Sonderabdruck aus
ARCHIV DER MATHEMATIK
Vol. XXI, 1970 BIRKHÄUSER VERLAG, BASEL UND STUTTGART Fasc. 6

Beitrag zur Theorie der verallgemeinerten $\mathscr{L}^1$-Algebren

Von
M. Leinert

Beitrag zur Theorie der verallgemeinerten $\mathscr{L}^1$-Algebren

Von

M. LEINERT

In dieser Arbeit werden der Begriff der verallgemeinerten $\mathscr{L}^1$-Algebra, wie ihn H. LEPTIN in [5] gegeben hat, und einige der dort ausgesprochenen Sätze verallgemeinert.

Ist G eine lokal kompakte Gruppe, $\mathscr{A}$ eine Banach-Algebra, und sind

$$T = \{T_x\}_{x \in G} \quad \text{und} \quad P = \{P_{x,y}\}_{x,y \in G}$$

gewisse meßbare Familien von Automorphismen bzw. beschränkten Operatoren von $\mathscr{A}$, so besteht die hier beschriebene verallgemeinerte $\mathscr{L}^1$-Algebra $\mathscr{L}(G, \mathscr{A}; T, P)$ wie in [5] aus dem Banach-Raum $\mathscr{L}^1(G, \mathscr{A})$ aller Haarintegrierbaren Funktionen auf G mit Werten in $\mathscr{A}$, versehen mit einer verallgemeinerten Faltung

$$(f \underset{T,P}{\star} g)(x) = \int_G P_{xy, y^{-1}} T_y f(xy) \cdot g(y^{-1})\, dy$$

als Produkt. Der Unterschied zu [5] liegt darin, daß die Voraussetzungen über T und P abgeschwächt sind: man verzichtet auf die Beziehung

$$T_{xy} = T_x T_y,$$

$x, y \in G$, und statt der Identitäten

$$P_{x,y} a \cdot b = P_{x,y}(ab), \qquad a \cdot P_{x,y} b = P_{x,y}(ab),$$

$x, y \in G$, $a, b \in \mathscr{A}$, fordert man — zur Abkürzung sei $T_{x,y} = T_{y^{-1}} T_{x^{-1}} T^{-1}_{y^{-1}x^{-1}}$ definiert —

$$P_{x,y} a \cdot b = P_{x,y}(ab), \qquad a \cdot P_{x,y} b = P_{x,y} T_{x,y} a \cdot b.$$

Die Bedingung (1.5) aus [5] wird in der Form

$$P_{xy,z} T_{z^{-1}} P_{x,y} T^{-1}_{z^{-1}} = P_{x,yz} P_{y,z},$$

$x, y, z \in G$, beibehalten.

Durch diese Erweiterung des Begriffs der verallgemeinerten $\mathscr{L}^1$-Algebra erreicht man, daß in Satz 1 von [5] auf die Kommutativität des Normalteilers H verzichtet werden kann. Die Algebra $\mathscr{L}(G, \mathscr{A}; T, P)$ stellt einen Spezialfall von [4], § 2 dar, wenn man dort die Voraussetzung, daß die Gruppe G kommutativ ist, wegläßt. Mit der Definition

$$a\langle x, y\rangle b = P_{x,y} T_{y^{-1}} a \cdot b$$

für $x, y \in G$, $a, b \in \mathscr{A}$, sind die Bedingungen 1)—4) von [4], p. 56 erfüllt. Dagegen scheint es, daß der Begriff der verallgemeinerten $\mathscr{L}^1$-Algebra sich nicht völlig dem der ,,cross-sectional algebra“ von J. M. G. Fell in [3] unterordnet, obwohl es für das Beispiel der Gruppenalgebra $\mathscr{L}(G/H, \mathscr{L}^1(H); T, P)$ zutrifft[1]).

Die Arbeit gliedert sich in vier Abschnitte, welche die Definition der verallgemeinerten $\mathscr{L}^1$-Algebra (I), etwas über Involution in verallgemeinerten $\mathscr{L}^1$-Algebren (II), das Beispiel der Gruppenalgebra $\mathscr{L}(G/H, \mathscr{L}^1(H); T, P)$ (III) und den Isomorphiesatz $\mathscr{L}^1(G) \cong \mathscr{L}(G/H, \mathscr{L}^1(H); T, P)$ (IV) enthalten.

Bezeichnungen. Ist $\mathscr{A}$ eine Banach-Algebra, so bedeute $\mathscr{B}(\mathscr{A})$ die Algebra aller beschränkten Operatoren von $\mathscr{A}$. Für $A \in \mathscr{B}(\mathscr{A})$ sei $|A|$ die Norm von A, I bezeichne die identische Abbildung von $\mathscr{A}$. Ist $\mathscr{A}$ eine involutive Banach-Algebra und $B \in \mathscr{B}(\mathscr{A})$, so wird B° und B^* wie in [5] definiert, ebenso $\mathscr{A}^b$. Auch zum Begriff der meßbaren Familie vgl. [5].

I. Sei G eine lokal kompakte Gruppe, $\mathscr{A}$ eine Banach-Algebra. $T = \{T_x\}_{x \in G}$ sei eine bezüglich des Haar-Maßes auf G meßbare Familie isometrischer Automorphismen von $\mathscr{A}$. Wir definieren Automorphismen $T_{x,y}$ von $\mathscr{A}$ durch die Gleichung

$$T_{x,y} = T_{y^{-1}} T_{x^{-1}} T^{-1}_{y^{-1}x^{-1}}.$$

Offenbar ist T genau dann eine Darstellung, wenn $T_{x,y} = I$ für alle $x, y \in G$.

Definition. *Eine bezüglich des Haar-Maßes auf $G \times G$ meßbare Familie*

$$P = \{P_{x,y}\}_{x,y \in G}$$

mit Werten in $\mathscr{B}(\mathscr{A})$ heißt meßbares Faktorensystem von G bezüglich T mit Werten in $\mathscr{A}$ (oder kurz: Faktorensystem), wenn $|P_{x,y}| \leqq 1$ für alle $x, y \in G$ und die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$(1.1)\qquad P_{x,y}a \cdot b = P_{x,y}(ab), \qquad a \cdot P_{x,y}b = P_{x,y}T_{x,y}a \cdot b \text{ [2])}$$

$$(1.2)\qquad P_{xy,z}T_{z^{-1}}P_{x,y}T^{-1}_{z^{-1}} = P_{x,yz}P_{y,z}$$

für alle $a, b \in \mathscr{A}$ und alle $x, y, z \in G$.

Falls T eine stetige Darstellung ist, stimmt diese Definition des Faktorensystems mit der in [5] gegebenen überein.

Ist $P = \{P_{x,y}\}$ ein Faktorensystem, so folgt aus (1.1), daß $P_{x,y} \in \mathscr{A}^b$ für alle $x, y \in G$. Wenn $P^*_{x,y}$ eindeutig bestimmt ist, z.B. wenn Bedingung (N) aus [5] erfüllt ist, gilt

$$(1.3)\qquad P^*_{x,y} = (P_{x,y}T_{x,y})^\circ.$$

Besitzt $P_{x,y}$ mehrere Adjungierte, so wollen wir unter diesen nur den Operator $(P_{x,y}T_{x,y})^\circ$ mit $P^*_{x,y}$ bezeichnen. Damit gilt (1.3) allgemein. Wir nennen ein Fak-

1) Inzwischen ist eine Arbeit von R. C. Busby und H. A. Smith [8] erschienen. Der dort definierte Begriff der verallgemeinerten $\mathscr{L}^1$-Algebra ist analog zu dem in dieser Arbeit gegebenen.

2) Man beachte, daß die zweite Gleichung die erste impliziert, falls Bedingung (N) aus [5] erfüllt ist.

torensystem $P = \{P_{x,y}\}$ *unitär*, wenn $P^*_{x,y} = P^{-1}_{x,y}$ für alle $x, y \in G$ und $P_{e,x} = P_{x,e} = I$ für alle $x \in G$.

Mit Hilfe eines Faktorensystems können wir wie in [5] für Funktionen aus $\mathscr{L}^1(G, \mathscr{A})$ eine verallgemeinerte Faltung $\underset{T,P}{\varhexstar}$ durch die Formel

$$(f \underset{T,P}{\varhexstar} g)(x) = \int_G P_{xy,y^{-1}} T_y f(xy) \cdot g(y^{-1})\, dy$$

erklären.

Satz 1. $\mathscr{L}^1(G, \mathscr{A})$ *wird mit* $\underset{T,P}{\varhexstar}$ *als Produkt zu einer Banach-Algebra.*

Beweis. Wir definieren eine Abbildung π: $\mathscr{A} \times G \times G \times \mathscr{A} \to \mathscr{A}$, die jedem Quadrupel (a, x, y, b), $a, b \in \mathscr{A}$, $x, y \in G$, ein Element $a\langle x, y\rangle b \in \mathscr{A}$ zuordnet, durch die Formel

$$a\langle x, y\rangle b = P_{x,y} T_{y^{-1}} a \cdot b\,.$$

Die Behauptung folgt aus [4], (2.1), wenn wir zeigen können, daß die Abbildung π die Bedingungen 1)—4) von [4], p. 56 erfüllt. 1) und 4) sind klar. 3) ergibt sich mit Hilfe von [5], p. 260 und [4], (1.2), während 2) aus (1.1) und (1.2) folgt:

$$\begin{aligned}(a\langle x, y\rangle b)\langle xy, z\rangle c &= P_{xy,z} T_{z^{-1}} (P_{x,y} T_{y^{-1}} a \cdot b) \cdot c = \\ &= P_{xy,z} T_{z^{-1}} P_{x,y} T^{-1}_{z^{-1}} T_{z^{-1}} T_{y^{-1}} a \cdot T_{z^{-1}} b \cdot c = \\ &= P_{x,yz} P_{y,z} T_{z^{-1}} T_{y^{-1}} a \cdot T_{z^{-1}} b \cdot c = \\ &= P_{x,yz} P_{y,z} T_{y,z} T_{(yz)^{-1}} a \cdot T_{z^{-1}} b \cdot c = \\ &= P_{x,yz} T_{(yz)^{-1}} a \cdot P_{y,z} T_{z^{-1}} b \cdot c = a\langle x, yz\rangle (b\langle y, z\rangle c)\,.\end{aligned}$$

Die in Satz 1 definierte Banach-Algebra wollen wir mit $\mathscr{L}(G, \mathscr{A}; T, P)$ oder kurz $\mathscr{L}$ bezeichnen.

II. Sei $P = \{P_{x,y}\}_{x,y \in G}$ ein Faktorensystem, und seien alle $P_{x,y}$ invertierbar. Dann gilt entsprechend zu Satz 8 in [5]

Satz 2. *Die Familie* $\{P_{x^{-1},xa}\}_{x \in G}$ *ist für jedes* $a \in G$ *meßbar bezüglich des Haar-Maßes auf* G.

Der Beweis verläuft wie in [5], bis auf die Tatsache, daß man an einer Stelle, anstatt mit $T_{y^{-1}}$ zu transformieren, nur von rechts mit $T_{y^{-1}}$ multipliziert. Das geschieht, um das Auftreten von $T^{-1}_{y^{-1}}$ zu vermeiden, weil die Familie $\{T^{-1}_y\}_{y \in G}$ wohl nicht meßbar zu sein braucht. Sie ist übrigens meßbar, wenn das Faktorensystem unitär ist.

Für den Rest dieses Abschnitts sei $\mathscr{A}$ eine involutive Banach-Algebra, alle Automorphismen T_x seien mit der Involution * vertauschbar, und für das Eins-Element e der Gruppe G gelte $T_e = I$.

Analog zu Satz 7 in [5] erhalten wir

Satz 3. *Ist* $K = \{K_x\}_{x \in G}$ *eine bezüglich des Haar-Maßes auf* G *meßbare Familie isometrischer invertierbarer Operatoren von* $\mathscr{A}$ *mit der Eigenschaft*

$$K_x a \cdot b = a \cdot K_x T_{x^{-1},x} b\,, \qquad a \cdot K_x b = K_x(ab) \tag{2.1}$$

für alle $a, b \in \mathscr{A}$, $x \in G$, *und gilt außerdem*

$$K_x T_{x^{-1}} K^{\circ}_{x^{-1}} T_x = I \tag{2.2}$$

und

$$K_{xy} T_{(xy)^{-1}} P^{\circ}_{y^{-1},x^{-1}} T^{-1}_{x^{-1}} K^{-1}_x T^{-1}_{y^{-1}} K^{-1}_y (ab) = P_{x,y}(ab) \tag{2.3}$$

für alle $x, y \in G$, $a, b \in \mathscr{A}$, *so läßt sich in* $\mathscr{L}(G, \mathscr{A}; T, P)$ *durch die Formel*

$$f^*(x) = \Delta(x)^{-1} K_x T_{x^{-1}} f(x^{-1})^*$$

eine Involution $f \mapsto f^*$ *definieren.*

Der Beweis verläuft im wesentlichen wie in [5]. Für die Identität $(f \underset{T,P}{\mathbin{\text{✡}}} g)^* = g^* \underset{T,P}{\mathbin{\text{✡}}} f^*$ verwendet man zusätzlich die Beziehungen

$$a \cdot P^{\circ}_{x,y} b = P^{\circ}_{x,y}(ab) \tag{2.4}$$

und

$$K^{-1}_x a \cdot T_{x^{-1},x} b = K^{-1}_x (ab), \qquad a \cdot K^{-1}_x b = K^{-1}_x (ab), \tag{2.5}$$

welche aus den Eigenschaften (1.1) und (2.1) folgen.

Entsprechend zu Satz 9 in [5] gilt

Satz 4. *Ist* $P = \{P_{x,y}\}_{x,y \in G}$ *ein unitäres Faktorensystem und definiert man*

$$K_x = P^{\circ}_{x^{-1},x},$$

so erfüllt $K = \{K_x\}_{x \in G}$ *die Voraussetzungen von Satz 3. In* $\mathscr{L}$ *wird also durch*

$$f^*(x) = \Delta(x)^{-1} P^{\circ}_{x^{-1},x} T_{x^{-1}} f(x^{-1})^*$$

kanonisch eine Involution definiert.

Beweis. Aus (1.1) folgen die Relationen (2.1). Da das Faktorensystem unitär ist und $T^{\circ}_{x,y} = T_{x,y}$ gilt, erhält man aus (1.3) die Beziehung

$$P^{-1}_{x,y} = P^{\circ}_{x,y} T_{x,y}. \tag{2.6}$$

Substituiert man $x \to y^{-1}$, $z \to y^{-1}$ in (1.2) und multipliziert dann von rechts mit T_y, so ergibt sich wegen $P_{e,x} = P_{x,e} = I$ die Gleichung

$$T_y P_{y^{-1},y} = P_{y,y^{-1}} T_y. \tag{2.7}$$

Aus (2.6) und (2.7) erhält man (2.2) unter Berücksichtigung von $(P^{\circ}_{x,x^{-1}})^{\circ} = P_{x,x^{-1}}$ durch Ausrechnen. Die Bedingung (2.3) lautet nach Vereinfachung mit Hilfe von (2.6):

$$P^{-1}_{(xy)^{-1},xy} T^{-1}_{xy} P^{\circ}_{y^{-1},x^{-1}} T_x P_{x^{-1},x} T_y P_{y^{-1},y}(ab) = P_{x,y}(ab).$$

Durch die Substitutionen $x \to y$, $y \to y^{-1}$, $z \to x^{-1}$ bzw. $z \to (xy)^{-1}$ in (1.2) gewinnt man zwei Gleichungen. Löst man die erste nach $P_{y,(xy)^{-1}}$ auf und setzt in die zweite ein, so ergibt sich nach Multiplikation von links mit $P^{-1}_{xy,(xy)^{-1}}$ und Transformation mit T_{xy} die Gleichung

$$P_{x,y} = T^{-1}_{xy} P^{-1}_{xy,(xy)^{-1}} P_{x,x^{-1}} T_x P_{y,y^{-1}} T^{-1}_x P^{-1}_{y^{-1},x^{-1}} T_{xy}.$$

Seien $a, b \in \mathscr{A}$. Mit Hilfe von (2.6), (2.4) und (1.1) erhalten wir aus der letzten Gleichung:

$$\begin{aligned} P_{x,y}(ab) &= T_{xy}^{-1} P_{xy,(xy)^{-1}}^{-1} P_{x,x^{-1}} T_x P_{y,y^{-1}} T_x^{-1} P_{y^{-1},x^{-1}}^{\circ} T_{y^{-1},x^{-1}} T_{xy}(ab) = \\ &= T_{xy}^{-1} P_{xy,(xy)^{-1}}^{-1} (P_{x,x^{-1}} T_x P_{y,y^{-1}} T_x^{-1} T_x T_y a \cdot T_x T_x^{-1} P_{y^{-1},x^{-1}}^{\circ} T_x T_y b) = \\ &= T_{xy}^{-1} P_{xy,(xy)^{-1}}^{-1} P_{y^{-1},x^{-1}}^{\circ} P_{x,x^{-1}} T_x P_{y,y^{-1}} T_y (ab). \end{aligned}$$

Das ist aber wegen (2.7) gerade Bedingung (2.3). Nach Satz 2 ist die Familie $\{P_{x^{-1},x}\}_{x\in G}$ meßbar, also auch die Familie $\{P_{x^{-1},x}^{\circ}\}_{x\in G}$, wie man leicht nachprüft. Wegen $P_{x,y}^{-1} = P_{x,y}^{\circ} T_{x,y}$ und $|P_{x,y}^{\circ}| = |P_{x,y}|$ gilt $|P_{x,y}^{-1}| \leqq |P_{x,y}| \leqq 1$, also sind die Operatoren $P_{x,y}$ isometrisch und damit auch die Operatoren $K_x = P_{x^{-1},x}^{\circ}$, womit Satz 4 bewiesen ist.

III. Sei G eine lokal kompakte Gruppe, H ein abgeschlossener Normalteiler von G, $f \in \mathscr{L}^1(H)$ mit $\int\limits_H f(\xi)\,d\xi \neq 0$. Für $x \in G$ definieren wir $\delta(x)$ durch die Gleichung

$$\int\limits_H f(\xi)\,d\xi = \delta(x) \int\limits_H f(x^{-1}\xi x)\,d\xi .$$

Die so definierte Funktion δ ist ein stetiger Homomorphismus von G in die multiplikative Gruppe der positiven reellen Zahlen (vgl. [2], p. 22).

Es existiere ein meßbarer Schnitt σ von $\dot{G} = G/H$ in G. Wie in [5] definiert man für $\dot{x}, \dot{y} \in \dot{G}$:

$$\gamma(\dot{x}, \dot{y}) = \sigma(\dot{y})^{-1} \sigma(\dot{x})^{-1} \sigma(\dot{x}\dot{y}),$$

und für $h \in \mathscr{L}^1(H)$, $\xi \in H$:

$$\begin{aligned} (P_{\dot{x},\dot{y}} h)(\xi) &= h(\gamma(\dot{x},\dot{y})\xi), \\ (T_{\dot{x}} h)(\xi) &= \delta(\sigma(\dot{x}^{-1})^{-1})\, h(\sigma(\dot{x}^{-1})\,\xi\,\sigma(\dot{x}^{-1})^{-1}). \end{aligned}$$

Wir wollen nun zeigen, daß die Familie $P = \{P_{\dot{x},\dot{y}}\}_{\dot{x},\dot{y}\in\dot{G}}$ ein meßbares Faktorensystem von $\dot{G}$ bezüglich $T = \{T_{\dot{x}}\}_{\dot{x}\in\dot{G}}$ mit Werten in $\mathscr{L}^1(H)$ ist. Offenbar gilt $P_{\dot{x},\dot{y}}$, $T_{\dot{x}} \in \mathscr{B}(\mathscr{L}^1(H))$, und die Abbildungen sind isometrisch. Die Operatoren $T_{\dot{x}}$ sind außerdem Automorphismen. Man verifiziert (1.1) und (1.2) durch Ausrechnen oder geeignetes Umformen, was wir für die zweite Gleichung von (1.1) durchführen wollen: für $a, b \in \mathscr{L}^1(H)$, $\xi \in H$ gilt

$$\begin{aligned} (a \mathbin{\ast} P_{\dot{x},\dot{y}} b)(\xi) &= \int\limits_H a(\xi\vartheta)(P_{\dot{x},\dot{y}} b)(\vartheta^{-1})\,d\vartheta = \int\limits_H a(\xi\vartheta)\, b(\gamma(\dot{x},\dot{y})\vartheta^{-1})\,d\vartheta = \\ &= \int\limits_H \delta(\gamma(x,\dot{y}))\, a(\xi\vartheta\gamma(\dot{x},\dot{y}))\, b(\vartheta^{-1})\,d\vartheta = \\ &= \int\limits_H \delta(\gamma(\dot{x},\dot{y}))\, a(\gamma(\dot{x},\dot{y})^{-1}\gamma(\dot{x},\dot{y})\,\xi\,\vartheta\,\gamma(\dot{x},\dot{y}))\, b(\vartheta^{-1})\,d\vartheta . \end{aligned}$$

Eine Nebenrechnung zeigt, daß $T_{\dot{x},\dot{y}}$ gegeben ist durch

$$(T_{\dot{x},\dot{y}} h)(\xi) = \delta(\gamma(\dot{x},\dot{y}))\, h(\gamma(\dot{x},\dot{y})^{-1}\xi\gamma(\dot{x},\dot{y})),$$

und so erhalten wir

$$(a \mathbin{\ast} P_{\dot{x},\dot{y}} b)(\xi) = \int\limits_H (P_{\dot{x},\dot{y}} T_{\dot{x},\dot{y}} a)(\xi\vartheta)\, b(\vartheta^{-1})\,d\vartheta = (P_{\dot{x},\dot{y}} T_{\dot{x},\dot{y}} a \mathbin{\ast} b)(\xi).$$

Nun bleibt noch die Meßbarkeit von T und P zu zeigen. Sei $h \in \mathscr{L}^1(H)$, $\xi \in H$ und $x \in G$. Man definiert Funktionen ${}_\xi h$ und h^x durch

$$({}_\xi h)(\eta) = h(\xi\eta), \qquad (h^x)(\eta) = h(x^{-1}\eta x)$$

für $\eta \in H$. Bei festem $h \in \mathscr{L}^1(H)$ sind $\xi \mapsto {}_\xi h$ und $x \mapsto h^x$ stetige Abbildungen von H bzw. G nach $\mathscr{L}^1(H)$ (vgl. [2], p. 22/p. 10), woraus die Meßbarkeit der Familien P und T folgt. P ist also ein meßbares Faktorensystem von $\dot{G}$ bezüglich T mit Werten in $\mathscr{L}^1(H)$.

Nach Satz 1 können wir die Algebra $\mathscr{L}(\dot{G}, \mathscr{L}^1(H); T, P)$ bilden, welche wir auch kurz mit $\mathscr{L}(\sigma)$ bezeichnen wollen, da T und P durch den Schnitt σ bestimmt sind. $\mathscr{L}(\sigma)$ besitzt eine kanonische Involution: Zunächst rechnet man aus, daß $T^\circ_{\dot{x}} = T_{\dot{x}}$ für alle $\dot{x} \in \dot{G}$ und daß das Faktorensystem $\{P_{\dot{x},\dot{y}}\}$ unitär ist. Dabei setzt man, um $P_{\dot{e},\dot{x}} = P_{\dot{x},\dot{e}} = I$ zu erhalten, $\sigma(\dot{e}) = e$ voraus, was durch Abänderung erreicht werden kann, ohne die Meßbarkeit zu stören. Dann gilt auch $T_{\dot{e}} = I$, man kann also Satz 4 anwenden: $\mathscr{L}(\sigma)$ ist eine involutive Banach-Algebra, wenn man die Involution durch

$$f^*(x) = \Delta(x)^{-1} P^\circ_{\dot{x}^{-1},\dot{x}} T_{\dot{x}^{-1}} f(\dot{x}^{-1})^*$$

definiert.

IV. Satz 5. *Sei G eine lokal kompakte Gruppe, H ein abgeschlossener Normalteiler von G, und σ ein meßbarer Schnitt von G/H in G. Dann sind $\mathscr{L}^1(G)$ und $\mathscr{L}(\sigma)$ als involutive Banach-Algebren isometrisch isomorph.*

Beweis. Die Abbildung Σ: $\mathscr{L}^1(G) \to \mathscr{L}(\sigma)$, die definiert wird durch

$$(\Sigma f)(\dot{x})(\xi) = f(\sigma(\dot{x})\xi)$$

für $f \in \mathscr{L}^1(G)$, $\dot{x} \in G/H$, $\xi \in H$, ist nach [4], § 7 ein isometrischer linearer Isomorphismus. Die Gleichung $\Sigma(f \star g) = \Sigma f \underset{T,P}{\star} \Sigma g$ läßt sich ähnlich wie in [5], p. 265 beweisen, so daß nur noch $(\Sigma f)^* = \Sigma(f^*)$ zu zeigen bleibt. In der folgenden Rechnung bezeichnen Δ_G, $\Delta_{\dot{G}}$ und Δ_H die Modularfunktionen auf G, $\dot{G} = G/H$ und H; der Querstrich über einer komplexen Zahl bedeute ihr Konjugiertes. Zu Beginn der Rechnung verwenden wir $P^\circ_{x^{-1},x} T_{x^{-1}} = P^{-1}_{x^{-1},x} T^{-1}_x$, was aus (2.6) folgt.

$$\begin{aligned}
(\Sigma f)^*(\dot{x})(\xi) &= [\Delta_{\dot{G}}(\dot{x}^{-1}) P^{-1}_{\dot{x}^{-1},\dot{x}} T^{-1}_{\dot{x}} (\Sigma f)(\dot{x}^{-1})^*](\xi) = \\
&= \Delta_{\dot{G}}(\dot{x}^{-1})\,\delta(\sigma(\dot{x}^{-1}))\,(\Sigma f)(\dot{x}^{-1})^*\,(\sigma(\dot{x}^{-1})^{-1}\gamma(\dot{x}^{-1}, \dot{x})^{-1}\xi\,\sigma(\dot{x}^{-1})) = \\
&= \Delta_{\dot{G}}(\dot{x}^{-1})\,\delta(\sigma(\dot{x}^{-1}))\,(\Sigma f)(\dot{x}^{-1})^*\,(\sigma(\dot{x})\,\xi\,\sigma(\dot{x}^{-1})) = \\
&= \Delta_{\dot{G}}(\dot{x}^{-1})\,\delta(\sigma(\dot{x}^{-1}))\,\Delta_H(\sigma(\dot{x})\,\xi\,\sigma(\dot{x}^{-1}))^{-1} \cdot \\
&\quad \cdot \overline{(\Sigma f)(\dot{x}^{-1})(\sigma(\dot{x}^{-1})^{-1}\xi^{-1}\sigma(\dot{x})^{-1})} = \\
&= \Delta_{\dot{G}}(\dot{x}^{-1})\,\delta(\sigma(\dot{x}^{-1}))\,\Delta_H(\sigma(\dot{x})\,\xi\,\sigma(\dot{x}^{-1}))^{-1}\,\overline{f(\xi^{-1}\sigma(\dot{x})^{-1})}\,.
\end{aligned}$$

Nun gilt aber $\Delta_H(\eta) = \Delta_G(\eta)$ für $\eta \in H$ und $\Delta_{\dot{G}}(\dot{y}) = \delta(\sigma(\dot{y})^{-1})\,\Delta_G(\sigma(\dot{y}))$ für $\dot{y} \in \dot{G}$

(vgl. [2], p. 61), so daß wir erhalten:

$$\begin{aligned}(\Sigma f)^*(\dot{x})(\xi) &= \delta(\sigma(\dot{x}^{-1})^{-1})\,\Delta_G(\sigma(\dot{x}^{-1}))\,\delta(\sigma(\dot{x}^{-1}))\,\cdot\\ &\quad\cdot\,\Delta_G(\sigma(\dot{x})\,\xi\,\sigma(\dot{x}^{-1}))^{-1}\,\overline{f(\xi^{-1}\,\sigma(\dot{x})^{-1})} =\\ &= \Delta_G(\sigma(\dot{x})\,\xi)^{-1}\,\overline{f((\sigma(\dot{x})\,\xi)^{-1})} =\\ &= f^*(\sigma(\dot{x})\,\xi) =\\ &= (\Sigma f^*)(\dot{x})(\xi)\,.\end{aligned}$$

Damit ist Satz 5 bewiesen.

Literaturverzeichnis

[1] N. Bourbaki, Intégration, chap. 1—4. Paris 1952.
[2] N. Bourbaki, Intégration, chap. 7—8. Paris 1963.
[3] J. M. G. Fell, An Extension of Mackey's Method to Banach-*-Algebraic Bundles (Preprint). Philadelphia 1968.
[4] H. Leptin, Verallgemeinerte L^1-Algebren. Math. Ann. **159**, 51—76 (1965).
[5] H. Leptin, Verallgemeinerte L^1-Algebren und projektive Darstellungen lokal kompakter Gruppen I. Invent. math. **3**, 257—281 (1967).
[6] H. Reiter, Classical Harmonic Analysis and locally compact Groups. Oxford 1968.
[7] A. Weil, L'intégration dans les groupes topologiques. Paris 1951.
[8] R. C. Busby and H. A. Smith, Representations of twisted group algebras. Trans. Amer. Math. Soc. **149**, 503—537 (1970).

Eingegangen am 26. 9. 1969

Anschrift des Autors:
Michael Leinert
69 Heidelberg 1, Klingentorstraße 16