonst, so können wir

$$\phi(\tau, z) = \sum_{\mu=0}^{2m-1} f_\mu(\tau)\, \Theta_{m,\mu}(\tau, z)$$

schreiben, wobei f_μ eine Potenzreihe der Form

$$f_\mu(\tau) := \sum_{D=1}^{\infty} c_\mu(D) \exp\left(2\pi i \frac{D}{4m}\tau\right) \qquad \text{mit } \mu = 0, 1, \ldots, 2m-1$$

und $\Theta_{m,\mu}$ die Thetafunktion

$$\Theta_{m,\mu}(\tau, z) := \sum_{\substack{r \in \mathbb{Z} \\ r \equiv \mu \pmod{2m}}} \exp\left(2\pi i \frac{r^2}{4m}\tau\right) e(rz) \qquad (\forall \mu \in \mathbb{Z})$$

ist. Diese Darstellung von ϕ wird Theta-Zerlegung genannt. Die zu ϕ dazugehörige L-Funktion ist durch

$$\Lambda_\mu(\phi, s) := \sum_{D=1}^{\infty} c_\mu(D) \left(\frac{D}{4m}\right)^{-s} \qquad \text{mit } \mu = 0, 1, \ldots, 2m-1$$

gegeben (vgl. [Mar96]). Ihre Vervollständigung

$$\Lambda_\mu^*(\phi, s) := (2\pi)^{-s}\, \Gamma(s)\, \Lambda_\mu(\phi, s) \qquad \text{mit } \mu = 0, 1, \ldots, 2m-1$$

erfüllt für $0 \leq \beta \leq 2m-1$ die $2m$ Funktionalgleichungen

$$\Lambda_\beta^*(\phi^c, s) = \frac{i^k}{\sqrt{2m}} \sum_{\mu=0}^{2m-1} \exp\left(2\pi i \frac{\mu\beta}{2m}\right) \Lambda_\mu^*\left(\phi^c, k - s - \frac{1}{2}\right),$$

wobei wir für $\phi \in J_{k,m}^{cusp}$ $\phi^c(\tau, z) := \overline{\phi(-\overline{\tau}, -\overline{z})}$ setzen (vgl. [Mar96]).

Wir werden in Kapitel 3 Hecke-Eigenformen $\phi \in J_{k,m}^{cusp}$ betrachten und analog zu [Koh97] Nicht-Verschwindungsaussagen über die dazugehörigen L-Funktionen in speziellen Werten zeigen.

Zuvor werden wir in Kapitel 1 einige Definitionen und Sätze aus [EZ85] rekapitulieren. Wir geben einen Überblick über die Theorie der Jacobiformen und erläutern einige Beispiele. Danach definieren wir das Petersson-Skalarprodukt für Jacobiformen. Mit Hilfe der Theta-Zerlegung für Jacobiformen definieren wir L-Reihen nach dem Vorbild von [Mar96]. Anschließend geben wir das Analogon zu Heckes Umkehrsatz für Jacobiformen aus [Mar96] wieder.

Kapitel 2 befasst sich mit der Jacobi-Spitzenform $\Omega_{\mu_0,s}^{k,m}$ aus [Mar14]. Nachdem die grundlegenden Eigenschaften dieser Funktion geklärt werden, berechnen wir ihr Skalarprodukt mit einer Jacobi-Spitzenform. Es zeigt sich, dass $\Omega_{\mu_0,s}^{k,m}$ eine Kernfunktion zu den oben genannten L-Reihen ist. Danach berechnen wir in Lemma 5 die Fourierkoeffizienten dieser Funktion.

Mit Hilfe der Fourierkoeffizienten und des Skalarprodukts der Funktion $\Omega_{\mu_0,s}^{k,m}$ mit einer Jacobiform werden wir in Kapitel 3 Nicht-Verschwindungssätze für spezielle Werte von L-Reihen zur Jacobi-Hecke-Eigenform ϕ zeigen (siehe Theorem 2, Theorem 3 und dazugehörige Korollare). Die Vorgehensweise ist ähnlich zur Methode aus [Koh97], zusätzlich erhalten wir eine Nicht-Verschwindungsaussage für die Fourierkoeffizienten von ϕ.

In Kapitel 4 rekapitulieren wir einige wichtige Eigenschaften von elliptischen Modulformen und Poincaré-Reihen. Danach betrachten wir die Funktion $\Omega_{\mu_0,s}^{k,m}$, die durch $z = 0$ zu einer gewöhnlichen Modulform vom Gewicht k wird. Anschließend beschäftigen wir uns mit der Konstruktion von Jacobi-Spitzenformen. Wir geben die Adjungierte der Einschränkung einer Jacobiform auf $z = 0$ bezüglich des Skalarprodukts an und berechnen das Skalarprodukt von $\Omega_{\mu_0,s}^{k,m}(\tau, 0)$ mit einer Spitzenform. Als Ergebnis erhalten wir eine Summe aus L-Reihen und einen weiteren Beweis für das Hauptresultat aus [Mar14].

Kapitel 1

Jacobiformen

In den folgenden Abschnitten geben wir einen Einblick in die Theorie der Jacobiformen. Zunächst führen wir die Jacobiformen und die Jacobigruppe formal ein und geben anschließend wichtige Resultate aus [EZ85] wieder. Es folgen einige Beispiele bevor dann näher auf das Petersson-Skalarprodukt und die Fourierkoeffizienten von Jacobiformen eingegangen wird. Abschließend betrachten wir zu Jacobiformen assoziierte L-Funktionen und das Analogon zu Heckes Umkehrsatz aus [Mar96].

1.1 Definition der Jacobiformen

D. Zagier motiviert in [Zag92] Jacobiformen folgendermaßen: In der Theorie der Modulformen werden Funktionen F auf Gittern $\Lambda \subset \mathbb{C}$ betrachtet, die invariant unter Skalarmultiplikationen $\Lambda \mapsto \lambda\Lambda$ ($\lambda \in \mathbb{C}^*$) sind. Diese gehören mittels $f(\tau) = F(\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z})$ zu Modulfunktionen. Da der Quotient $\mathbb{C}/\Lambda$ eine elliptische Kurve ist, können wir F (oder f) als Funktionen von elliptischen Kurven auffassen. Es ist naheliegend diese zu Funktionen *auf* elliptischen Kurven zu modifizieren, indem Funktionen ϕ betrachtet werden, die sowohl von Λ als auch von einer Variablen $z \in \mathbb{C}/\Lambda$ abhängen. Die Gleichungen

$$\phi(\lambda\Lambda, \lambda z) = \phi(\Lambda, z), \quad \phi(\Lambda, z + \omega) = \phi(\Lambda, z) \qquad (\forall \lambda \in \mathbb{C}^\times, \omega \in \Lambda)$$

gehören mittels $\phi(\tau, z) = \phi(\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}, z)$ zu Funktionen ϕ auf $\mathbb{H} \times \mathbb{C}$, die den Gleichungen

$$\begin{aligned} \phi\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \frac{z}{c\tau + d}\right) &= \phi(\tau, z) \qquad (\forall \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{Z})) \\ \text{und} \quad \phi(\tau, z + l\tau + m) &= \phi(\tau, z) \qquad (\forall\, l, m \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

genügen. Wir nennen holomorphe Funktionen ϕ auf $\mathbb{H} \times \mathbb{C}$, die diese Gleichungen erfüllen, Jacobifunktionen. Nach dem Satz von Liouville kann es jedoch keine nicht-triviale holomorphe Jacobifunktion geben, da jede holomorphe Funktion auf der komplexen Ebene, die invariant unter Transformationen der Form $z \mapsto z + \omega\, (\forall \omega \in \Lambda)$ ist, konstant sein muss.
Genau wie das Konzept der Modulfunktionen zu restriktiv war und zu dem Konzept der Modulformen vom Gewicht k, mit Funktionen auf Gittern, bei denen unter der Transformation $\Lambda \mapsto \lambda\Lambda$ der Faktor λ^{-k} hinzukommt, erweitert werden musste, so erweitert man auch das Konzept der Jacobifunktionen und fügt passende Skalierungsfaktoren in die Definition ein. Da Jacobiformen Funktionen in zwei Variablen sind, assoziieren wir zu ihnen zwei ganze Zahlen: das Gewicht, das die Transformationseigenschaften der Funktion bezüglich der Modulgruppe beschreibt und den Index, der das Transformationsverhalten der elliptischen Variable beschreibt.

Definition 1. *Wir definieren eine Jacobiform vom Gewicht k und Index m (hier sind k und m natürliche Zahlen) auf der speziellen linearen Gruppe $SL_2(\mathbb{Z}) := \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z},\ ad - bc = 1\}$ als eine holomorphe Funktion*

$$\phi : \mathbb{H} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

in den Veränderlichen $\tau \in \mathbb{H} = \{\tau \in \mathbb{C} \mid \Im(\tau) > 0\}$ und $z \in \mathbb{C}$ mit den Transformationsformeln

- $\phi\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}, \frac{z}{c\tau+d}\right) = (c\tau + d)^k \exp\left(\frac{2\pi imcz^2}{c\tau+d}\right) \phi(\tau, z) \quad (\forall \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{Z})),$
- $\phi(\tau, z + \lambda\tau + \mu) = \exp\left(-2\pi im(\lambda^2\tau + 2\lambda z)\right) \phi(\tau, z) \qquad (\forall(\lambda\ \mu) \in \mathbb{Z}^2)$

und der Fourierentwicklung

$$\phi(\tau, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{r \in \mathbb{Z} \\ r^2 \leq 4mn}} c(n, r) \exp(2\pi i(n\tau + rz)). \tag{1.1}$$

Bemerkung 1.

1. *Gilt sogar* $r^2 < 4mn$, *so heißt* ϕ *Jacobi-Spitzenform. Den dazugehörigen Raum bezeichnen wir mit* $J_{k,m}^{cusp}$.

2. *Für* $z = 0$ *ist die Funktion* ϕ *eine gewöhnliche Modulform vom Gewicht* k *bezüglich* $SL_2(\mathbb{Z})$, *denn sie besitzt die Fourierentwicklung* $\phi(\tau, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n) \exp(2\pi i n\tau)$ *mit* $a(n) := \sum_{r\in\mathbb{Z},\, r^2\leq 4mn} c(n,r)$ *und erfüllt für* $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{Z})$ *die Transformationsformel* $\phi(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}, 0) = (c\tau + d)^k \phi(\tau, 0)$.

3. *Setzen wir* $m = 0$, *so ist* ϕ *unabhängig von* z *und wir erhalten eine Modulform in einer Variablen.*

Im Folgenden sind k und m stets natürliche Zahlen. Aus Notationsgründen führen wir die abkürzenden Schreibweisen $e(z) := \exp(2\pi i z)$, $e^m(z) := e(mz)$ und $e_m(z) := e(z/m)$ mit $m \in \mathbb{N}$ ein. Die Variable z ist in $e(z)$ und $e^m(z)$ eine komplexe Zahl. In $e_m(z)$ ist z eine Variable aus $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

Für spätere Rechnungen möchten wir die Transformationsformeln für Jacobiformen in einer Gleichung zusammenfassen. Daher betrachten wir als nächstes die Jacobigruppe und definieren den Strichoperator für Jacobiformen.

Sei G^J die reelle Jacobigruppe, also die Menge der Tripel $h = [\gamma, Y, \zeta]$ mit $\gamma \in SL_2(\mathbb{R})$, $Y \in \mathbb{R}^2$ und $\zeta \in S^1 := \{w \in \mathbb{C} \mid |w| = 1\}$ und der Multiplikation

$$h_1 \cdot h_2 = \left[\gamma_1 \cdot \gamma_2,\ Y_1 \cdot \gamma_2 + Y_2,\ \zeta_1 \cdot \zeta_2 \cdot e\left(\det \left(\begin{smallmatrix} Y_1\gamma_2 \\ Y_2 \end{smallmatrix}\right)\right)\right].$$

Diese Gruppe operiert auf $\mathbb{H}\times\mathbb{C}$ für jedes $h = [\gamma, Y, \zeta]$ in G^J mit Komponenten $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{R})$ und $Y = (\lambda\ \mu) \in \mathbb{R}^2$ mittels

$$h \cdot (\tau, z) := \left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \frac{z + \lambda\tau + \mu}{c\tau + d}\right) \quad (\tau \in \mathbb{H},\ z \in \mathbb{C}).$$

Für positive ganze Zahlen m, k setzen wir $j_{k,m} : G^J \times \mathbb{H} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$j_{k,m}(h, \tau, z) := \zeta^m (c\tau + d)^{-k} e^m \left(\frac{-c(z + \lambda\tau + \mu)^2}{c\tau + d} + \lambda^2\tau + 2\lambda z + \lambda\mu\right).$$

Mit Hilfe dieser Abbildung definieren wir für meromorphe Funktionen $\phi : \mathbb{H} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ den Strichoperator

$$\phi|_{k,m}[h](\tau, z) := j_{k,m}(h, \tau, z)\, \phi(h \cdot (\tau, z)). \tag{1.2}$$

Das semi-direkte Produkt $\Gamma^J = SL_2(\mathbb{Z}) \ltimes (\mathbb{Z}^2 \times \{1\})$ stellt eine diskrete Untergruppe von G^J dar und spielt eine wichtige Rolle in der Theorie der Jacobiformen. Aus Notationsgründen lassen wir ab jetzt die 1 in der dritten Komponente des Tripels aus.

Mit der Definition des Strichoperators (1.2) können wir die beiden Transformationsgesetze der Jacobiformen in der Form

$$\phi|_{k,m}[h] = \phi$$

schreiben.

1.2 Eigenschaften von Jacobiformen

In diesem Abschnitt geben wir wichtige Eigenschaften der Jacobiformen wieder und erhalten einen Überblick über die Theorie.

Sei ϕ eine Jacobiform vom Gewicht k und Index m. Verschwindet die Funktion $z \mapsto \phi(\tau, z)$ nicht auf ganz $\mathbb{C}$, so hat sie (mit Vielfachheiten) genau $2m$ Nullstellen in einem Fundamentalbereich von $\mathbb{C}/(\mathbb{Z}\tau \oplus \mathbb{Z})$. Dies zeigt man durch Integration von $\frac{d}{dz}\log(\phi)$ um ein Fundamentalparallelogramm von $\mathbb{C}/(\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z})$ (vgl. [EZ85, Theorem 1.1, S.10]). Es folgt, dass es keine holomorphe Jacobiform von negativem Index m geben kann und eine Jacobiform vom Index 0 unabhängig von z sein muss.

Eine Jacobiform ϕ kann insbesondere keine Nullstelle der Vielfachheit größer $2m$ im Ursprung besitzen, so dass die ersten $2m + 1$ Terme der Taylorentwicklung

$$\phi(\tau, z) = \chi_0(\tau) + \chi_1(\tau)\, z + \chi_2(\tau)\, z^2 + \ldots$$

die Funktion ϕ bereits bestimmen. Andererseits erhält man durch Differenzieren von

$$\phi\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \frac{z}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^k\, e^m\left(\frac{cz^2}{c\tau + d}\right)\phi(\tau, z) \qquad (\forall \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{Z}))$$

nach z und anschließendes Nullsetzen von z, dass χ_0 eine Modulform in τ vom Gewicht k, χ_1 eine Modulform vom Gewicht $k+1$, $\chi_2 - \frac{2\pi im}{k}\chi_0'$ eine Modulform vom Gewicht $k+2$ und allgemein

$$\xi_\nu(\tau) = \sum_{0\leq\mu\leq\frac{\nu}{2}} \frac{(-2\pi im)^\mu\,(k+\nu-\mu-2)!}{(k+\nu-2)!\,\mu!}\,\chi_{\nu-2\mu}^{(\mu)}(\tau)$$

eine Modulform vom Gewicht $k+\nu$, für ganze Zahlen $\nu \geq 0$, ist (vgl. [EZ85, Theorem 3.2, S.32]).

Der Umstand, dass ϕ durch seine ersten $2m+1$ Taylorkoeffizienten bestimmt wird, bedeutet, dass es eine injektive Abbildung vom Raum $J_{k,m}$ der Jacobiformen vom Gewicht k und Index m in die direkte Summe $M_k \oplus S_{k+2} \oplus \ldots \oplus S_{k+2m}$ für k gerade und in $S_{k+1} \oplus S_{k+3} \oplus \ldots \oplus S_{k+2m-1}$ für k ungerade gibt.
Insbesondere ist $J_{k,m}$ endlich-dimensional mit Dimension

$$\dim(J_{k,m}) \leq \dim(M_k) + \sum_{\nu=1}^{2m} \dim(S_{k+\nu})$$

(vgl. [EZ85, Theorem 1.1, S.10; Theorem 3.4, S.37]).
Die Funktion ξ_ν besitzt die Fourierentwicklung

$$\xi_\nu(\tau) = (2\pi i)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} a_\nu(n)\,e(n\tau),$$

wobei $c(n,r)$ die Fourierkoeffizienten der Funktion ϕ sind und die Koeffizienten $a_\nu(n)$ durch

$$a_\nu(n) = \sum_{\substack{r\in\mathbb{Z}\\ r^2\leq 4mn}} \left(\sum_{0\leq\mu\leq\frac{\nu}{2}} \frac{(k+\nu-\mu-2)!}{(k+\nu-2)!}\,\frac{(-mn)^\mu\,r^{\nu-2\mu}}{\mu!\,(\nu-2\mu)!} \right) c(n,r)$$

gegeben sind.

Der Ring $J_{*,*} = \bigoplus_{k,m} J_{k,m}$ der Jacobiformen ist nicht endlich erzeugt (vgl. [EZ85, Theorem 8.5, S.99]). Erweitern wir den Raum $J_{k,m}$ zu dem Raum $\tilde{J}_{k,m}$ der „schwachen Jacobiformen“, der aus Funktionen $\phi : \mathbb{H}\times\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ besteht, die die Transformationseigenschaften von Jacobiformen besitzen und deren Fourierentwicklung ohne die Bedingung $r^2 \leq 4mn$ auskommt, so ist $\tilde{J}_{k,m} = \bigoplus_{k,m} \tilde{J}_{k,m}$ der Ring aller Polynome in den vier Funktionen $E_4(\tau)$, $E_6(\tau)$, $\frac{\phi_{10,1}(\tau,z)}{\Delta}$

und $\frac{\phi_{12,1}(\tau,z)}{\Delta}$ mit Gewicht 4, 6, -2 bzw. 0 und Index 0, 0, 1 bzw. 1, wobei $\Delta(\tau) := e(\tau)\prod_{r=1}^{\infty}(1-e(r\tau))^{24}$ ist (vgl. [EZ85, Theorem 9.4, S.111]) und die Funktionen E_4, E_6, $\phi_{10,1}$ und $\phi_{12,1}$ in Abschnitt 1.3.2 definiert werden. Insbesondere ist $\Delta(\tau)^m\,\phi(\tau,z)$ für jede Jacobiform von Index m ein Polynom in $E_4(\tau)$, $E_6(\tau)$, $E_{4,1}(\tau,z)$ und $E_{6,1}(\tau,z)$.

N.-P. Skoruppa zeigt in [Sko84], dass es keine nicht-trivialen Jacobiformen vom Gewicht 1 auf der projektiven speziellen linearen Gruppe $PSL_2(\mathbb{Z})$ gibt, d.h. $J_{1,m} = \{0\}$ für alle m.

Des Weiteren können Hecke-Operatoren auf den Räumen $J_{k,m}$ definiert (vgl. [EZ85, Theorem 4.1, S.41]) und ihre Spur berechnet werden (vgl. [Shi87]). Diese stehen in Beziehung zu den Spuren von Hecke-Operatoren auf den Räumen von Modulformen vom Gewicht $2k-2$ und Level m. Mit Hilfe der Hecke-Operatoren lassen sich Abbildungen von $J_{k,m}$ in einen gewissen Unterraum $\mathcal{M}_{2k-2}(m) \subset M_{2k-2}(\Gamma_0(m))$ konstruieren, die kanonisch definiert und invariant unter allen Hecke-Operatoren sind. Es stellt sich heraus, dass $J_{k,m}$ isomorph zu dem Unterraum $\mathcal{M}_{2k-2}(m)$ ist, dessen Hecke L-Reihen eine Funktionalgleichung mit einem Minuszeichen erfüllen (vgl. [Koh82]).

1.3 Beispiele

Als nächstes betrachten wir die Beispiele für Jacobiformen aus der Einleitung.

1.3.1 Thetareihen

Unser erstes Beispiel ist die Jacobi-Thetareihe. Von ihr stammt die Namensgebung der Jacobiformen.

Aus der Theorie der Modulformen ist uns die Thetareihe

$$\Theta_Q(\tau) = \sum_{x\in\Lambda} e(Q(x)\tau)$$

mit $\tau \in \mathbb{H}$ und einer positiv-definiten rational-wertigen quadratischen Form Q auf einem Gitter Λ mit endlichen Rang bekannt. Diese Modulform findet viele

Anwendungen in der Arithmetik, wie beispielsweise bei der Darstellbarkeit natürlicher Zahlen als Summe von Quadraten.
Die Jacobi-Thetareihe ist eine Verallgemeinerung der gewöhnlichen Thetareihe: Ist $Q(x)$ eine unimodulare positiv-definite quadratische Form auf einem Gitter Λ von Rang $2k$ und $B(x, y)$ die assoziierte Bilinearform mit $Q(x) = \frac{1}{2}B(x, x)$, so heißt für festes $y \in \Lambda$ die Reihe

$$\Theta_{Q,y}(\tau, z) := \sum_{x \in \Lambda} e(Q(x)\tau)\, e(B(x, y)z)$$

Jacobi-Thetareihe. Schränkt man die Jacobi-Thetareihe auf $z = 0$ ein, so erhält man die Thetareihe aus der Theorie der Modulformen. Diese Thetareihe wird als „Thetanullwert“ bezeichnet.

In [EZ85, Theorem 7.1, S.81] wird gezeigt, dass es sich bei der Jacobi-Thetareihe $\Theta(\tau, z)$ um eine Jacobiform vom Gewicht k und Index $m = Q(y)$ auf $SL_2(\mathbb{Z})$ handelt. Die Transformationseigenschaft

$$\Theta_{Q,y}\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \frac{z}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^k\, e^m\left(\frac{cz^2}{c\tau + d}\right)\, \Theta_{Q,y}(\tau, z)$$

für $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{Z})$ wird mit Hilfe der Poissonsummationsformel gezeigt und die Gleichung

$$\Theta_{Q,y}(\tau, z + \lambda\tau + \mu) = e^m(-\lambda^2\tau + 2\lambda z)\, \Theta_{Q,y}(\tau, z) \qquad (\forall \lambda, \mu \in \mathbb{Z})$$

folgt mit der Substitution $x \mapsto x + \lambda y$ direkt aus der Definition der Jacobi-Thetareihe. Die Fourierentwicklung folgt ebenfalls aus der Definition und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung $B(x, y)^2 \leq 4Q(x)\, Q(y)$.

Bemerkung 2. *Die Bedingung $r^2 \leq 4mn$ in der Fourierentwicklung von Jacobiformen wurde durch die Cauchy-Schwarz-Ungleichung $B(x, y)^2 \leq Q(x)\, Q(y)$, mit Q, B, x, y aus der Definition der Jacobi-Thetareihe $\Theta_{Q,y}$, motiviert.*

1.3.2 Eisensteinreihen

Als nächstes Beispiel betrachten wir die Eisensteinreihe

$$E_{k,m}(\tau, z) := \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty^{J\prime} \backslash \Gamma^J} 1|_{k,m}$$

mit dem Strichoperator aus (1.2) und

$$\Gamma_\infty^{J\prime} = \{\gamma \in \Gamma^J \,|\, 1|_{k,m}[\gamma] = 1\} = \{[\pm \left(\begin{smallmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), (0\ \mu)] \,|\, l,\, \mu \in \mathbb{Z}\}\,.$$

Diese können wir auch in der Form

$$E_{k,m}(\tau, z) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{c,d \in \mathbb{Z} \\ (c,d)=1}} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}} (c\tau + d)^{-k}\, e^m \left(\lambda^2 \frac{a\tau + b}{c\tau + d} + 2\lambda \frac{z}{c\tau + d} - \frac{cz^2}{c\tau + d} \right)$$

schreiben, wobei für jedes teilerfremde Paar $(c, d) \in \mathbb{Z}^2$ ganze Zahlen a, b gewählt werden, so dass $ad - bc = 1$ gilt.

Die Reihe $E_{k,m}$ konvergiert für $k \geq 4$ und stellt eine Jacobiform vom Gewicht k und Index m dar. Ihre Fourierkoeffizienten sind rationale Zahlen und können in Termen der Funktion $H(r, n)$ von Cohen dargestellt werden (vgl. [EZ85, Theorem 2.1, S.22]). Für $m = 1$ erhalten wir

$$E_{k,1}(\tau, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|r| \leq \sqrt{4n}} \frac{H(k-1, 4n - r^2)}{\zeta(3 - 2k)}\, e(n\tau)\, e(rz).$$

Ein Vergleich dieser Koeffizienten mit den Fourierkoeffizienten von Eisensteinreihen in einer Variablen und halbganzen Gewichts lässt einen Zusammenhang zwischen Jacobiformen von Index 1 und Modulformen halbganzen Gewichts erkennen.

Durch Kombination von Eisensteinreihen können wir weitere Beispiele für Jacobiformen erhalten. Wir bezeichnen mit

$$E_k(\tau) = \sum_{\gamma \in \Gamma'_\infty \backslash SL_2(\mathbb{Z})} 1|_k = \frac{1}{2} \sum_{\substack{c,d \in \mathbb{Z} \\ (c,d)=1}} (c\tau + d)^{-k}$$

die Eisensteinreihen aus der Theorie der Modulformen. Hier ist $|_k$ der Strichoperator für Modulformen und $\Gamma'_\infty = \{\pm \left(\begin{smallmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$ die Untergruppe von $SL_2(\mathbb{Z})$ mit Elementen γ mit $1|_k = 1$, wobei 1 die konstante Funktion bezeichnet. Die Funktionen

$$\begin{aligned}\phi_{10,1}(\tau,z) &= \frac{1}{144}\,(E_6(\tau)\,E_{4,1}(\tau,z) - E_4(\tau)\,E_{6,1}(\tau,z)),\\ \phi_{12,1}(\tau,z) &= \frac{1}{144}\,(E_8(\tau)\,E_{4,1}(\tau,z) - E_6(\tau)\,E_{6,1}(\tau,z))\end{aligned}$$

sind ebenfalls Jacobi-Spitzenformen vom Gewicht 10 bzw. 12 und Index 1 (vgl. [EZ85, (17), S. 38]).

1.3.3 Weierstraß-$\wp$-Funktion

Die Weierstraß-$\wp$-Funktion

$$\wp(\tau,z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{\omega\in\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau\\ \omega\neq 0}} \left(\frac{1}{(z+\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right)$$

ist eine meromorphe Jacobiform vom Gewicht 2 und Index 0. Sie kann als Quotient zweier holomorpher Jacobiformen vom Gewicht 12 und 10 sowie Index 1 dargestellt werden: Mit den zuvor definierten Funktionen $\phi_{10,2}$ und $\phi_{12,1}$ gilt (vgl. [EZ85, Theorem 3.6, S.39])

$$\frac{\phi_{10,1}(\tau,z)}{\phi_{12,1}(\tau,z)} = -\frac{3}{\pi^2}\cdot\wp(\tau,z).$$

1.3.4 Fourierkoeffizienten von Siegelschen Modulformen

Abschließend betrachten wir Siegelsche Modulformen. Die Siegelsche obere Halbebene vom Grad n ist definiert als die Menge $\mathcal{H}_n$ komplexer, symmetrischer $n\times n$-Matrizen Z mit positiv-definitem Imaginärteil.

Sei $J_{2n} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -I_n \\ -I_n & 0\end{smallmatrix}\right)$, wobei I_n die $n\times n$-Einheitsmatrix bezeichnet. Die Gruppe

$$\begin{aligned}Sp_{2n}(\mathbb{R}) &= \{M\in M_{2n}(\mathbb{R})\,|\,MJ_{2n}M^t = J_{2n}\}\\ &= \Big\{\left(\begin{smallmatrix} A & B\\ C & D\end{smallmatrix}\right)\,|\,A,B,C,D\in M_n(\mathbb{R}),\\ &\qquad\qquad AB^t = BA^t,\ CD^t = DC^t,\ AD^t - BC^t = I_n\Big\}\end{aligned}$$

operiert auf $\mathcal{H}_n$ via

$$\left(\begin{smallmatrix} A & B\\ C & D\end{smallmatrix}\right)\cdot Z = (AZ+B)(CZ+D)^{-1}.$$

Definition 2. *Eine Siegelsche Modulform vom Grad n und Gewicht k bezüglich der vollen Siegelschen Modulgruppe $\Gamma_n = Sp_{2n}(\mathbb{Z})$ ist eine holomorphe Funktion $F : \mathcal{H}_n \to \mathbb{C}$, die für alle $Z \in \mathcal{H}_n$ und $M = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_n$ die Gleichung*

$$F(M \cdot Z) = \det(CZ + D)^k \, F(Z)$$

erfüllt und beschränkt in $Y \geq Y_0$, für jedes $Y_0 > 0$, ist.

Wir bezeichnen mit $M_k(\Gamma_n)$ den $\mathbb{C}$-Vektorraum der Siegelschen Modulformen vom Grad n und Gewicht k. Ist $F \in M_k(\Gamma_n)$, dann besitzt F eine Fourierentwicklung der Form

$$F(Z) = \sum_{T \geq 0} A(T) \, e(\mathrm{sp}(TZ)),$$

wobei über positiv-semidefinite semi-ganzzahlige (d.h. $2t_{ij}, t_{ii} \in \mathbb{Z}$) $n \times n$-Matrizen T summiert wird.

Bemerkung 3. *Für $n \geq 2$ folgt die Beschränktheit in Definition 2 aus der Holomorphie und dem Transformationsverhalten der Siegelschen Modulformen (Koecher-Prinzip).*

Für $n = 2$ können wir Z in der Form $\left(\begin{smallmatrix} \tau & z \\ z & \tau' \end{smallmatrix}\right)$ mit $\tau, \tau' \in \mathbb{H}$, $z \in \mathbb{C}$, so dass $\Im(z)^2 < \Im(\tau)\Im(\tau')$ gilt, und $F(\tau, z, \tau') := F(Z)$ schreiben. Wir schreiben $T = \begin{pmatrix} n & \frac{r}{2} \\ \frac{r}{2} & m \end{pmatrix}$, wobei $n, r, m \in \mathbb{Z}$ mit $n, m \geq 0$, $r^2 \leq 4mn$ und $A(n, r, m) := A(T)$. Dann ist die Fourierentwicklung der Funktion F gegeben durch

$$F(\tau, z, \tau') = \sum_{\substack{n,r,m \in \mathbb{Z} \\ n,m,4mn-r^2 \geq 0}} A(n, r, m) \, e(n\tau + rz + m\tau').$$

Schreiben wir die Fourierentwicklung in der Form

$$F(\tau, z, \tau') = \sum_{m=0}^{\infty} \phi_m(\tau, z) \, e(m\tau'),$$

so ist $\phi_m(\tau, z)$ eine Jacobiform vom Gewicht k und Index m (vgl. [EZ85, Theorem 6.1, S.73]).

1.4 Petersson-Skalarprodukt

Als nächstes beschäftigen wir uns mit dem Petersson-Skalarprodukt zweier Jacobiformen.

Wir schreiben für $\tau \in \mathbb{H},\ z \in \mathbb{C}$

$$\tau = u + iv \quad (u,\, v \in \mathbb{R},\, v > 0), \qquad z = x + iy \quad (x,\, y \in \mathbb{R})$$

und definieren ein Volumenelement dV auf $\mathbb{H} \times \mathbb{C}$ durch

$$dV := v^{-3} dx\, dy\, du\, dv.$$

Dieses Volumenelement ist invariant unter der Aktion von G^J auf $\mathbb{H} \times \mathbb{C}$.

Beweis. Wir schreiben $dV(\tau, z) := v^{-3}\, dx\, dy\, du\, dv$ mit $\tau = u+iv$ und $z = x+iy$ $(x,\, y,\, u,\, v \in \mathbb{R},\, v > 0)$. Zu zeigen ist

$$dV\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \frac{z}{c\tau + d}\right) = dV(\tau, z) \qquad \left(\forall \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{R}),\, (\lambda\ \mu) \in \mathbb{R}^2\right).$$

Zunächst bemerken wir, dass

$$\begin{aligned} dz\, d\overline{z} &= (dx + i\, dy)(dx - i\, dy) = -i\, dx\, dy + i\, dy\, dx = -2i\, dx\, dy, \\ d\tau\, d\overline{\tau} &= (du + i\, dv)(du - i\, dv) = -2i\, du\, dv \end{aligned}$$

und somit

$$dV(\tau, z) = -\frac{1}{4} \cdot \Im(\tau)\, dz\, d\overline{z}\, d\tau\, d\overline{\tau}$$

gilt. Außerdem ist

$$\Im\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = \Im\left(\frac{(a\tau + b)\overline{(c\tau + d)}}{|c\tau + d|^2}\right) = \frac{\Im(\tau)}{|c\tau + d|^2}.$$

Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned} dV\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \frac{z}{c\tau + d}\right) &= -\frac{1}{4} \cdot \frac{\Im(\tau)^{-3}}{|c\tau + d|^{-6}} \cdot \frac{1}{|c\tau + d|^6}\, dz\, d\overline{z}\, d\tau\, d\overline{\tau} \\ &= v^{-3}\, dx\, dy\, du\, dv = dV(\tau, z). \end{aligned}$$

Somit haben wir gezeigt, dass das oben definierte Volumenelement invariant unter der Aktion von G^J auf $\mathbb{H} \times \mathbb{C}$ ist. $\blacksquare$

Sind ϕ und ψ Jacobiformen vom Gewicht k und Index m, so kann gezeigt werden, dass der Ausdruck

$$v^k\, e^{-\frac{4\pi m y^2}{v}}\phi(\tau,z)\,\overline{\psi(\tau,z)}$$

invariant unter Γ^J ist. Daher können wir das Petersson-Skalarprodukt durch

$$\langle\phi,\psi\rangle := \int_{\Gamma^J\backslash\mathbb{H}\times\mathbb{C}} v^k\, e^{-\frac{4\pi m y^2}{v}}\phi(\tau,z)\,\overline{\psi(\tau,z)}\,dV \tag{1.3}$$

mit $\tau = u+iv$, $z = x+iy$ und $dV = v^{-3}\,dx\,dy\,du\,dv$ definieren. Dieses Skalarprodukt ist wohldefiniert und endlich für $\phi,\psi\in J_{k,m}$, wenn ϕ oder ψ eine Spitzenform ist (vgl. [EZ85, Theorem 2.5, S.28]).

1.5 Theta-Zerlegung einer Jacobiform

Seien k und m von nun an feste positive ganze Zahlen.

Wir wissen bereits, dass jede Funktion $\phi\in J^{cusp}_{k,m}$ eine Fourierentwicklung der Form (1.1) besitzt. Für die Koeffizienten $c(n,r)$ gilt der folgende Satz (vgl. [EZ85, Theorem 2.2, S.23]).

Satz 1. *Sei ϕ eine Jacobiform vom Gewicht k und Index m mit der Fourierentwicklung*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\substack{r\in\mathbb{Z}\\ r^2\le 4mn}} c(n,r)e(n\tau)e(rz).$$

Dann hängt $c(n,r)$ nur von $4mn-r^2$ und $r \pmod{2m}$ ab.

Beweis. Es gilt aufgrund des Transformationsverhaltens von Jacobiformen

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\substack{r\in\mathbb{Z}\\ r^2\le 4mn}} c(n,r)e(n\tau)e(rz) &= \phi(\tau,z) = e^m(\lambda^2\tau+2\lambda z)\phi(\tau,z+\lambda\tau+\mu)\\ &= e(\lambda^2 m\tau)e(2\lambda m z)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\substack{r\in\mathbb{Z}\\ r^2\le 4mn}} c(n,r)e(n\tau)e(rz+\lambda r\tau)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\substack{r\in\mathbb{Z}\\ r^2\le 4mn}} c(n,r)e((n+\lambda r+\lambda^2 m)\tau)e((r+2\lambda m)z),\end{aligned}$$

also $c(n,r) = c(n + \lambda r + \lambda^2 m, r + 2\lambda m)$ für alle $\lambda \in \mathbb{Z}$. Demnach gilt $c(n,r) = c(n',r')$ genau dann, wenn $r' \equiv r \pmod{2m}$ und $4mn' - r'^2 = 4mn - r^2$. ■

Bemerkung 4. *Für gerades k und $m = 1$ oder m prim hängen die Fourierkoeffizienten $c(n,r)$ der Jacobiform $\phi \in J_{k,m}$ nur von $4mn - r^2$ ab. Für ungerades k und $m = 1$ verschwindet die Jacobiform ϕ (vgl. [EZ85, Theorem 2.1, S.23]).*

Definieren wir $D := 4mn - r^2$ und $c_r(D) := c(n,r)$ für alle $n, r \in \mathbb{Z}$, so erhalten wir $c_r(D) = c_{r'}(D)$, wenn $r \equiv r' \pmod{2m}$. Dies motiviert uns die $2m$ Potenzreihen

$$f_\mu(\tau) := \sum_{D=1}^{\infty} c_\mu(D) e\left(\frac{D}{4m}\tau\right) \qquad \text{für } \mu = 0, 1, \ldots, 2m-1 \tag{1.4}$$

zu betrachten. Eine Jacobi-Spitzenform $\phi \in J_{k,m}^{cusp}$ kann mit der Thetafunktion

$$\Theta_{m,\mu}(\tau, z) := \sum_{\substack{r \in \mathbb{Z} \\ r \equiv \mu \,(\mathrm{mod}\, 2m)}} e\left(\frac{r^2}{4m}\tau\right) e(rz) \qquad (\forall \mu \in \mathbb{Z}).$$

und der Potenzreihe f_μ durch

$$\begin{aligned} \phi(\tau, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{r \in \mathbb{Z} \\ r^2 < 4mn}} c(n,r) e(n\tau) e(rz) \\ &= \sum_{\mu=0}^{2m-1} \sum_{r \equiv \mu \,(2m)} \sum_{D>0} c_\mu(D) e\left(\frac{D + r^2}{4m}\tau\right) e(rz) \qquad (1.5) \\ &= \sum_{\mu=0}^{2m-1} f_\mu(\tau) \Theta_{m,\mu}(\tau, z) \end{aligned}$$

dargestellt werden. Diese Darstellung wird Theta-Zerlegung von ϕ genannt (vgl. [EZ85, S.58]). Sind die $2m$-Tupel $(f_\mu)_{\mu\,(\mathrm{mod}\, 2m)}$ von Funktionen einer Variablen bekannt, so ist es auch die Funktion ϕ.

Umgekehrt sehen wir, dass für gegebene Funktionen f_μ wie in (1.4) mit $c_\mu(D) = 0$ für $D \not\equiv -\mu^2 \pmod{4m}$ $(\mu = 0, 1, \ldots, 2m-1)$ durch (1.5) die Funktion ϕ (mit Fourierkoeffizienten $c(n,r) = c_\mu(4mn - r^2)$, $c_{\mu'}(D) = c_\mu(D)$ für $\mu' \equiv \mu \pmod{2m}$) bestimmt wird.
Diese Funktion verhält sich bezüglich $z \mapsto z + \lambda\tau + \mu$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{Z})$ wie eine Jacobiform und erfüllt die entsprechende Bedingung in unendlich. Damit ϕ eine

Jacobiform ist, muss das Transformationsverhalten bezüglich $SL_2(\mathbb{Z})$ gezeigt werden. Da die Thetafunktionen $\Theta_{m,\mu}$ Gewicht $\frac{1}{2}$ und Index m haben und ϕ Gewicht k und Index m besitzt, ist nach (1.5) f_μ eine Modulform vom Gewicht $k - \frac{1}{2}$.
Um ihr genaues Transformationsverhalten zu bestimmen, genügt es die Erzeuger $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ von $SL_2(\mathbb{Z})$ zu betrachten:
Für den Ersten gilt aufgrund der Invarianz der Reihe (1.5) unter $\tau \mapsto \tau + 1$

$$\Theta_{m,\mu}(\tau + 1, z) = e_{4m}(\mu^2)\Theta_{m,\mu}(\tau, z) \quad \text{und} \quad f_\mu(\tau + 1) = e_{4m}(-\mu^2) f_\mu(\tau).$$

Für den Zweiten folgt mit der Poissonsummationsformel

$$\Theta_{m,\mu}\left(-\frac{1}{\tau}, \frac{z}{\tau}\right) = \sqrt{\frac{\tau}{2mi}}\, e^m\left(\frac{z^2}{\tau}\right) \sum_{\nu \,(\mathrm{mod}\, 2m)} e_{2m}(-\mu\nu)\Theta_{m,\nu}(\tau, z),$$

der Transformationsformel von ϕ unter $(\tau, z) \mapsto \left(-\frac{1}{\tau}, \frac{z}{\tau}\right)$ und (1.5)

$$f_\mu\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \sqrt{\frac{i}{2m}}\, \tau^{k-\frac{1}{2}} \sum_{\nu \,(\mathrm{mod}\, 2m)} e_{2m}(\mu\nu)\, f_\mu(\tau).$$

Wir haben somit den folgenden Satz (vgl. [EZ85, Theorem 5.1, S.59]) gezeigt.

Satz 2. *Durch die Funktion*

$$\phi(\tau, z) = \sum_{\mu=0}^{2m-1} f_\mu(\tau)\, \Theta_{m,\mu}(\tau, z)$$

erhalten wir einen Isomorphismus zwischen dem Raum der Jacobiformen vom Gewicht k und Index m und dem Raum der vektorwertigen Modulformen $(f_\mu)_{\mu\,(2m)}$ vom Gewicht $k - \frac{1}{2}$ auf $SL_2(\mathbb{Z})$, die die Transformationsformeln

$$f_\mu(\tau + 1) = e_{4m}(-\mu^2)\, f_\mu(\tau),$$
$$f_\mu\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \sqrt{\frac{i}{2m}}\, \tau^{k-\frac{1}{2}} \sum_{\nu \,(\mathrm{mod}\, 2m)} e_{2m}(\mu\nu)\, f_\nu(\tau)$$

erfüllen und für $\Im(\tau) \to \infty$ beschränkt sind.

Im nächsten Abschnitt werden wir Jacobiformen L-Reihen zuordnen. Damit diese wohldefiniert sind, zeigen wir als nächstes, dass die Fourierkoeffizienten einer Jacobiform beschränkt sind.

Bemerkung 5. *Nach [BB90, S.24] können die Fourierkoeffizienten $c(n,r)$ einer Jacobi-Spitzenform $\phi \in J_{k,m}^{cusp}$ durch*

$$|c(n,r)| \ll |D|^{\frac{k}{2}} \qquad \textit{mit } D := 4mn - r^2 \tag{1.6}$$

abgeschätzt werden.

Das folgende Lemma ist eine Verschärfung dieses Resultats.

Lemma 1. *Sei $k > 3$ und $\phi \in J_{k,m}$ eine Jacobiform mit Fourierkoeffizienten $c(n,r)$. Setze $D := 4mn - r^2$. Dann gilt für $D > 0$*

$$c(n,r) \ll |D|^{k-\frac{3}{2}}.$$

Ist $\phi \in J_{k,m}^{cusp}$ eine Jacobi-Spitzenform, so gilt

$$c(n,r) \ll |D|^{\frac{k}{2}-\frac{1}{2}}.$$

Beweis. Die Behauptung für eine Jacobi-Spitzenform $\phi \in J_{k,m}^{cusp}$ wird in Proposition 1 aus [BK93] gezeigt. Ist $\phi \in J_{k,m}$ eine Jacobiform, so können wir ϕ als eine Summe von Jacobi-Spitzenformen und eine Linearkombination aus Eisensteinreihen schreiben (vgl. [EZ85, Theorem 2.4, S.25]). Die Behauptung für die Fourierkoeffizienten folgt dann aus der expliziten Berechnung der Fourierkoeffizienten dieser Eisensteinreihen. ■

Zusammen mit dem folgenden Lemma aus [Mar96] erhalten wir, dass die Theta-Zerlegung nicht nur eine formale Beziehung darstellt.

Lemma 2. *Sei m eine positive ganze Zahl und $\{c_\mu(D)\}$ für $\mu = 0, 1, \ldots, 2m-1$ und $D \geq 0$ eine Folge in $\mathbb{C}$ mit $c_\mu(D) = 0$ für $D + \mu^2 \not\equiv 0 \pmod{4m}$. Seien $f_\mu(\tau)$, $\Theta_{m,\mu}(\tau, z)$ und $\phi(\tau, z)$ die oben definierten Potenzreihen in $e(\tau)$ und $e(z)$. Falls $c_\mu(D) = \mathcal{O}(D^\nu)$ für ein $\nu > 0$ gilt, so konvergiert jede der Reihen $f_\mu(\tau)$ (bzw. $\phi(\tau, z)$) absolut und gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von $\mathbb{H}$ (bzw. $\mathbb{H} \times \mathbb{C}$). Insbesondere definieren sie holomorphe Funktionen auf $\mathbb{H}$ (bzw. $\mathbb{H} \times \mathbb{C}$). Außerdem gilt für $\tau = x + iy$ und $z = p\tau + q$ mit x, y, p, $q \in \mathbb{R}$*

$$\begin{aligned} f_\mu(\tau)\, \Theta_{m,\mu}(\tau, z)\, e^m(pz) &= \mathcal{O}\left(y^{-\nu-\frac{3}{2}}\right) && \textit{für} \quad y \to 0, \\ (f_\mu(\tau) - c_\mu(0))\, \Theta_{m,\mu}(\tau, z)\, e^m(pz) &= \mathcal{O}\left(e\left(\frac{iy}{4m}\right)\right) && \textit{für} \quad y \to \infty \end{aligned}$$

und folglich

$$\phi(\tau,z)\,e^m(pz)=\mathcal{O}\left(y^{-\nu-\frac{3}{2}}\right) \qquad \textit{für} \quad y\to 0,$$

$$\left(\phi(\tau,z)-\sum_{\mu=0}^{2m-1}c_\mu(0)\,\Theta_{m,\mu}(\tau,z)\right)e^m(pz)=\mathcal{O}\left(e\left(\frac{iy}{4m}\right)\right) \quad \textit{für} \quad y\to\infty.$$

Beweis. Den Beweis entnehmen wir [Mar96, Lemma 3, S.186].
Da $\nu>0$, gilt (vgl. [AS65, 6.1.2])

$$\Gamma(\nu+1)=\lim_{D\to\infty}\frac{D!\,D^{\nu+1}}{(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+1+D)}=\lim_{D\to\infty}(-1)^{-D}D^\nu\binom{-\nu-1}{D}^{-1}.$$

Es gibt also eine Konstante $K'>0$, so dass für $D=0,1,2,\dots$

$$D^\nu\le K'\,(-1)^D\binom{-\nu-1}{D}$$

gilt. Wegen $c_\mu(D)=\mathcal{O}(D^\nu)$ für $D\to\infty$ folgt mit einer Konstanten $L\in\mathbb{R}$

$$|c_\mu(D)|\le L\,(-1)^D\binom{-\nu-1}{D},\quad D=0,1,2,\dots$$

Sei $\tau=x+iy$, $z=p\tau+q$ mit $x,y,p,q\in\mathbb{R}$. Dann gilt für $\mu\in\{0,1,\dots,2m-1\}$

$$\begin{aligned}|e^m(pz)|&\sum_{\substack{r\equiv\mu\,(\mathrm{mod}\,2m)\\ D=4mn-r^2\ge 0}}|c_\mu(D)e(n\tau)e(rz)|\\ &<L\sum_{D\ge 0}(-1)^D\binom{-\nu-1}{D}e\left(\frac{D}{4m}iy\right)\sum_{r\equiv\mu\,(\mathrm{mod}\,2m)}e^m\left(\left(p+\frac{r}{2m}\right)^2iy\right).\end{aligned}$$

Die innere Summe konvergiert zu einer positiven reellen Zahl kleiner gleich $(2my)^{-\frac{1}{2}}$ (vgl. [GR14, 3.323, 2]). Deswegen erhalten wir für $\tau\in\mathbb{H}$, $z\in\mathbb{C}$

$$|e^m(pz)|\sum_{\substack{r\equiv\mu\,(\mathrm{mod}\,2m)\\ D=4mn-r^2\ge 0}}|c_\mu(D)\,e(n\tau)\,e(rz)|<\frac{L}{\sqrt{2my}}\left(1-e\left(\frac{iy}{4m}\right)\right)^{-\nu-1}. \tag{1.7}$$

Folglich ist $f_\mu(\tau)\Theta_{m,\mu}(\tau,z)$ (und daher $\phi(\tau,z)$) absolut und gleichmäßig konvergent auf jeder kompakten Teilmenge von $\mathbb{H}\times\mathbb{C}$. Ein ähnlicher Beweis zeigt, dass die Reihe $f_\mu(\tau)$ absolut und gleichmäßig konvergent auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{H}$ ist.

Da für $y\to\infty$ die Gleichung

$$y^{-\frac{1}{2}}\left(1-e\left(\frac{iy}{4m}\right)\right)^{-\nu-1}=\mathcal{O}(y^{-\nu-\frac{3}{2}})$$

gilt, erhalten wir mit (1.7)

$$f_\mu(\tau)\,\Theta(\tau,z)\,e^m(pz) = \mathcal{O}\left(y^{-\nu-\frac{3}{2}}\right) \quad \text{für} \quad y\to\infty.$$

Die rechte Seite von (1.7) geht für $y\to\infty$ gegen 0, also ist

$$|e^m(pz)\,f_\mu(\tau)\,\Theta_{m,\mu}(\tau,z)|$$

für $y\to\infty$ beschränkt.

Durch dasselbe Argument erhalten wir, dass

$$\left| e^m(pz)\left(\sum_{D\geq 0} c_\mu(D+1)\,e\left(\frac{D}{4m}\tau\right)\right)\Theta_{m,\mu}(\tau,z)\right|$$

für $y\to\infty$ beschränkt ist.

Es folgt

$$(f_\mu(\tau)-c_\mu(0))\,\Theta_{m,\mu}(\tau,z)\,e^m(pz) = \mathcal{O}\left(e\left(\frac{iy}{4m}\right)\right) \qquad \text{für} \quad y\to\infty$$

und somit die Behauptung. ■

Abschließend möchten wir eine alternative Darstellungsform des Skalarprodukts zweier Jacobiformen mit Hilfe der Theta-Zerlegung angeben und einen Zusammenhang zu vektorwertigen Modulformen halbganzen Gewichts aufzeigen. Wir nennen eine Modulform h vom Gewicht $k-\frac{1}{2}$ vektorwertig, wenn der Vektor $\vec{h}(\tau) = (h_\mu)_{\mu (\mathrm{mod}\ 2m)}$ die Bedingung $\vec{h}(M\tau) = (c\tau+d)^{k-\frac{1}{2}}U(M)\,\vec{h}(\tau)$ für alle $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{Z})$ erfüllt, wobei $U(M) = (U_{\mu\nu}(M))$ eine gewisse $2m\times 2m$-Matrix darstellt (vgl. [EZ85, S.59]).
Seien ϕ, $\psi \in J^{cusp}_{k,m}$ zwei Jacobiformen vom Gewicht k und Index m mit den Theta-Zerlegungen

$$\begin{aligned}\phi(\tau,z) &= \sum_{\mu\,(\mathrm{mod}\ 2m)} h_\mu(\tau)\,\Theta_{m,\mu}(\tau,z),\\ \psi(\tau,z) &= \sum_{\mu\,(\mathrm{mod}\ 2m)} g_\mu(\tau)\,\Theta_{m,\mu}(\tau,z).\end{aligned}$$

Dann erhalten wir für das Skalarprodukt von ϕ und ψ

$$\langle\phi,\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2m}}\int_{SL_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}} \sum_{\mu\,(\mathrm{mod}\ 2m)} h_\mu(\tau)\,\overline{g_\mu(\tau)}\,v^{k-\frac{5}{2}}\,du\,dv$$

mit $\tau = u + iv$ (vgl. [EZ85, Theorem 5.3, S.61]). Das Petersson-Skalarprodukt (1.3) für zwei Jacobiformen ϕ, ψ entspricht also, bis auf eine Konstante, dem Petersson-Skalarprodukt für vektorwertige Modulformen $(h_\mu)_\mu$, $(g_\mu)_\mu$ vom Gewicht $k - \frac{1}{2}$.

1.6 L-Reihen und Heckes Umkehrsatz für Jacobiformen

In der Theorie der Modulformen erhalten wir die zu einer Spitzenform $f \in S_k$ mit Fourierkoeffizienten $a_f(n)$ assoziierte L-Funktion für $\Re(s) > \frac{k+1}{2}$ durch

$$L(f,s) := \sum_{n\geq 1} a_f(n)\, n^{-s}.$$

Die vervollständigte L-Funktion

$$L^*(f,s) := (2\pi)^{-s}\,\Gamma(s)\,L(f,s)$$

ist auf die gesamte komplexe Ebene holomorph fortsetzbar und erfüllt die Funktionalgleichung

$$L^*(f,s) = (-1)^{\frac{k}{2}}\, L^*(f, k-s).$$

Nach Heckes Umkehrsatz stellt die Fourierreihe $\sum_{n\geq 1} a_f(n)\, e(n\tau)$ genau dann eine Spitzenform $f \in S_k$ dar, wenn $L^*(f,s)$ eine analytische Fortsetzung auf die gesamte komplexe Ebene besitzt, diese Fortsetzung auf jedem vertikalen Streifen beschränkt ist und die Funktionalgleichung $L^*(f,s) = (-1)^{\frac{k}{2}}\, L^*(f, k-s)$ erfüllt.

Für Jacobiformen erhalten wir ein ähnliches Resultat. Zunächst ordnen wir Jacobiformen L-Reihen zu und geben anschließend das Analogon zu Heckes Umkehrsatz aus [Mar96, Corollary 6, S.192] wieder.

1.6.1 L-Funktionen zu Jacobiformen

Die Theta-Zerlegung (1.5) ermöglicht es uns Jacobi-Spitzenformen L-Funktionen zuzuordnen.

Sei $\phi(\tau, z) = \sum_{\mu=0}^{2m-1} f_\mu(\tau)\, \Theta_{m,\mu}(\tau, z)$ mit f_μ und $\Theta_{m,\mu}$ aus (1.5). Sei weiterhin $\mu \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq \mu \leq 2m-1$. Die zu einer Jacobi-Spitzenform assoziierte L-Funktion ist durch

$$\Lambda_\mu(\phi, s) = (4m)^s \sum_{D=1}^{\infty} c_\mu(D) D^{-s}$$

gegeben. Die vervollständigte L-Funktion erhalten wir durch

$$\Lambda_\mu^*(\phi, s) := (2\pi)^{-s}\Gamma(s)\Lambda_\mu(f, s). \tag{1.8}$$

Aufgrund der Abschätzung der Fourierkoeffizienten in (1.6) ist jede dieser Reihen auf kompakten Teilmengen der komplexen Halbebene mit $\Re(s) > \frac{k}{2} + 1$ gleichmäßig konvergent.

1.6.2 Analogon zu Heckes Umkehrsatz

Nachdem wir L-Funktionen für Jacobiformen definiert haben, können wir das Hauptresultat aus [Mar96] wiedergeben. Der nachfolgende Satz stellt das Analogon zu Heckes Umkehrsatz dar.

Satz 3. *Seien k und m positive ganze Zahlen und sei $\phi(\tau, z)$ eine holomorphe Funktion auf $\mathbb{H} \times \mathbb{C}$ für die gilt:*

- *Die Funktion $\phi(\tau, z)$ ist durch die Reihe*

$$\phi(\tau, z) = \sum_{\substack{n,\, r \in \mathbb{Z} \\ 4mn - r^2 \geq 0}} c(n, r)\, e(n\tau) e(rz)$$

  darstellbar. Diese Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von $\mathbb{H} \times \mathbb{C}$.

- *Es existiert eine reelle Zahl $\nu > 0$, so dass*

$$\phi(\tau, z)\, e^m(pz) = \mathcal{O}\left(y^{-\nu}\right) \quad \text{für} \quad y \to 0,$$

  wobei p, q, x, y $\in \mathbb{R}$ durch $z = p\tau + q$, $\tau = x + iy$ bestimmt sind.

- *Für jede ganze Zahl λ gilt*

$$c(n,r) = c(n + \lambda r + \lambda^2 m,\, r + 2m\lambda).$$

Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

1. *Die Funktion $\phi(\tau, z)$ ist eine Jacobi-Spitzenform vom Gewicht k und Index m auf Γ^J.*

2. *Jede Reihe $\Lambda_\mu^*(\phi, s)$, $0 \leq \mu \leq 2m-1$ kann analytisch zu einer auf der gesamten s-Ebene holomorphen Funktion fortgesetzt werden. Diese Fortsetzungen sind auf vertikalen Streifen beschränkt und genügen den $2m$ Funktionalgleichungen*

$$\Lambda_\beta^*(\phi, s) = \frac{i^{-k}}{\sqrt{2m}} \sum_{\mu=0}^{2m-1} e\left(-\frac{\mu\beta}{2m}\right) \Lambda_\mu^*\left(\phi, k - s - \frac{1}{2}\right), \quad 0 \leq \beta \leq 2m-1.$$

Bemerkung 6. *Die Beweisführung ähnelt sehr der des klassischen Hecke Umkehrsatzes für elliptische Spitzenformen und hängt somit stark von der Existenz eines Operators, der die Potenzreihe $\phi(e(\tau), e(z))$ auf die verschiedenen Dirichletreihen $\Lambda_\mu(\phi, s)$ abbildet, ab. Im Falle der elliptischen Modulformen wird diese Rolle durch einen einfachen Integraloperator erfüllt, der Mellin-Transformierten. Bei Jacobiformen von Index m benutzen wir $2m$ Doppel-Integraloperatoren.*

Beweis. Wir geben im Folgenden den Beweis aus [Mar96, Proposition 4, S.188] wieder.
Sei zunächst ϕ eine Jacobi-Spitzenform vom Gewicht k und Index m, die die drei Voraussetzungen des Satzes erfüllt. Zu zeigen ist dann, dass die $2m$ Reihen $\Lambda_\mu^*(\phi, s)$ $(0 \leq \mu \leq 2m-1)$ auf der ganzen s-Ebene analytisch zu holomorphen Funktionen fortgesetzt werden können und die Fortsetzungen auf vertikalen Streifen beschränkt sind und den $2m$ Funktionalgleichungen

$$\Lambda_\beta^*(\phi, s) = \frac{i^{-k}}{\sqrt{2m}} \sum_{\mu=0}^{2m-1} e\left(-\frac{\mu\beta}{2m}\right) \Lambda_\mu^*\left(\phi, k - s - \frac{1}{2}\right), \quad 0 \leq \beta \leq 2m-1$$

genügen.
Sei $\beta \in \{0, 1, \ldots, 2m-1\}$. Wir betrachten das Integral

$$I_\beta = \int_0^\infty \int_0^1 \phi\left(iy,\, piy - \frac{\beta}{2m}\right) e^m(p^2 iy)\, y^{s-\frac{1}{2}} dp\, dy$$

mit reellen Zahlen y und p, die durch $\tau = x + iy$, $z = p\tau + q$ $(x, y, p, q \in \mathbb{R})$ gegeben sind. Mit der Potenzreihendarstellung von $\phi(\tau, z)$ bekommen wir

$$I_\beta = \int_0^\infty \int_0^1 \sum_{n,r} c(n,r)\, e((n+pr)iy)\, e\left(-\frac{\beta r}{2m}\right) e^m(p^2 iy)\, y^{s-\frac{1}{2}} dp\, dy.$$

Setzen wir $\tilde{p} = p + \frac{r}{2m}$ und beachten wir, dass $c_r(D) = c(n,r)$ für $D = 4mn - r^2$ gilt, so folgt

$$\begin{aligned} I_\beta &= \int_0^\infty \sum_{D,r} c_r(D)\, e\left(-\frac{\beta r}{2m}\right) \int_{\frac{r}{2m}}^{1+\frac{r}{2m}} e^m\left(\left(\tilde{p}^2 + \frac{D}{4m^2}\right) iy\right) y^{s-\frac{1}{2}} d\tilde{p}\, dy \\ &= \sum_{\mu=0}^{2m-1} e\left(-\frac{\beta\mu}{2m}\right) \sum_{D=1}^{\infty} c_\mu(D) \int_0^\infty e\left(\frac{D}{4m} iy\right) y^{s-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^m(\tilde{p}^2 iy)\, d\tilde{p}\, dy. \end{aligned}$$

Das innere Integral wird zu $(2my)^{-\frac{1}{2}}$ (vgl. [GR14, 3.323, 2]). Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} I_\beta &= (2m)^{-\frac{1}{2}} \sum_{\mu=0}^{2m-1} e\left(-\frac{\beta\mu}{2m}\right) \sum_{D=1}^{\infty} c_\mu(D) \int_0^\infty e\left(\frac{D}{4m} iy\right) y^{s-1}\, dy \\ &= (2m)^{-\frac{1}{2}} \sum_{\mu=0}^{2m-1} e\left(-\frac{\beta\mu}{2m}\right) \left(\frac{\pi}{2m}\right)^{-s} \Gamma(s) \sum_{D=1}^{\infty} \frac{c_\mu(D)}{D^s} \end{aligned}$$

für $\Re(s) > 0$. Also gilt

$$\sqrt{2m} \cdot I_\beta = \sum_{\mu=0}^{2m-1} e\left(-\frac{\beta\mu}{2m}\right) \Lambda_\mu^*(\phi, s), \quad \text{mit } \Re(s) > 0. \tag{1.9}$$

Als nächstes teilen wir das Integral I_β in zwei Integrale I'_β und I''_β auf:

$$\begin{aligned} I'_\beta &= \int_0^1 \int_0^1 \phi\left(iy,\, piy - \frac{\beta}{2m}\right) e^m(p^2 iy)\, y^{s-\frac{1}{2}} dp\, dy, \\ I''_\beta &= \int_1^\infty \int_0^1 \phi\left(iy,\, piy - \frac{\beta}{2m}\right) e^m(p^2 iy)\, y^{s-\frac{1}{2}} dp\, dy. \end{aligned}$$

Aufgrund von $\phi(\tau, z) e^m(pz) = \mathcal{O}(e(iy/4m))$ für $y \to \infty$ und da das Integral

$$\int_0^\infty e\left(\frac{iy}{4m}\right) y^{\sigma-\frac{1}{2}} dy, \quad \sigma = \Re(s)$$

konvergiert, folgt, dass das Integral I''_β absolut und gleichmäßig auf jedem vertikalen Streifen der s-Ebene konvergiert. Also stellt I''_β eine holomorphe Funktion in s auf der komplexen Ebene dar.

Substituieren wir in I'_β die Variable y mit $\tilde{y}^{-1}$ und verwenden, dass für eine Jacobiform die Transformationsformel

$$\phi(\tau, z) = \tau^{-k} e^m \left(-\frac{z^2}{\tau}\right) \phi\left(-\frac{1}{\tau}, \frac{z}{\tau}\right)$$

gilt, so folgt

$$\begin{aligned} I'_\beta &= \int_1^\infty \int_0^1 \phi\left(-\frac{1}{i\tilde{y}}, \frac{-\frac{\beta}{2m} i\tilde{y} - p}{i\tilde{y}}\right) e^m\left(p^2 \frac{i}{\tilde{y}}\right) \tilde{y}^{-s-\frac{3}{2}}\, dp\, d\tilde{y} \\ &= i^k \int_1^\infty \int_0^1 \phi\left(i\tilde{y}, -\frac{\beta}{2m} i\tilde{y} - p\right) e^m\left(\frac{\beta}{m}p + \frac{\beta^2}{4m^2} i\tilde{y}\right) \tilde{y}^{k-s-\frac{3}{2}} dp\, d\tilde{y}. \end{aligned}$$

Dieses Integral ist ebenfalls auf jedem vertikalen Streifen der s-Ebene absolut und gleichmäßig konvergent (verwende $\phi(\tau, z) e^m(\tilde{p}z) = \mathcal{O}(e(i\tilde{y}/4m)$ für $\tilde{y} \to \infty$ mit $\tau = \tilde{x} + i\tilde{y}$, $z = \tilde{p}\tau + \tilde{q}$). Also ist das Integral I'_β eine holomorphe Funktion in s auf der komplexen Ebene.
Somit stellt I_β eine ganze Funktion in s dar, die beschränkt auf jedem vertikalen Streifen ist. Da für $\beta \in \{0, 1, \ldots, 2m-1\}$ die Gleichung

$$\sqrt{2m} \sum_{\mu=0}^{2m-1} e\left(\frac{\beta\mu}{2m}\right) I_\mu = 2m\, \Lambda^*_\beta(\phi, s)$$

gilt, ist $\Lambda^*_\beta(\phi, s)$ für $\beta = 0, 1, \ldots, 2m-1$ eine holomorphe Funktion in s auf $\mathbb{C}$ und auf jedem vertikalen Streifen beschränkt.

Als nächstes möchten wir die Funktionalgleichung zeigen. Der Variablentausch $\tilde{y} = y^{-1}$ in I''_β mit dem Transformationsverhalten der Funktion ϕ unter $\tau \mapsto -\frac{1}{\tau}$ und $z \mapsto \frac{z}{\tau}$ liefert

$$\begin{aligned} I''_\beta &= \int_0^1 \int_0^1 \phi\left(-\frac{1}{i\tilde{y}}, \frac{-\frac{\beta}{2m} i\tilde{y} - p}{i\tilde{y}}\right) e^m\left(p^2 \frac{i}{\tilde{y}}\right) \tilde{y}^{-s-\frac{3}{2}}\, dp\, d\tilde{y} \\ &= i^k \int_0^1 \int_0^1 \phi\left(i\tilde{y}, -\frac{\beta}{2m} i\tilde{y} - p\right) e^m\left(\frac{\beta}{m}p + \frac{\beta^2}{4m^2} i\tilde{y}\right) \tilde{y}^{k-s-\frac{3}{2}} dp\, d\tilde{y}. \end{aligned}$$

Mit der Reihendarstellung von $\phi(\tau, z)$ und der gleichmäßigen Konvergenz erhalten wir für $\Re(s) < k - \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
I_\beta &= i^k \int_0^\infty \int_0^1 \phi\left(iy, -\frac{\beta}{2m} iy - p\right) e^m\left(\frac{\beta}{m}p + \frac{\beta^2}{4m^2} iy\right) y^{k-s-\frac{3}{2}} dp\, dy \\
&= i^k \int_0^\infty \sum_{n,r} c(n,r)\, e(niy)\, e\left(-\frac{r\beta}{2m} iy\right) e\left(\frac{\beta^2}{4m} iy\right) y^{k-s-\frac{3}{2}} \int_0^1 e(\beta p - rp)\, dp\, dy \\
&= i^k \sum_{D=1}^\infty c_\beta(D) \int_0^\infty e\left(\frac{D}{4m} iy\right) y^{k-s-\frac{3}{2}} dy \\
&= i^k \left(\frac{2m}{\pi}\right)^{k-s-\frac{1}{2}} \Gamma\left(k - s - \frac{1}{2}\right) \sum_{D=1}^\infty \frac{c_\beta(D)}{D^{k-s-\frac{1}{2}}} \\
&= i^k \cdot \Lambda_\beta^*\left(\phi, k - s - \frac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

Zusammen mit (1.9) und der Holomorphie von $\Lambda_\beta^*(\phi, s)$ folgt die Funktionalgleichung und somit die erste Implikation des Satzes.

Für die Rückrichtung betrachten wir die Theta-Zerlegung der Funktion ϕ

$$\phi(\tau, z) = \sum_{\mu=0}^{2m-1} f_\mu(\tau)\, \Theta_{m,\mu}(\tau, z)$$

mit

$$f_\mu(\tau) = \sum_{D=1}^\infty c_\mu(D)\, e\left(\frac{D}{4m}\tau\right) \quad \text{und} \quad \Theta_{m,\mu}(\tau, z) = \sum_{\substack{r \in \mathbb{Z} \\ r \equiv \mu \,(\mathrm{mod}\, 2m)}} e\left(\frac{r^2}{4m}\tau\right) e(rz).$$

Benutzen wir die Funktionalgleichung der Thetafunktion (vgl. [EZ85, (8), S.59])

$$\Theta_{m,\mu}\left(-\frac{1}{\tau}, \frac{z}{\tau}\right) = \sqrt{\frac{\tau}{2mi}}\, e^m\left(\frac{z^2}{\tau}\right) \sum_{\nu \,(\mathrm{mod}\, 2m)} e_{2m}(-\mu\nu)\, \Theta_{m,\nu}(\tau, z)$$

und zeigen wir, dass

$$f_\mu(\tau) = (2mi)^{-\frac{1}{2}} \tau^{-k+\frac{1}{2}} \sum_{\beta=0}^{2m-1} e\left(-\frac{\beta\mu}{2m}\right) f_\beta\left(-\frac{1}{\tau}\right) \quad \text{für } 0 \le \mu \le 2m-1$$

gilt, so folgt

$$\phi(\tau, z) = \tau^{-k}\, e^m\left(-\frac{z^2}{\tau}\right) \phi\left(-\frac{1}{\tau}, \frac{z}{\tau}\right)$$

und somit die Behauptung.

Da $f_\mu(\tau)$ für $0 \leq \mu \leq 2m-1$ eine holomorphe Funktion auf $\mathbb{H}$ ist, genügt es die Gleichung für $\tau \in \{iy \,|\, y \in \mathbb{R},\, y > 0\}$ zu beweisen.

Sei $\mu \in \{0, 1, \ldots, 2m-1\}$, dann ist mit der inversen Mellin-Transformierten der Exponentialfunktion (vgl. [E$^+$54, 6.3 (1)])

$$\begin{aligned} f_\mu(iy) &= \sum_{D=1}^{\infty} c_\mu(D)\, e\left(\frac{D}{4m} iy\right) \\ &= \sum_{D=1}^{\infty} c_\mu(D)\, \frac{1}{2\pi i} \int_{\Re(s)=\alpha} \Gamma(s) \, \left(2\pi y \frac{D}{4m}\right)^{-s} ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Re(s)=\alpha} y^{-s}\, \Lambda_\mu^*(\phi, s)\, ds \end{aligned}$$

für $\alpha > 0$. Wobei die Vertauschung der Integration und Summation aufgrund der absoluten gleichmäßigen Konvergenz gerechtfertigt ist.
Sei nun $\alpha' \in \mathbb{R}$ fest. Da $\Lambda_\mu^*(\phi, s)$ eine ganze Funktion ist und $|y^{-s}\Lambda_\mu^*(\phi, s)| \to 0$ gleichmäßig auf vertikalen Streifen für $\Im(s) \to \infty$ konvergiert, erhalten wir

$$f_\mu(iy) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Re(s)=\alpha'} y^{-s} \Lambda_\mu^*(\phi, s)\, ds.$$

Mit den $2m$ Funktionalgleichungen $(0 \leq \beta \leq 2m-1)$

$$\Lambda_\beta^*(f, s) = \frac{i^{-k}}{\sqrt{2m}} \sum_{\mu=0}^{2m-1} e\left(-\frac{\mu\beta}{2m}\right) \Lambda_\mu^* \left(\phi, k - s - \frac{1}{2}\right)$$

und dem Variablentausch $t = k - s - \frac{1}{2}$ bekommen wir

$$f_\mu(iy) = \frac{i^{-k}}{\sqrt{2m}}\, y^{-k+\frac{1}{2}} \sum_{\beta=0}^{2m-1} e\left(-\frac{\beta\mu}{2m}\right) \frac{1}{2\pi i} \int_{\Re(t)=k-\frac{1}{2}-\alpha'} y^t\, \Lambda_\beta^*(\phi, t)\, dt.$$

Wählen wir α' so, dass $k - \frac{1}{2} - \alpha' > \nu + 1$ gilt, so folgt mit der absoluten gleichmäßigen Konvergenz und der inversen Mellin-Transformierten

$$\begin{aligned} f_\mu(iy) &= \frac{i^{-k}}{\sqrt{2m}}\, y^{-k+\frac{1}{2}} \sum_{\beta=0}^{2m-1} e\left(-\frac{\beta\mu}{2m}\right) \sum_{D=1}^{\infty} c_\mu(D) \frac{1}{2\pi i} \int_{\Re(t)=k-\frac{1}{2}-\alpha'} \left(\frac{D\pi}{2my}\right)^{-t} \Gamma(t)\, dt \\ &= \frac{i^{-k}}{\sqrt{2m}}\, y^{-k+\frac{1}{2}} \sum_{\beta=0}^{2m-1} e\left(-\frac{\beta\mu}{2m}\right) \sum_{D=1}^{\infty} c_\mu(D) e\left(-\frac{D}{4miy}\right) \\ &= \frac{i^{-k}}{\sqrt{2m}}\, y^{-k+\frac{1}{2}} \sum_{\beta=0}^{2m-1} e\left(-\frac{\beta\mu}{2m}\right) f_\beta\left(-\frac{1}{iy}\right) \end{aligned}$$

mit $y \in \mathbb{R}$, $y > 0$. Wir haben damit

$$f_\mu(\tau) = (2mi)^{-\frac{1}{2}}\tau^{-k+\frac{1}{2}} \sum_{\beta=0}^{2m-1} e\left(-\frac{\beta\mu}{2m}\right) f_\beta\left(-\frac{1}{\tau}\right) \quad \text{für } 0 \leq \mu \leq 2m-1$$

gezeigt und die Behauptung bewiesen. ■

1.6.3 Funktionalgleichung der L-Reihen

Für beliebiges $\phi \in J_{k,m}^{cusp}$ setzen wir $\phi^c(\tau, z) := \overline{\phi(-\bar{\tau}, -\bar{z})}$. Dann ist ϕ^c eine Jacobi-Spitzenform, die die Reihendarstellung (1.4), mit Koeffizienten $\overline{c_\mu(D)}$ statt $c_\mu(D)$, besitzt.

Das nachfolgende Lemma ist eine direkte Folgerung aus Satz 3 und trifft eine Aussage über die $2m$ Funktionalgleichungen von $\Lambda_\beta^*(\phi^c, s)$. Diese werden in Kapitel 3 im Beweis über das Nicht-Verschwinden der Funktionen $\Lambda_\alpha^*(\phi^c, s-\frac{1}{2})$ $(0 \leq \alpha \leq 2m-1)$ eine wichtige Rolle spielen.

Lemma 3. *Seien k und m positive ganze Zahlen mit $k > 9$ und $\phi \in J_{k,m}^{cusp}$. Dann besitzt jede vervollständigte Dirichletreihe $\Lambda_\mu^*(\phi, s)$, mit $0 \leq \mu \leq 2m-1$, eine analytische Fortsetzung auf die gesamte komplexe Ebene. Diese Fortsetzungen genügen den $2m$ Funktionalgleichungen*

$$\Lambda_\beta^*(\phi^c, s) = \frac{i^k}{\sqrt{2m}} \sum_{\mu=0}^{2m-1} e\left(\frac{\mu\beta}{2m}\right) \Lambda_\mu^*\left(\phi^c, k-s-\frac{1}{2}\right), \quad 0 \leq \beta \leq 2m-1. \tag{1.10}$$

Bemerkung 7. *In der Theorie der Modulformen gibt es zwei Möglichkeiten die vervollständigte L-Reihe $L^*(\phi, s)$ aus der Fourierreihe ϕ zu erhalten: mit der Mellin-Transformierten oder mit Hilfe einer Kernfunktion (vgl. [Koh97, Lemma 1, S.184]). Für Jacobiformen haben wir in Satz 3 die Funktionalgleichung für $\Lambda_\mu^*(\phi, s)$ mit Hilfe der Mellin-Transformierten gezeigt. Alternativ erhalten wir die Funktionalgleichung (1.10) mit Hilfe der Kernfunktion $\Omega_{\mu_0,s}^{k,m}(\tau, z)$ aus [Mar14, Theorem 1.1, S.69].*
Wir werden in Lemma 4 des nächsten Kapitels das Skalarprodukt der Kernfunktion $\Omega_{\mu_0,s}^{k,m}$ mit einer Jacobi-Spitzenform berechnen. Wird das Transformationsverhalten der Thetafunktion $\Theta_{m,\mu}(\tau, z)$ unter $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, das Konvergenzver-

halten der Funktion $\Omega^{k,m}_{\mu_0,s}$ *und die Gleichung*

$$\Omega^{k,m}_{\mu_0,s}(\tau,z) = \frac{1}{\sqrt{2mi}} \sum_{M\in\Gamma} \left(\frac{1}{\tau^{s-\frac{1}{2}}} \sum_{\mu=0}^{2m-1} e\left(-\frac{\beta\mu}{2m}\right) \Theta_{m,\mu}(\tau,z)\right)\Bigg|_{k,m} [M,0,0]$$

aus (2.4) *genutzt, so erhält man für* $s \in \mathbb{C}$ *mit* $\frac{k+3}{2} < \Re(s) < k-1$

$$\langle \Omega^{k,m}_{\mu_0,s}, \phi\rangle = \frac{\pi e\left(-\frac{k+s}{4}\right)\Gamma(k-\frac{3}{2})}{2^{k-\frac{3}{2}}\sqrt{m}\Gamma(k-s)\Gamma(s-\frac{1}{2})} \Lambda_{-\mu_0}\left(\phi^c, s-\frac{1}{2}\right).$$

Aus dem Vergleich dieser Darstellung mit dem Skalarprodukt aus Lemma 4 folgt (1.10).

Kapitel 2

Kernfunktion für Jacobiformen

In diesem Kapitel studieren wir die Jacobi-Spitzenform $\Omega^{k,m}_{\mu_0,s}$ aus [Mar14]. Zunächst geben wir die Definition und wichtige Eigenschaften der Funktion wieder. Anschließend berechnen wir das Skalarprodukt mit einer Jacobi-Spitzenform und folgern, dass $\Omega^{k,m}_{\mu_0,s}$ eine Kernfunktion ist. Danach berechnen wir die Fourierkoeffizienten der Funktion $\Omega^{k,m}_{\mu_0,s}$.

2.1 Definition der Funktion

Für komplexe Zahlen z und s mit $z \neq 0$ setzen wir $z^s = \exp(s \log z)$ mit $\log z = \log |z| + i \arg z$ und $-\pi < \arg z \leq \pi$. Wir schreiben $s = \sigma + it$ mit $\sigma = \Re(s)$ und $t = \Im(s)$.

Definition 3. *Sei $H^J := \{\mathrm{Id}\} \times \mathbb{Z} \times \{0\} \subset \Gamma^J$, $\mu_0 \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$ und $s \in \mathbb{C}$. Wir definieren*

$$\Phi_{\mu_0,s}(\tau, z) := \tau^{-s} e^m \left(-\frac{(z - \frac{\mu_0}{2m})^2}{\tau} \right).$$

Die Gruppe H^J liegt im Stabilisator von $\Phi_{\mu_0,s}(\tau, z)$ in Γ^J.
Sei weiter $|_{k,m}$ der in (1.2) definierte Strichoperator für Jacobiformen. Die Funktion $\Omega^{k,m}_{\mu_0,s}$ aus [Mar14] ist gegeben durch

$$\Omega^{k,m}_{\mu_0,s}(\tau, z) := \sum_{h \in H^J \backslash \Gamma^J} \Phi_{\mu_0,s}|_{k,m}[h](\tau, z). \tag{2.1}$$

Bemerkung 8. *In [Mar14, Proposition 3.4, S. 74] wird gezeigt, dass die Reihe $\Omega^{k,m}_{\mu_0,s}(\tau, z)$ für $k > 6$, $\mu_0 \in \mathbb{Z}$ und $s \in \mathbb{C}$ mit $1 < \Re(s) < k - 3$ auf jeder* *kompakten Teilmenge von $\mathbb{H} \times \mathbb{C}$ absolut gleichmäßig konvergiert. Außerdem stellt $\Omega^{k,m}_{\mu_0,s}(\tau, z)$ für solche s eine holomorphe Funktion auf $\mathbb{H} \times \mathbb{C}$ dar und es gilt $\Omega^{k,m}_{\mu_0,s} \in J^{cusp}_{k,m}$ (vgl. [Mar14, Proposition 4.1, S.78]).*

Bemerkung 9. *Die Menge $\{[\mathrm{Id}, 0, \nu][M, 0, 0] \mid M \in SL_2(\mathbb{Z}),\ \nu \in \mathbb{Z}\} \subset \Gamma^J$ ist ein vollständiges, minimales Repräsentantensystem von $H^J \backslash \Gamma^J$. Verwenden wir die Definition der Multiplikation auf der Jacobigruppe, so stellen wir fest, dass das Repräsentantensystem von $H^J \backslash \Gamma^J$ durch die Tupel $\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right), (\nu c,\ \nu d)\right)$ gegeben ist, mit $\nu, a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, so dass $ad - bc = 1$ gilt.*

2.2 Skalarprodukt mit einer Jacobi-Spitzenform

Nachdem wir die Funktion $\Omega^{k,m}_{\mu_0,s}$ näher betrachtet haben, beschäftigen wir uns als nächstes mit ihrem Skalarprodukt mit einer Jacobi-Spitzenform $\phi \in J^{cusp}_{k,m}$. Das folgende Lemma ist das Hauptresultat aus [Mar14, Theorem 1.1, S.69].

Lemma 4. *Seien k und m positive ganze Zahlen mit $k > 6$ und $\mu_0 \in \mathbb{Z}$. Für alle $\phi \in J^{cusp}_{k,m}$ und $s \in \mathbb{C}$ mit $\frac{3}{2} < \Re(s) < k - 3$ gilt*

$$\langle \Omega^{k,m}_{\mu_0,s}, \phi \rangle = \frac{\pi \Gamma(k - \frac{3}{2})}{2^{k-1} m \exp(\frac{\pi i s}{2}) \Gamma(s - \frac{1}{2}) \Gamma(k - s)} \sum_{\mu=0}^{2m-1} e\left(-\frac{\mu \mu_0}{2m}\right) \Lambda^*_\mu(\phi^c, k - s)$$

mit der L-Funktion aus (1.8)

$$\Lambda^*_\mu(\phi, s) = (2\pi)^{-s} \Gamma(s) (4m)^s \sum_{D=1}^{\infty} c_\mu(D) D^{-s}$$

für $0 \leq \mu \leq 2m - 1$ und der Jacobi-Spitzenform $\phi^c(\tau, z) := \overline{\phi(-\bar{\tau}, -\bar{z})}$.

Beweis. Sei $\tau = x + iy$ und $z = p\tau + q$ mit $x,\ y,\ p,\ q \in \mathbb{R},\ y > 0$.
Mit dieser Parametrisierung ist das Petersson-Skalarprodukt zweier Jacobi-Spitzenformen $\phi, \psi \in J^{cusp}_{k,m}$

$$\langle \phi, \psi \rangle = \int_{\Gamma^J \backslash \mathbb{H} \times \mathbb{C}} \phi(\tau, z)\, \overline{\psi(\tau, z)}\, e^m(2p^2 iy)\, y^{k-2}\, dx\, dy\, dp\, pq.$$

Zunächst zeigen wir eine alternative Darstellungsform der Funktion $\Omega^{k,m}_{\mu_0,s}$. Diese setzen wir anschließend in das Skalarprodukt ein und erhalten mit Hilfe der Theta-Zerlegung unsere Behauptung.

Wir wissen aus Bemerkung 8, dass $\Omega^{k,m}_{\mu_0,s} \in J^{cusp}_{k,m}$ für $1 < \Re(s) < k-3$. Außerdem ist $\{[\mathrm{Id}, 0, \nu][M, 0, 0] \mid M \in SL_2(\mathbb{Z}),\ \nu \in \mathbb{Z}\} \subset \Gamma^J$ nach Bemerkung 9 ein vollständiges, minimales Repräsentantensystem von $H^J \backslash \Gamma^J$. Demnach können wir

$$\Omega^{k,m}_{\mu_0,s}(\tau, z) = \sum_{M \in SL_2(\mathbb{Z})} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \phi_{\mu_0,s}|_{k,m}[\mathrm{Id}, 0, \nu]|_{k,m}[M, 0, 0](\tau, z)$$

schreiben. Zusammen mit

$$\phi_{\mu_0,s}(\tau, z) = \phi_{0,s}\Big|_{k,m} \left[\mathrm{Id}, 0, -\frac{\mu_0}{2m}\right](\tau, z),$$

wobei $|_{k,m}$ der Strichoperator aus (1.2) ist, erhalten wir

$$\Omega^{k,m}_{\mu_0,s}(\tau, z) = \sum_{M \in SL_2(\mathbb{Z})} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \phi_{0,s}|_{k,m}[\mathrm{Id}, 0, \nu]|_{k,m} \left[\mathrm{Id}, 0, -\frac{\mu_0}{2m}\right] \Big|_{k,m} [M, 0, 0](\tau, z). \tag{2.2}$$

Die Inversionsformel der Thetafunktion

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} e^m \left(-\frac{(z+l)^2}{\tau}\right) = \left(\frac{\tau}{2mi}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{r \in \mathbb{Z}} e\left(\frac{r^2}{4m}\tau + rz\right) \qquad (\forall \tau \in \mathbb{H}, z \in \mathbb{C})$$

und

$$\phi_{\mu_0,s}|_{k,m}[\mathrm{Id}, \lambda, \nu](\tau, z) = e\left(-\lambda\nu m + \mu_0\lambda\right)\, \phi_{-2\nu m + \mu_0,s}(\tau, z) \qquad (\forall \lambda, \nu \in \mathbb{R})$$

ergeben

$$\sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \phi_{0,s}|_{k,m}[\mathrm{Id}, 0, \nu](\tau, z) = \frac{\tau^{-s+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2mi}} \sum_{\beta=0}^{2m} \Theta_{m,\beta}(\tau, z). \tag{2.3}$$

Verwenden wir (2.2), (2.3) und

$$\Theta_{m,\beta}\left(\tau, z - \frac{\mu_0}{2m}\right) = e\left(-\frac{\beta\mu_0}{2m}\right) \Theta_{m,\beta}(\tau, z)$$

so bekommen wir (vgl. [Mar14, (4.5), S.79])

$$\Omega^{k,m}_{\mu_0,s}(\tau, z) = \frac{1}{\sqrt{2mi}} \sum_{M \in SL_2(\mathbb{Z})} \left(\frac{1}{\tau^{s-\frac{1}{2}}} \sum_{\beta=0}^{2m-1} e\left(-\frac{\beta\mu_0}{2m}\right) \Theta_{m,\beta}(\tau, z) \right) \Bigg|_{k,m} [M, 0, 0]. \tag{2.4}$$

Jetzt können wir das Skalarprodukt berechnen. Mit (2.4) und der Invarianz von ϕ unter Γ^J erhalten wir

$$\begin{aligned}\langle \Omega^{k,m}_{\mu_0,s}, \phi\rangle &= \int_{\Gamma^J\backslash\mathbb{H}\times\mathbb{C}} \Omega^{k,m}_{\mu_0,s}(\tau,z)\overline{\phi(\tau,z)}e^m(2p^2iy)y^{k-2}\,dx\,dy\,dp\,dq\\ &= \frac{1}{\sqrt{2mi}}\int_{\Gamma^J\backslash\mathbb{H}\times\mathbb{C}}\sum_{M\in SL_2(\mathbb{Z})}\left(\frac{1}{\tau^{s-\frac12}}\sum_{\beta=0}^{2m-1} e\left(-\frac{\beta\mu_0}{2m}\right)\Theta_{m,\beta}(\tau,z)\right)\Bigg|_{k,m}[M,0,0]\\ &\qquad\cdot\overline{\phi(\tau,z)|_{k,m}[M,0,0]}\,e^m(2p^2iy)\,y^{k-2}\,dx\,dy\,dp\,dq.\end{aligned}$$

Setzen wir $\tau_M := (a\tau+b)(c\tau+d)^{-1}$ und $z_M := z(c\tau+d)^{-1}$ für $M=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in SL_2(\mathbb{Z})$, so bekommen wir, da für zwei Funktionen $\phi,\psi\in J^{cusp}_{k,m}$ der Ausdruck

$$\phi(\tau,z)\,\overline{\psi(\tau,z)}\,\Im(\tau)^k\,e^m\left(2\frac{\Im(z)^2}{\Im(\tau)}i\right)$$

Γ^J-invariant ist,

$$\begin{aligned}\sqrt{2mi}\,\langle \Omega^{k,m}_{\mu_0,s}, \phi\rangle &= \int_{\Gamma^J\backslash\mathbb{H}\times\mathbb{C}}\sum_{M\in SL_2(\mathbb{Z})}\overline{\phi(\tau_M,z_M)}\,\frac{1}{\tau_M^{s-\frac12}}\\ &\times\sum_{\beta=0}^{2m-1} e\left(-\frac{\beta\mu_0}{2m}\Theta_{m,\beta}(\tau_M,z_M)\right)e^m\left(2\frac{\Im(z_M)^2}{\Im(\tau_M)}i\right)\Im(\tau_M)^{k-2}\,dx\,dy\,dp\,dq\\ &= \int_{\mathbb{H}}\int_{(\mathbb{Z}\tau+\mathbb{Z})\backslash\mathbb{C}}\left(\frac{1}{\tau^{s-\frac12}}\sum_{\beta=0}^{2m-1} e\left(-\frac{\beta\mu_0}{2m}\right)\Theta_{m,\beta}(\tau,z)\right)\\ &\qquad\cdot\overline{\phi(\tau,z)}e^m(2p^2iy)\,y^{k-2}\,dx\,dy\,dp\,dq.\end{aligned}$$

Mit der Theta-Zerlegung (1.5) der Funktion ϕ und der Gleichung

$$\int_{(\mathbb{Z}\tau+\mathbb{Z})\backslash\mathbb{C}}\Theta_{m,\beta}(\tau,z)\overline{\Theta_{m,\mu}(\tau,z)}\,e^m(2p^2iy)\,dp\,dq = \begin{cases}\sqrt{\frac{1}{4my}}, & \text{falls } \beta=\mu\\ 0, & \text{sonst}\end{cases}$$

können wir

$$\sqrt{2mi}\,\langle \Omega^{k,m}_{\mu_0,s}, \phi\rangle = \frac{1}{2\sqrt{m}}\sum_{\mu=0}^{2m-1} e\left(-\frac{\mu\mu_0}{2m}\right)\int_{\mathbb{H}}\frac{1}{\tau^{s-\frac12}}\,\overline{f_\mu(\tau)}\,y^{k-\frac52}\,dx\,dy$$

schreiben.
Für $\frac32 < \Re(s) < \frac{k}{2}-2$ gilt (vgl. [Mar14, (4.12), S.82])

$$\int_{\mathbb{H}}\frac{1}{\tau^{s-\frac12}}\,\overline{f_\mu(\tau)}\,y^{k-\frac52}dx\,dy = \frac{(2\pi)^{s-k+1}e(\frac18)\Gamma(k-\frac32)}{2^{k-\frac32}e(\frac{s}{4})\Gamma(s-\frac12)}\sum_{D=1}^{\infty}\overline{c_\mu(D)}\left(\frac{D}{4m}\right)^{s-k}.$$

Insgesamt erhalten wir für $s \in \mathbb{C}$ mit $\frac{3}{2} < \Re(s) < \frac{k}{2} - 2$ wie gewünscht

$$\langle \Omega_{\mu_0,s}^{k,m}, \phi \rangle = \frac{\pi \Gamma(k - \frac{3}{2})}{2^{k-1} m\, e(\frac{s}{4}) \Gamma(s - \frac{1}{2}) \Gamma(k-s)} \sum_{\mu=0}^{2m-1} e\left(-\frac{\mu\mu_0}{2m}\right) \Lambda_\mu^*(\phi^c, k-s).$$

■

Wir werden später das Hauptresultat aus [Mar14] auf zwei weitere Arten zeigen: Auf Seite 79 berechnen wir das Skalarprodukt $\langle \Omega_{\mu_0,s}^{k,m}, \phi \rangle$ aus Lemma 4 mit Hilfe der Poincaré-Reihen für Jacobiformen. Anschließend zeigen wir mit Hilfe einer adjungierten Abbildung auf Seite 83 einen weiteren Beweis dieser Darstellung.

Bemerkung 10. *Mit der Funktionalgleichung* (1.10) *gilt*

$$\frac{\sqrt{2m}}{i^k} \Lambda_{-\mu_0}^* \left(\phi^c, s - \frac{1}{2}\right) = \sum_{\mu=0}^{2m-1} e\left(-\frac{\mu\mu_0}{2m}\right) \Lambda_\mu^*(\phi^c, k-s) \quad (0 \leq -\mu_0 \leq 2m-1)$$

und das Skalarprodukt aus Lemma 4 ist für $0 \leq -\mu_0 \leq 2m-1$

$$\langle \Omega_{\mu_0,s}^{k,m}, \phi \rangle = \frac{\pi \Gamma\left(k - \frac{3}{2}\right)}{2^{k-\frac{3}{2}} m^{\frac{1}{2}} e\left(\frac{s+k}{4}\right) \Gamma\left(s - \frac{1}{2}\right) \Gamma(k-s)} \cdot \Lambda_{-\mu_0}^* \left(\phi^c, s - \frac{1}{2}\right). \tag{2.5}$$

Bemerkung 11. *Aus der Funktionalanalysis ist uns der Darstellungssatz von Riesz bekannt: Sei H ein Hilbertraum und H^* der dazugehörige Dualraum. Dann existiert zu jedem stetigen Funktional $\alpha \in H^*$ genau ein $w \in H$, so dass $\alpha(v) = \langle v, w \rangle\ \forall v \in H$ gilt. Man nennt $w \in H$ Kernfunktion des Funktionals α. Aus Lemma 4 folgt, dass die Funktion $\Omega_{\mu_0,s}^{k,m}$ eine Kernfunktion ist.*

2.3 Fourierkoeffizienten der Funktion

Ziel dieser Arbeit ist es, Nicht-Verschwindungsaussagen für die zu einer Jacobi-Spitzenform assoziierten L-Reihe zu treffen. Wir haben bereits die Kernfunktion $\Omega_{\mu_0,s}^{k,m}$ aus [Mar14] kennengelernt und benötigen nun ihre Fourierkoeffizienten, um die Methode aus [Koh97] (diese wird auf S.49 erläutert) anwenden zu können. Die Fourierkoeffizienten werden im nachfolgenden Lemma angegeben und anschließend mit Hilfe von Fallunterscheidungen explizit berechnet.

Lemma 5. *Die Funktion $\Omega^{k,m}_{\mu_0,s}$ aus (2.1) mit $\mu_0 \in \mathbb{Z}$ und $s \in \mathbb{C}$ hat die Fourierentwicklung*

$$\Omega^{k,m}_{\mu_0,s}(\tau,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{r\in\mathbb{Z}\\ r^2<4mn}} \omega^{k,m}_{\mu_0,s}(n,r)e(n\tau)e(rz)$$

mit Fourierkoeffizienten

$$\begin{aligned}
\omega^{k,m}_{\mu_0,s}(n,r) &= \frac{e\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{s-\frac{1}{2}}m^{1-s}}{2^{s-2}\Gamma(s-\frac{1}{2})}(4mn-r^2)^{s-\frac{3}{2}}\left\{e\left(-\frac{r\mu_0}{2m}\right)+e\left(\frac{r\mu_0}{2m}\right)e\left(-\frac{k}{2}\right)\right\}\\
&\quad+\frac{\pi^{k-s}m^{1-k+s}}{2^{k-s-2}\Gamma(k-s)}(4mn-r^2)^{k-s-1}\bigg\{\mathbf{1}_{2m\mathbb{Z}}(r+\mu_0)e\left(-\frac{s+k}{4}\right)\\
&\quad+\mathbf{1}_{2m\mathbb{Z}}(r-\mu_0)e\left(\frac{3}{4}(s-k)\right)\bigg\}+\frac{e\left(\frac{k}{4}-1\right)\pi^{k-\frac{1}{2}}m^{1-k}(4mn-r^2)^{k-s-1}}{2^{k-2}\Gamma(k-\frac{1}{2})}\\
&\quad\times\sum_{\substack{a,c>0\\ \mathrm{ggT}(a,c)=1}}\sum_{\lambda=0}^{a-1}a^{-k}\left(\frac{c}{a}\right)^{s-k}\left(e\left(\frac{k}{2}\right)e_a\left(-c'n+\left(\lambda-\frac{\mu_0}{2m}\right)r\right)\right.\\
&\quad\left.+e_a\left(c'n-\left(\lambda-\frac{\mu_0}{2m}\right)r\right)\right)\bigg\{e_a\left(-\left(\lambda-\frac{\mu_0}{2m}\right)^2cm\right)e\left(\frac{4mn-r^2}{4acm}\right)\\
&\quad\cdot{}_1F_1\left(s-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2};-2\pi i\frac{4mn-r^2}{4acm}\right)+e\left(\frac{s-k}{2}\right)e_a\left(\left(\lambda-\frac{\mu_0}{2m}\right)^2cm\right)\\
&\qquad\cdot e\left(-\frac{4mn-r^2}{4acm}\right){}_1F_1\left(s-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2};2\pi i\frac{4mn-r^2}{4acm}\right)\bigg\},
\end{aligned}$$

wobei $c' \in \mathbb{Z}$ mit $c'c \equiv 1 \pmod a$ und ${}_1F_1(\alpha,\beta;z)$ die Kummersche Funktion ist. Die Funktion $\mathbf{1}_{2m\mathbb{Z}}(x)$ ist 1 für $x \in 2m\mathbb{Z}$ und 0 sonst.

2.4 Berechnung der Fourierkoeffizienten

Wir betrachten die Funktion $\Omega^{k,m}_{\mu_0,s}$ aus (2.1). Mit der Definition des Strichoperators (1.2) erhalten wir

$$\begin{aligned}
\Omega^{k,m}_{\mu_0,s}(\tau,z) &= \sum_{h\in H^J\backslash\Gamma^J}\Phi_{\mu_0,s}|_{k,m}[h](\tau,z)\\
&= \sum_{\left[\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right),(\lambda\ \mu)\right]\in H^J\backslash\Gamma^J}(c\tau+d)^{-k}e^m\left(\frac{-c(z+\lambda\tau+\mu)^2}{c\tau+d}+\lambda^2\tau+2\lambda z\right)\\
&\qquad\cdot\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)^{-s}e^m\left(\frac{-\left(\frac{z+\lambda\tau+\mu}{c\tau+d}-\frac{\mu_0}{2m}\right)^2}{\frac{a\tau+b}{c\tau+d}}\right).
\end{aligned}$$

Da das Repräsentantensystem von $H^J\backslash\Gamma^J$ nach Bemerkung 8 durch die Tupel $\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right), (\lambda c,\ \lambda d)\right)$ mit $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{Z})$ und $\lambda \in \mathbb{Z}$ gegeben ist, können wir für die Funktion $\Omega_{\mu_0,s}^{k,m}(\tau, z)$

$$\sum_{\substack{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\in SL_2(\mathbb{Z}) \\ \lambda\in\mathbb{Z}}} (c\tau+d)^{-k} e^m\left(\frac{-c(z+\lambda c\tau+\lambda d)^2}{c\tau+d} + (\lambda c)^2\tau + 2\lambda cz\right)$$
$$\cdot \left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)^{-s} e^m\left(\frac{-\left(\frac{z+\lambda c\tau+\lambda d}{c\tau+d} - \frac{\mu_0}{2m}\right)^2}{\frac{a\tau+b}{c\tau+d}}\right) \qquad (2.6)$$

schreiben. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} &\frac{-c(z+\lambda c\tau+\lambda d)^2}{c\tau+d} + (\lambda c)^2\tau + 2\lambda cz \\ &\qquad = \frac{-cz^2}{c\tau+d} - 2\lambda cz - \lambda^2 c(c\tau+d) + \lambda^2c^2\tau + 2\lambda cz \\ &\qquad = \frac{-cz^2}{c\tau+d} - \lambda^2 cd \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{-\left(\frac{z+\lambda(c\tau+d)}{c\tau+d} - \frac{\mu_0}{2m}\right)^2}{\frac{a\tau+b}{c\tau+d}} &= \frac{-\left(z+\lambda(c\tau+d) - \frac{\mu_0}{2m}(c\tau+d)\right)^2}{(a\tau+b)(c\tau+d)} \\ &= \frac{-\left(z+\left(\lambda-\frac{\mu_0}{2m}\right)(c\tau+d)\right)^2}{(a\tau+b)(c\tau+d)}. \end{aligned}$$

Damit können wir (2.6) vereinfachen zu

$$\sum_{\substack{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\in SL_2(\mathbb{Z}) \\ \lambda\in\mathbb{Z}}} (c\tau+d)^{-k} \left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)^{-s} e^m\left(\frac{-cz^2}{c\tau+d} - \lambda^2 cd\right)$$
$$\cdot\, e^m\left(-\frac{\left(z+(\lambda-\frac{\mu_0}{2m})(c\tau+d)\right)^2}{(a\tau+b)(c\tau+d)}\right). \qquad (2.7)$$

Zur Berechnung dieser Reihe betrachten wir als nächstes die Fälle $ac = 0$, $ac > 0$ und $ac < 0$ einzeln.

2.4.1 Berechnung für $ac = 0$

Ist $ac = 0$ so hat die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{Z})$ die Gestalt $\pm \left(\begin{smallmatrix} 1 & \nu \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ oder $\pm \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \nu \end{smallmatrix}\right)$ mit $\nu \in \mathbb{Z}$. Demnach können wir den Beitrag zu $\Omega^{k,m}_{\mu_0,s}(\tau, z)$ für $ac = 0$ schreiben als

$$\begin{aligned}
&\sum_{\lambda,\nu\in\mathbb{Z}} (\tau+\nu)^{-s} e^m\left(-\frac{(z+(\lambda-\frac{\mu_0}{2m}))^2}{\tau+\nu}\right) \\
&+\sum_{\lambda,\nu\in\mathbb{Z}} (-1)^{-k}\left(\frac{-\tau-\nu}{-1}\right)^{-s} e^m\left(-\frac{(z-(\lambda-\frac{\mu_0}{2m}))^2}{-(-\tau-\nu)}\right) \\
&+\sum_{\lambda,\nu\in\mathbb{Z}} (\tau+\nu)^{-k}\left(\frac{-1}{\tau+\nu}\right)^{-s} e^m\left(-\frac{z^2}{\tau+\nu}-\lambda^2\nu-\frac{(z+(\lambda-\frac{\mu_0}{2m})(\tau+\nu))^2}{-(\tau+\nu)}\right) \\
&+\sum_{\lambda,\nu\in\mathbb{Z}} (-\tau-\nu)^{-k}\left(\frac{1}{-\tau-\nu}\right)^{-s} e^m\left(-\frac{-z^2}{-\tau-\nu}-\lambda^2\nu-\frac{(z+(\lambda-\frac{\mu_0}{2m})(-\tau-\nu))^2}{-\tau-\nu}\right).
\end{aligned}$$

Dies können wir vereinfachen zu

$$\begin{aligned}
&\sum_{\lambda,\nu\in\mathbb{Z}} (\tau+\nu)^{-s} e^m\left(-\frac{(z+(\lambda-\frac{\mu_0}{2m}))^2}{\tau+\nu}\right) \\
&+\sum_{\lambda,\nu\in\mathbb{Z}} e\left(-\frac{k}{2}\right)(\tau+\nu)^{-s} e^m\left(-\frac{(z-(\lambda-\frac{\mu_0}{2m}))^2}{\tau+\nu}\right) \\
&+\sum_{\lambda,\nu\in\mathbb{Z}} e\left(-\frac{s}{2}\right)(\tau+\nu)^{s-k} e^m\left(2\left(\lambda-\frac{\mu_0}{2m}\right)z+\left(\lambda-\frac{\mu_0}{2m}\right)^2\tau+\frac{\mu_0^2}{4m^2}\nu\right) \\
&+\sum_{\lambda,\nu\in\mathbb{Z}} e\left(\frac{s-k}{2}\right)(\tau+\nu)^{s-k} e^m\left(-2\left(\lambda-\frac{\mu_0}{2m}\right)z+\left(\lambda-\frac{\mu_0}{2m}\right)^2\tau+\frac{\mu_0^2}{4m^2}\nu\right),
\end{aligned} \tag{2.8}$$

wobei wir $e^m(-2\lambda\nu\frac{\mu_0}{2m}) = 1$ für $\lambda,\ \nu,\ \mu_0 \in \mathbb{Z}$ genutzt haben.

Wir betrachten nun die erste Reihe in (2.8). Der Beitrag zum (n,r)-ten Fourierkoeffizienten dieser Reihe ist

$$\int_{iC_1}^{iC_1+1}\int_{iC_2}^{iC_2+1} \sum_{\lambda,\nu\in\mathbb{Z}} (\tau+\nu)^{-s} e^m\left(-\frac{(z+\lambda-\frac{\mu_0}{2m})^2}{\tau+\nu}\right) e(-n\tau)e(-rz)\,dz\,d\tau$$

mit $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, $C_1 > 0$.

Vertauschen wir Integration und Summation (dies ist aufgrund der absoluten Konvergenz gerechtfertigt) und substituieren wir $\tau \mapsto \tau-\nu$ und $z \mapsto z-\lambda+\frac{\mu_0}{2m}$, so erhalten wir

$$\sum_{\lambda,\nu\in\mathbb{Z}}\int_{iC_1+\nu}^{iC_1+\nu+1}\int_{iC_2}^{iC_2+1}\tau^{-s}e^m\left(-\frac{(z+\lambda-\frac{\mu_0}{2m})^2}{\tau}\right)e(-n\tau)e(-rz)dzd\tau$$
$$=\sum_{\lambda,\nu\in\mathbb{Z}}\int_{iC_1+\nu}^{iC_1+\nu+1}\int_{iC_2+\lambda-\frac{\mu_0}{2m}}^{iC_2+\lambda-\frac{\mu_0}{2m}+1}\tau^{-s}e^m\left(-\frac{z^2}{\tau}\right)e(-n\tau)e\left(-r\left(z-\lambda+\frac{\mu_0}{2m}\right)\right)dzd\tau$$
$$=e\left(-\frac{r\mu_0}{2m}\right)\int_{iC_1-\infty}^{iC_1+\infty}\tau^{-s}e(-n\tau)\int_{iC_2-\infty}^{iC_2+\infty}e\left(-\frac{mz^2}{\tau}-rz\right)dzd\tau.$$

Wir berechnen nun das innere Integral. Es gilt

$$\int_{iC_2-\infty}^{iC_2+\infty}e\left(-\frac{mz^2}{\tau}-rz\right)dz$$
$$=\int_{iC_2-\infty}^{iC_2+\infty}e\left(-\frac{m}{\tau}\left(z^2+2\frac{r\tau}{2m}z+\frac{r^2\tau^2}{4m^2}\right)+\frac{r^2\tau}{4m}\right)dz$$
$$=e\left(\frac{r^2\tau}{4m}\right)\int_{iC_2-\infty}^{iC_2+\infty}e\left(-\frac{m}{\tau}\left(z+\frac{r\tau}{2m}\right)^2\right)dz.$$

Nach Substitution mit $z\mapsto z-\frac{r\tau}{2m}$ erhalten wir das bekannte Integral (vgl. [GR14, 3.323, 2])

$$\int_{iC_2'-\infty}^{iC_2'+\infty}e\left(-\frac{m}{\tau}z^2\right)dz=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\frac{2\pi im}{\tau}}}=\sqrt{\frac{\tau}{2im}}.$$

Wir bekommen somit

$$e\left(-\frac{r\mu_0}{2m}\right)\int_{iC_1-\infty}^{iC_1+\infty}\sqrt{\frac{\tau}{2im}}\tau^{-s}e\left(\frac{r^2\tau}{4m}-n\tau\right)d\tau$$
$$=\frac{e\left(-\frac{r\mu_0}{2m}\right)}{\sqrt{2im}}\int_{iC_1-\infty}^{iC_1+\infty}\tau^{\frac{1}{2}-s}e\left(\frac{r^2-4mn}{4m}\tau\right)d\tau.$$

Dieses Integral wird in [EZ85, S.19] berechnet. Es gilt

$$\frac{e(-\frac{r\mu_0}{2m})}{\sqrt{2im}}\int_{iC_1-\infty}^{iC_1+\infty}\tau^{\frac{1}{2}-s}e\left(\frac{r^2-4mn}{4m}\tau\right)d\tau$$
$$=\begin{cases}0, & \text{falls } r^2\geq 4mn\\ \frac{e(-\frac{r\mu_0}{2m})e\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{s-\frac{1}{2}}m^{1-s}}{2^{s-2}\Gamma(s-\frac{1}{2})}(4mn-r^2)^{s-\frac{3}{2}}, & \text{falls } r^2<4mn.\end{cases}$$

Demnach ist der Beitrag zum (n,r)-ten Fourierkoeffizienten der ersten Reihe aus (2.8)

$$\frac{e(-\frac{r\mu_0}{2m})e\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{s-\frac{1}{2}}}{2^{s-2}\Gamma(s-\frac{1}{2})}m^{1-s}(4mn-r^2)^{s-\frac{3}{2}} \tag{2.9}$$

für $r^2 < 4mn$ und 0 sonst.

Analog kann der Beitrag zum (n,r)-ten Fourierkoeffizienten der zweiten Reihe aus (2.8) berechnet werden. Dieser ist

$$\frac{e(\frac{r\mu_0}{2m})e\left(\frac{s-k}{2}\right)\pi^{s-\frac{1}{2}}}{2^{s-2}\Gamma(s-\frac{1}{2})}m^{1-s}(4mn-r^2)^{s-\frac{3}{2}} \tag{2.10}$$

für $r^2 < 4mn$ und 0 sonst.

Als nächstes betrachten wir die dritte Reihe aus (2.8)

$$e\left(-\frac{s}{2}\right)\sum_{\lambda,\nu\in\mathbb{Z}}(\tau+\nu)^{s-k}e^m\left(2\left(\lambda-\frac{\mu_0}{2m}\right)z+\left(\lambda-\frac{\mu_0}{2m}\right)^2\tau+\left(\frac{\mu_0}{2m}\right)^2\nu\right).$$

Wir wenden die Lipschitz-Summenformel

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}e(-\mu n)(\tau+n)^{-s}=\frac{e\left(-\frac{s}{4}\right)(2\pi)^s}{\Gamma(s)}\sum_{n+\mu>0}(n+\mu)^{s-1}e((n+\mu)\tau)$$

auf die Reihe über $\nu\in\mathbb{Z}$ an und erhalten für $\tau\in\mathbb{H}$, $s\in\mathbb{C}$ mit $\Re(s)>1$ und $\mu_0\in\mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}e\left(\frac{\mu_0^2}{4m}\nu\right)(\tau+\nu)^{s-k}&\\&=\frac{e\left(\frac{s-k}{4}\right)(2\pi)^{k-s}}{\Gamma(k-s)}\sum_{\nu-\frac{\mu_0^2}{4m}>0}\left(\nu-\frac{\mu_0^2}{4m}\right)^{k-s-1}e\left(\left(\nu-\frac{\mu_0^2}{4m}\right)\tau\right).\end{aligned}$$

Unsere ursprüngliche Reihe ist demnach gleich

$$\begin{aligned}\frac{e\left(-\frac{s}{2}\right)e\left(\frac{s-k}{4}\right)(2\pi)^{k-s}}{\Gamma(k-s)}&\sum_{\nu-\frac{\mu_0^2}{4m}>0}\left(\nu-\frac{\mu_0^2}{4m}\right)^{k-s-1}e\left(\left(\nu-\frac{\mu_0^2}{4m}\right)\tau\right)\\&\times\sum_{\lambda\in\mathbb{Z}}e^m\left(\left(\lambda-\frac{\mu_0}{2m}\right)^2\tau+2\left(\lambda-\frac{\mu_0}{2m}\right)z\right)\end{aligned}$$

$$= \frac{e\left(-\frac{s+k}{4}\right)(2\pi)^{k-s}}{\Gamma(k-s)} \sum_{\nu - \frac{\mu_0^2}{4m} > 0} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}} \left(\nu - \frac{\mu_0^2}{4m}\right)^{k-s-1}$$

$$\cdot\, e((\lambda^2 m - \lambda\mu_0 + \nu)\tau) e((2m\lambda - \mu_0)z).$$

Indem wir $r = 2m\lambda - \mu_0$ und $n = \nu + \frac{r^2 - \mu_0^2}{4m}$ setzen, erhalten wir

$$\frac{e\left(-\frac{s+k}{4}\right)(2\pi)^{k-s}}{(4m)^{k-s-1}\Gamma(k-s)} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{r+\mu_0 \in 2m\mathbb{Z} \\ r^2 < 4mn}} (4mn - r^2)^{k-s-1} e(n\tau) e(rz).$$

Der Beitrag zum (n, r)-ten Fourierkoeffizienten der dritten Reihe aus (2.8) ist demnach

$$\begin{cases} \frac{e\left(-\frac{s+k}{4}\right)\pi^{k-s}}{2^{k-s-2}\,\Gamma(k-s)}\, m^{1-k+s}\,(4mn - r^2)^{k-s-1}, & \text{falls } r + \mu_0 \in 2m\mathbb{Z} \text{ und } r^2 < 4mn \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{2.11}$$

Analog berechnen wir die vierte und letzte Reihe aus (2.8) mit $r = -2m\lambda + \mu_0$ und $n = \nu + \frac{r^2 - \mu_0^2}{4m}$ und erhalten den folgenden Beitrag zum (n, r)-ten Fourierkoeffizienten

$$\begin{cases} \frac{e\left(\frac{3}{4}(s-k)\right)\pi^{k-s}}{2^{k-s-2}\,\Gamma(k-s)}\, m^{1-k+s}\,(4mn - r^2)^{k-s-1}, & \text{falls } r - \mu_0 \in 2m\mathbb{Z} \text{ und } r^2 < 4mn \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{2.12}$$

Damit haben wir alle Beiträge zum (n, r)-ten Fourierkoeffizienten der Reihe (2.7) für $ac = 0$ berechnet.

$\square$

2.4.2 Berechnung für $ac \neq 0$

Wir betrachten als nächstes die Reihe (2.7) für $ac \neq 0$

$$\sum_{\substack{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{Z}) \\ \lambda \in \mathbb{Z}}} (c\tau + d)^{-k} \left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right)^{-s} e^m \left(\frac{-cz^2}{c\tau + d} - \frac{\left(z + (\lambda - \frac{\mu_0}{2m})(c\tau + d)\right)^2}{(a\tau + b)(c\tau + d)}\right).$$

Jedes teilerfremde Paar $(a, c) \in \mathbb{Z}^2$ lässt sich eindeutig, bis auf Rechtsmultiplikation von Elementen aus $\Gamma_\infty := \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mid n \in \mathbb{Z}\}$, zu einer Matrix $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in$

$SL_2(\mathbb{Z})$ vervollständigen: Da $\mathbb{Z}$ ein Hauptidealring ist, gibt es für jedes teilerfremde Paar $(a,c) \in \mathbb{Z}^2$ ganze Zahlen b, d mit $ad - bc = 1$. Es gilt $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} a & an+b \\ c & cn+d \end{smallmatrix}\right)$. Umgekehrt erhalten wir für zwei Matrizen $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} a & b' \\ c & d' \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{Z})$ mit gleicher ersten Spalte $ad - bc = 1 = ad' - b'c$. Da a und c teilerfremd sind, folgt $b' = b - na$ und $d' = d - nc$ (mit $n \in \mathbb{Z}$), also $\left(\begin{smallmatrix} a & b' \\ c & d' \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Wir treffen für jedes teilerfremde Paar $(a,c) \in \mathbb{Z}^2$ eine feste Wahl für $\tilde{b}, \tilde{d} \in \mathbb{Z}$ mit $a\tilde{d} - \tilde{b}c = 1$. Mit $b_p := \tilde{b} + pa$, $d_p := \tilde{d} + pc$ ($p \in \mathbb{Z}$) können wir daher für die Reihe

$$\sum_{\substack{(a,c)\in\mathbb{Z}^2 \\ \mathrm{ggT}(a,c)=1}} \sum_{p\in\mathbb{Z}} \sum_{\lambda\in\mathbb{Z}} (c\tau + d_p)^{-k} \left(\frac{a\tau + b_p}{c\tau + d_p}\right)^{-s} \cdot e^m\left(\frac{-cz^2}{c\tau + d_p} - \frac{(z + (\lambda - \frac{\mu_0}{2m})(c\tau + d_p))^2}{(a\tau + b_p)(c\tau + d_p)}\right) \tag{2.13}$$

schreiben.
Als nächstes betrachten wir das Argument des Exponentialterms genauer. Erweitern und ausmultiplizieren liefert

$$\begin{aligned}\frac{-cz^2}{c\tau + d_p} &- \frac{(z + (\lambda - \frac{\mu_0}{2m})(c\tau + d_p))^2}{(a\tau + b_p)(c\tau + d_p)} \\ &= \frac{-c(a\tau + b_p)z^2 - z^2}{(a\tau + b_p)(c\tau + d_p)} - \frac{2(\lambda - \frac{\mu_0}{2m})z}{a\tau + b_p} - \left(\lambda - \frac{\mu_0}{2m}\right)^2 \frac{c\tau + d_p}{a\tau + b_p}.\end{aligned}$$

Verwenden wir die Beziehung $ad_p - b_pc = 1$, so erhalten wir

$$\frac{-az^2}{a\tau + b_p} - \frac{2(\lambda - \frac{\mu_0}{2m})z}{a\tau + b_p} - \left(\lambda - \frac{\mu_0}{2m}\right)^2 \frac{c\tau + d_p}{a\tau + b_p}.$$

Quadratisches ergänzen und erneutes Anwenden der Gleichung $ad_p - b_pc = 1$ liefert

$$\begin{aligned}\frac{-(az + (\lambda - \frac{\mu_0}{2m}))^2}{a(a\tau + b_p)} &+ \frac{(\lambda - \frac{\mu_0}{2m})^2 - a(\lambda - \frac{\mu_0}{2m})^2(c\tau + d_p)}{a(a\tau + b_p)} \\ &= -\frac{(az + (\lambda - \frac{\mu_0}{2m}))^2}{a(a\tau + b_p)} - \left(\lambda - \frac{\mu_0}{2m}\right)^2 \frac{c}{a}.\end{aligned}$$

Daher ist (2.13) dasselbe wie

$$\sum_{\substack{(a,c)\in\mathbb{Z}^2 \\ \mathrm{ggT}(a,c)=1}} \sum_{p\in\mathbb{Z}} \sum_{\lambda\in\mathbb{Z}} (c\tau + d_p)^{-k} \left(\frac{a\tau + b_p}{c\tau + d_p}\right)^{-s} \cdot e^m\left(-\frac{(az + (\lambda - \frac{\mu_0}{2m}))^2}{a(a\tau + b_p)} - \left(\lambda - \frac{\mu_0}{2m}\right)^2 \frac{c}{a}\right). \tag{2.14}$$

Aufgrund von

$$\frac{c\tau + d_p}{a\tau + b_p} = \frac{c}{a} + \frac{1}{a(a\tau + b_p)}$$

ist (2.14) gleich

$$\sum_{\substack{(a,c)\in\mathbb{Z}^2\\ \mathrm{ggT}(a,c)=1}} \sum_{p\in\mathbb{Z}} \sum_{\lambda\in\mathbb{Z}} (a\tau + b_p)^{-s}(a\tau + b_p)^{s-k} \left(\frac{c}{a} + \frac{1}{a(a\tau + b_p)}\right)^{s-k}$$
$$\cdot\, e^m \left(-\frac{(az + (\lambda - \frac{\mu_0}{2m}))^2}{a(a\tau + b_p)} - \left(\lambda - \frac{\mu_0}{2m}\right)^2 \frac{c}{a}\right).$$

Für $ac > 0$ gilt die Gleichung

$$\left(\tau + \frac{b_p}{a}\right)^{s-k} \left(\frac{c}{a} + \frac{1}{a^2\left(\tau + \frac{b_p}{a}\right)}\right)^{s-k} = \left(\frac{c}{a}\tau + \frac{b_p c}{a^2} + \frac{1}{a^2}\right)^{s-k}$$
$$= \left(\frac{c}{a}\left(\tau + \frac{b_p}{a} + \frac{1}{ac}\right)\right)^{s-k}.$$

Ist $ac > 0$, so sind zwei Fälle möglich: Entweder a und c sind beide positiv oder sie sind beide negativ.
Für $a, c > 0$ können wir die Reihe weiter umformen zu

$$\sum_{a=1}^{\infty} a^{-k} \sum_{\substack{c\geq 1\\ \mathrm{ggT}(a,c)=1}} \left(\frac{c}{a}\right)^{s-k} \sum_{p\in\mathbb{Z}} \sum_{\lambda\in\mathbb{Z}} \left(\tau + \frac{b_p}{a}\right)^{-s} \left(\tau + \frac{b_p}{a} + \frac{1}{ac}\right)^{s-k}$$
$$\cdot\, e^m \left(-\frac{\left(z + \frac{\lambda - \frac{\mu_0}{2m}}{a}\right)^2}{\tau + \frac{b_p}{a}} - \left(\lambda - \frac{\mu_0}{2m}\right)^2 \frac{c}{a}\right).$$

Wir verwenden die Definition von b_p ($b_p := \tilde{b} + pa$ mit $\tilde{b}$, p, $a \in \mathbb{Z}$) und stellen fest, dass die Substitution $\lambda \mapsto \lambda + a$ der Aktion $z \mapsto z + 1$ entspricht. Damit bekommen wir

$$\sum_{a=1}^{\infty} a^{-k} \sum_{\substack{c\geq 1\\ \mathrm{ggT}(a,c)=1}} \left(\frac{c}{a}\right)^{s-k} \sum_{\lambda=0}^{a-1} e_a\left(-\left(\lambda - \frac{\mu_0}{2m}\right)^2 cm\right) F_{k,m}\left(\tau - \frac{c'}{a}, z + \frac{\lambda - \frac{\mu_0}{2m}}{a}\right) \tag{2.15}$$

mit $c' \in \mathbb{Z},\ c'c \equiv 1 \pmod{a}$ und

$$F_{k,m}(\tau, z) := \sum_{p,q\in\mathbb{Z}} (\tau+p)^{-s} \left(\tau+p+\frac{1}{ac}\right)^{s-k} e^m\left(-\frac{(z+q)^2}{\tau+p}\right).$$

Die Funktion $F_{k,m}$ ist periodisch in τ und z. Mit Hilfe der Poissonsummationsformel erhalten wir

$$F_{k,m}(\tau, z) = \sum_{n,r} \gamma(n,r) e(n\tau) e(rz)$$

mit den Koeffizienten

$$\gamma(n,r) = \int_{iC_1}^{iC_1+1} \int_{iC_2}^{iC_2+1} \sum_{p,q\in\mathbb{Z}} (\tau+p)^{-s} \left(\tau+p+\frac{1}{ac}\right)^{s-k} \cdot e^m\left(-\frac{(z+q)^2}{\tau+p}\right) e(-n\tau)e(-rz)dzd\tau,$$

wobei $C_1, C_2 \in \mathbb{R},\ C_1 > 0$ ist.

Als nächstes berechnen wir $\gamma(n,r)$. Aufgrund der absoluten Konvergenz und durch die Substitutionen $\tau \mapsto \tau - p$ und $z \mapsto z - q$ gilt

$$\gamma(n,r) = \int_{iC_1-\infty}^{iC_1+\infty} \tau^{-s}\left(\tau+\frac{1}{ac}\right)^{s-k} e(-n\tau) \int_{iC_2-\infty}^{iC_2+\infty} e^m\left(-\frac{z^2}{\tau}\right) e(-rz)dzd\tau.$$

Das innere Integral ist (vgl. [GR14, 3.323, 2])

$$\int_{iC_2-\infty}^{iC_2+\infty} e^m\left(-\frac{z^2}{\tau}\right) e(-rz)dz = \sqrt{\frac{\tau}{2im}} \cdot e\left(\frac{r^2\tau}{4m}\right).$$

Damit erhalten wir

$$\gamma(n,r) = \frac{1}{\sqrt{2im}} \int_{iC_1-\infty}^{iC_1+\infty} \tau^{\frac{1}{2}-s}\left(\tau+\frac{1}{ac}\right)^{s-k} e\left(\frac{r^2-4mn}{4m}\tau\right) d\tau.$$

Falls $r^2 \geq 4mn$ verschieben wir den Integrationsweg nach $+i\infty$ und das Integral verschwindet. Für $r^2 < 4mn$ bekommen wir mit $\tau \mapsto \frac{\tau}{i}$

$$\frac{2\pi i^{k-1}}{\sqrt{2m}} \frac{1}{2\pi i} \int_{-C_1-i\infty}^{-C_1+i\infty} \tau^{\frac{1}{2}-s}\left(\tau+\frac{i}{ac}\right)^{s-k} \exp\left(-\frac{4mn-r^2}{2m}\pi\tau\right) d\tau.$$

Wegen

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C-i\infty}^{C+i\infty} (t+\alpha)^{-\mu}(t+\beta)^{-\nu} \exp(pt)dt = \frac{p^{\mu+\nu-1}\exp(-\beta p)}{\Gamma(\mu+\nu)} {}_1F_1(\mu, \mu+\nu; (\beta-\alpha)p)$$

für $\Re(\mu-\nu)>0$, $p\in\mathbb{C}$ (vgl. [E+54, 5.4, (8)]) erhalten wir mit $\alpha=0$, $\beta=\frac{i}{ac}$, $\mu=s-\frac{1}{2}$, $\nu=k-s$ und $p=-\frac{4mn-r^2}{2m}\pi$

$$\gamma(n,r)=\frac{e\left(\frac{k-1}{4}\right)e\left(\frac{4mn-r^2}{4acm}\right)\pi^{k-\frac{1}{2}}m^{1-k}(-(4mn-r^2))^{k-\frac{3}{2}}}{2^{k-2}\Gamma(k-\frac{1}{2})} \cdot {}_1F_1\left(s-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2};-\frac{4mn-r^2}{2acm}\pi i\right),$$

für $4mn>r^2$ und $\gamma(n,r)=0$ sonst. Setzen wir die Fourierentwicklung von $F_{k,m}$ in (2.15) ein, so erhalten wir den Ausdruck

$$\sum_{\substack{n,r\in\mathbb{Z}\\4mn>r^2}}\frac{e(\frac{3}{4}k-1)\pi^{k-\frac{1}{2}}m^{1-k}(4mn-r^2)^{k-\frac{3}{2}}}{2^{k-2}\Gamma(k-\frac{1}{2})}\sum_{\substack{a,c>0\\\mathrm{ggT}(a,c)=1}}\sum_{\lambda=0}^{a-1}a^{-k}\left(\frac{c}{a}\right)^{s-k} \cdot e\left(\frac{4mn-r^2}{4acm}\right)e_a\left(-\left(\lambda-\frac{\mu_0}{2m}\right)^2cm-c'n+\left(\lambda-\frac{\mu_0}{2m}\right)r\right) \cdot {}_1F_1\left(s-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2};-2\pi i\frac{4mn-r^2}{4acm}\right)e(n\tau)e(rz).$$

Der Beitrag zum (n,r)-ten Fourierkoeffizienten der Reihe (2.7) für $ac>0$ mit $a,\ c>0$ ist demnach

$$\frac{e(\frac{3}{4}k-1)\pi^{k-\frac{1}{2}}m^{1-k}(4mn-r^2)^{k-\frac{3}{2}}}{2^{k-2}\Gamma(k-\frac{1}{2})}\sum_{\substack{a,c>0\\\mathrm{ggT}(a,c)=1}}e\left(\frac{4mn-r^2}{4acm}\right)a^{-k}\left(\frac{c}{a}\right)^{s-k} \times\sum_{\lambda=0}^{a-1}e_a\left(-\left(\lambda-\frac{\mu_0}{2m}\right)^2cm-c'n+\left(\lambda-\frac{\mu_0}{2m}\right)r\right) \cdot {}_1F_1\left(s-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2};-2\pi i\frac{4mn-r^2}{4acm}\right). \quad (2.16)$$

Analog kann der Beitrag zum (n,r)-ten Fourierkoeffizienten der Reihe (2.7) für $ac>0$ mit $a,c<0$ berechnet werden. Dieser ist

$$\frac{e(\frac{1}{4}k-1)\pi^{k-\frac{1}{2}}m^{1-k}(4mn-r^2)^{k-\frac{3}{2}}}{2^{k-2}\Gamma(k-\frac{1}{2})}\sum_{\substack{a,c>0\\\mathrm{ggT}(a,c)=1}}e\left(\frac{4mn-r^2}{4acm}\right)a^{-k}\left(\frac{c}{a}\right)^{s-k} \times\sum_{\lambda=0}^{a-1}e_a\left(-\left(\lambda-\frac{\mu_0}{2m}\right)^2cm+c'n-\left(\lambda-\frac{\mu_0}{2m}\right)r\right) \cdot {}_1F_1\left(s-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2};-2\pi i\frac{4mn-r^2}{4acm}\right). \quad (2.17)$$

Als nächstes geben wir den Beitrag zum (n,r)-ten Fourierkoeffizienten der Reihe (2.7) für $ac<0$ an.
Hier gilt für a und c entweder $a>0$, $c<0$ oder $a<0$, $c>0$.

Für $ac<0$ gilt die Gleichung

$$\left(\tau+\frac{\tilde{b}}{a}\right)^{s-k}\left(-\left(-\frac{1}{a^2\left(\tau+\frac{\tilde{b}}{a}\right)}-\frac{c}{a}\right)\right)^{s-k}=e\left(\frac{s-k}{2}\right)\left(-\frac{1}{a^2}-\frac{c}{a}\tau-\frac{\tilde{b}c}{a^2}\right)^{s-k}.$$

Analog zum Fall $ac>0$ erhalten wir die Beiträge zum (n,r)-ten Fourierkoeffizienten für $ac<0$

$$\begin{aligned}\frac{e\left(-\frac{k}{4}+\frac{s}{2}-1\right)\pi^{k-\frac{1}{2}}m^{1-k}(4mn-r^2)^{k-\frac{3}{2}}}{2^{k-2}\Gamma(k-\frac{1}{2})}&\sum_{\substack{a,c>1\\ \mathrm{ggT}(a,c)=1}}e\left(-\frac{4mn-r^2}{4acm}\right)a^{-k}\left(\frac{c}{a}\right)^{s-k}\\ &\times\sum_{\lambda=0}^{a-1}e_a\left(\left(\lambda-\frac{\mu_0}{2m}\right)^2cm+c'n-\left(\lambda-\frac{\mu_0}{2m}\right)r\right)\\ &\cdot{}_1F_1\left(s-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2};2\pi i\frac{4mn-r^2}{4acm}\right)\end{aligned}\tag{2.18}$$

für $a<0$, $c>0$ und

$$\begin{aligned}\frac{e\left(\frac{k}{4}+\frac{s}{2}-1\right)\pi^{k-\frac{1}{2}}m^{1-k}(4mn-r^2)^{k-\frac{3}{2}}}{2^{k-2}\Gamma(k-\frac{1}{2})}&\sum_{\substack{a,c>1\\ \mathrm{ggT}(a,c)=1}}e\left(-\frac{4mn-r^2}{4acm}\right)a^{-k}\left(\frac{c}{a}\right)^{s-k}\\ &\times\sum_{\lambda=0}^{a-1}e_a\left(\left(\lambda-\frac{\mu_0}{2m}\right)^2cm-c'n+\left(\lambda-\frac{\mu_0}{2m}\right)r\right)\\ &\cdot{}_1F_1\left(s-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2};2\pi i\frac{4mn-r^2}{4acm}\right)\end{aligned}\tag{2.19}$$

für $a>0$, $c<0$. $\square$

Zusammensetzen der Beiträge (2.9), (2.10), (2.11), (2.12), (2.16), (2.17), (2.18) und (2.19) liefert die Behauptung. $\blacksquare$

Kapitel 3

Nicht-Verschwindungssätze

In diesem Kapitel befassen wir uns mit Nicht-Verschwindungssätzen für L-Funktionen. Zunächst geben wir das Hauptresultat aus [Koh97] über das Nicht-Verschwinden der zu einer Hecke-Eigenform assoziierten L-Funktion in speziellen Werten und die verwendete Beweismethode wieder. Anschließend zeigen wir Nicht-Verschwindungsaussagen für die zu Jacobiformen assoziierten L-Funktionen analog zu [Koh97]. Schließlich verallgemeinern wir die Aussagen für Ableitungen der L-Funktionen wie in [KSW18].

Sei f eine Spitzenform vom Gewicht $k \in \mathbb{Z}$ zur Modulgruppe $SL_2(\mathbb{Z})$, die nicht überall verschwindet und Hecke-Eigenform ist. Weiterhin sei $L^*(f,s)$ $(s \in \mathbb{C})$ die dazugehörige vervollständigte Hecke L-Funktion. Bekannterweise können Nullstellen der Funktion $L^*(f,s)$ nur innerhalb des kritischen Streifens $\frac{k-1}{2} < \Re(s) < \frac{k+1}{2}$ auftreten und sollten nach der verallgemeinerten Riemannschen Vermutung alle auf der Geraden $\Re(s) = \frac{k}{2}$ liegen. W. Kohnen zeigt in [Koh97, Theorem und Corollary, S.183] die folgenden Nicht-Verschwindungsaussagen im kritischen Streifen von zu Spitzenformen assoziierten Hecke L-Funktionen.

Theorem 1. *Sei $\{f_{k,1}, \ldots, f_{k,g_k}\}$ $(g_k = \dim S_k)$ eine Basis aus normalisierten Hecke-Eigenformen, $t_0 \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es eine Konstante $C(t_0, \varepsilon) > 0$, welche nur von t_0 und ε abhängt, so dass für $k > C(t_0, \varepsilon)$ die Funktion*

$$\sum_{\nu=1}^{g_k} \frac{1}{\langle f_{k,\nu}, f_{k,\nu} \rangle} L^*(f_{k,\nu}, s)$$

in keinem Punkt $s = \sigma + it$ mit $t = t_0$, $\frac{k-1}{2} < \sigma < \frac{k}{2} - \varepsilon$, $\frac{k}{2} + \varepsilon < \sigma < \frac{k+1}{2}$ verschwindet.

Korollar 1. *Sei $t_0 \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es für $k > C(t_0, \varepsilon)$ und $s = \sigma + it$ mit $t = t_0$, $\frac{k-1}{2} < \sigma < \frac{k}{2} - \varepsilon$, $\frac{k}{2} + \varepsilon < \sigma < \frac{k+1}{2}$ eine Hecke-Eigenform $f \in S_k$, so dass $L^*(f, s) \neq 0$.*

Beweisskizze. Für $z \in \mathbb{H}$ und $s \in \mathbb{C}$ mit $1 < \sigma < k - 1$ definieren wir

$$R_{k,s}(z) := \frac{1}{2}\, e\left(\frac{s}{4}\right) \Gamma(s)\, \Gamma(k-s) \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{Z})} (cz+d)^{-k} \left(\frac{az+b}{cz+d}\right)^{-s}.$$

Die Funktion $R_{k,s}$ ist eine Spitzenform vom Gewicht k und erfüllt für $f \in S_k$ die Gleichung (vgl. [Koh97, Lemma 1, S.184])

$$\langle f, R_{k,s} \rangle = \frac{(-1)^{\frac{k}{2}}\, \pi\, (k-2)!}{2^{k-2}}\, L^*(f, s). \tag{3.1}$$

Ihre Fourierdarstellung ist (vgl. [Koh97, Lemma 2, S.185])

$$R_{k,s}(z) = \sum_{n \geq 1} r_{k,s}(n)\, e(nz)$$

mit Fourierkoeffizienten

$$\begin{aligned} r_{k,s}(n) = (2\pi)^s\, \Gamma(k-s)\, n^{s-1} &+ (-1)^{\frac{k}{2}}\, (2\pi)^{k-s}\, \Gamma(s)\, n^{k-s-1} \\ &+ \frac{1}{2}\, (-1)^{\frac{k}{2}}\, (2\pi)^k\, n^{k-1}\, \frac{\Gamma(s)\, \Gamma(k-s)}{\Gamma(k)} \\ \times \sum_{\substack{(a,c) \in \mathbb{Z}^2,\, ac > 0, \\ \mathrm{ggT}(a,c) = 1}} c^{-k} \left(\frac{c}{a}\right)^s & \left(e\left(\frac{na'}{c}\right) e\left(\frac{s}{4}\right) {}_1F_1\left(s, k; -\frac{2\pi i n}{ac}\right) \right. \\ & \left. + e\left(-\frac{na'}{c}\right) e\left(-\frac{s}{4}\right) {}_1F_1\left(s, k; \frac{2\pi i n}{ac}\right) \right), \end{aligned}$$

wobei $a' \in \mathbb{Z}$ mit $a'a \equiv 1 \pmod{c}$ und ${}_1F_1(\alpha, \beta; z)$ die Kummersche Funktion bezeichnet.

Wir können (3.1) in der Form

$$R_{k,s} = \frac{(-1)^{\frac{k}{2}}\, \pi\, (k-2)!}{2^{k-2}} \sum_{\nu=1}^{g_k} \frac{L^*(f_{k,\nu}, s)}{\langle f_{k,\nu}, f_{k,\nu} \rangle}\, f_{k,\nu} \tag{3.2}$$

schreiben. Der Vergleich des ersten Fourierkoeffizienten auf beiden Seiten und die Annahme, dass die rechte Seite im Punkt s ($\sigma < k$) verschwindet ergeben nach einiger Rechnung einen Widerspruch für großes k. ■

Die Methode aus [Koh97] wurde unter anderem zum Nachweis des Nicht-Verschwindens in speziellen Werten von L-Funktionen für Spitzenformen halbganzen Gewichts in [RS14], von Koecher-Maass-Reihen zu Siegelschen Spitzenformen in [SK15], von getwisteten L-Funktionen von Spitzenformen in [Sch16] und von L-Funktionen zu Spitzenformen halbganzen Gewichts im Plus-Raum in [KR17] verwendet. Vor kurzem wurde in [KSW18] das Resultat aus [Koh97] auf Ableitungen der L-Funktionen verallgemeinert.

Die nächsten beiden Abschnitte beinhalten die Hauptresultate dieser Arbeit.

3.1 Nicht-Verschwinden der L-Funktion

Sei $\{\phi_{k,1}, \phi_{k,2}, \ldots, \phi_{k,d}\}$ ($d = \dim J_{k,m}^{cusp}$) mit

$$\phi_{k,\nu}(\tau, z) = \sum_{n,r} c_{k,\nu}(n,r) e(n\tau) e(rz)$$

für $1 \leq \nu \leq d$ und $n, r \in \mathbb{Z}$ mit $r^2 < 4mn$ eine Basis aus Hecke-Eigenformen von $J_{k,m}^{cusp}$ (vgl. [EZ85, Korollar 2, S.51]).

Theorem 2. *Sei $t_0 \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$. Ferner sei $\alpha \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq \alpha \leq 2m-1$ und $n, r \in \mathbb{Z}$ mit $r^2 < 4mn$. Dann gibt es eine Konstante $C(t_0, \varepsilon, m, n, r) > 0$, die von t_0, ε, m, n und r abhängt, so dass für $k > C(t_0, \varepsilon, m, n, r)$ die Funktion*

$$\sum_{\nu=1}^{d} \frac{c_{k,\nu}(n,r)}{\langle \phi_{k,\nu}, \phi_{k,\nu} \rangle} \cdot \Lambda_\alpha^* \left(\phi_{k,\nu}^c, s - \frac{1}{2} \right)$$

in keinem Punkt $s = \sigma + it$ mit $t = t_0$, $\frac{k-3}{2} < \Re(s) < \frac{k}{2} - \frac{1}{4} - \varepsilon$ verschwindet.

Korollar 2. *Sei $t_0 \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$. Ferner sei $\alpha \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq \alpha \leq 2m-1$ und $n, r \in \mathbb{Z}$ mit $r^2 < 4mn$. Für $k > C(t_0, \varepsilon, m, n, r)$ und beliebiges $s = \sigma + it$ mit $t = t_0$, $\frac{k-3}{2} < \Re(s) < \frac{k}{2} - \frac{1}{4} - \varepsilon$ gibt es dann eine Hecke-Eigenform $\phi \in J_{k,m}^{cusp}$, so dass für die assoziierte L-Funktion*

$$\Lambda_\alpha^* \left(\phi^c, s - \frac{1}{2} \right) \neq 0$$

gilt und deren (n,r)-ter Fourierkoeffizient $c(n,r)$ nicht verschwindet.

Beweis des Theorems. Wegen Lemma 4 und (2.5) gilt

$$e\left(\frac{s+k}{4}\right)\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)\Gamma(k-s)\,\Omega^{k,m}_{\mu_0,s}=\frac{\pi\Gamma\left(k-\frac{3}{2}\right)}{2^{k-\frac{3}{2}}m^{\frac{1}{2}}}\sum_{\nu=1}^{d}\frac{\Lambda^*_{-\mu_0}\left(\phi^c_{k,\nu},s-\frac{1}{2}\right)}{\langle\phi_{k,\nu},\phi_{k,\nu}\rangle}\cdot\phi_{k,\nu}.$$

Nehmen wir auf beiden Seiten den (n,r)-ten Fourierkoeffizienten, so folgt mit Lemma 5

$$\begin{aligned}
&\frac{e\left(\frac{3s+k}{4}\right)\pi^{s-\frac{1}{2}}\,m^{1-s}\,\Gamma(k-s)}{2^{s-2}}(4mn-r^2)^{s-\frac{3}{2}}\left\{e\left(-\frac{r\mu_0}{2m}\right)+e\left(\frac{r\mu_0}{2m}\right)e\left(-\frac{k}{2}\right)\right\}\\
&+\frac{\pi^{k-s}\,m^{1-k+s}\,\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)}{2^{k-s-2}}(4mn-r^2)^{k-s-1}\left\{\mathbf{1}_{2m\mathbb{Z}}(r+\mu_0)+\mathbf{1}_{2m\mathbb{Z}}(r-\mu_0)e\left(s-\frac{k}{2}\right)\right\}\\
&+\frac{e\left(\frac{s+2k}{4}\right)\pi^{k-\frac{1}{2}}m^{1-k}}{2^{k-2}}(4mn-r^2)^{k-s-1}\,\frac{\Gamma(s-\frac{1}{2})\Gamma(k-s)}{\Gamma(k-\frac{1}{2})}\sum_{\substack{a,c>0\\ \mathrm{ggT}(a,c)=1}}a^{-k}\left(\frac{c}{a}\right)^{s-k}\\
&\qquad\times\sum_{\lambda=0}^{a-1}\left(e\left(\frac{k}{2}\right)e_a\left(-c'n+\left(\lambda-\frac{\mu_0}{2m}\right)r\right)+e_a\left(c'n-\left(\lambda-\frac{\mu_0}{2m}\right)r\right)\right)\\
&\left\{e_a\left(-\left(\lambda-\frac{\mu_0}{2m}\right)^2cm\right)e\left(\frac{4mn-r^2}{4acm}\right){}_1F_1\left(s-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2};-2\pi i\frac{4mn-r^2}{4acm}\right)\right.\\
&\qquad+e\left(\frac{s-k}{2}\right)e_a\left(\left(\lambda-\frac{\mu_0}{2m}\right)^2cm\right)e\left(-\frac{4mn-r^2}{4acm}\right)\\
&\qquad\qquad\left.\cdot\,{}_1F_1\left(s-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2};2\pi i\frac{4mn-r^2}{4acm}\right)\right\}\\
&\qquad\qquad\qquad=\frac{\pi\Gamma\left(k-\frac{3}{2}\right)}{2^{k-\frac{3}{2}}m^{\frac{1}{2}}}\sum_{\nu=1}^{d}\frac{c_{k,\nu}(n,r)}{\langle\phi_{k,\nu},\phi_{k,\nu}\rangle}\Lambda^*_{-\mu_0}\left(\phi^c_{k,\nu},s-\frac{1}{2}\right),
\end{aligned}$$

wobei $c'\in\mathbb{Z}$ mit $c'c\equiv 1 \pmod a$ ist.

Mit ${}_1f_1(\alpha,\beta;z) := \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)}{}_1F_1(\alpha,\beta;z)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\frac{e\left(\frac{3s+k}{4}\right)\,\pi^{s-\frac{1}{2}}\,m^{1-s}\,\Gamma(k-s)}{2^{s-2}}\,(4mn-r^2)^{s-\frac{3}{2}}\left\{e\left(-\frac{r\mu_0}{2m}\right)+e\left(\frac{r\mu_0}{2m}\right)e\left(-\frac{k}{2}\right)\right\}\\
&+\frac{\pi^{k-s}\,m^{1-k+s}\,\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)}{2^{k-s-2}}\,(4mn-r^2)^{k-s-1}\left\{\mathbf{1}_{2m\mathbb{Z}}(r+\mu_0)+\mathbf{1}_{2m\mathbb{Z}}(r-\mu_0)e\left(s-\frac{k}{2}\right)\right\}\\
&\qquad+\frac{e\left(\frac{s+2k}{4}\right)\pi^{k-\frac{1}{2}}m^{1-k}}{2^{k-2}}(4mn-r^2)^{k-s-1}\sum_{\substack{a,c>0\\ \mathrm{ggT}(a,c)=1}}\sum_{\lambda=0}^{a-1}a^{-k}\left(\frac{c}{a}\right)^{s-k}\\
&\qquad\cdot\left(e\left(\frac{k}{2}\right)e_a\left(-c'n+\left(\lambda-\frac{\mu_0}{2m}\right)r\right)+e_a\left(c'n-\left(\lambda-\frac{\mu_0}{2m}\right)r\right)\right)\\
&\cdot\left\{e_a\left(-\left(\lambda-\frac{\mu_0}{2m}\right)^2cm\right)e\left(\frac{4mn-r^2}{4acm}\right){}_1f_1\left(s-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2};-2\pi i\frac{4mn-r^2}{4acm}\right)\right.\\
&\qquad\qquad+e\left(\frac{s-k}{2}\right)e_a\left(\left(\lambda-\frac{\mu_0}{2m}\right)^2cm\right)e\left(-\frac{4mn-r^2}{4acm}\right)\\
&\qquad\qquad\qquad\left.\cdot\,{}_1f_1\left(s-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2};2\pi i\frac{4mn-r^2}{4acm}\right)\right\}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad=\frac{\pi\Gamma\left(k-\frac{3}{2}\right)}{2^{k-\frac{3}{2}}m^{\frac{1}{2}}}\sum_{\nu=1}^{d}\frac{c_{k,\nu}(n,r)\,\Lambda^*_{-\mu_0}\left(\phi^c_{k,\nu},s-\frac{1}{2}\right)}{\langle\phi_{k,\nu},\phi_{k,\nu}\rangle}.
\end{aligned}$$

Angenommen die rechte Seite verschwindet im Punkt s.

Stellen wir die Gleichung nach

$$\frac{e\left(\frac{3s+k}{4}\right)\,\pi^{s-\frac{1}{2}}\,m^{1-s}\,\Gamma(k-s)}{2^{s-2}}\,(4mn-r^2)^{s-\frac{3}{2}}\left\{e\left(-\frac{r\mu_0}{2m}\right)+e\left(\frac{r\mu_0}{2m}\right)e\left(-\frac{k}{2}\right)\right\}$$

um und teilen wir durch

$$\frac{e\left(\frac{3s+k}{4}\right)\pi^{s-\frac{1}{2}}m^{1-s}}{2^{s-2}}\Gamma(k-s)(4mn-r^2)^{s-\frac{3}{2}},$$

so erhalten wir

$$
\begin{aligned}
&-\left\{e\left(-\frac{r\mu_0}{2m}\right)+e\left(\frac{r\mu_0}{2m}\right)e\left(-\frac{k}{2}\right)\right\}\\
&\qquad=\frac{e\left(-\frac{3s+k}{4}\right)\,\pi^{k-2s+\frac{1}{2}}\,m^{2s-k}}{2^{k-2s}}\,\frac{\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(k-s)}(4mn-r^2)^{k-2s+\frac{1}{2}}\\
&\qquad\qquad\cdot\left\{\mathbf{1}_{2m\mathbb{Z}}(r+\mu_0)+\mathbf{1}_{2m\mathbb{Z}}(r-\mu_0)e\left(s-\frac{k}{2}\right)\right\}\\
&\quad+\frac{e\left(\frac{k-2s}{4}\right)\pi^{k-s}m^{s-k}}{2^{k-s}}(4mn-r^2)^{k-2s+\frac{1}{2}}\frac{1}{\Gamma(k-s)}\sum_{\substack{a,c>0\\ \mathrm{ggT}(a,c)=1}}\sum_{\lambda=0}^{a-1}a^{-k}\left(\frac{c}{a}\right)^{s-k}\\
&\qquad\cdot\left(e\left(\frac{k}{2}\right)e_a\left(-c'n+\left(\lambda-\frac{\mu_0}{2m}\right)r\right)+e_a\left(c'n-\left(\lambda-\frac{\mu_0}{2m}\right)r\right)\right)\\
&\cdot\left\{e_a\left(-\left(\lambda-\frac{\mu_0}{2m}\right)^2cm\right)e\left(\frac{4mn-r^2}{4acm}\right){}_1f_1\left(s-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2};-2\pi i\frac{4mn-r^2}{4acm}\right)\right.\\
&\qquad+e\left(\frac{s-k}{2}\right)e_a\left(\left(\lambda-\frac{\mu_0}{2m}\right)^2cm\right)e\left(-\frac{4mn-r^2}{4acm}\right)\\
&\qquad\qquad\left.\cdot\,{}_1f_1\left(s-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2};2\pi i\frac{4mn-r^2}{4acm}\right)\right\}.
\end{aligned}
$$

Sei $s=\frac{k}{2}-\frac{1}{4}-\delta+it_0$ mit $\varepsilon<\delta<\frac{5}{4}$. Dann können wir die Gleichung weiter umformen zu

$$
\begin{aligned}
&-\left\{e\left(-\frac{r\mu_0}{2m}\right)+e\left(\frac{r\mu_0}{2m}\right)e\left(-\frac{k}{2}\right)\right\}\\
&=\frac{e\left(-\frac{5}{8}k+\frac{3}{16}+\frac{3}{4}\delta-\frac{3}{4}it_0\right)\,\pi^{1+2\delta-2it_0}\,m^{-\frac{1}{2}-2\delta+2it_0}}{2^{\frac{1}{2}+2\delta-2it_0}}\,(4mn-r^2)^{1+2\delta-2it_0}\\
&\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}-\frac{3}{4}-\delta+it_0\right)}{\Gamma(\frac{k}{2}+\frac{1}{4}+\delta-it_0)}\left\{\mathbf{1}_{2m\mathbb{Z}}(r+\mu_0)+\mathbf{1}_{2m\mathbb{Z}}(r-\mu_0)\,e\left(-\frac{1}{4}-\delta+it_0\right)\right\}\\
&\qquad+\frac{e\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\delta-\frac{1}{2}it_0\right)\pi^{\frac{k}{2}+\frac{1}{4}+\delta-it_0}m^{-\frac{k}{2}-\frac{1}{4}-\delta+it_0}}{2^{\frac{k}{2}+\frac{1}{4}+\delta-it_0}\,\Gamma(\frac{k}{2}+\frac{1}{4}+\delta-it_0)}\,(4mn-r^2)^{1+2\delta-2it_0}\times
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\times \sum_{\substack{a,c>0\\ \mathrm{ggT}(a,c)=1}} \sum_{\lambda=0}^{a-1} a^{-k} \left(\frac{c}{a}\right)^{-\frac{k}{2}-\frac{1}{4}-\delta+it_0}\\
&\qquad \cdot \left(e\left(\frac{k}{2}\right) e_a\left(-c'n + \left(\lambda - \frac{\mu_0}{2m}\right) r\right) + e_a\left(c'n - \left(\lambda - \frac{\mu_0}{2m}\right) r\right)\right)\\
&\qquad\qquad \cdot \left\{ e_a\left(-\left(\lambda - \frac{\mu_0}{2m}\right)^2 cm\right) e\left(\frac{4mn-r^2}{4acm}\right)\right.\\
&\qquad\qquad\quad \cdot {}_1f_1\left(\frac{k}{2} - \frac{3}{4} - \delta + it_0, k - \frac{1}{2}; -2\pi i \frac{4mn-r^2}{4acm}\right)\\
&\quad + e\left(-\frac{k}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2} it_0\right) e_a\left(\left(\lambda - \frac{\mu_0}{2m}\right)^2 cm\right) e\left(-\frac{4mn-r^2}{4acm}\right)\\
&\qquad\qquad\qquad \left. \cdot {}_1f_1\left(\frac{k}{2} - \frac{3}{4} - \delta + it_0, k - \frac{1}{2}; 2\pi i \frac{4mn-r^2}{4acm}\right)\right\}. \qquad (3.3)
\end{aligned}
$$

Bekanntlich ist für $z \in \mathbb{C}$

$$
|e^z| = \left|e^{\Re(z)+i\Im(z)}\right| = e^{\Re(z)}.
$$

Für $0 < \Re(\alpha) < \Re(\beta)$ gilt außerdem (vgl. [AS65, 13.2.1])

$$
{}_1f_1(\alpha, \beta; z) = \int_0^1 e^{zu} u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-\alpha-1} du
$$

und somit

$$
\left| {}_1f_1\left(\frac{k}{2} - \frac{3}{4} - \delta + it_0, k - \frac{1}{2}; \pm 2\pi i \frac{4mn-r^2}{4acm}\right)\right| \leq 1. \tag{3.4}
$$

Nehmen wir Absolutbeträge in (3.3), so folgt

$$
\begin{aligned}
&\left| e\left(-\frac{r\mu_0}{m}\right) + e\left(-\frac{k}{2}\right)\right|\\
&\qquad \ll \frac{|\Gamma(\frac{k}{2} - \frac{3}{4} - \delta + it_0)|}{|\Gamma(\frac{k}{2} + \frac{1}{4} + \delta - it_0)|} + \left(\frac{\pi}{2m}\right)^{\frac{k}{2}} \cdot \frac{1}{|\Gamma(\frac{k}{2} + \frac{1}{4} + \delta - it_0)|} \cdot K
\end{aligned}
$$

mit einer Konstante $K > 0$, die von t_0, m, n und r abhängt. Wegen

$$
\lim_{k\to\infty} \left(\frac{\Gamma(\frac{k}{2} - \frac{3}{4} - \delta + it_0)}{\Gamma(\frac{k}{2} + \frac{1}{4} + \delta - it_0)} \left(\frac{k}{2}\right)^{1+2\delta-2it_0}\right) = 1
$$

(vgl. [AS65, 6.1.47]) geht der erste Summand der rechten Seite gegen Null für $k \to \infty$. Der zweite Summand konvergiert für $k \to \infty$ ebenfalls gegen Null. Die linke Seite geht jedoch für $k \to \infty$ gegen 1. Somit haben wir für großes k einen Widerspruch. ■

Bemerkung 12. *Im Beweis des Nicht-Verschwindungssatzes aus [Koh97] wurde auf beiden Seiten von* (3.2) *der erste Fourierkoeffizient verglichen, da dieser für normalisierte Hecke-Eigenformen* 1 *ist. Wird hingegen der n-te Fourierkoeffizient genommen, so ergibt sich wie in Korollar 2 zusätzlich eine Aussage über das Nicht-Verschwinden der Fourierkoeffizienten.*

3.2 Nicht-Verschwinden der Ableitungen der L-Funktion

Das letzte Korollar ist eine direkte Folgerung aus dem Satz. Es gibt demnach für genügend großes k und beliebiges $s \in \mathbb{C}$ mit $\frac{k-3}{2} < \Re(s) < \frac{k}{2} - \frac{1}{4} - \varepsilon$ eine Hecke-Eigenform $\phi \in J_{k,m}^{cusp}$, so dass $\Lambda_\alpha^*(\phi^c, s - \frac{1}{2}) \neq 0$ für $0 \leq \alpha \leq 2m - 1$.
Es ist nun naheliegend dieses Resultat für Ableitungen der Funktion Λ_α^* wie in [KSW18] zu verallgemeinern.

Sei wieder $\{\phi_{k,1}, \phi_{k,2}, \ldots, \phi_{k,d}\}$ ($d = \dim J_{k,m}^{cusp}$) eine Basis aus Hecke-Eigenformen von $J_{k,m}^{cusp}$ mit (n, r)-tem Fourierkoeffizient $c_{k,\nu}(n, r)$ für $1 \leq \nu \leq d$.

Theorem 3. *Sei $t_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ und j eine positive ganze Zahl. Ferner sei $\alpha \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq \alpha \leq 2m - 1$ und $n, r \in \mathbb{Z}$ mit $r^2 < 4mn$. Dann gibt es eine Konstante $C(t_0, \varepsilon, j, m, n, r) > 0$, die von t_0, ε, j, m, n und r abhängt, so dass für $k > C(t_0, \varepsilon, j, m, n, r)$ die Funktion*

$$\sum_{\nu=1}^{d} \frac{c_{k,\nu}(n, r)}{\langle \phi_{k,\nu}, \phi_{k,\nu} \rangle} \cdot \frac{d^j}{ds^j} \left[\Lambda_\alpha^* \left(\phi_{k,\nu}^c, s - \frac{1}{2} \right) \right]$$

in keinem Punkt $s = \sigma + it$ mit $t = t_0$, $\frac{k-3}{2} < \Re(s) < \frac{k}{2} - \frac{1}{4} - \varepsilon$ verschwindet.

Korollar 3. *Sei $t_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ und j eine positive ganze Zahl. Ferner sei $\alpha \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq \alpha \leq 2m - 1$ und $n, r \in \mathbb{Z}$ mit $r^2 < 4mn$. Für $k > C(t_0, \varepsilon, j, m, n, r)$ und beliebiges $s = \sigma + it$ mit $t = t_0$, $\frac{k-3}{2} < \Re(s) < \frac{k}{2} - \frac{1}{4} - \varepsilon$ gibt es dann eine Hecke-Eigenform $\phi \in J_{k,m}^{cusp}$, so dass für die j-te Ableitung der assoziierten L-Funktion*

$$\frac{d^j}{ds^j} \left[\Lambda_\alpha^* \left(\phi^c, s - \frac{1}{2} \right) \right] \neq 0$$

gilt und deren (n, r)-ter Fourierkoeffizient $c(n, r)$ nicht verschwindet.

Beweis des Theorems. Wie im Beweis des Theorems 2 folgt aus (2.5) und Lemma 5 für den (n,r)-ten Fourierkoeffizienten

$$
\begin{aligned}
&\frac{e\left(\frac{3s+k}{4}\right)\pi^{s-\frac{1}{2}}\,m^{1-s}\,\Gamma(k-s)}{2^{s-2}}(4mn-r^2)^{s-\frac{3}{2}}\left\{e\left(-\frac{r\mu_0}{2m}\right)+e\left(\frac{r\mu_0}{2m}\right)e\left(-\frac{k}{2}\right)\right\}\\
&\qquad+\frac{\pi^{k-s}m^{1-k+s}\,\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)}{2^{k-s-2}}(4mn-r^2)^{k-s-1}\\
&\qquad\cdot\left\{\mathbf{1}_{2m\mathbb{Z}}(r+\mu_0)+\mathbf{1}_{2m\mathbb{Z}}(r-\mu_0)e\left(s-\frac{k}{2}\right)\right\}\\
&\quad+\frac{e\left(\frac{s+2k}{4}\right)\pi^{k-\frac{1}{2}}m^{1-k}}{2^{k-2}}(4mn-r^2)^{k-s-1}\sum_{\substack{a,c>0\\ \mathrm{ggT}(a,c)=1}}\sum_{\lambda=0}^{a-1}a^{-k}\left(\frac{c}{a}\right)^{s-k}\\
&\quad\cdot\left(e\left(\frac{k}{2}\right)e_a\left(-c'n+\left(\lambda-\frac{\mu_0}{2m}\right)r\right)+e_a\left(c'n-\left(\lambda-\frac{\mu_0}{2m}\right)r\right)\right)\\
&\cdot\left\{e_a\left(-\left(\lambda-\frac{\mu_0}{2m}\right)^2cm\right)e\left(\frac{4mn-r^2}{4acm}\right){}_1f_1\left(s-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2};-2\pi i\frac{4mn-r^2}{4acm}\right)\right.\\
&\qquad+e\left(\frac{s-k}{2}\right)e_a\left(\left(\lambda-\frac{\mu_0}{2m}\right)^2cm\right)e\left(-\frac{4mn-r^2}{4acm}\right)\\
&\qquad\left.\cdot\,{}_1f_1\left(s-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2};2\pi i\frac{4mn-r^2}{4acm}\right)\right\}\\
&\qquad\qquad=\frac{\pi\Gamma\left(k-\frac{3}{2}\right)}{2^{k-\frac{3}{2}}m^{\frac{1}{2}}}\sum_{\nu=1}^{d}\frac{c_{k,\nu}(n,r)}{\langle\phi_{k,\nu},\phi_{k,\nu}\rangle}\Lambda^*_{-\mu_0}\left(\phi^c_{k,\nu},s-\frac{1}{2}\right),
\end{aligned}
$$

wobei $c'\in\mathbb{Z}$ mit $c'c\equiv 1\pmod a$ ist.

Wir betrachten die j-te Ableitung auf beiden Seiten und nehmen an, dass die rechte Seite im Punkt s verschwindet. Wir stellen die Gleichung um und erhalten

$$
\begin{aligned}
-\frac{d^j}{ds^j}\Bigg[&\frac{e\left(\frac{3s+k}{4}\right)\pi^{s-\frac{1}{2}}m^{1-s}}{2^{s-2}}\Gamma(k-s)(4mn-r^2)^{s-\frac{3}{2}}\\
&\qquad\cdot\left\{e\left(-\frac{r\mu_0}{2m}\right)+e\left(\frac{r\mu_0}{2m}\right)e\left(-\frac{k}{2}\right)\right\}\Bigg]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{d^j}{ds^j}\left[\frac{\pi^{k-s}m^{1-k+s}}{2^{k-s-2}}\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)(4mn-r^2)^{k-s-1}\right. \\
&\qquad \left.\cdot\left\{\mathbf{1}_{2m\mathbb{Z}}(r+\mu_0)+\mathbf{1}_{2m\mathbb{Z}}(r-\mu_0)e\left(s-\frac{k}{2}\right)\right\}\right] \\
&\quad + \frac{d^j}{ds^j}\left[\frac{e\left(\frac{s+2k}{4}\right)\pi^{k-\frac{1}{2}}m^{1-k}}{2^{k-2}}(4mn-r^2)^{k-s-1}\sum_{\substack{a,c>0\\ \mathrm{ggT}(a,c)=1}}\sum_{\lambda=0}^{a-1}a^{-k}\left(\frac{c}{a}\right)^{s-k}\right. \\
&\quad \cdot\left(e\left(\frac{k}{2}\right)e_a\left(-c'n+\left(\lambda-\frac{\mu_0}{2m}\right)r\right)+e_a\left(c'n-\left(\lambda-\frac{\mu_0}{2m}\right)r\right)\right) \\
&\cdot\left\{e_a\left(-\left(\lambda-\frac{\mu_0}{2m}\right)^2cm\right)e\left(\frac{4mn-r^2}{4acm}\right){}_1f_1\left(s-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2};-2\pi i\frac{4mn-r^2}{4acm}\right)\right. \\
&\qquad +e\left(\frac{s-k}{2}\right)e_a\left(\left(\lambda-\frac{\mu_0}{2m}\right)^2cm\right)e\left(-\frac{4mn-r^2}{4acm}\right) \\
&\qquad\qquad \left.\left.\cdot\,{}_1f_1\left(s-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2};2\pi i\frac{4mn-r^2}{4acm}\right)\right\}\right].
\end{aligned}
$$

Dies können wir weiter vereinfachen zu

$$
\begin{aligned}
&-\frac{e\left(\frac{k}{4}\right)4m}{(4mn-r^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\pi}}\left\{e\left(-\frac{r\mu_0}{2m}\right)+e\left(\frac{r\mu_0}{2m}\right)e\left(-\frac{k}{2}\right)\right\} \\
&\cdot\frac{d^j}{ds^j}\left[e\left(\frac{3}{4}s\right)\left(\frac{(4mn-r^2)\pi}{2m}\right)^s\Gamma(k-s)\right]=\frac{4m}{4mn-r^2}\left(\frac{(4mn-r^2)\pi}{2m}\right)^k \\
&\cdot\frac{d^j}{ds^j}\left[\left(\frac{2m}{(4mn-r^2)\pi}\right)^s\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)\left\{\mathbf{1}_{2m\mathbb{Z}}(r+\mu_0)+\mathbf{1}_{2m\mathbb{Z}}(r-\mu_0)e\left(s-\frac{k}{2}\right)\right\}\right] \\
&\quad +\frac{e\left(\frac{k}{2}\right)4m}{(4mn-r^2)\sqrt{\pi}}\left(\frac{(4mn-r^2)\pi}{2m}\right)^k\sum_{\substack{a,c>0\\ \mathrm{ggT}(a,c)=1}}\sum_{\lambda=0}^{a-1}a^{-k}\left(\frac{c}{a}\right)^{-k} \\
&\quad \cdot\left(e\left(\frac{k}{2}\right)e_a\left(-c'n+\left(\lambda-\frac{\mu_0}{2m}\right)r\right)+e_a\left(c'n-\left(\lambda-\frac{\mu_0}{2m}\right)r\right)\right) \\
&\cdot\frac{d^j}{ds^j}\left[e\left(\frac{s}{4}\right)\left(\frac{c}{(4mn-r^2)a}\right)^s\left\{e_a\left(-\left(\lambda-\frac{\mu_0}{2m}\right)^2cm\right)e\left(\frac{4mn-r^2}{4acm}\right)\right.\right. \\
&\cdot\,{}_1f_1\left(s-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2};-2\pi i\frac{4mn-r^2}{4acm}\right)+e\left(\frac{s-k}{2}\right)e_a\left(\left(\lambda-\frac{\mu_0}{2m}\right)^2cm\right) \\
&\qquad \left.\left.\cdot\,e\left(-\frac{4mn-r^2}{4acm}\right){}_1f_1\left(s-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2};2\pi i\frac{4mn-r^2}{4acm}\right)\right\}\right]. \qquad (3.5)
\end{aligned}
$$

Wir werden beide Seiten durch

$$\frac{e\left(\frac{3s+k}{4}\right)\pi^{s-\frac{1}{2}}m^{1-s}}{2^{s-2}}\Gamma(k-s)(4mn-r^2)^{s-\frac{3}{2}}$$

teilen und $s = \frac{k}{2} - \frac{1}{4} - \delta + it_0$ ($\varepsilon < \Re(s) < \frac{5}{4}$) setzen. Anschließend nehmen wir Absolutbeträge und erhalten für großes k einen Widerspruch. Genauer gesagt, zeigen wir, dass die linke Seite der Gleichung (3.5) $\gg |\log(\frac{k}{2} + \frac{1}{4} + \delta - it_0)|^n$ für $k \to \infty$ ist, wobei die rechte Seite gegen Null geht.

Um das Verhalten der Terme für $k \to \infty$ zu bestimmen, beschäftigen wir uns zunächst mit der Funktion $\frac{\Gamma^{(\nu)}(s)}{\Gamma(s)}$ ($\nu \in \mathbb{N}$). Sei $\psi(s) := \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}$ die Digamma-Funktion. Es gilt

$$\frac{d}{ds}\left[\frac{\Gamma^{(\nu)}(s)}{\Gamma(s)}\right] = \frac{\Gamma(s)\Gamma^{(\nu+1)}(s) - \Gamma^{(\nu)}(s)\Gamma'(s)}{\Gamma(s)^2} = \frac{\Gamma^{(\nu+1)}(s)}{\Gamma(s)} - \frac{\Gamma^{(\nu)}(s)}{\Gamma(s)} \cdot \psi(s).$$

Per Induktion lässt sich erkennen, dass $\frac{\Gamma^{(n)}(s)}{\Gamma(s)}$ ein Polynom $P(\psi, \psi^{(1)}, \ldots, \psi^{(n-1)})$ mit ganzzahligen Koeffizienten ist, das den Term ψ^n beinhaltet. ψ^n ist die höchste Potenz von ψ, die in P auftritt.
Die Digamma-Funktion erfüllt die folgenden asymptotischen Formeln (vgl. [AS65, 6.3.18; 6.4.11])

$$\psi(s) \sim \log(s) - \frac{1}{2s} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{2ks^{2k}} \tag{3.6}$$

$$\psi^{(n)}(s) \sim (-1)^{n-1}\left(\frac{(n-1)!}{s^n} + \frac{n!}{2s^{n+1}} + \sum_{k=1}^{\infty} B_{2k}\frac{(2k+n-1)!}{(2k)!s^{2k+n}}\right) \tag{3.7}$$

für $s \to \infty$ in $|\arg(s)| < \pi$, wobei B_n die n-te Bernoullizahl bezeichnet.

Wir berechnen als nächstes die Ableitung der linken Seite aus (3.5). Mit der Produktregel der Differentialrechnung erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\frac{d^j}{ds^j}\left[e\left(\frac{3}{4}s\right)\left(\frac{(4mn-r^2)\pi}{2m}\right)^s \Gamma(k-s)\right] \\
&\quad = \sum_{\nu=0}^{j}\binom{j}{\nu}\left(\frac{3\pi i}{2}\right)^{\nu} e\left(\frac{3}{4}s\right)\sum_{w=0}^{j-\nu}\binom{j-\nu}{w}\left(\log\left(\frac{(4mn-r^2)\pi}{2m}\right)\right)^{w} \\
&\qquad\qquad \cdot \left(\frac{(4mn-r^2)\pi}{2m}\right)^{s}(-1)^{j-\nu-w}\,\Gamma^{(j-\nu-w)}(k-s).
\end{aligned}$$

Die linke Seite von (3.5) ist somit

$$-\frac{e\left(\frac{3s+k}{4}\right)4m}{(4mn-r^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\pi}}\left(\frac{(4mn-r^2)\pi}{2m}\right)^s\left\{e\left(-\frac{r\mu_0}{2m}\right)+e\left(\frac{r\mu_0}{2m}\right)e\left(-\frac{k}{2}\right)\right\}$$
$$\times\sum_{\nu=0}^{j}\binom{j}{\nu}\left(\frac{3\pi i}{2}\right)^{\nu}\sum_{w=0}^{j-\nu}\binom{j-\nu}{w}\left(\log\left(\frac{(4mn-r^2)\pi}{2m}\right)\right)^w$$
$$\cdot(-1)^{j-\nu-w}\Gamma^{(j-\nu-w)}(k-s).$$

Teilen wir (3.5) durch

$$\frac{e\left(\frac{3s+k}{4}\right)\pi^{s-\frac{1}{2}}m^{1-s}}{2^{s-2}}\Gamma(k-s)(4mn-r^2)^{s-\frac{3}{2}},$$

so erhalten wir für die linke Seite

$$-e\left(\frac{r\mu_0}{2m}\right)\left\{e\left(-\frac{r\mu_0}{m}\right)+e\left(-\frac{k}{2}\right)\right\}$$
$$\times\sum_{\nu=0}^{j}\binom{j}{\nu}\left(\frac{3\pi i}{2}\right)^{\nu}\sum_{w=0}^{j-\nu}\binom{j-\nu}{w}\left(\log\left(\frac{(4mn-r^2)\pi}{2m}\right)\right)^w$$
$$\cdot(-1)^{j-\nu-w}\frac{\Gamma^{(j-\nu-w)}(k-s)}{\Gamma(k-s)}.$$

Sei $s=\frac{k}{2}-\frac{1}{4}-\delta+it_0$ mit $\varepsilon<\delta<\frac{5}{4}$. Dann können wir die linke Seite umformen zu

$$-e\left(\frac{r\mu_0}{2m}\right)\left\{e\left(-\frac{r\mu_0}{m}\right)+e\left(-\frac{k}{2}\right)\right\}\sum_{\nu=0}^{j}\binom{j}{\nu}\left(\frac{3\pi i}{2}\right)^{\nu}$$
$$\cdot\left\{\left(\log\left(\frac{(4mn-r^2)\pi}{2m}\right)\right)^{j-\nu}+\sum_{w=0}^{j-\nu-1}\binom{j-\nu}{w}\left(\log\left(\frac{(4mn-r^2)\pi}{2m}\right)\right)^w\right.$$
$$\left.\cdot(-1)^{j-\nu-w}\frac{\Gamma^{(j-\nu-w)}(\frac{k}{2}+\frac{1}{4}+\delta-it_0)}{\Gamma(\frac{k}{2}+\frac{1}{4}+\delta-it_0)}\right\}.$$

Wir haben bereits bemerkt, dass das Konvergenzverhalten für $k\to\infty$ von

$$\frac{\Gamma^{(j-\nu-w)}(\frac{k}{2}+\frac{1}{4}+\delta-it_0)}{\Gamma(\frac{k}{2}+\frac{1}{4}+\delta-it_0)}$$

für $0\le w\le j-\nu-1$ durch

$$\left(\log\left(\frac{k}{2}+\frac{1}{4}+\delta-it_0\right)\right)^{j-\nu-w}$$

bestimmt wird (siehe (3.6)). Außerdem ist $\psi^{(j)}(s) = o\left(\frac{1}{|s|^j}\right)$ für $|s| \to \infty$ in $|\arg(s)| < \pi$ und $j \in \mathbb{N}$ (siehe (3.7)).
Also ist

$$\frac{\Gamma^{(j-\nu-w)}(\frac{k}{2}+\frac{1}{4}+\delta-it_0)}{\Gamma(\frac{k}{2}+\frac{1}{4}+\delta-it_0)}$$

für $k \to \infty$ ein Polynom in $\log(\frac{k}{2}+\frac{1}{4}+\delta-it_0)$ von Grad $j-\nu-w$.

Nehmen wir Absolutbeträge, so sehen wir, dass die linke Seite von (3.5)

$$\gg \left|\log\left(\frac{k}{2}+\frac{1}{4}+\delta-it_0\right)\right|$$

für $k \to \infty$ ist. □

Als nächstes berechnen wir den ersten Term auf der rechten Seite von (3.5). Es gilt

$$\begin{aligned}
&\frac{d^j}{ds^j}\left[\left(\frac{2m}{(4mn-r^2)\pi}\right)^s \Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)\left\{\mathbf{1}_{2m\mathbb{Z}}(r+\mu_0)+\mathbf{1}_{2m\mathbb{Z}}(r-\mu_0)e\left(s-\frac{k}{2}\right)\right\}\right] \\
&\quad = \sum_{\nu=0}^{j}\binom{j}{\nu}\left(\log\left(\frac{2m}{(4mn-r^2)\pi}\right)\right)^\nu\left(\frac{2m}{(4mn-r^2)\pi}\right)^s \\
&\quad\quad \cdot\left\{\mathbf{1}_{2m\mathbb{Z}}(r+\mu_0)\Gamma^{(j-\nu)}\left(s-\frac{1}{2}\right)\right. \\
&\quad\quad \left.+\mathbf{1}_{2m\mathbb{Z}}(r-\mu_0)\sum_{w=0}^{j-\nu}\binom{j-\nu}{w}(2\pi i)^w e\left(s-\frac{k}{2}\right)\Gamma^{(j-\nu-w)}\left(s-\frac{1}{2}\right)\right\}.
\end{aligned}$$

Der erste Term auf der rechten Seite von (3.5) ist demnach

$$\begin{aligned}
&\frac{4m}{4mn-r^2}\left(\frac{(4mn-r^2)\pi}{2m}\right)^{k-s} \\
&\quad \times\sum_{\nu=0}^{j}\binom{j}{\nu}\left(\log\left(\frac{2m}{(4mn-r^2)\pi}\right)\right)^\nu\left\{\mathbf{1}_{2m\mathbb{Z}}(r+\mu_0)\Gamma^{(j-\nu)}\left(s-\frac{1}{2}\right)\right. \\
&\quad\quad \left.+\mathbf{1}_{2m\mathbb{Z}}(r-\mu_0)\sum_{w=0}^{j-\nu}\binom{j-\nu}{w}(2\pi i)^w e\left(s-\frac{k}{2}\right)\Gamma^{(j-\nu-w)}\left(s-\frac{1}{2}\right)\right\}.
\end{aligned}$$

Teilen wir (3.5) durch

$$\frac{e\left(\frac{3s+k}{4}\right)\pi^{s-\frac{1}{2}}m^{1-s}}{2^{s-2}}\Gamma(k-s)(4mn-r^2)^{s-\frac{3}{2}},$$

so erhalten wir für den ersten Term der rechten Seite

$$e\left(-\frac{3s+k}{4}\right)\sqrt{(4mn-r^2)\pi}\left(\frac{(4mn-r^2)\pi}{2m}\right)^{k-2s}$$
$$\times\sum_{\nu=0}^{j}\binom{j}{\nu}\left(\log\left(\frac{2m}{(4mn-r^2)\pi}\right)\right)^{\nu}\left\{\mathbf{1}_{2m\mathbb{Z}}(r+\mu_0)\frac{\Gamma^{(j-\nu)}\left(s-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(k-s)}\right.$$
$$\left.+\mathbf{1}_{2m\mathbb{Z}}(r-\mu_0)\sum_{w=0}^{j-\nu}\binom{j-\nu}{w}(2\pi i)^w e\left(s-\frac{k}{2}\right)\frac{\Gamma^{(j-\nu-w)}\left(s-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(k-s)}\right\}.$$

Wir erweitern den Term mit $\Gamma(s-\frac{1}{2})$ und setzen $s=\frac{k}{2}-\frac{1}{4}-\delta+it_0$ mit $\varepsilon<\delta<\frac{5}{4}$. Dann erhalten wir

$$e\left(-\frac{5}{8}k+\frac{3}{16}+\frac{3}{4}\delta-\frac{3}{4}it_0\right)\sqrt{(4mn-r^2)\pi}\left(\frac{(4mn-r^2)\pi}{2m}\right)^{\frac{1}{2}+2\delta-2it_0}$$
$$\times\sum_{\nu=0}^{j}\binom{j}{\nu}\left(\log\left(\frac{2m}{(4mn-r^2)\pi}\right)\right)^{\nu}$$
$$\cdot\left\{\mathbf{1}_{2m\mathbb{Z}}(r+\mu_0)\frac{\Gamma^{(j-\nu)}\left(\frac{k}{2}-\frac{3}{4}-\delta+it_0\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}-\frac{3}{4}-\delta+it_0\right)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}-\frac{3}{4}-\delta+it_0\right)}{\Gamma(\frac{k}{2}+\frac{1}{4}+\delta-it_0)}\right.$$
$$+\mathbf{1}_{2m\mathbb{Z}}(r-\mu_0)\sum_{w=0}^{j-\nu}\binom{j-\nu}{w}(2\pi i)^w e\left(-\frac{1}{4}-\delta+it_0\right)$$
$$\left.\cdot\frac{\Gamma^{(j-\nu-w)}\left(\frac{k}{2}-\frac{3}{4}-\delta+it_0\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}-\frac{3}{4}-\delta+it_0\right)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}-\frac{3}{4}-\delta+it_0\right)}{\Gamma(\frac{k}{2}+\frac{1}{4}+\delta-it_0)}\right\}.$$

Es gilt (vgl. [AS65, 6.1.23; 6.1.47])

$$\left|\frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}-\frac{3}{4}-\delta+it_0\right)}{\Gamma(\frac{k}{2}+\frac{1}{4}+\delta-it_0)}\right|=\left|\frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}+it_0-\frac{3}{4}-\delta\right)}{\Gamma(\frac{k}{2}+it_0+\frac{1}{4}+\delta)}\right|$$
$$=\left|\frac{k}{2}+it_0\right|^{-2\delta-1}\cdot\left|1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{|\frac{k}{2}+it_0|}\right)\right|.$$

Wir wissen, dass der Term mit der höchsten Potenz aus $\frac{\Gamma^{(j-\nu)}\left(\frac{k}{2}-\frac{3}{4}-\delta+it_0\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}-\frac{3}{4}-\delta+it_0\right)}$ (bzw. $\frac{\Gamma^{(j-\nu-w)}\left(\frac{k}{2}-\frac{3}{4}-\delta+it_0\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}-\frac{3}{4}-\delta+it_0\right)}$) $(\psi(\frac{k}{2}-\frac{3}{4}-\delta+it_0))^{j-\nu}$ (bzw. $(\psi(\frac{k}{2}-\frac{3}{4}-\delta+it_0))^{j-\nu-w}$) ist. Dieser verhält sich für $k\to\infty$ wie $(\log(\frac{k}{2}-\frac{3}{4}-\delta+it_0))^{j-\nu}$ mit $0\le\nu<j-1$ (bzw. $(\log(\frac{k}{2}-\frac{3}{4}-\delta+it_0))^{j-\nu-w}$ mit $0\le w<j-\nu-1$).

Nehmen wir Absolutbeträge, so sehen wir, dass der erste Term der rechten Seite von (3.5) für $k\to\infty$ gegen 0 geht. $\square$

Als letztes berechnen wir den zweiten Term auf der rechten Seite aus (3.5). Wir haben

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^j}{ds^j}\Bigg[e\left(\frac{s}{4}\right)\left(\frac{c}{(4mn-r^2)a}\right)^s \Bigg\{ e_a\left(-\left(\lambda-\frac{\mu_0}{2m}\right)^2 cm\right) e\left(\frac{4mn-r^2}{4acm}\right) \\
&\cdot {}_1f_1\left(s-\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}; -2\pi i\frac{4mn-r^2}{4acm}\right) + e\left(\frac{s-k}{2}\right) e_a\left(\left(\lambda-\frac{\mu_0}{2m}\right)^2 cm\right) \\
&\qquad \cdot e\left(-\frac{4mn-r^2}{4acm}\right) {}_1f_1\left(s-\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}; 2\pi i\frac{4mn-r^2}{4acm}\right) \Bigg\}\Bigg] \\
&\quad = \sum_{\nu=0}^{j}\binom{j}{\nu}\left(\frac{\pi i}{2}\right)^\nu e\left(\frac{s}{4}\right)\sum_{w=0}^{j-\nu}\binom{j-\nu}{w}\left(\log\left(\frac{c}{(4mn-r^2)a}\right)\right)^w \\
&\qquad \cdot\left(\frac{c}{(4mn-r^2)a}\right)^s \Bigg\{ e_a\left(-\left(\lambda-\frac{\mu_0}{2m}\right)^2 cm\right) e\left(\frac{4mn-r^2}{4acm}\right) \\
&\qquad\quad \cdot \frac{d^{j-\nu-w}}{ds^{j-\nu-w}}\left[{}_1f_1\left(s-\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}; -2\pi i\frac{4mn-r^2}{4acm}\right)\right] \\
&\qquad\quad + 3^\nu e\left(\frac{s-k}{2}\right) e_a\left(\left(\lambda-\frac{\mu_0}{2m}\right)^2 cm\right) e\left(-\frac{4mn-r^2}{4acm}\right) \\
&\qquad\qquad\qquad \cdot \frac{d^{j-\nu-w}}{ds^{j-\nu-w}}\left[{}_1f_1\left(s-\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}; 2\pi i\frac{4mn-r^2}{4acm}\right)\right] \Bigg\}.
\end{aligned}
$$

Teilen wir (3.5) durch

$$
\frac{e\left(\frac{3s+k}{4}\right)\,\pi^{s-\frac{1}{2}}\,m^{1-s}}{2^{s-2}}\,\Gamma(k-s)\,(4mn-r^2)^{s-\frac{3}{2}},
$$

so erhalten wir für den zweiten Term der rechten Seite

$$\frac{e\left(\frac{k-2s}{4}\right)\pi^{k-s}m^{s-k}}{2^{k-s}\Gamma(k-s)}(4mn-r^2)^{k-2s+\frac{1}{2}}\sum_{\substack{a,c>0\\ \mathrm{ggT}(a,c)=1}}\sum_{\lambda=0}^{a-1}a^{-k}\left(\frac{c}{a}\right)^{s-k}$$
$$\cdot\left(e\left(\frac{k}{2}\right)e_a\left(-c'n+\left(\lambda-\frac{\mu_0}{2m}\right)r\right)+e_a\left(c'n-\left(\lambda-\frac{\mu_0}{2m}\right)r\right)\right)$$
$$\times\sum_{\nu=0}^{j}\binom{j}{\nu}\left(\frac{\pi i}{2}\right)^{\nu}\sum_{w=0}^{j-\nu}\binom{j-\nu}{w}\left(\log\left(\frac{c}{(4mn-r^2)a}\right)\right)^{w}$$
$$\cdot\left\{e_a\left(-\left(\lambda-\frac{\mu_0}{2m}\right)^2cm\right)e\left(\frac{4mn-r^2}{4acm}\right)\right.$$
$$\cdot\frac{d^{j-\nu-w}}{ds^{j-\nu-w}}\left[{}_1f_1\left(s-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2};-2\pi i\frac{4mn-r^2}{4acm}\right)\right]$$
$$+3^{\nu}e\left(\frac{s-k}{2}\right)e_a\left(\left(\lambda-\frac{\mu_0}{2m}\right)^2cm\right)e\left(-\frac{4mn-r^2}{4acm}\right)$$
$$\left.\cdot\frac{d^{j-\nu-w}}{ds^{j-\nu-w}}\left[{}_1f_1\left(s-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2};2\pi i\frac{4mn-r^2}{4acm}\right)\right]\right\}.$$

Für $\Re(\beta)>\Re(\alpha)>0$ gilt (vgl. [AS65, 13.2.1])

$$ {}_1f_1(\alpha,\beta;z)=\int_0^1 e^{zu}u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-\alpha-1}du$$

und somit für $l\in\mathbb{Z}$, $l\geq 0$

$$\frac{d^l}{ds^l}\left[{}_1f_1\left(s-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2};\pm 2\pi i\frac{4mn-r^2}{4acm}\right)\right]$$
$$=\int_0^1 e\left(\pm\frac{4mn-r^2}{4acm}u\right)\left(\sum_{j=0}^{l}(-1)^{l-j}\binom{l}{j}(\log(u))^j\cdot(\log(1-u))^{l-j}\right)$$
$$\cdot u^{s-\frac{3}{2}}\cdot(1-u)^{k-s-1}du.$$

Da $\log(u)=o(u^{-\varepsilon'})\,\forall\varepsilon'>0$ für $u\to 0$, gilt

$$\left|\frac{d^l}{ds^l}\left[{}_1f_1\left(s-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2};\pm 2\pi i\frac{4mn-r^2}{4acm}\right)\right]\right|\leq K_l$$

wobei $K_l>0$ eine Konstante ist, die nur von l abhängt.

Außerdem gilt nach (3.4)

$$\left|{}_1f_1\left(s-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2};\pm 2\pi i\frac{4mn-r^2}{4acm}\right)\right|\leq 1.$$

Setzen wir $s = \frac{k}{2} - \frac{1}{4} - \delta + it_0$ mit $\varepsilon < \Re(s) < \frac{5}{4}$ und nehmen wir Absolutbeträge, so ist der zweite Term der rechten Seite von (3.5)

$$\ll \left(\frac{\pi}{2m}\right)^{\frac{k}{2}} \frac{1}{|\Gamma(\frac{k}{2} + \frac{1}{4} + \delta - it_0)|} \sum_{\substack{a,c>0 \\ \mathrm{ggT}(a,c)=1}} \sum_{\lambda=0}^{a-1} a^{-k} \left(\frac{c}{a}\right)^{-\frac{k}{2}-\frac{1}{4}-\delta}$$
$$\times \sum_{\nu=0}^{j-1} \binom{j}{\nu} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\nu} \left(1 + 3^{\nu} e^{-\pi t_0}\right)$$
$$\cdot \left(\left| \log\left(\frac{c}{(4mn - r^2)a}\right) \right|^{j-\nu} + \sum_{w=0}^{j-\nu-1} \binom{j-\nu}{w} \left| \log\left(\frac{c}{(4mn - r^2)a}\right)\right|^{w} K_{j-\nu-w} \right).$$

Dies lässt sich mit Hilfe der Riemannschen Zetafunktion und einer Konstanten $B(t_0, j, m, n, r)$, die von t_0, j, m, n und r abhängt, weiter abschätzen zu

$$\ll \left(\frac{\pi}{2m}\right)^{\frac{k}{2}} \cdot \frac{1}{|\Gamma(\frac{k}{2} + \frac{1}{4} + \delta - it_0)|} \cdot B(t_0, j, m, n, r).$$

Mit der Stirlingformel folgt, dass auch dieser Term für $k \to \infty$ gegen 0 geht.

$\square$

Insgesamt haben wir also gezeigt, dass der Absolutbetrag der linken Seite von (3.5) dividiert durch

$$\frac{e\left(\frac{3s+k}{4}\right) \pi^{s-\frac{1}{2}} m^{1-s}}{2^{s-2}} \Gamma(k-s) \left(4mn - r^2\right)^{s-\frac{3}{2}}$$

für $k \to \infty$ größer als $|\log(\frac{k}{2} + \frac{1}{4} + \delta - it_0)|$ ist, jedoch die rechte Seite gegen Null geht. $\blacksquare$

Kapitel 4

Einschränkung von Jacobiformen und Konstruktion von Jacobi-Spitzenformen

Wir haben bereits zu Beginn festgestellt, dass eine Jacobiform $\phi(\tau, z)$ für $z = 0$ eine Modulform desselben Gewichts ergibt. In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit der Einschränkung $\Omega^{k,m}_{\mu_0,s}$ auf $z = 0$ und dem Skalarprodukt mit einer Spitzenform. Zunächst geben wir die Definition der Operatoren $\mathcal{D}_\nu$ und $\{\}^{\nu}_{k,m}$ wieder und nennen wichtige Eigenschaften von Modulformen. Anschließend beschäftigen wir uns mit den Poincaré-Reihen für Jacobiformen. Danach zeigen wir, dass für eine Jacobi-Spitzenform ϕ vom Gewicht k und Index m und eine Spitzenform f vom Gewicht k die Gleichung

$$(\mathcal{D}_0(\phi), f) = \frac{\Gamma(k-1)}{(4m)^{k-2}\sqrt{\pi}\,\Gamma(k-\frac{3}{2})} \langle \phi, \{f\}^0_{k,m} \rangle$$

gilt und berechnen das Skalarprodukt der Einschränkung $\Omega^{k,m}_{\mu_0,s}(\tau, 0)$ mit einer Spitzenform. Wir erhalten als Ergebnis eine Summe aus L-Reihen und einen weiteren Beweis für das Hauptresultat aus [Mar14] (siehe Lemma 4 in dieser Arbeit). Abschließend geben wir die Methode zur Konstruktion von Jacobiformen aus [Sak98] wieder.

4.1 Definition der Restriktion und ihrer Adjungierten

In [EZ85, §3 Taylor Expansions of Jacobi Forms, S.28] wird die Taylorentwicklung einer Jacobi-Spitzenform ϕ um $z = 0$ behandelt. Indem gewisse Linearkombinationen der Koeffizienten gebildet werden, erhält man eine Folge $\mathcal{D}_\nu(\phi)$ aus den ν-ten Entwicklungskoeffizienten. Für jedes $\nu \geq 0$ ist $\mathcal{D}_\nu(\phi)$ eine Modulform von Gewicht $k + \nu$, insbesondere gilt $\mathcal{D}_0(\phi)(\tau) = \phi(\tau, 0)$.

Die Abbildung $\mathcal{D}_{2\nu} : J_{k,m} \to M_{k+2\nu}$ ist gegeben durch

$$\mathcal{D}_{2\nu}(\phi)(\tau) = (2\pi i)^{-2\nu} \frac{(k + 2\nu - 2)!\,(2\nu)!}{(k + \nu - 2)!}\, \xi_{2\nu}(\tau)$$

mit $\phi(\tau, z) = \sum_{n,r} c(n, r)e(n\tau)e(rz)$ und

$$\xi_\nu(\tau) = (2\pi i)^\nu \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{\substack{r\in\mathbb{Z} \\ r^2\leq 4mn}} \left(\sum_{0\leq\mu\leq\frac{\nu}{2}} \frac{(k + \nu - \mu - 2)!}{(k + \nu - 2)!} \frac{(-mn)^\mu r^{\nu-2\mu}}{\mu!(\nu - 2\mu)!} \right) c(n, r) \right) e(n\tau)$$

(vgl. [EZ85, (8) und (9), S.32]).

Umgekehrt wird in [Sat89] eine Abbildung $\{\,\}^\nu_{k,m} : S_{k+2\nu} \to J^{cusp}_{k,m}$ ($k \geq 2$, $m \geq 1$, $\nu \geq 0$) konstruiert, die eine Spitzenform von Gewicht $k+2\nu$ auf eine Jacobi-Spitzenform von Gewicht $k + 2\nu$ und Index m abbildet.
Für ganze Zahlen $k \geq 4$, $j \geq 0$ und eine Spitzenform $f \in S_{k+2j}$ mit Fourierkoeffizienten $a_f(n)$ ist die Funktion $\{\,\}^\nu_{k,m}$ gegeben durch

$$\{f\}^\nu_{k,m}(\tau, z) = \sum_{\substack{n,r\in\mathbb{Z} \\ r^2<4mn}} (4mn - r^2)^{k-\frac{3}{2}} \tilde{L}_{k,\nu}(k + \nu - 1, f; m, r, n)\, e(n\tau)e(rz) \tag{4.1}$$

mit

$$\tilde{L}_{k,\nu}(s, f; m, r, n) := \sum_{l\in\mathbb{Z}} \frac{a_f(ml^2 + rl + n)}{(ml^2 + rl + n)^s} C^{k-1}_{2\nu} \left(\frac{2ml + r}{2\sqrt{m(ml^2 + rl + n)}} \right)$$

und dem Gegenbauer Polynom

$$C^\lambda_{2\nu}(X) = \sum_{j=0}^{\nu} \frac{(-1)^j \lambda^{(2\nu-j)}}{j!(2\nu - 2j)!} (2X)^{2\nu-2j} \qquad (\forall \nu \in \mathbb{Z},\ \nu \geq 0),$$

wobei wir die Schreibweise

$$\lambda^{(j)} = \begin{cases} \lambda(\lambda+1)\cdots(\lambda+j-1), & \text{falls } j>0 \\ 1, & \text{falls j=0} \end{cases}$$

für eine ganze Zahl $j \geq 0$ verwendet haben.

In [Koh91, Theorem, S.657] wird gezeigt, dass unter Zuhilfenahme der Existenz adjungierter linearer Abbildungen und speziellen Eigenschaften von Poincaré-Reihen bestimmte lineare Abbildungen zwischen Räumen von Modulformen konstruiert werden können. Diese haben die Eigenschaft, dass die Fourierkoeffizienten des Bildes einer Form spezielle Werte von Dirichlet-Reihen assoziiert zu der Form beinhalten. Dieses Resultat wurde im Laufe der Zeit verallgemeinert und z.B. auf Jacobiformen, Siegelsche Modulformen, Hilbert-Modulformen und Modulformen halbganzen Gewichts übertragen. Wir werden später das Resultat für Jacobiformen aus [Sak98] wiedergeben.

Ist $\mathcal{D}_{2\nu}^* : S_{k+2\nu} \to J_{k,m}^{cusp}$ die zur Einschränkung $\mathcal{D}_{2\nu|J_{k,m}^{cusp}}$ bezüglich des Petersson-Skalarprodukts adjungierte Abbildung, so gilt für eine Spitzenform $f \in S_{k+2\nu}$

$$\langle \mathcal{D}_{2\nu}^*(f),\, P_{k,m,(n,r)} \rangle = (f, \mathcal{D}_{2\nu}(P_{k,m,(n,r)})),$$

wobei $\langle , \rangle$ bzw. $(,)$ das Petersson-Skalarprodukt auf $J_{k,m}^{cusp}$ bzw. S_k und $P_{k,m,(n,r)}$ die Poincaré-Reihe für Jacobiformen bezeichnet.
In [Tok94] wird gezeigt, dass die Abbildung $\mathcal{D}_{2\nu}$, bis auf eine Konstante, die Adjungierte von $\{\,\}_{k,m}^{\nu}$ bezüglich des Petersson-Skalarprodukts darstellt. Wir werden im Folgenden mit Hilfe der Poincaré-Reihen den Fall $\nu = 0$ zeigen.

4.2 Klassische Modulformen

Zunächst wiederholen wir einige, für dieses Kapitel wichtige, Fakten aus der Theorie der Modulformen.

Eine Spitzenform $f \in S_k$ ist durch ihre Fourierentwicklung

$$f(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_f(n)\, e(n\tau) \qquad (\forall \tau \in \mathbb{H}) \tag{4.2}$$

mit komplexen Koeffizienten $a_f(n) = \mathcal{O}(n^{\frac{k}{2}})$ bestimmt. Die dazugehörige L-Funktion ist für $s \in \mathbb{C}$ mit $\Re(s) > 0$ durch

$$L(f,s) := \sum_{n=1}^{\infty} a_f(n)\, n^{-s}$$

gegeben und die vervollständigte L-Funktion ist definiert als

$$L^*(f,s) := (2\pi)^{-s}\Gamma(s)\, L(f,s).$$

Die Fourierreihe (4.2) ist, nach Heckes Umkehrsatz, genau dann eine Spitzenform $f \in S_k$, wenn $L^*(f,s)$ eine analytische Fortsetzung auf die gesamte komplexe Ebene besitzt, diese Fortsetzung auf jedem vertikalen Streifen beschränkt ist und die Funktionalgleichung $L^*(f,s) = i^k\, L^*(f, k-s)$ erfüllt wird.

Eine Möglichkeit die vervollständigte L-Funktion $L^*(f,s)$ aus der Fourierreihe f zu erhalten, ist mittels der Mellin-Transformierten

$$\int_0^{\infty} f(iy)\, y^{s-1} dy = L^*(f,s).$$

Alternativ kann eine Kernfunktion wie in [Koh97, Lemma 1, S.184] verwendet werden.

Das Petersson-Skalarprodukt zweier Spitzenformen $f, g \in S_k$ ist definiert als

$$(f,g) = \int_{\mathcal{F}} f(\tau)\overline{g(\tau)} v^k d\omega,$$

wobei $\mathcal{F}$ ein Fundamentalbereich für $SL_2(\mathbb{Z})$ und $d\omega(\tau) = v^{-2}\, du\, dv$ (mit $\tau = u + iv \in \mathbb{H}$) ein $SL_2(\mathbb{R})$-invariantes Maß ist.

Für eine Funktion $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ und $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{R})$ wird der Petersson-Strichoperator $|_k$ durch

$$(f|_k M)(\tau) = (c\tau + d)^{-k} f\left(\frac{a\tau + d}{c\tau + d}\right)$$

definiert. Sei $\Gamma_\infty = \left\{ \pm \left(\begin{smallmatrix} 1 & \nu \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \,\middle|\, \nu \in \mathbb{Z} \right\}$ der Stabilisator von Unendlich in $SL_2(\mathbb{Z})$. Die Funktion

$$P_{k,n}(\tau) = \sum_{M \in \Gamma_\infty \backslash SL_2(\mathbb{Z})} e(n\tau)\big|_k[M] = \frac{1}{2} \sum_{\substack{(c,d) \in \mathbb{Z}^2 \\ \mathrm{ggT}(c,d)=1 \\ ad-bc=1}} (c\tau + d)^{-k} e\left(n\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) \quad (4.3)$$

heißt Poincaré-Reihe. In der zweiten Reihe werden für jedes teilerfremde Paar $(c,d) \in \mathbb{Z}^2$ ganze Zahlen a, b mit $ad - bc = 1$ gewählt. Der Faktor $\frac{1}{2}$ tritt auf, da $\pm\mathrm{Id}$ in der Menge Γ_∞ enthalten ist (setze $\nu = 0$).
Die Reihe $P_{k,n}$ ist gleichmäßig absolut konvergent auf Kompakta. Sie ist eine Spitzenform vom Gewicht k und für das Skalarprodukt einer Funktion $f \in S_k$ mit $P_{k,n}$ gilt

$$(f, P_{k,n}) = \frac{(k-2)!}{(4\pi n)^{k-1}} \cdot a_f(n). \tag{4.4}$$

Als nächstes betrachten wir die Funktion $R_{k,s}$ aus [Koh97]. Diese ist definiert durch

$$R_{k,s}(\tau) := \gamma_k(s) \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{Z})} (c\tau + d)^{-k} \left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right)^{-s}$$

mit

$$\gamma_k(s) = \frac{1}{2}\, e\left(\frac{s}{4}\right) \Gamma(s)\, \Gamma(k-s).$$

Für $1 < \Re(s) < k-1$ ist $R_{k,s}(\tau) \in S_k$. Es gilt (vgl. [Koh97, S.184])

$$R_{k,s}(\tau) = (2\pi)^s\, \Gamma(k-s) \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1}\, P_{k,n}(\tau). \tag{4.5}$$

Aus dieser Darstellung der Funktion $R_{k,s}$ und (4.4) folgt (vgl. [Koh97, Lemma 1, S.184])

$$(f, R_{k,s}) = \frac{(-1)^{\frac{k}{2}} \pi\, (k-2)!}{2^{k-2}} \cdot L^*(f, s) \qquad (\forall f \in S_k).$$

Wir werden im nächsten Abschnitt Poincaré-Reihen für Jacobiformen kennenlernen und in Lemma 9 eine zu (4.5) analoge Darstellung der Funktion $\Omega^{k,m}_{\mu_0,s}$ mit Hilfe von Poincaré-Reihen für Jacobiformen finden. Anschließend berechnen wir das Skalarprodukt $\langle \Omega^{k,m}_{\mu_0,s}, \phi \rangle$ aus Lemma 4.

4.3 Poincaré-Reihen für Jacobiformen

Nachdem wir die Poincaré-Reihen aus der Theorie der Modulformen eingeführt haben, ist es naheliegend sich mit Poincaré-Reihen für Jacobiformen zu befassen und Zusammenhänge zwischen den Funktionen herzustellen.

Wir wissen bereits, dass Jacobiformen von Gewicht k und Index m eine Fourierentwicklung der Form

$$\phi(\tau, z) = \sum_{\substack{n,r\in\mathbb{Z}\\ r^2\leq 4mn}} c(n,r)\, e(n\tau)e(rz) \qquad (\forall \tau \in \mathbb{H},\, z \in \mathbb{C})$$

besitzen. Die Koeffizienten $c(n,r)$ hängen nur von $r^2 - 4mn$ und der Restklasse von $r \pmod{2m}$ ab. Die Fourierentwicklung ist $(-1)^k$-symmetrisch unter $r \mapsto -r$ und es gibt ein nicht-degeneriertes Skalarprodukt auf $J^{cusp}_{k,m}$ für alle Jacobi-Spitzenformen von Gewicht k und Index m. Daher gibt es für ganze Zahlen n, r mit $r^2 < 4mn$ eine eindeutig bestimmte Funktion $P_{k,m,(n,r)} \in J^{cusp}_{k,m}$, die nur von $r^2 - 4mn$ und $r \pmod{2m}$ abhängt und

$$\langle \phi, P_{k,m,(n,r)} \rangle = \frac{m^{k-2}\Gamma(k-\frac{3}{2})}{2\pi^{k-\frac{3}{2}}} \cdot (4mn - r^2)^{-k+\frac{3}{2}} \cdot c(n,r) \tag{4.6}$$

erfüllt (vgl. [ZKG87, §2 Poincaré Series for Jacobi Forms, S.519]).

Lemma 6. *Sei* $\Gamma^J_\infty = \{((\begin{smallmatrix} 1 & \nu \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}), (0\ \mu)) \,|\, \nu, \mu \in \mathbb{Z}\}$ *der Stabilisator von Unendlich in* $\Gamma^J = SL_2(\mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{Z}^2$ *und seien* n, r *ganze Zahlen mit* $r^2 < 4mn$*. Dann ist die Funktion* $P_{k,m,(n,r)}$ *aus* (4.6) *gegeben durch*

$$P_{k,m,(n,r)}(\tau, z) := \sum_{h\in\Gamma^J_\infty\backslash\Gamma^J} e(n\tau)e(rz)\Big|_{k,m}[h].$$

Beweis. Den Beweis entnehmen wir [ZKG87, S.520]. Sei $k > 2$. Die Summe aus dem Lemma konvergiert absolut gleichmäßig auf kompakten Mengen und stellt eine Funktion aus $J^{cusp}_{k,m}$ dar. Mit dem gewöhnlichen Entfaltungs-Argument folgt für das Petersson-Skalarprodukt mit einer Jacobiform $\phi \in J^{cusp}_{k,m}$

$$\langle \phi, P_{k,m,(n,r)} \rangle = \int_{\Gamma^J_\infty\backslash\mathbb{H}\times\mathbb{C}} \phi(\tau, z)\, \overline{e(n\tau)\, e(rz)}\, e\left(\frac{2miy^2}{v}\right)\, v^{k-3}\, dx\, dy\, du\, dv$$

mit $z = x + iy$, $\tau = u + iv$. Ein Fundamentalbereich der Aktion von Γ^J_∞ auf $\mathbb{H} \times \mathbb{C}$ ist $([0, \infty) \times [0, 1]) \times (\mathbb{R} \times [0, 1])$.

Mit der Fourierentwicklung von ϕ erhalten wir daher für das Integral

$$\sum_{\substack{n',r' \\ 4mn'>r'^2}} c(n',r') \int_0^\infty \int_0^1 \int_{-\infty}^\infty \int_0^1 e((n'-n)u + (r'-r)x)$$
$$\cdot\, e((n'+n)iv + (r'+r)iy)\, e\left(\frac{2miy^2}{v}\right) v^{k-3}\, dx\, dy\, du\, dv.$$

Da $\int_0^1 e((n'-n)u)du = 1$ für $n' = n$ ist und 0 sonst, erhalten wir

$$c(n,r) \int_0^\infty e(2niv)\, v^{k-3} \int_{-\infty}^\infty e\left(\frac{2mi}{v} y^2 + 2riy\right) dy\, dv.$$

Das innere Integral ist bekanntermaßen (vgl. [GR14, 3.323, 2])

$$\int_{-\infty}^\infty \exp\left(-\frac{4\pi m}{v} y^2 - 4\pi r y\right) dy = \exp\left(\frac{16\pi^2 r^2}{4 \cdot \frac{4\pi m}{v}}\right) \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\frac{4\pi m}{v}}} = \exp\left(\frac{\pi r^2 v}{m}\right) \sqrt{\frac{v}{4m}}.$$

Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned} \langle \phi, P_{k,m,(n,r)} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{4m}} c(n,r) \int_0^\infty v^{k-\frac{5}{2}} \exp\left(\left(\frac{\pi r^2}{m} - 4\pi n\right) v\right) dv \\ &= \frac{1}{\sqrt{4m}} c(n,r) \int_0^\infty \left(\frac{mv}{(4mn - r^2)\pi}\right)^{k-\frac{5}{2}} \frac{m}{(4mn-r^2)\pi} \exp(-v)\, dv \\ &= \frac{m^{k-2}\Gamma(k-\frac{3}{2})}{2\,\pi^{k-\frac{3}{2}}} \cdot (4mn - r^2)^{-k+\frac{3}{2}} \cdot c(n,r). \end{aligned}$$

■

Bemerkung 13. *In [ZKG87, Proposition, S.519] wird außerdem die folgende Darstellung der Poincaré-Reihen gezeigt*

$$P_{k,m,(n,r)}(\tau, z) = \sum_{\substack{n',r' \in \mathbb{Z} \\ r'^2 < 4mn'}} g^{\pm}_{k,m,(n,r)}(n',r')\, e(n'\tau)\, e(r'z)$$

mit $\pm 1 = (-1)^k$, der bzgl. r' symmetrischen bzw. antisymmetrischen Funktion $g^{\pm}_{k,m,(n,r)}(n',r') = g_{k,m,(n,r)}(n',r') \pm g_{k,m,(n,r)}(n',-r')$ und den Koeffizienten

$$\begin{aligned} g_{k,m,(n,r)}(n',r') = \delta_m(n,r,n',r') + i^k \pi \sqrt{\frac{2}{m}} \left(\frac{D'}{D}\right)^{\frac{k}{2}-\frac{3}{4}} \\ \times \sum_{c \geq 1} H_{m,c}(n,r,n',r')\, J_{k-\frac{3}{2}}\left(\frac{\pi}{mc}\sqrt{D'D}\right), \end{aligned}$$

wobei $D' = r'^2 - 4mn'$, $D = r^2 - 4mn$,

$$\delta_m(n,r,n',r') = \begin{cases} 1, & \textit{falls } D' = D,\ r' \equiv r \pmod{2m} \\ 0, & \textit{sonst} \end{cases}$$

und

$$H_{m,c}(n,r,n',r') = c^{-\frac{3}{2}} \sum_{\substack{\rho(c)^* \\ \lambda(c)}} e_c((m\lambda^2 + r\lambda + n)\rho^{-1} + n'\rho + r'\lambda)\, e_{2mc}(rr')$$

eine Kloosterman-Summe und $J_{k-\frac{3}{2}}$ *eine Besselfunktion ist.*

Wir werden im Folgenden die Darstellung der Poincaré-Reihen aus dem nächsten Lemma verwenden.

Lemma 7. *Seien* n, r *ganze Zahlen mit* $r^2 < 4mn$. *Es gilt*

$$P_{k,m,(n,r)}(\tau,z) = \sum_{\substack{\lambda,c,d\in\mathbb{Z} \\ (c,d)=1}} (c\tau+d)^{-k} e^m\left(-\frac{c(z+\lambda(a\tau+b))^2}{c\tau+d} + \lambda^2 a^2\tau + 2\lambda a z\right) \cdot e\left(n\frac{a\tau+b}{c\tau+d} + r\frac{z+\lambda(a\tau+b)}{c\tau+d}\right), \quad (4.7)$$

wobei man für jedes teilerfremde Paar (c,d) *ganze Zahlen* a, b *wählt mit* $ad - bc = 1$.

Beweis. Mit der Definition der Poincaré-Reihen für Jacobiformen und dem Petersson-Strichoperator (1.2) bekommen wir

$$\begin{aligned} P_{k,m,(n,r)}(\tau,z) &= \sum_{h\in\Gamma^J_\infty\backslash\Gamma^J} (e(n\tau)e(rz))|_{k,m}[h] \\ &= \sum_{\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right),(\lambda\ \mu)\right)\in\Gamma^J_\infty\backslash\Gamma^J} (c\tau+d)^{-k} e^m\left(-\frac{c(z+\lambda\tau+\mu)^2}{c\tau+d} + \lambda^2\tau + 2\lambda z\right) \\ &\qquad \cdot e\left(n\frac{a\tau+b}{c\tau+d} + r\frac{z+\lambda\tau+\mu}{c\tau+d}\right). \end{aligned}$$

Ein Repräsentantensystem von $\Gamma^J_\infty\backslash\Gamma^J$ ist durch $\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right), (\lambda a\ \lambda b)\right)$ gegeben, mit $\lambda, c, d \in \mathbb{Z}$, $(c,d) = 1$ und a, b, so dass $ad - bc = 1$ für jedes teilerfremde Paar (c,d) gilt. Somit erhalten wir wie gewünscht

$$P_{k,m,(n,r)}(\tau,z) = \sum_{\substack{\lambda,c,d\in\mathbb{Z} \\ (c,d)=1}} (c\tau+d)^{-k} e^m\left(-\frac{c(z+\lambda(a\tau+b))^2}{c\tau+d} + \lambda^2 a^2\tau + 2\lambda a z\right) \cdot e\left(n\frac{a\tau+b}{c\tau+d} + r\frac{z+\lambda(a\tau+b)}{c\tau+d}\right).$$

∎

Das folgende Lemma stellt einen Zusammenhang zwischen den auf $z = 0$ eingeschränkten Poincaré-Reihen für Jacobiformen und den Poincaré-Reihen für Modulformen her. Dieser Zusammenhang wird im Beweis von Lemma 10 eine wichtige Rolle spielen.

Lemma 8. *Seien n, r ganze Zahlen mit $r^2 < 4mn$. Ferner sei $P_{k,m,(n,r)} \in J_{k,m}^{cusp}$ die Jacobi-Poincaré-Reihe aus* (4.7) *und $P_{k,n} \in S_k$ die gewöhnliche Poincaré-Reihe für Modulformen aus* (4.3)*. Dann gilt für $\tau \in \mathbb{H}$*

$$P_{k,m,(n,r)}(\tau, 0) = 2 \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}} P_{k,\, \lambda^2 m + n + \lambda r}(\tau). \tag{4.8}$$

Beweis. Nach (4.7) gilt

$$\begin{aligned} P_{k,m,(n,r)}(\tau, 0) = \sum_{\substack{\lambda, c, d \in \mathbb{Z} \\ (c,d)=1}} & (c\tau + d)^{-k} \\ & \cdot e\left(-\frac{\lambda^2 mc(a\tau + b)^2}{c\tau + d} + \lambda^2 a^2 m\tau + n\frac{a\tau + b}{c\tau + d} + \lambda r\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right). \end{aligned}$$

Indem wir benutzen, dass $ad - bc = 1$ gilt, erhalten wir

$$\begin{aligned} -\frac{\lambda^2 mc(a\tau + b)^2}{c\tau + d} + \lambda^2 a^2 m\tau &= \lambda^2 m\, \frac{-c(a^2\tau^2 + 2ab\tau + b^2) + a^2 c\tau^2 + a^2 d\tau}{c\tau + d} \\ &= \lambda^2 m\, \frac{a^2 d\tau - b^2 c - 2abc\tau}{c\tau + d} \\ &= \lambda^2 m\, \frac{a\tau + b}{c\tau + d} - \lambda^2 abm. \end{aligned}$$

Folglich gilt mit der Poincaré-Reihe aus (4.3)

$$\begin{aligned} P_{k,m,(n,r)}(\tau, 0) &= \sum_{\substack{\lambda, c, d \in \mathbb{Z} \\ (c,d)=1}} (c\tau + d)^{-k} e\left(\lambda^2 m\, \frac{a\tau + b}{c\tau + d} + n\frac{a\tau + b}{c\tau + d} + \lambda r\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) \\ &= \sum_{\substack{\lambda, c, d \in \mathbb{Z} \\ (c,d)=1}} (c\tau + d)^{-k} e\left((\lambda^2 m + n + \lambda r)\, \frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) \\ &= 2 \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}} P_{k,\, \lambda^2 m + n + \lambda r}(\tau). \end{aligned}$$

■

Bemerkung 14. *In [Tok94, Lemma 2.3, S.29] wird eine allgemeine Formel für die Abbildung $\mathcal{D}_{2\nu}(P_{k,m,(n,r)})(\tau)$ gezeigt. Hier fehlt der Faktor 2 in der Formel (es wurde eine andere Definition von Γ_∞^J verwendet als in [EZ85], die zitierte Reihendarstellung von $P_{k,m,(n,r)}$ jedoch nicht angepasst).*

In [Mar14, Proposition 1.2, S.69] wird die folgende zu (4.5) analoge Darstellung der Kernfunktion $\Omega_{\mu_0,s}^{k,m}$ angegeben.

Lemma 9. *Sei $\mu_0 \in \mathbb{Z}$ und $k > 6$. Falls $s \in \mathbb{C}$ mit $1 < \Re(s) < k-3$, so gilt*

$$\Omega_{\mu_0,s}^{k,m}(\tau, z) = \frac{(2\pi)^{s-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2m}\, e(\frac{s}{4})\, \Gamma(s-\frac{1}{2})} \sum_{\mu=0}^{2m-1} e\left(-\frac{\mu\mu_0}{2m}\right)$$
$$\times \sum_{\substack{D\geq 1 \\ 4m|(D+\mu^2)}} \left(\frac{D}{4m}\right)^{s-\frac{3}{2}} P_{k,m,\left(\frac{D+\mu^2}{4m},\, \mu\right)}(\tau, z). \quad (4.9)$$

Beweis. Den Beweis entnehmen wir [Mar14, S.82]. Sei $\mu_0 \in \mathbb{Z}$ und Γ_∞ der Stabilisator von Unendlich in $SL_2(\mathbb{Z})$, also $\Gamma_\infty := \{\pm \left(\begin{smallmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mid l \in \mathbb{Z}\}$. Mit der Darstellung der Funktion $\Omega_{\mu_0,s}^{k,m}$ aus [Mar14, S.79] gilt

$$\sqrt{2mi}\, \Omega_{\mu_0,s}^{k,m}(\tau, z) = \sum_{M\in SL_2(\mathbb{Z})} \left(\frac{1}{\tau^{s-\frac{1}{2}}} \sum_{\mu=0}^{2m-1} e\left(-\frac{\mu\mu_0}{2m}\right) \Theta_{m,\mu}(\tau, z)\right)\Bigg|_{k,m} [M, 0, 0]$$
$$= \sum_{M\in\Gamma_\infty\backslash SL_2(\mathbb{Z})} \left(\sum_{M'\in\Gamma_\infty} \left(\frac{1}{\tau^{s-\frac{1}{2}}} \sum_{\mu=0}^{2m-1} e\left(-\frac{\mu\mu_0}{2m}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left. \cdot\, \Theta_{m,\mu}(\tau, z)\right)\Bigg|_{k,m} [M', 0, 0]\right)\Bigg|_{k,m} [M, 0, 0].$$

Wir betrachten zuerst die innere Summe

$$\sum_{M'\in\Gamma_\infty} \left(\frac{1}{\tau^{s-\frac{1}{2}}} \sum_{\mu=0}^{2m-1} e\left(-\frac{\mu\mu_0}{2m}\right) \Theta_{m,\mu}(\tau, z)\right)\Bigg|_{k,m} [M', 0, 0]$$
$$= \sum_{l\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(\tau+l)^{s-\frac{1}{2}}} \sum_{\mu=0}^{2m-1} e\left(-\frac{\mu\mu_0}{2m}\right) \Theta_{m,\mu}(\tau+l, z)$$
$$+ \sum_{l\in\mathbb{Z}} (-1)^k \frac{1}{(\tau+l)^{s-\frac{1}{2}}} \sum_{\mu=0}^{2m-1} e\left(-\frac{\mu\mu_0}{2m}\right) \Theta_{m,\mu}(\tau+l, -z).$$

Da $\Theta_{m,\mu}(\tau, -z) = \Theta_{m,-\mu}(\tau, z)$ gilt, können wir dafür

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(\tau+l)^{s-\frac{1}{2}}} \sum_{\mu=0}^{2m-1} \left(e\left(-\frac{\mu\mu_0}{2m}\right) + (-1)^k\, e\left(\frac{\mu\mu_0}{2m}\right)\right) \Theta_{m,\mu}(\tau+l, z)$$

schreiben. Dies lässt sich weiter umformen zu

$$\begin{aligned}\sum_{\mu=0}^{2m-1} \left(e\left(-\frac{\mu\mu_0}{2m}\right) + (-1)^k\, e\left(\frac{\mu\mu_0}{2m}\right)\right) \Theta_{m,\mu}(\tau,z) \sum_{l_0=1}^{4m}\sum_{l\in\mathbb{Z}} \frac{e\left(\frac{\mu^2 l_0}{4m}\right)}{(\tau+l_0+4ml)^{s-\frac{1}{2}}} \\ = \sum_{l_0=1}^{4m}\sum_{\mu=0}^{2m-1} \left(e\left(\frac{\mu^2 l_0 - 2\mu\mu_0}{4m}\right) + (-1)^k\, e\left(\frac{\mu^2 l_0 + 2\mu\mu_0}{4m}\right)\right) \\ \cdot\, \Theta_{m,\mu}(\tau,z)\, \zeta_{4m\mathbb{Z}}\left(\tau+l_0, s-\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

mit $\zeta_{4m\mathbb{Z}}(\tau,s) := \sum_{l\in\mathbb{Z}}(\tau+4ml)^{-s}$.

Mit Hilfe der Fourier-Darstellung (vgl. [Mar14, S.81]) erhalten wir, dass die Funktion $\zeta_{4m\mathbb{Z}}(\tau,s)$ analytisch auf die gesamte komplexe s-Ebene fortsetzbar ist und

$$\zeta_{4m\mathbb{Z}}\left(\tau+l_0, s-\frac{1}{2}\right) = \frac{(2\pi)^{s-\frac{1}{2}} e^{\frac{\pi i}{4}}}{4m\, e(\frac{s}{4})\, \Gamma(s-\frac{1}{2})} \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{l}{4m}\right)^{s-\frac{3}{2}} e\left(\frac{l(\tau+l_0)}{4m}\right)$$

erfüllt. Wir bekommen somit

$$\begin{aligned}\sum_{M'\in\Gamma_\infty} \left(\frac{1}{\tau^{s-\frac{1}{2}}} \sum_{\mu=0}^{2m-1} e\left(-\frac{\mu\mu_0}{2m}\right) \Theta_{m,\mu}(\tau,z)\right)\Bigg|_{k,m} [M',\,0,\,0] \\ = \sum_{l_0=1}^{4m}\sum_{\mu=0}^{2m-1} \left(e\left(\frac{\mu^2 l_0 - 2\mu\mu_0}{4m}\right) + (-1)^k\, e\left(\frac{\mu^2 l_0 + 2\mu\mu_0}{4m}\right)\right) \Theta_{m,\mu}(\tau,z) \\ \cdot\, \frac{(2\pi)^{s-\frac{1}{2}} e^{\frac{\pi i}{4}}}{4m\, e(\frac{s}{4})\, \Gamma(s-\frac{1}{2})} \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{l}{4m}\right)^{s-\frac{3}{2}} e\left(\frac{l(\tau+l_0)}{4m}\right).\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned}&\sqrt{2mi}\, \Theta^{k,m}_{\mu_0,s}(\tau,z) \\ &= \frac{(2\pi)^{s-\frac{1}{2}} e^{\frac{\pi i}{4}}}{4m\, e(\frac{s}{4})\, \Gamma(s-\frac{1}{2})} \sum_{l_0=1}^{4m}\sum_{\mu=0}^{2m-1} \left(e\left(\frac{\mu^2 l_0 - 2\mu\mu_0}{4m}\right) + (-1)^k\, e\left(\frac{\mu^2 l_0 + 2\mu\mu_0}{4m}\right)\right) \\ &\quad\times \sum_{D=1}^{\infty} \left(\frac{D}{4m}\right)^{s-\frac{3}{2}} e\left(\frac{D l_0}{4m}\right) \sum_{M\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma} \left(\Theta_{m,\mu}(\tau,z)\, e\left(\frac{D}{4m}\tau\right)\right)\Bigg|_{k,m} [M,0,0].\end{aligned}$$

Es gilt für jedes $D \geq 1$, $1 \leq l_0 \leq 4m$ und $0 \leq \mu \leq 2m-1$

$$\sum_{M \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} \left(\Theta_{m,\mu}(\tau, z)\, e\left(\frac{D}{4m}\tau\right)\right)\Big|_{k,m}[M,0,0]$$
$$= \sum_{\substack{M \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma \\ r \in \mathbb{Z},\, r \equiv \mu\,(2m)}} \left(e\left(\frac{r^2+D}{4m}\tau + rz\right)\right)\Big|_{k,m}[M,0,0]$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{\substack{c,\,d,\,r \in \mathbb{Z} \\ (c,d)=1 \\ r \equiv \mu\,(2m)}} (c\tau+d)^{-k} e^m\left(-\frac{cz^2}{c\tau+d}\right) e\left(\frac{r^2+D}{4m} \cdot \frac{a\tau+b}{c\tau+d} + r\frac{z}{c\tau+d}\right),$$

wobei a, $b \in \mathbb{Z}$ so gewählt werden, dass $ad - bc = 1$ gilt. Mit dem Variablentausch $r \mapsto \mu + 2mr$ können wir dies weiter umformen zu

$$\frac{1}{2} \sum_{\substack{c,\,d,\,r \in \mathbb{Z} \\ (c,d)=1}} (c\tau+d)^{-k} e^m\left(-\frac{cz^2}{c\tau+d} + r^2\frac{a\tau+b}{c\tau+d} + 2r\frac{z}{c\tau+d}\right)$$
$$\cdot\, e\left(\frac{\mu^2+D}{4m} \cdot \frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) e^{\mu}\left(\frac{z}{c\tau+d} + r\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right).$$

Mit der Poincaré-Reihe für Jacobiformen erhalten wir insgesamt

$$\sqrt{2mi}\,\Theta^{k,m}_{\mu_0,s}(\tau,z) = \frac{(2\pi)^{s-\frac{1}{2}} e^{\frac{\pi i}{4}}}{8m\, e(\frac{s}{4})\,\Gamma(s-\frac{1}{2})} \sum_{D=1}^{\infty} \left(\frac{D}{4m}\right)^{s-\frac{3}{2}} \sum_{l_0=1}^{4m} \sum_{\mu=0}^{2m-1} e\left(\frac{D+\mu^2}{4m} l_0\right)$$
$$\cdot \left(e\left(-\frac{\mu\mu_0}{2m}\right) + (-1)^k\, e\left(\frac{\mu\mu_0}{2m}\right)\right) P_{k,m,(\frac{D+\mu^2}{4m},\,\mu)}(\tau,z).$$

Da alle obigen Poincaré-Reihen Jacobiformen aus $J^{cusp}_{k,m}$ sind, erfüllen sie

$$(-1)^k\, P_{k,m,(n,\mu)}(\tau,z) = P_{k,m,(n,\mu)}(\tau,-z).$$

Mit der Reihendarstellung der Poincaré-Reihen für Jacobiformen erhalten wir

$$P_{k,m,(n,\mu)}(\tau,-z) = P_{k,m,(n,-\mu)}(\tau,z).$$

Zusammen mit

$$\sum_{l_0=1}^{4m} e\left(\frac{D+\mu^2}{4m} l_0\right) = \begin{cases} 4m, & \text{falls } \frac{D+\mu^2}{4m} \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

bekommen wir

$$\sqrt{2m}\,\Theta^{k,m}_{\mu_0,s}(\tau,z) = \frac{(2\pi)^{s-\frac{1}{2}}}{2\,e(\frac{s}{4})\,\Gamma(s-\frac{1}{2})} \sum_{\mu=0}^{2m-1} \left(e\left(-\frac{\mu\mu_0}{2m}\right) + (-1)^k\, e\left(\frac{\mu\mu_0}{2m}\right)\right)$$

$$\times \sum_{\substack{D\geq 1\\ 4m|(D+\mu^2)}} \left(\frac{D}{4m}\right)^{s-\frac{3}{2}} P_{k,m,(\frac{D+\mu^2}{4m},\mu)}(\tau,z)$$

$$= \frac{(2\pi)^{s-\frac{1}{2}}}{e(\frac{s}{4})\,\Gamma(s-\frac{1}{2})} \sum_{\mu=0}^{2m-1} e\left(-\frac{\mu\mu_0}{2m}\right) \sum_{\substack{D\geq 1\\ 4m|(D+\mu^2)}} \left(\frac{D}{4m}\right)^{s-\frac{3}{2}} P_{k,m,(\frac{D+\mu^2}{4m},\mu)}(\tau,z).$$

■

Lemma 9 ermöglicht uns einen ersten alternativen Beweis von Lemma 4.

Beweis von Lemma 4. Wir möchten zeigen, dass

$$\langle \Omega^{k,m}_{\mu_0,s}, \phi\rangle = \frac{\pi\Gamma(k-\frac{3}{2})}{2^{k-1}m\exp(\frac{\pi i s}{2})\Gamma(s-\frac{1}{2})\Gamma(k-s)} \sum_{\mu=0}^{2m-1} e\left(-\frac{\mu\mu_0}{2m}\right) \Lambda^*_\mu(\phi^c, k-s),$$

für alle $\phi \in J^{cusp}_{k,m}$ und $s \in \mathbb{C}$ mit $\frac{3}{2} < \Re(s) < k-3$ gilt. Mit (4.9) und (4.6) folgt

$$\langle \Omega^{k,m}_{\mu_0,s}, \phi\rangle = \frac{(2\pi)^{s-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2m}\,e(\frac{s}{4})\,\Gamma(s-\frac{1}{2})} \sum_{\mu=0}^{2m-1} e\left(-\frac{\mu\mu_0}{2m}\right)$$

$$\times \sum_{\substack{D\geq 1\\ 4m|(D+\mu^2)}} \left(\frac{D}{4m}\right)^{s-\frac{3}{2}} \langle P_{k,m,(\frac{D+\mu^2}{4m},\mu)}(\tau,z), \phi\rangle$$

$$= \frac{\pi^{s-k+1}\Gamma(k-\frac{3}{2})}{2^{2-s}m^{\frac{5}{2}-k}\,e(\frac{s}{4})\,\Gamma(s-\frac{1}{2})} \sum_{\mu=0}^{2m-1} e\left(-\frac{\mu\mu_0}{2m}\right)$$

$$\times \sum_{\substack{D\geq 1\\ 4m|(D+\mu^2)}} \left(\frac{D}{4m}\right)^{s-\frac{3}{2}} D^{-k+\frac{3}{2}}\, \overline{c\left(\frac{D+\mu^2}{4m},\mu\right)}$$

$$= \frac{\pi\Gamma(k-\frac{3}{2})}{2^{k-1}m\,e(\frac{s}{4})\,\Gamma(s-\frac{1}{2})\Gamma(k-s)} \sum_{\mu=0}^{2m-1} e\left(-\frac{\mu\mu_0}{2m}\right) \frac{\Gamma(k-s)}{(2\pi)^{k-s}} \sum_{D\geq 1} \overline{c_\mu(D)} \left(\frac{D}{4m}\right)^{s-k}.$$

Mit der Definition der L-Funktion Λ^*_μ folgt die Behauptung. ■

4.4 Konstruktion von Jacobi-Spitzenformen

In diesem Abschnitt zeigen wir, dass die Abbildung $\{\ \}_{k,m}^0$ eine Spitzenform f vom Gewicht k auf eine Jacobi-Spitzenform $\{f\}_{k,m}^0$ vom Gewicht k und Index m abbildet. Außerdem werden wir beweisen, dass die Abbildung $\{\ \}_{k,m}^0$, bis auf eine Konstante, die Adjungierte von $\mathcal{D}_0$ bezüglich des Petersson-Skalarprodukts ist. Danach berechnen wir das Skalarprodukt der Einschränkung $\Omega_{\mu_0,s}^{k,m}(\tau,0)$ mit einer Spitzenform. Als Ergebnis erhalten wir einen weiteren Beweis für Lemma 4. Abschließend geben wir das Resultat aus [Sak98] über die Konstruktion von Jacobi-Spitzenformen wieder.

Da $\Omega_{\mu_0,s}^{k,m}(\tau,0) = \mathcal{D}_0(\Omega_{\mu_0,s}^{k,m})(\tau)$ gilt, genügt es die zu Beginn des Kapitels definierten Funktionen $\mathcal{D}_{2\nu}$ (eingeschränkt auf $J_{k,m}^{cusp}$) und $\{\ \}_{k,m}^{\nu}$ für $\nu = 0$ zu betrachten.
Es gilt für eine Jacobi-Spitzenform $\phi \in J_{k,m}^{cusp}$ mit $\phi(\tau,z) = \sum_{n,r} c(n,r)e(n\tau)e(rz)$ und eine Spitzenform $f \in S_k$ mit $f(\tau) = \sum_n a_f(n)e(n\tau)$

$$\mathcal{D}_0(\phi)(\tau) = \sum_{n\geq 0} \sum_{\substack{r\in\mathbb{Z}\\ r^2<4mn}} c(n,r)e(n\tau) \in S_k$$

und

$$\{f\}_{k,m}^0(\tau,z) = \sum_{\substack{n,r\in\mathbb{Z}\\ r^2<4mn}} (4mn-r^2)^{k-\frac{3}{2}} \sum_{l\in\mathbb{Z}} \frac{a_f(ml^2+rl+n)}{(ml^2+rl+n)^{k-1}}\, e(n\tau)e(rz) \in J_{k,m}^{cusp}.$$

Der nächste Satz ist ein Spezialfall von [Sat89, Theorem 1.3, S.465] und [Tok94, Theorem 1.1, S.27] und gibt eine Möglichkeit Jacobi-Spitzenformen mit Hilfe elliptischer Spitzenformen zu konstruieren.

Satz 4. *Seien k und m ganze Zahlen mit $k \geq 3$, $m \geq 1$. Sei weiter $f \in S_k$ eine Spitzenform mit n-tem Fourierkoeffizienten $a_f(n)$ und sei $\phi \in J_{k,m}^{cusp}$ eine Jacobi-Spitzenform. Die Funktion*

$$\{f\}_{k,m}^0(\tau,z) = \sum_{\substack{n,r\in\mathbb{Z}\\ r^2<4mn}} (4mn-r^2)^{k-\frac{3}{2}}\, \tilde{L}_{k,0}(k-1;f;m,r,n)\, e(n\tau)\, e(rz)$$

mit

$$\tilde{L}_{k,0}(s;f;m,r,n) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \frac{a_f(ml^2+rl+n)}{(ml^2+rl+n)^s}$$

ist eine Jacobi-Spitzenform vom Gewicht k und Index m. Außerdem ist die Abbildung

$$\{\,\}^0_{k,m} : J^{cusp}_{k,m} \to S_k, \quad f \mapsto \sum_{\substack{n,r\in\mathbb{Z}\\ r^2<4mn}} (4mn-r^2)^{k-\frac{3}{2}}\, \tilde{L}_{k,0}(k-1;f;m,r,n)\, e(n\tau)\, e(rz),$$

bis auf eine Konstante, die adjungierte Abbildung zu $\mathcal{D}_0$ bezüglich der jeweiligen Skalarprodukte. Genauer gesagt gilt

$$(\mathcal{D}_0(\phi), f) = C_{k,m}\, \langle \phi, \{f\}^0_{k,m}\rangle$$

mit der Konstanten

$$C_{k,m} := \frac{\Gamma(k-1)}{(4m)^{k-2}\sqrt{\pi}\,\Gamma(k-\frac{3}{2})}.$$

Beweis. Für die erste Aussage verweisen wir auf [Sat89, Theorem 3.3, S.473]. Wir zeigen die zweite Aussage des Satzes. Nach dem Rieszschen Darstellungssatz aus der Funktionalanalysis existiert zu dem linearen Operator $\mathcal{D}_0 : J^{cusp}_{k,m} \to S_k$ ein eindeutig bestimmter Operator $\mathcal{D}_0^* : S_k \to J^{cusp}_{k,m}$ mit $\langle \mathcal{D}_0^*(f), \phi\rangle = (f, \mathcal{D}_0(\phi))$ für alle $f \in S_k$, $\phi \in J^{cusp}_{k,m}$. Wir möchten zeigen, dass die Adjungierte $\mathcal{D}_0^*$, bis auf eine Konstante, durch die Abbildung $\{\,\}^0_{k,m}$ gegeben ist. Es genügt dazu die Poincaré-Reihe für Jacobiformen $P_{k,m,(n,r)} \in J^{cusp}_{k,m}$ zu betrachten. Nach (4.6) gilt

$$\langle \mathcal{D}_0^*(f), P_{k,m,(n,r)}\rangle = \frac{m^{k-2}\Gamma(k-\frac{3}{2})}{2\pi^{k-\frac{3}{2}}}(4mn-r^2)^{-k+\frac{3}{2}} c(n,r;\mathcal{D}_0^*(f)),$$

wobei $c(n,r;\mathcal{D}_0^*(f))$ den (n,r)-ten Fourierkoeffizienten der Jacobi-Spitzenform $\mathcal{D}_0^*(f)$ bezeichnet. Mit (4.8) und (4.4) erhalten wir

$$\langle \mathcal{D}_0^*(f), P_{k,m,(n,r)}\rangle = (f, \mathcal{D}_0(P_{k,m,(n,r)})) = \frac{2\Gamma(k-1)}{(4\pi)^{k-1}} \sum_{\lambda\in\mathbb{Z}} \frac{a_f(\lambda^2 m + \lambda r + n)}{(\lambda^2 m + \lambda r + n)^{k-1}}.$$

Folglich gilt

$$\begin{aligned} c(n,r;\mathcal{D}_0^*(f)) &= \frac{\Gamma(k-1)}{(4m)^{k-2}\sqrt{\pi}\,\Gamma(k-\frac{3}{2})}(4mn-r^2)^{k-\frac{3}{2}} \sum_{\lambda\in\mathbb{Z}} \frac{a_f(\lambda^2 m + \lambda r + n)}{(\lambda^2 m + \lambda r + n)^{k-1}} \\ &= C_{k,m}\cdot c(n,r;\{f\}^0_{k,m}) \end{aligned}$$

mit den Fourierkoeffizienten $c(n,r;\{f\}^0_{k,m})$ aus (4.1). Dies zeigt die Behauptung. ■

Mit Hilfe des eben gezeigten Satzes und Lemma 9 können wir nun das Skalarprodukt der Modulform $\Omega^{k,m}_{\mu_0,s}(\tau,0)$ mit einer Spitzenform $f \in S_k$ berechnen.

Lemma 10. *Seien k und m positive ganze Zahlen mit $k > 6$ und $\mu_0 \in \mathbb{Z}$. Sei $f(\tau) = \sum_{n\geq 1} a_f(n)\, e(n\tau)$ eine elliptische Spitzenform von Gewicht k und $\Omega^{k,m}_{\mu_0,s} \in J^{cusp}_{k,m}$ die Jacobi-Spitzenform aus (2.1). Ist $s \in \mathbb{C}$ mit $\frac{3}{2} < \Re(s) < k-3$, so gilt*

$$(\mathcal{D}_0(\Omega^{k,m}_{\mu_0,s}), f) = \frac{\Gamma(k-1)\, m^{-s+1}}{2^{2k+s-5}\pi^{k-s-\frac{1}{2}}\, e(\frac{s}{4})\,\Gamma(s-\frac{1}{2})} \sum_{\mu=0}^{2m-1} e\left(-\frac{\mu\mu_0}{2m}\right)$$
$$\times \sum_{\substack{D\geq 1\\ 4m|(D+\mu^2)}} D^{s-\frac{3}{2}} \sum_{\lambda\in\mathbb{Z}} \overline{\frac{a_f\left(\lambda^2 m + \frac{D+\mu^2}{4m} + \lambda\mu\right)}{(\lambda^2 m + \frac{D+\mu^2}{4m} + \lambda\mu)^{k-1}}}.$$

Beweis. Nach Lemma 9 und mit (4.8) gilt

$$\mathcal{D}_0(\Omega^{k,m}_{\mu_0,s})(\tau) = \frac{(2\pi)^{s-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2m}\, e(\frac{s}{4})\,\Gamma(s-\frac{1}{2})} \sum_{\mu=0}^{2m-1} e\left(-\frac{\mu\mu_0}{2m}\right)$$
$$\times \sum_{\substack{D\geq 1\\ 4m|(D+\mu^2)}} \left(\frac{D}{4m}\right)^{s-\frac{3}{2}} \mathcal{D}_0(P_{k,m,(\frac{D+\mu^2}{4m},\mu)})(\tau)$$

$$= \frac{2^s\pi^{s-\frac{1}{2}}}{\sqrt{m}\, e(\frac{s}{4})\,\Gamma(s-\frac{1}{2})} \sum_{\mu=0}^{2m-1} e\left(-\frac{\mu\mu_0}{2m}\right)$$
$$\times \sum_{\substack{D\geq 1\\ 4m|(D+\mu^2)}} \left(\frac{D}{4m}\right)^{s-\frac{3}{2}} \sum_{\lambda\in\mathbb{Z}} P_{k,\,\lambda^2 m + \frac{D+\mu^2}{4m}+\lambda\mu}(\tau).$$

Sei $f \in S_k$ eine Spitzenform mit der Fourierdarstellung $f(\tau) = \sum_{n>1} a_f(n)\, e(n\tau)$. Dann gilt für das Skalarprodukt

$$(\mathcal{D}_0(\Omega^{k,m}_{\mu_0,s}), f) = \frac{\pi^{s-\frac{1}{2}} m^{-s+1}}{2^{s-3}\, e(\frac{s}{4})\,\Gamma(s-\frac{1}{2})} \sum_{\mu=0}^{2m-1} e\left(-\frac{\mu\mu_0}{2m}\right)$$
$$\times \sum_{\substack{D\geq 1\\ 4m|(D+\mu^2)}} D^{s-\frac{3}{2}} \sum_{\lambda\in\mathbb{Z}} (P_{k,\,\lambda^2 m + \frac{D+\mu^2}{4m}+\lambda\mu}, f).$$

Mit (4.4) erhalten wir

$$(P_{k,\,\lambda^2 m + \frac{D+\mu^2}{4m}+\lambda\mu}, f) = \frac{\Gamma(k-1)}{(4\pi(\lambda^2 m + \frac{D+\mu^2}{4m} + \lambda\mu))^{k-1}} \overline{a_f\left(\lambda^2 m + \frac{D+\mu^2}{4m} + \lambda\mu\right)}.$$

Insgesamt bekommen wir

$$(\mathcal{D}_0(\Omega^{k,m}_{\mu_0,s}), f) = \frac{\Gamma(k-1)\, m^{-s+1}}{2^{2k+s-5}\pi^{k-s-\frac{1}{2}}\, e(\frac{s}{4})\, \Gamma(s-\frac{1}{2})} \sum_{\mu=0}^{2m-1} e\left(-\frac{\mu\mu_0}{2m}\right)$$
$$\times \sum_{\substack{D\geq 1\\ 4m|(D+\mu^2)}} D^{s-\frac{3}{2}} \sum_{\lambda\in\mathbb{Z}} \frac{\overline{a_f\left(\lambda^2 m + \frac{D+\mu^2}{4m} + \lambda\mu\right)}}{(\lambda^2 m + \frac{D+\mu^2}{4m} + \lambda\mu)^{k-1}}.$$

■

Bemerkung 15. *Mit Hilfe von Satz 4 und Lemma 10 können wir zeigen, dass für das Skalarprodukt der Jacobi-Spitzenformen $\Omega^{cusp}_{k,m}, \{f\}^0_{k,m} \in J^{cusp}_{k,m}$ die Gleichung*

$$\langle \Omega^{k,m}_{\mu_0,s}, \{f\}^0_{k,m}\rangle = \frac{\pi\Gamma(k-\frac{3}{2})}{2^{k-1} m\, e(\frac{s}{4})\Gamma(s-\frac{1}{2})\Gamma(k-s)}$$
$$\times \sum_{\mu=0}^{2m-1} e\left(-\frac{\mu\mu_0}{2m}\right) \Lambda^*_\mu((\{f\}^0_{k,m})^c, k-s).$$

gilt. Wir erhalten demnach einen zweiten Beweis für Lemma 4.

Beweis. Nach Lemma 10 gilt für das Skalarprodukt der Spitzenform $f \in S_k$ und mit n-tem Fourierkoeffizienten $a_f(n)$ und der Spitzenform $\mathcal{D}_0(\Omega^{k,m}_{\mu_0,s})(\tau) = \Omega^{k,m}_{\mu_0,s}(\tau, 0)$ vom Gewicht k

$$(\mathcal{D}_0(\Omega^{k,m}_{\mu_0,s}), f) = \frac{\Gamma(k-1)\, m^{-s+1}}{2^{2k+s-5}\pi^{k-s-\frac{1}{2}}\, e(\frac{s}{4})\, \Gamma(s-\frac{1}{2})} \sum_{\mu=0}^{2m-1} e\left(-\frac{\mu\mu_0}{2m}\right)$$
$$\times \sum_{\substack{D\geq 1\\ 4m|(D+\mu^2)}} D^{s-\frac{3}{2}} \sum_{\lambda\in\mathbb{Z}} \frac{\overline{a_f\left(\lambda^2 m + \frac{D+\mu^2}{4m} + \lambda\mu\right)}}{(\lambda^2 m + \frac{D+\mu^2}{4m} + \lambda\mu)^{k-1}}.$$

Diese Darstellung erinnert an die Fourierkoeffizienten der Funktion $\{f\}^0_{k,m}$. Diese sind gegeben durch

$$c(n, r; \{f\}^0_{k,m}) = (4mn - r^2)^{k-\frac{3}{2}} \sum_{\lambda\in\mathbb{Z}} \frac{a_f(m\lambda^2 + r\lambda + n)}{(m\lambda^2 + r\lambda + n)^{k-1}}.$$

Setzen wir $D := 4mn - \mu^2$ und $c_\mu(D) := c(n, \mu)$ für alle $n, r \in \mathbb{Z}$, so gilt $c_\mu(D) = c_{\mu'}(D)$ genau dann, wenn $\mu \equiv \mu' \pmod{2m}$ ist. Wir können demnach für die Reihe

$$\sum_{\substack{D\geq 1\\ 4m|(D+\mu^2)}} D^{s-\frac{3}{2}} \sum_{\lambda\in\mathbb{Z}} \frac{\overline{a_f\left(\lambda^2 m + \frac{D+\mu^2}{4m} + \lambda\mu\right)}}{(\lambda^2 m + \frac{D+\mu^2}{4m} + \lambda\mu)^{k-1}} = \sum_{D\geq 1} D^{s-k}\, \overline{c_\mu(D;\{f\}^0_{k,m})}$$

schreiben. Mit Hilfe der L-Funktion aus (1.8)

$$\Lambda^*_\mu(\phi,s) = \Gamma(s)\left(\frac{2m}{\pi}\right)^s \sum_{D=1}^{\infty} D^{-s}\, c_\mu(D) \qquad (\text{für } 0\leq\mu\leq 2m-1)$$

bekommen wir

$$\sum_{D\geq 1} D^{s-k}\, \overline{c_\mu(D;\{f\}^0_{k,m})} = \frac{1}{\Gamma(k-s)}\left(\frac{2m}{\pi}\right)^{s-k} \Lambda^*_\mu((\{f\}^0_{k,m})^c, k-s).$$

Satz 4 liefert den folgenden Zusammenhang zum Skalarprodukt von Jacobi-Spitzenformen

$$\langle \Omega^{k,m}_{\mu_0,s}, \{f\}^0_{k,m}\rangle = \frac{(4m)^{k-2}\sqrt{\pi}\,\Gamma(k-\frac{3}{2})}{\Gamma(k-1)}\,(\mathcal{D}_0(\Omega^{k,m}_{\mu_0,s}), f).$$

Insgesamt erhalten wir

$$\langle \Omega^{k,m}_{\mu_0,s}, \{f\}^0_{k,m}\rangle = \frac{\pi\Gamma(k-\frac{3}{2})}{2^{k-1} m\, e(\frac{s}{4})\Gamma(s-\frac{1}{2})\Gamma(k-s)} \times \sum_{\mu=0}^{2m-1} e\left(-\frac{\mu\mu_0}{2m}\right)\Lambda^*_\mu((\{f\}^0_{k,m})^c, k-s).$$

■

Nachdem wir verschiedene Beispiele für Jacobiformen kennengelernt haben, stellt sich die Frage wie sich Jacobiformen allgemein konstruieren lassen. Daher geben wir abschließend das Resultat aus [Sak98] über die Konstruktion von Jacobi-Spitzenformen wieder.

Satz 5. *Seien $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ mit $k_1 > 4$, $k_2 > 3$ und $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$. Sei weiter*

$$\phi_1(\tau,z) = \sum_{\substack{n_1,r_1\in\mathbb{Z}\\ r_1^2<4(m_1+m_2)n_1}} a(n_1,r_1)\, e(n_1\tau)\, e(r_1 z)$$

eine Jacobi-Spitzenform vom Gewicht k_1+k_2 und Index m_1+m_2 und sei

$$\phi_2(\tau,z) = \sum_{\substack{n_2,r_2\in\mathbb{Z}\\ r_2^2<4m_2 n_2}} b(n_2,r_2)\, e(n_2\tau)\, e(r_2 z)$$

eine Jacobi-Spitzenform vom Gewicht k_2 und Index m_2. Dann ist

$$\Phi_{\phi_2}(\phi_1)(\tau, z) = \sum_{\substack{n,r\in\mathbb{Z} \\ r^2<4m_1 n}} c(n,r)\, e(n\tau)\, e(rz)$$

eine Jacobi-Spitzenform vom Gewicht k_1 und Index m_1 mit Fourierkoeffizienten

$$c(n,r) = \frac{(4m_1 n - r^2)^{k_1-\frac{3}{2}}(m_1+m_2)^{k_1+k_2-2}\Gamma(k_1+k_2-\frac{3}{2})}{\pi^{k_2} m_1^{k_1-2}\Gamma(k_1-\frac{3}{2})}$$
$$\times \sum_{n_2\geq 1} \sum_{\substack{r_2\in\mathbb{Z} \\ r_2^2<4m_2 n_2 \\ 4(m_1(n+n_2)+m_2 n)-r(r+2r_2)\geq 0}} \frac{a(n+n_2, r+r_2)\,\overline{b(n_2,r_2)}}{(4(m_1+m_2)(n+n_2)-(r+r_2)^2)^{k_1+k_2-\frac{3}{2}}}.$$

Beweisskizze. Für die Beweisdetails verweisen wir auf [Sak98, Theorem 3.1, S.118]. Zunächst definieren wir die Funktion

$$\Psi(\tau, z) = \phi_1(\tau, z)\,\overline{\phi_2(\tau, z)}\, v^{k_2}\, e^{m_2}\left(\frac{2y^2}{v}\right)$$

mit $\tau = u + iv$ und $z = x + iy$. Diese Funktion hat dieselben Transformationseigenschaften wie eine Jacobiform. Das Integral

$$\langle \phi, \Psi\rangle = \int_{\Gamma^J\backslash\mathbb{H}\times\mathbb{C}} \phi(\tau, z)\,\overline{\Psi(\tau, z)}\, v^{k_1-3}\, e^{m_1}\left(\frac{2y^2}{v}\right) dx\, dy\, du\, dv$$

ist wohldefiniert und konvergiert für $\phi \in J_{k_1,m_1}^{cusp}$. Da die Abbildung $\phi \to \langle\phi, \Psi\rangle$ auf J_{k_1,m_1}^{cusp} linear ist, gibt es nach dem Rieszschen Darstellungssatz eine eindeutig bestimmte Funktion

$$\psi(\tau, z) = \sum_{n,r\in\mathbb{Z},\, r_1^2<4m_1 n} c(n,r)\, e(n\tau)\, e(rz) \in J_{k_1,m_1}^{cusp}$$

mit

$$\langle\phi, \psi\rangle = \langle\phi, \Psi\rangle$$

für alle Jacobi-Spitzenformen $\phi \in J_{k_1,m_1}^{cusp}$. Mit Hilfe der Poincaré-Reihe für Jacobiformen gilt dann für die Fourierkoeffizienten der Funktion ψ

$$\begin{aligned} c(n,r) &= \frac{2\,\pi^{k-\frac{3}{2}}\,(4m_1 n - r^2)^{k_1-\frac{3}{2}}}{m^{k-2}\,\Gamma(k-\frac{3}{2})} \langle\psi, P_{k_1,m_1,(n,r)}\rangle \\ &= \frac{2\,\pi^{k-\frac{3}{2}}\,(4m_1 n - r^2)^{k_1-\frac{3}{2}}}{m^{k-2}\,\Gamma(k-\frac{3}{2})} \big\langle\Psi, P_{k_1,m_1,(n,r)}\big\rangle. \end{aligned}$$

Mit dem Satz von Lebesgue können wir die Summation und Integration in $\langle \Psi, P_{k_1,m_1,(n,r)} \rangle$ vertauschen und erhalten

$$\begin{aligned}
&\langle \Psi, P_{k_1,m_1,(n,r)} \rangle \\
&= \int_{\Gamma^J \backslash \mathbb{H}\times\mathbb{C}} \Psi(\tau,z)\, \overline{P_{k_1,m_1,(n,r)(\tau,z)}}\, v^{k_1-3}\, e^{m_1}\left(\frac{2y^2}{v}\right) dx\, dy\, du\, dv \\
&= \int_{\gamma\in\Gamma^J_\infty\backslash\Gamma^J} \int_{\Gamma^J \backslash \mathbb{H}\times\mathbb{C}} \Psi(\tau,z)\, \overline{e(n\tau+rz)|_{k_1,m_1}\gamma}\, v^{k_1-3}\, e^{m_1}\left(\frac{2y^2}{v}\right) dx\, dy\, du\, dv \\
&= \int_{\gamma\in\Gamma^J_\infty \backslash \mathbb{H}\times\mathbb{C}} \Psi(\tau,z)\, \overline{e(n\tau+rz)}\, v^{k_1-3}\, e^{m_1}\left(\frac{2y^2}{v}\right) dx\, dy\, du\, dv,
\end{aligned}$$

wobei wir Rankins Entfaltungsmethode benutzt haben. Anschließend setzen wir die Fourierentwicklungen der Funktionen ϕ_1 und ϕ_2 in Ψ ein und erhalten dadurch die Fourierkoeffizienten von Ψ. Setzen wir die Fourierentwicklung der Funktion Ψ in das obige Integral ein und benutzen wir, dass $([0,\infty)\times[0,1])\times(\mathbb{R}\times[0,1])$ ein Fundamentalbereich der Aktion von Γ^J_∞ auf $\mathbb{H}\times\mathbb{C}$ ist, so folgt der Satz nach Berechnung des Integrals, wobei für $\Phi_{\phi_2}(\phi_1)$ die Funktion Ψ verwendet wird. ■

Literaturverzeichnis

[And79] ANDRIANOV, A. N.: Modular descent and the Saito-Kurokawa conjecture. In: *Inventiones mathematicae* 53 (1979), Nr. 3, S. 267–280

[AS65] ABRAMOWITZ, N. ; STEGUN, I.: *Handbook of Mathematical Functions: with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover Books on Mathematics, 1965

[BB90] BERNDT, R. ; BÖCHERER, S.: Jacobi forms and discrete series representations of the Jacobi group. In: *Mathematische Zeitschrift* 204 (1990), Nr. 1, S. 13–44

[BK93] BÖCHERER, S. ; KOHNEN, W.: Estimates for Fourier coefficients of Siegel cusp forms. In: *Mathematische Annalen* 297 (1993), Nr. 1, S. 499–517

[E$^+$54] ERDÉLYI, A. u. a.: *Tables of Integral Transforms*. Bd. 1. McGraw-Hill Book Company, 1954

[EZ85] EICHLER, M. ; ZAGIER, D.: *Progress in Mathematics*. Bd. 55: *The Theory of Jacobi Forms*. Springer Science+Business Media, 1985

[GR14] GRADSHTEYN, I. S. ; RYZHIK, I. M.: *Table of Integrals, Series, and Products*. Eighth Edition. Boston : Academic Press, 2014

[Koh80] KOHNEN, W.: Modular Forms of Half-Integral Weight on ...0(4). In: *Mathematische Annalen* 248 (1980), S. 249–266

[Koh82] KOHNEN, W.: Newforms of half-integral weight. In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 333 (1982), S. 32–72

[Koh91] Kohnen, W.: Cusp forms and special values of certain Dirichlet series. In: *Mathematische Zeitschrift* 207 (1991), Nr. 1, S. 657–660

[Koh97] Kohnen, W.: Nonvanishing of Hecke L-Functions Associated to Cusp Forms inside the Critical Strip. In: *Journal of Number Theory* 67 (1997), Nr. 2, S. 182–189

[KR17] Kohnen, W. ; Raji, W.: Non-vanishing of L-functions associated to cusp forms of half-integral weight in the plus space. In: *Research in Number Theory* 3 (2017), Nr. 1, S. 6

[KSW18] Kohnen, W. ; Sengupta, J. ; Weigel, M.: Nonvanishing of derivatives of Hecke L-functions associated to cusp forms inside the critical strip. In: *The Ramanujan Journal* (2018), 12. `http://dx.doi.org/10.1007/s11139-018-0073-0`. – DOI 10.1007/s11139–018–0073–0

[Kur78] Kurokawa, N.: Examples of Eigenvalues of Hecke Operators on Siegel Cusp Forms of Degree Two. In: *Inventiones mathematicae* 49 (1978), S. 149–166

[Maa79] Maass, H.: Über eine Spezialschar von Modulformen zweiten Grades. In: *Inventiones mathematicae* 52 (1979), S. 95–104

[Mar96] Martin, Y.: A Converse Theorem for Jacobi Forms. In: *Journal of Number Theory* 61 (1996), Nr. 1, S. 181–193

[Mar14] Martin, Y.: On integral kernels for Dirichlet series associated to Jacobi forms. In: *Journal of the London Mathematical Society* 90 (2014), Nr. 2, S. 67–88

[RS14] Ramakrishnan, B. ; Shankhadhar, K. D.: Nonvanishing of L-Functions Associated to Cusp Forms of Half-Integral Weight. In: Heim, B. (Hrsg.) ; Al-Baali, M. (Hrsg.) ; Ibukiyama, T. (Hrsg.) ; Rupp, F. (Hrsg.): *Automorphic Forms*. Cham : Springer International Publishing, 2014. – ISBN 978–3–319–11352–4, S. 223–231

[Sak98] Sakata, H.: Construction of Jacobi cusp forms. In: *Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences* 74 (1998), Nr. 7, S. 117–119

[Sat89] SATOH, T.: Jacobi forms and certain special values of Dirichlet series associated to modular forms. In: *Mathematische Annalen* 285 (1989), Nr. 3, S. 463–480

[Sch16] SCHWAGENSCHEIDT, M.: Nonvanishing and central critical values of twisted L-functions of cusp forms on average. In: *Functiones et Approximatio Commentarii Mathematici* 55 (2016), Nr. 1, S. 45–58

[Shi87] SHIMURA, G.: On Hilbert modular forms of half-integral weight. In: *Duke Mathematical Journal* 55 (1987), Nr. 4, S. 765–838

[SK15] SOUMYA, S. ; KOHNEN, W.: Nonvanishing of Koecher-Maass series attached to Siegel cusp forms. In: *Adv. Math.* 28 (2015), S. 624–669

[Sko84] SKORUPPA, N.-P.: *Über den Zusammenhang zwischen Jacobi-Formen und Modulformen halbganzen Gewichts*, Universität Bonn, Diss., 1984

[Tok94] TOKUNO, Y.: The adjointness of the maps between the space of Jacobi forms and the space of modular forms. In: *Tohoku Mathematical Journal* 46 (1994), Nr. 1, S. 27–34

[Zag81] ZAGIER, D.: *Progress in Mathematics*. Bd. 12: *Sur la conjecture de Saito-Kurokawa (d'après H. Maass). Séminaire Delange-Pisot-Poitou 1979-1980*. Birkhäuser-Verlag, 1981

[Zag92] ZAGIER, D. ; WALDSCHMIDT, M. (Hrsg.) ; MOUSSA, P. (Hrsg.) ; LUCK, J.-M. (Hrsg.) ; ITZYKSON, C. (Hrsg.): *From Number Theory to Physics: Introduction to Modular Forms.* Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 1992

[ZKG87] ZAGIER, D. ; KOHNEN, W. ; GROSS, B.: Heegner Points and Derivatives of L-Series. II. In: *Mathematische Annalen* 278 (1987), S. 497–562