Math. Ann. 240, 13–19 (1979)

Mathematische Annalen

Abschätzung von Normen gewisser Matrizen und eine Anwendung

Michael Leinert

Institut für Angewandte Mathematik der Universität, Im Neuenheimer Feld 294, D-6900 Heidelberg, Bundesrepublik Deutschland

Es wird gezeigt, daß man gewisse Matrizen als Summe zweier Matrizen von sehr einfacher Bauart darstellen kann. Hieraus ergeben sich unmittelbar Normabschätzungen. Als Folgerung erhält man, daß für die freie Gruppe mit zwei Erzeugenden die verallgemeinerte Fourier-Stieltjes-Algebra $B_2(G)$ im Sinne von Herz [5], von der Fourier-Stieltjes-Algebra $B(G)$ im Sinne von Eymard [3], verschieden ist.

Sei K der Körper der reellen oder der komplexen Zahlen. Für $x=(x_1,\dots,x_n)\in K^n$ ist $|x|_p=\left(\sum_i |x_i|^p\right)^{1/p}$, wenn $1\leqq p<\infty$, und $|x|_\infty=\max|x_i|$. Für eine $n\times n$-Matrix A über K bezeichnet $\|A\|_p$ die Operatornorm von A auf $(K^n, |\ |_p)$. Das komponentenweise Produkt zweier $n\times n$-Matrizen $A=(a_{ik})$ und $B=(b_{ik})$ ist die Matrix $A\cdot B=(a_{ik}b_{ik})$. Mit $|||A|||_p$ bezeichnen wir die Norm des Operators $B\mapsto A\cdot B$ auf dem Raum der $n\times n$-Matrizen über K mit der Norm $\|\ \|_p$. Für $1\leqq p\leqq\infty$ bezeichnen wir mit q den zu p konjugierten Index. Ist G eine diskrete Gruppe, so bezeichnet e das neutrale Element von G und $K(G)$ den Raum aller komplexwertigen Funktionen f auf G, deren Träger $\operatorname{supp}(f)$ endlich ist. Für $f\in K(G)$ ist $|f|_{Cv_p}$ die Norm des durch $g\mapsto f*g$ auf $l^p(G)$ definierten Operators.

(1) *Definition.* Wir sagen, eine $n\times n$-Matrix A sei vom Typ Z (oder: eine Zeilenmatrix), wenn in jeder Spalte von A höchstens ein Eingang von null verschieden ist, d. h. wenn die Zeilen von A paarweise orthogonal sind, auch wenn man die Eingänge von A zuvor mit irgendwelchen Skalaren multipliziert. Entsprechend sei A vom Typ S (oder: eine Spaltenmatrix), wenn in jeder Zeile höchstens ein Eingang von null verschieden ist, wenn also die Spalten, auch nach vorheriger Multiplikation der Eingänge von A mit beliebigen Skalaren, paarweise orthogonal sind.

Ist $A=(a_{ik})$ eine $n\times n$-Matrix vom Typ Z und setzen wir $I=\{1,\dots,n\}$ sowie $I_i=\{k\in I \mid a_{ik}\neq 0\}$ für jedes $i\in I$, so gilt $I_i\cap I_{i'}=\emptyset$ für $i\neq i'$ und natürlich $I\supset\bigcup_1^n I_i$. Wir erhalten deshalb für $x=(x_j)\in K^n$ und $1<p<\infty$:

$$\begin{aligned}|Ax|_p^p&=\sum_i\Big|\sum_k a_{ik}x_k\Big|^p\leqq\sum_i\Big(\sum_{k\in I_i}|a_{ik}|^q\Big)^{p/q}\Big(\sum_{k\in I_i}|x_k|^p\Big)\\&\leqq\max_i\Big(\sum_k|a_{ik}|^q\Big)^{p/q}\cdot\Big(\sum_{k\in\cup I_i}|x_k|^p\Big),\end{aligned}$$

0025-5831/79/0240/0013/$01.40

also $\|A\|_p \leqq \max_i \left(\sum_k |a_{ik}|^q\right)^{1/q}$, und da die umgekehrte Ungleichung für beliebige Matrizen gilt,

$$\|A\|_p = \max_i \left(\sum_k |a_{ik}|^q\right)^{1/q}. \tag{2}$$

Die entsprechende Aussage ist auch für $p=1$ richtig. Im Falle $p=\infty$ gilt (2) für alle $n \times n$-Matrizen.

Ist $A=(a_{ik})$ eine Matrix vom Typ S, so erhalten wir für $1<p<\infty$ durch Dualität aus (2) oder auf direktem Wege unter Benutzung von $\left|\sum_k a_{ik} x_k\right|^p = \sum_k |a_{ik} x_k|^p$ (die Summe enthält höchstens einen Summanden $\neq 0$)

$$\|A\|_p = \max_k \left(\sum_i |a_{ik}|^p\right)^{1/p}. \tag{3}$$

Die entsprechende Aussage ist auch für $p=\infty$ richtig. Im Falle $p=1$ gilt (3) für alle $n \times n$-Matrizen.

Da die Beziehungen

$$\max_i \left(\sum_k |b_{ik}|^q\right)^{1/q} \leqq \|B\|_p$$

und

$$\max_k \left(\sum_i |b_{ik}|^p\right)^{1/p} \leqq \|B\|_p$$

für alle $n \times n$-Matrizen $B=(b_{ik})$ gelten, erhalten wir aus (2) und (3)

$$|||A|||_p = \max_{i,k} |a_{ik}| \tag{4}$$

für jede Matrix A vom Typ Z oder vom Typ S. In den Fällen $p=1$ und $p=\infty$ ist (4) für alle $n \times n$-Matrizen richtig.

Folgerung. *Läßt sich eine $n \times n$-Matrix A als Summe von k Matrizen vom Typ Z und* l
Matrizen vom Typ S schreiben, so gilt

$$\|A\|_p \leqq k \cdot \max_i \left(\sum_j |a_{ij}|^q\right)^{1/q} + l \cdot \max_j \left(\sum_i |a_{ij}|^p\right)^{1/p}$$

und

$$|||A|||_p \leqq (k+l) \max_{i,j} |a_{ij}|.$$

Beweis. Man kann die beteiligten Matrizen (außer A) als „disjunkt" voraussetzen (d. h. keine zwei dieser Matrizen haben an der gleichen Stelle etwas von Null verschiedenes stehen), denn dies läßt sich durch Abändern der Summanden stets erreichen, ohne daß die Typ Z- oder Typ S-Eigenschaft zerstört würde. Nun folgt die erste Ungleichung aus (2) und (3), die zweite aus (4).

Bemerkung. Die Gleichung (4) gilt unabhängig von der Größe der Matrix (d. h. von n). Wenn wir beliebige $n \times n$-Matrizen A betrachten, gilt natürlich immer noch

$|||A|||_p \leqq C_n \max_{i,k} |a_{ik}|$, aber die Konstante C_n strebt für $n \to \infty$ gegen Unendlich. Man sieht dies am folgenden

Beispiel. Sei $k \in N$ und $n = 2^k$. Es gibt eine $n \times n$-Matrix $A = (a_{ik})$ mit paarweise orthogonalen Zeilen, deren Eingänge nur $+1$ oder -1 sind:

Für $n=2$ nehme man die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; erfüllt die Matrix A die Bedingungen für $n = 2^k$, so nehme man für $n = 2^{k+1}$ die Matrix $\begin{pmatrix} A & A \\ A & -A \end{pmatrix}$. Sei nun $n = 2^k$ fest und A eine $n \times n$-Matrix der soeben konstruierten Art. Die Matrix $B = \frac{1}{\sqrt{n}} A$ ist dann unitär, hat also Norm $\|B\|_2 = 1$. Sei P die Matrix $\left(\frac{1+a_{ik}}{2}\right)$, d. h. diejenige Matrix, die man aus A erhält, wenn man in A die Eingänge -1 durch 0 ersetzt. Sei $1 < p \leqq 2$. Wir wollen $|||P|||_p$ abschätzen und betrachten dazu B und $P \cdot B$. Für $x = (x_j) \in K^n$ gilt wegen $|x|_2 \leqq |x|_p$ und $|x|_p \leqq b_n |x|_2$, wo $b_n = n^{1/p - 1/2}$, die Ungleichung $|Bx|_p \leqq b_n |Bx|_2 \leqq b_n \|B\|_2 |x|_2 \leqq b_n |x|_p$, also $\|B\|_p \leqq b_n$.

Für $y = (n^{-1/p}, \ldots, n^{-1/p}) \in K^n$ erhalten wir, da die Matrix $P \cdot A$ in der ersten Zeile lauter Einsen und in allen anderen Zeilen $n/2$ Einsen und $n/2$ Nullen stehen hat,

$$(P \cdot B) y = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad z_1 = n \cdot n^{-1/2} \cdot n^{-1/p},$$

$$z_i = n/2 \cdot n^{-1/2} \cdot n^{-1/p} \quad \text{für} \quad i \geqq 2.$$

Hieraus ergibt sich

$$\begin{aligned} |(P \cdot B) y|_p &= [n^{p/2-1} + (n-1) \cdot 2^{-p} n^{p/2-1}]^{1/p} \\ &\geqq [n \cdot 2^{-p} n^{p/2-1}]^{1/p} = \tfrac{1}{2} n^{1/2}, \end{aligned}$$

also, da $|y|_p = 1$ ist, $\|P \cdot B\|_p \geqq \frac{1}{2} n^{1/2}$. Folglich gilt

$$|||P|||_p \geqq \|P \cdot B\|_p / \|B\|_p \geqq \tfrac{1}{2} n^{1/2} \cdot n^{1/2 - 1/p} = \tfrac{1}{2} n^{1-1/p},$$

und da das Maximum der Eingänge von P gleich 1 ist, ist damit gezeigt, daß die oben erwähnte Konstante C_n mit $n \to \infty$ gegen Unendlich strebt. Natürlich gilt das auch für $2 \leqq p < \infty$ (durch Dualität).

Sei $n \in \mathbb{N}$ fest, und sei $I = \{1, \ldots, n\}$. Sei $H = (h_{ik})$ eine $n \times n$-Matrix über K.

(5) *Definition.* Sind $i, j, k \in I$, so sagen wir, die i-te und die j-te Spalte von H seien k-zusammenhängend (oder kurz: i und j seien k-zusammenhängend), in Zeichen $i \overset{k}{\sim} j$, wenn $h_{ki}, h_{kj} \neq 0$. Wir sagen, die i-te und die j-te Spalte (oder kurz: i und j) seien zusammenhängend, in Zeichen $i \sim j$, wenn es ein $k \in I$ mit $i \overset{k}{\sim} j$ gibt.

(6) *Definition.* Für $i \in I$ ist die Zusammenhangskomponente Z_i von i die Menge aller $j \in I$, für die es eine endliche Folge $j_0, \ldots, j_m$ in I gibt, mit $j_0 = i$, $j_m = j$ und $j_k \sim j_{k+1}$ für $k = 0, \ldots, m-1$.

Offensichtlich gibt es eine Teilmenge $I' \subset I$ mit $Z_r \cap Z_s = \emptyset$ für $r, s \in I'$, $r \neq s$, und $I = \bigcup_{r \in I'} Z_r$.

(7) *Definition.* Die Matrix $H = (h_{ik})$ erfüllt die Bedingung (B), wenn gilt: Ist $(i_1, k_1), \ldots, (i_m, k_m)$ eine endliche Folge in $I \times I$ mit $h_{i_r k_r} \neq 0$ für alle $r \in \{1, \ldots, m\}$ und $(i_1, k_1) = (i_m, k_m)$, und gilt $i_r = i_{r+1}$ für alle ungeraden r sowie $k_r = k_{r+1}$ für alle geraden r, so gibt es ein $j \in \{1, \ldots, m-1\}$ mit $(i_j, k_j) = (i_{j+1}, k_{j+1})$.

(8) **Lemma.** *Eine äquivalente Formulierung von Bedingung (B) lautet: Ist $k_1, \ldots, k_m$ eine endliche Folge in I mit $k_j \neq k_{j+1}$ für $j \in \{1, \ldots, m-1\}$ und gilt $k_1 \overset{i_1}{\sim} k_2 \overset{i_2}{\sim} k_3 \overset{i_3}{\sim} k_4 \ldots \overset{i_{m-1}}{\sim} k_m$ sowie $k_1 = k_m$, so gibt es ein $j \in \{1, \ldots, m-2\}$ mit $i_j = i_{j+1}$.*

Beweis. a) Erfülle die Matrix H Bedingung (B) und sei $k_1, \ldots, k_m$ eine endliche Folge in I mit $k_j \neq k_{j+1}$ für $j \in \{1, \ldots, m-1\}$, $k_1 = k_m$ und $k_1 \overset{i_1}{\sim} k_2 \overset{i_2}{\sim} \ldots \overset{i_{m-1}}{\sim} k_m$. Es gilt also

$$h_{i_1 k_1} h_{i_1 k_2} \neq 0, \ldots, h_{i_{m-1} k_{m-1}} h_{i_{m-1} k_m} \neq 0.$$

Wir betrachten die Folge

$$(i_1, k_1), (i_1, k_2), (i_2, k_2), (i_2, k_3), \ldots, (i_{m-1}, k_{m-1}), (i_{m-1}, k_m)$$

der Länge $2(m-1)$, wobei offenbar das r-te Folgenglied in der ersten Koordinate mit seinem Nachfolger übereinstimmt, falls r ungerade, in der zweiten Koordinate mit seinem Nachfolger übereinstimmt, falls r gerade ist. Wenn $i_{m-1} \neq i_1$, fügen wir noch als letztes Folgenglied (i_1, k_m) hinzu. Nun läßt sich Bedingung (B) anwenden: für ein geeignetes j gilt $i_j = i_{j+1}$ oder $k_j = k_{j+1}$; aber der letztere Fall tritt nach Voraussetzung nicht ein, also $i_j = i_{j+1}$.

b) Erfülle nun H die zweite Bedingung, und sei $(i_1, k_1), \ldots, (i_m, k_m)$ eine Folge der in Bedingung (B) beschriebenen Art. Gilt $k_r = k_{r+1}$ für ein ungerades r, so sind wir fertig, gelte also $k_r \neq k_{r+1}$ für alle ungeraden r. Wir erhalten

$$k_1 \overset{i_1}{\sim} k_2 \overset{i_3}{\sim} k_4 \overset{i_5}{\sim} k_6 \sim \ldots \overset{i_{s-1}}{\sim} k_s,$$

wobei $s = m-1$ oder $s = m$. Ist $s = m-1$, also m ungerade, so gilt $k_{m-1} = k_m = k_1$, wir können somit in beiden Fällen die zweite Bedingung anwenden und erhalten $i_j = i_{j+2}$ für ein gewisses ungerades j, also $i_j = i_{j+1} = i_{j+2}$. Das impliziert $(i_{j+1}, k_{j+1}) = (i_{j+2}, k_{j+2})$.

(9) **Satz.** *Ist $n \in \mathbb{N}$ und $H = (h_{ik})$ eine $n \times n$-Matrix, die Bedingung (B) erfüllt, so gilt:*

(i) *H läßt sich als Summe $H = H_1 + H_2$ mit einer Zeilenmatrix H_1 und einer Spaltenmatrix H_2 schreiben.*

(ii) $\|H\|_p \leqq \max_i \Big(\sum_k |h_{ik}|^q\Big)^{1/q} + \max_k \Big(\sum_i |h_{ik}|^p\Big)^{1/p}$.

(iii) $|||H|||_p \leqq 2 \max_{i,k} |h_{ik}|$.

(iv) *H hat höchstens $2n-1$ von null verschiedene Eingänge.*

Beweis. Wegen (2), (3) und (4) folgen (ii) und (iii) aus (i). Für den Beweis von (i), der mit dem Beweis von Satz 1 in [6] verwandt ist, benutzen wir zwei Lemmata.

(10) **Lemma.** *Die Matrix H erfülle Bedingung (B). Seien $u, v, w \in I$ mit $u \neq v$, $v \neq w$ und $u \overset{k}{\sim} v \overset{k'}{\sim} w$, $u \sim w$. Dann gilt $k = k'$.*

Beweis. Es gibt ein $k''\in I$ mit $u\overset{k''}{\sim}w$. Aus $u\overset{k}{\sim}v\overset{k'}{\sim}w\overset{k''}{\sim}u$ erhalten wir wegen Bedingung (B) $k=k'$ oder $k'=k''$. Im ersten Fall sind wir fertig, sei also $k'=k''$. Dann gilt $u\overset{k}{\sim}v\overset{k'}{\sim}u$, also auch in diesem Falle $k=k'$.

(11) **Lemma.** *Die Matrix H erfülle Bedingung (B). Sei $i\in I$ fest und $Z_i=\{z_1,\ldots,z_r\}$ die Zusammenhangskomponente von i, wobei die z_k voneinander verschieden seien und die Numerierung so gewählt sei, daß es für jedes $x\in\{2,\ldots,r\}$ einen Index $y<x$ mit $z_y\sim z_x$ gibt. Sind $j,j',s\in I$ mit $j,j'<s$ und gilt $z_j\overset{k}{\sim}z_s$ sowie $z_{j'}\overset{k'}{\sim}z_s$, so folgt $k=k'$.*

Beweis. Es gibt zwei endliche Folgen $j_0,\ldots,j_p$ und $i_0,\ldots,i_q$ in $\{1,\ldots,r\}$ mit

$$\text{(a)}\quad 1=j_0<j_1<\ldots<j_p=j$$
$$1=i_0<i_1<\ldots<i_q=j'$$

und

$$\text{(b)}\quad z_{j_v}\sim z_{j_{v+1}},\qquad 0\leqq v\leqq p-1$$
$$z_{i_w}\sim z_{i_{w+1}},\qquad 0\leqq w\leqq q-1,$$

und wir können annehmen, daß beide Folgen minimal sind, also nicht verkürzt werden können, ohne daß die Eigenschaft (b) verlorengeht. Es gilt

$$z_1=z_{j_0}\sim z_{j_1}\sim\ldots\sim z_{j_p}=z_j\overset{k}{\sim}z_s\overset{k'}{\sim}z_{j'}=z_{i_q}\sim\ldots\sim z_{i_1}\sim z_{i_0}=z_1\,.$$

Offenbar ist jedes Glied z_μ dieser Kette von seinem Vorgänger verschieden. Im Falle, daß $z_{j_{p-1}}\sim z_s$ bzw. $z_s\sim z_{i_{q-1}}$, verkürzen wir die Kette durch Weglassen von z_{j_p} bzw. z_{i_q}.

Wegen Lemma (10) gilt dann $z_{j_{p-1}}\overset{k}{\sim}z_s$ bzw. $z_s\overset{k'}{\sim}z_{i_{q-1}}$. Wir haben $z_{j_{p-2}}\overset{h}{\sim}z_{j_{p-1}}$ mit $h\neq k$ bzw. $z_{i_{q-1}}\overset{h'}{\sim}z_{i_{q-2}}$ mit $h'\neq k'$, wegen der Minimalität der Folgen $j_0,\ldots,j_p$ und $i_0,\ldots,i_q$. Die Bedingung (B) impliziert $k=k'$, womit das Lemma bewiesen ist.

Nun zum Beweis von (i) des Satzes:

Wir definieren eine Matrix $P=(p_{ik})_{i,k\in I}$. Ist $g\in I'$ [I' wie vor (7)] und $Z_g=\{z_1,\ldots,z_r\}$, wie in Lemma (11), so erklären wir p_{ik} für $k\in Z_g$ folgendermaßen: für $i\in I$, $1<j\leqq r$ sei

$$p_{iz_1}=\begin{cases}1 & \text{wenn}\quad h_{iz_1}\neq 0\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

$$p_{iz_j}=\begin{cases}1 & \text{wenn}\quad h_{iz_j}\neq 0, h_{iz_{j'}}=0\quad\text{für alle}\quad j'\quad\text{mit}\quad 1\leqq j'<j\\ 0 & \text{sonst}.\end{cases}$$

In jeder Zeile der Matrix P steht höchstens eine Eins.

Wir definieren $Q=(q_{ik})_{i,k\in I}$ durch

$$q_{ik}=\begin{cases}1 & \text{wenn}\quad h_{ik}\neq 0\quad\text{und}\quad p_{ik}=0\\ 0 & \text{sonst}.\end{cases}$$

Aus Lemma (11) folgt, daß in jeder Spalte von Q höchstens eine Eins steht. Mit $H_1=Q\cdot H$ und $H_2=P\cdot H$ gelten offenbar die Behauptungen (i) und (iv) des Satzes.

Wir wollen die Definition von $B_p(G)$ in [5] für den Fall einer diskreten Gruppe G in Erinnerung rufen. Ist $k:G\times G\to\mathbb{C}$ ein endlicher Kern, d.h. gilt $k(x,y)\neq 0$ nur für endlich viele Punkte (x, y), so bezeichne $\|k\|_p$ die Norm des durch k auf $l^p(G)$ definierten Operators $f \mapsto Kf$ mit $Kf(x) = \sum_y k(x, y) f(y)$.

Für jede Funktion $g: G \to \mathbb{C}$ definieren wir $Mg: G \times G \to \mathbb{C}$ durch $Mg(x, y) = g(xy^{-1})$. Wenn es eine Konstante $C > 0$ gibt mit $\|Mg \cdot k\|_p \leqq C\|k\|_p$ für jeden endlichen Kern k, so gehört g zu $B_p(G)$, und die kleinste solche Konstante wird mit $|g|_{B_p(G)}$ bezeichnet. $(B_p(G), |\ |_{B_p(G)})$ ist mit punktweise definierten Operationen eine kommutative Banach-Algebra mit Eins. Für amenable Gruppen ist bekannt (siehe [5]), daß $B_2(G)$ mit der Fourier-Stieltjes-Algebra im Sinne von Eymard [3] übereinstimmt.

(12) **Korollar.** *Ist G die freie Gruppe mit zwei Erzeugenden, so gilt – in den Bezeichnungen von Herz [5] – $B_2(G) \neq FS(G)$, d. h. $B_2(G)$ ist von der Fourier-Stieltjes-Algebra von G verschieden.*

Beweis. Sei $T \subset G$ eine unendliche Teilmenge, welche die folgende Bedingung erfüllt (vgl. [6]):

(∗) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, \ldots, x_{2n} \in T$ mit $x_i \neq x_{i+1}$ für $i = 1, \ldots, 2n-1$ gilt $x_1^{-1} x_2 \ldots x_{2n-1}^{-1} x_{2n} \neq e$.

Sei g die charakteristische Funktion von T und h die durch $h(x, y) = g(xy^{-1})$ definierte Funktion auf $G \times G$. Ist k eine komplexwertige Funktion auf $G \times G$ mit endlichem Träger, so läuft das Berechnen von $\|k\|_2$ und $\|hk\|_2$ darauf hinaus, die Operatornorm $\|\ \|_2$ zweier genügend großer $n \times n$-Matrizen K und $H \cdot K$ zu ermitteln.

Sei

$$J_1 = \{x \in G \mid \text{es gibt ein } y \in G \text{ mit } k(x, y) \neq 0\},$$

$$J_2 = \{y \in G \mid \text{es gibt ein } x \in G \text{ mit } k(x, y) \neq 0\},$$

$$J = J_1 \cup J_2 = \{x_1, \ldots, x_n\} \text{ mit } x_i \neq x_j \text{ für } i \neq j,$$

$$I = \{1, \ldots, n\}.$$

Wir definieren $h_{ik} = h(x_i, x_k)$ für $i, k \in I$. Sei nun $(i_1, k_1), \ldots, (i_m, k_m)$ eine endliche Folge in $I \times I$ mit $(i_1, k_1) = (i_m, k_m)$ und $h_{i_j k_j} \neq 0$ für alle j sowie $i_r = i_{r+1}$ für alle ungeraden r, $k_r = k_{r+1}$ für alle geraden r.

Mit $t_j = x_{i_j} x_{k_j}^{-1}$ gilt $t_1, \ldots, t_m \in T$ und für gerades m

$$t_m^{-1} t_{m-1} \ldots t_2^{-1} t_1 = e,$$

für ungerades m

$$t_2^{-1} t_m t_{m-1}^{-1} t_{m-2} \ldots t_4^{-1} t_3 = e.$$

Da $t_m = t_1$, erhalten wir, gleich ob m gerade oder ungerade ist, aus Bedingung (∗), daß $t_j = t_{j+1}$ für ein $j \in \{1, \ldots, m-1\}$.

Das impliziert $x_{i_j} x_{k_j}^{-1} x_{k_{j+1}} x_{i_{j+1}}^{-1} = e$, und da $i_j = i_{j+1}$ oder $k_j = k_{j+1}$, folgt $(i_j, k_j) = (i_{j+1}, k_{j+1})$. Die Matrix $H = (h_{ik})$ erfüllt also die Bedingung (B). Wir definieren die Matrix $K = (k_{rs})$ durch $k_{rs} = k(x_r, x_s)$ für $r, s \in I$. Aus Satz (9) erhalten wir $\|hk\|_2$

$=\|H\cdot K\|_2\leqq 2\|K\|_2=2\|k\|_2$, somit gilt $g\in B_2(G)$ und $|g|_{B_2(G)}\leqq 2$. Da $g\notin FS(G)$ (vgl. [6]), ist der Beweis beendet.

(13) *Bemerkung*. Aus dem Beweis des vorangegangenen Korollars folgt offenbar, daß für $1<p<\infty$ jede beschränkte Funktion f auf G, deren Träger die Bedingung $(*)$ erfüllt, zu $B_p(G)$ gehört und Norm $|f|_{B_p(G)}\leqq 2\cdot\sup\limits_{x\in G}|f(x)|$ hat.

Das folgende Ergebnis ist bekannt (vgl. [1, 2, 4, 6]):

(14) **Korollar.** *Ist* $v\in K(G)$ *und erfüllt* $\operatorname{supp}(v)$ *die Bedingung* $(*)$, *so gilt*

$$|v|_{Cv_2}\leqq 2|v|_2.$$

Beweis. Sei $u\in K(G)$. Da $v*u(x)=\sum\limits_{y\in G}v(xy^{-1})u(y)$, setzen wir $h(x,y)=v(xy^{-1})$ für $x,y\in I=\operatorname{supp}(u)\cup(\operatorname{supp}(v)\operatorname{supp}(u))$.

Aus dem Beweis des vorangegangenen Korollars wissen wir, daß die Matrix $H=(h(x,y))_{x,y\in I}$ die Bedingung (B) erfüllt. Wegen Satz (9) gilt also für $1<p<\infty$

$$|v*u|_p\leqq\|H\|_p|u|_p\leqq(|v|_q+|v|_p)|u|_p. \tag{15}$$

Insbesondere $|v|_{Cv_2}\leqq 2|v|_2$.

(16) *Bemerkung*. Ist $1\leqq p\leqq 2$ und T eine Teilmenge von G, die Bedingung $(*)$ erfüllt, so ist nach (15) für Funktionen mit Träger in T die Faltungsnorm $|\ |_{Cv_p}$ mit der Norm $|\ |_p$ äquivalent:

$$|f|_p\leqq|f|_{Cv_p}\leqq 2|f|_p,$$

oder genauer (durch Interpolation)

$$|f|_p\leqq|f|_{Cv_p}\leqq 2^{2/q}|f|_p.$$

Wenn $p>2$, gilt, wie man leicht sieht, die Äquivalenz der Normen $|\ |_p$ und $|\ |_{Cv_p}$ für Funktionen mit Träger in T nur, wenn T endlich ist.

Literatur

1. Akemann, Ch. A., Ostrand, Ph. A.: Computing norms in group C^*-algebras. Preprint
2. Bożejko, M.: On $\Lambda(p)$ sets with minimal constant in discrete noncommutative groups. Proc. Amer. Math. Soc. **51**, 407–412 (1975)
3. Eymard, P.: L'algèbre de Fourier d'un groupe localement compact. Bull. Soc. Math. France **92**, 181–236 (1964)
4. Flory, V.: Estimating norms in C^*-algebras of discrete groups II. Preprint
5. Herz, C.: Une généralisation de la notion de transformée de Fourier-Stieltjes. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **24**, 3, 145–157 (1974)
6. Leinert, M.: Faltungsoperatoren auf gewissen diskreten Gruppen. Studia Math. **52**, 149–158 (1974)

Received August 8, 1977