C. R. Acad. Sc. Paris, t. 271, p. 630-631 (5 octobre 1970). Série A

ALGÈBRE. — *Convoluteurs de groupes discrets.*

Note (*) de M. **Michael Leinert**, transmise par M. Jean Dieudonné.

Si G est un groupe localement compact et $1 < p < \infty$, on sait [*cf.* (2)] que les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) G *est aménable;*

(2) p, *si une mesure positive convole* $L^p(G)$ *dans* $L^p(G)$, *c'est une mesure bornée.*

$(2)_p$

Pour $G = SL(2, R)$, R. A. Kunze et E. M. Stein ont obtenu dans (3) un résultat, qui est plus fort que la négation de $(2)_2$:

Soit $G = SL(2, R)$ *et* $1 \leq p < 2$; *alors, pour tout* $k \in L^p(G)$, $f \mapsto k \star f$ *est un convoluteur de* $L^2(G)$.

Nous annonçons un résultat semblable pour le groupe libre à deux générateurs.

Notations. — G désigne un groupe discret, $\mathcal{K}(G)$ l'espace des fonctions complexes et à support compact sur G. Pour $1 \leq p \leq \infty$, on considère les espaces $L^p(G)$. On note $\mathcal{L}(L^p(G))$ l'espace des opérateurs linéaires bornés dans $L^p(G)$. La norme d'un élément $f \in L^p$ est notée $|f|_p$. Si $T \in \mathcal{L}(L^p(G))$ et si l'on a pour tous $f, g \in \mathcal{K}(G)$:

$$T(f \star g) = (Tf) \star g,$$

où $\star$ dénote la convolution, T est appelé un convoluteur de $L^p(G)$. Soit f une fonction complexe sur G, telle que l'application $g \mapsto f \star g$ définit un convoluteur de $L^p(G)$. Par abus de langage, nous appelons f un convoluteur de $L^p(G)$.

On note supp(f) le support d'une fonction f.

L'élément-unité d'un groupe G est noté e.

Remarque 1. — *Soit f une fonction non négative, définie sur le groupe discret* G *et telle que* supp(f) *est contenu dans un sous-groupe aménable* H *du groupe* G. *Alors, si f est un convoluteur de* $L^2(G)$, *on a* $f \in L^1(G)$.

Démonstration. — Comme G est discret, H est un sous-groupe ouvert de G. La restriction de f à H opère sur $L^2(H)$ par convolution et définit un convoluteur de $L^2(H)$. Alors, elle est un élément de $L^1(H)$, car H est aménable. Cela veut dire, que f est un membre de $L^1(G)$.

Si G est un groupe localement compact quelconque et H un sous-groupe ouvert aménable de G, la démonstration reste correcte, supposé que f définit une mesure de Radon sur G.

Remarque 2. — *Soit f une fonction complexe, définie sur le groupe discret* G. *Si f est un convoluteur de* $L^2(G)$, *on a* $|f|_2 < \infty$.

Démonstration. — Soit e l'élément-unité de G, $\chi_{\{e\}}$ la fonction caractéristique de $\{e\}$. On a $\chi_{\{e\}} \in L^2(G)$ et alors $f \star \chi_{\{e\}} = f \in L^2(G)$.

Soit $P \subseteq G$. Nous dirons, que P satisfait à la condition $(*)$, si l'on a

(i) $e \notin P$;

(ii) pour $x_1, \ldots, x_{2n} \in P$ (n un nombre naturel quelconque), où $x_i \neq x_{i+1}$ pour $i = 1, \ldots, 2n-1$, on a $x_1^{-1} x_2 x_3^{-1} x_4 \ldots x_{2n} \neq e$.

THÉORÈME. — *Soit* G *un groupe discret. Alors, chaque fonction* $f \in L^2(G)$, *dont le support satisfait à la condition* $(*)$ *est un convoluteur de* $L^2(G)$.

La démonstration est un peu longue et sera publiée à l'occasion d'une autre Note. Si l'on a $g \in \mathcal{K}(G)$, on peut interpréter la fonction $f \star g$ comme combinaison linéaire finie de translatées à droite de la fonction f. La condition $(*)$ assure que les supports des translatées de f sont « à peu près disjoints », ce qui entraîne que la norme $|f \star g|_2$ est assez petite. En effet on peut montrer que

$$|f \star g|_2 \leqq \sqrt{5}\, |f|_2 |g|_2 \qquad \text{pour} \quad g \in \mathcal{K}(G).$$

Cette inégalité s'étend facilement à $g \in L^2(G)$ quelconque. Il est clair que

$$(f \star g) \star h = f \star (g \star h) \qquad \text{pour} \quad g, h \in \mathcal{K}(G).$$

Ainsi, f est un convoluteur de $L^2(G)$.

REMARQUE 3. — *Soit* G *le groupe libre à deux générateurs* a *et* b. *Il y a un ensemble infini* $P \subseteq G$, *qui satisfait à la condition* $(*)$, *par exemple*

$$P = \{ a^n b^n \mid n \in Z \},$$

où Z *est l'ensemble des nombres entiers.*

REMARQUE 4. — *Soit* G *un groupe contenant un ensemble* P *à quatre éléments au moins, tel que* P *satisfait à la condition* $(*)$. *Alors,* G *contient un sous-groupe libre à deux générateurs.*

Démonstration. — Soient a, b, c, d des éléments différents de P. Si l'on définit

$$u = a^{-1} b, \qquad v = c^{-1} d,$$

il résulte de $(*)$ que u et v sont des générateurs libres.

(*) Séance du 21 septembre 1970.

(1) P. EYMARD, *Bull. Soc. math. Fr.*, 92, 1964, p. 181-236.

(2) P. EYMARD, *Algèbres* A_p *et convoluteurs de* L^p (*Séminaire Bourbaki*, 22e année, 1969-1970, n° 367).

(3) R. A. KUNZE et E. M. STEIN, *Amer. J. Math.*, 82, 1960, p. 1-62.

(*Institut f. Angew. Mathematik,*
Tiergartenstrasse,
69 *Heidelberg,*
République Fédérale Allemande.)

182518. — Imp. Gauthier-Villars. — 55, Quai des Grands-Augustins, Paris (6e).
Imprimé en France.