Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Naturwissenschaftlich-Mathematischen Gesamtfakultät

der

Ruprecht-Karls-Universität

Heidelberg

vorgelegt von

Diplommathematiker Klaus Werner

aus Speyer

1996

Komplexe Interpolation und nicht-kommutative Integration

Gutachter: Prof. Dr. Michael Leinert
Prof. Dr. Wolfgang Krieger

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

J. Dixmier entwickelt als erster eine Theorie der nicht-kommutativen L^p-Räume – des Analogons zu den Lebesgue-L^p-Räumen mit einer nicht-kommutativen von Neumann-Algebra in der Rolle des L^∞ – für halbendliche von Neumann-Algebren ([Di]). U. Haagerup definiert L^p-Räume ausgehend von nicht notwendig halbendlichen von Neumann-Algebren ([Ha]). Der Durchschnitt von L^{p_1} und L^{p_2} ist hierbei allerdings $\{0\}$, für $p_1 \neq p_2$. M. Hilsum definiert L^p als Räume von (i. a. unbeschränkten) Operatoren auf dem Hilbertraum, auf welchem die von Neumann-Algebra operiert ([Hi]). Auch hier kann der Durchschnitt von L^{p_1} und L^{p_2} wieder $\{0\}$ sein.

M. Terp beginnt mit der Betrachtung des Durchschnitts L von L^∞ und L^1 und bettet diese Räume mittels der transponierten Abbildungen der Inklusionen $L \hookrightarrow L^\infty$ und $L \hookrightarrow L^1$ in den Dualraum L' ein ([Te]). M. Leinert definiert seinen L^1 als Raum von gewissen Sesquilinearformen auf dem zugrundeliegenden Hilbertraum. L^∞ wird ebenfalls in den Raum der Sesquilinearformen (mit der Topologie der punktweisen Konvergenz) eingebettet ([Le]). M. Terp und M. Leinert definieren also beide einen topologischen Vektorraum, in dem L^∞ und L^1 enthalten sind. Daher ist (L^∞, L^1) ein Interpolationspaar, und die komplexe Interpolationsmethode ist anwendbar. M. Terp zeigt, daß der Raum $V_p := (L^\infty, L^1)_{[\theta]}$, $\theta = \frac{1}{p}$, isomorph zu U. Haagerups L^p ist. M. Leinert zeigt, daß seine Methode im wesentlichen zum selben Interpolationspaar führt und daher seine Interpolationsräume L^p isomorph zu den V_p sind.

Der so definierte L^2 ist ein Hilbertraum, und die übliche Dualität zwischen L^p und L^q besteht. Dies kann man über die Isomorphie der Räume von Leinert, Terp, Hilsum und Haagerup erhalten. Haagerup schließlich führt das Problem auf den Fall einer halbendlichen von Neumann-Algebra zurück.

In dieser Arbeit wird gezeigt, daß unter geeigneten Bedingungen bei der Interpolation zwischen einem Banachraum A und seinem Dualraum A' der zur Stelle $\theta = \frac{1}{2}$ gehörige Interpolationsraum ein Hilbertraum ist und für beliebiges $\theta \in (0,1)$ gilt

$$(A, A')'_{[\theta]} \cong (A, A')_{[1-\theta]}.$$

Wendet man dieses Ergebnis auf den speziellen Fall der nicht-kommutativen L^p-Räume von Leinert und Terp an, erhält man, daß L^2 ein Hilbertraum ist und daß L^p isomorph zum Dualraum von L^q ist für $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, ohne dabei auf die oben erwähnten Isomorphismen zurückzugreifen.

Die wesentlichen Bedingungen an das Interpolationspaar (A', A) sind erstens, daß eine Involution $*$ auf dem Durchschnitt $\Delta = A' \cap A$ existiert, so daß

$$\langle x, y \rangle := \langle x, y^* \rangle_{A,A'}, \qquad x, y \in \Delta,$$

ein Skalarprodukt auf Δ ist und zweitens, daß der Durchschnitt des dualen Interpolationspaares in gewissem Sinne gleich dem Durchschnitt des ursprünglichen Interpolationspaares ist. Hieraus ergibt sich, daß die dualen Interpolationsräume isomorph zu den ursprünglichen sind, was eine Abschätzung der Normen ermöglicht.

U. Haagerup, G. Pisier ([HP]) und F. Watbled ([Wa]) geben Bedingungen an, unter denen der mittlere Interpolationsraum zwischen einem Banachraum und seinem konjugierten Dualraum ein Hilbertraum ist. Das oben genannte Ergebnis läßt sich auf diesen Fall (des konjugierten Dualraums) übertragen und impliziert die Ergebnisse der erwähnten Autoren.

An dieser Stelle möchte ich Prof. Dr. M. Leinert für die hervorragende Betreuung und das stets vorhandene Interesse an dieser Arbeit danken. Meinen Eltern danke ich für ihre vielfältige Unterstützung.

1 Interpolation

Im folgenden werden kurz zwei komplexe Interpolationsmethoden und deren Eigenschaften vorgestellt. Details und Beweise finden sich bei A. P. Calderón ([Ca]) und bei J. Bergh/J. Löfström ([BL]).

1.1 Verträgliche Paare

Seien A_0 und A_1 topologische Vektorräume.

Definition 1.1.1 A_0 und A_1 heißen *(miteinander) verträglich*, oder das Paar $\overline{A} = (A_0, A_1)$ heißt *verträglich (Interpolationspaar)*, wenn es einen Hausdorffschen topologischen Vektorraum A mit stetigen linearen Inklusionsabbildungen von A_0 und A_1 nach A gibt.

In diesem Fall kann man A_0 und A_1 als Teilräume von A auffassen, und es existiert deren Summe

$$\Sigma\left(\overline{A}\right) := A_0 + A_1 = \{a \in A \mid \exists\, a_0 \in A_0,\, a_1 \in A_1 : a = a_0 + a_1\}$$

und deren Durchschnitt

$$\Delta\left(\overline{A}\right) := A_0 \cap A_1.$$

Seien A_0 und A_1 verträgliche normierte Vektorräume. Dann ist $\Delta\left(\overline{A}\right)$ mit folgender Norm ein normierter Vektorraum:

$$\|a\|_{\Delta(\overline{A})} := \max\left(\|a\|_{A_0}, \|a\|_{A_1}\right), \qquad a \in A_0 \cap A_1.$$

Ebenso ist $\Sigma\left(\overline{A}\right)$ ein normierter Vektorraum mit

$$\|a\|_{\Sigma(\overline{A})} := \inf\left\{\|a_0\|_{A_0} + \|a_1\|_{A_1} \mid a = a_0 + a_1;\, a_0 \in A_0,\, a_1 \in A_1\right\}$$

für $a \in A_0 + A_1$.
Falls A_0 und A_1 vollständig sind, so sind auch $\Delta\left(\overline{A}\right)$ und $\Sigma\left(\overline{A}\right)$ mit den angegebenen Normen vollständig.

Definition 1.1.2 Sei $\overline{A} = (A_0, A_1)$ ein verträgliches Paar von Banachräumen. Ein Banachraum A heißt *Zwischen-Raum (intermediärer Raum) von A_0 und A_1* (oder *von* $\overline{A}$), wenn

$$\Delta\left(\overline{A}\right) \subset A \subset \Sigma\left(\overline{A}\right)$$

mit stetigen Inklusionen. Gilt zusätzlich für beschränkte lineare Abbildungen $T : A_0 + A_1 \to A_0 + A_1$ mit $T|_{A_0} : A_0 \to A_0$ (beschränkt) und $T|_{A_1} : A_1 \to A_1$ (beschränkt), daß

$$T|_A : A \to A \text{ (beschränkt)},$$

so heißt A *Interpolationsraum von A_0 und A_1* (oder *von* $\overline{A}$).

1.2 Die komplexen Interpolationsmethoden

Seien

$$S := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq Re\, z \leq 1\},$$
$$S_0 := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < Re\, z < 1\}.$$

Sei $\overline{A} = (A_0, A_1)$ ein Interpolationspaar von Banachräumen. Mit $\mathcal{F}\left(\overline{A}\right)$ werde der Raum aller Funktionen $f : S \to \Sigma\left(\overline{A}\right)$ bezeichnet, die folgenden Bedingungen genügen:

- (i) f ist beschränkt und stetig auf S,
- (ii) f ist analytisch auf dem Inneren S_0 von S,
- (iii) $t \mapsto f(j + it)$ sind stetige Funktionen von $\mathbb{R}$ nach A_j und $\lim_{|t|\to\infty} \|f(j + it)\|_{A_j} = 0,\ j = 0, 1.$

Mit der üblichen Addition und skalaren Multiplikation ist $\mathcal{F}\left(\overline{A}\right)$ ein Vektorraum über $\mathbb{C}$. $\mathcal{F}\left(\overline{A}\right)$ mit der Norm

$$\|f\|_{\mathcal{F}(\overline{A})} := \max\left(\sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(it)\|_{A_0},\ \sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(1 + it)\|_{A_1}\right), \qquad f \in \mathcal{F}\left(\overline{A}\right),$$

ist ein Banachraum.
Für $0 \leq \theta \leq 1$ wird der Raum $A_{[\theta]}$ wie folgt definiert:

$$A_{[\theta]} := \{a \in \Sigma\left(\overline{A}\right) \mid \exists\, f \in \mathcal{F}\left(\overline{A}\right) \,:\, f(\theta) = a\}.$$

$A_{[\theta]}$ sei mit folgender Norm versehen:

$$\|a\|_{[\theta]} := \inf \left\{ \|f\|_{\mathcal{F}(\overline{A})} \,\middle|\, f \in \mathcal{F}\left(\overline{A}\right),\, f(\theta) = a \right\}, \qquad a \in A_{[\theta]}.$$

$A_{[\theta]}$ ist ein Interpolationsraum von $\overline{A}$ für $0 \leq \theta \leq 1$.

Die zweite komplexe Interpolationsmethode, die im folgenden definiert wird, ist in gewissem Sinne dual zur ersten (siehe Abschnitt 1.3).
Sei $\overline{A} = (A_0, A_1)$ ein Interpolationspaar von Banachräumen. Mit $\mathcal{G}\left(\overline{A}\right)$ werde der Raum aller Funktionen $g : S \to \Sigma\left(\overline{A}\right)$ bezeichnet, die folgenden Bedingungen genügen:

(*i*) $\exists\, c > 0 : \|g(z)\|_{\Sigma(\overline{A})} \leq c(1 + |z|) \quad \forall z \in S$,

(*ii*) g ist stetig auf S und analytisch auf dem Inneren S_0 von S,

(*iii*) $g(j + it_1) - g(j + it_2) \in A_j \quad \forall\, t_1, t_2 \in I\!R,\ j = 0, 1$,

und folgende Norm ist endlich

$$\|g\|_{\mathcal{G}(\overline{A})} :=$$
$$\max\left(\sup_{t_1 \neq t_2 \in I\!R} \left\| \frac{g(it_1) - g(it_2)}{t_1 - t_2} \right\|_{A_0},\ \sup_{t_1 \neq t_2 \in I\!R} \left\| \frac{g(1 + it_1) - g(1 + it_2)}{t_1 - t_2} \right\|_{A_1} \right).$$

$\mathcal{G}\left(\overline{A}\right)$ modulo konstanter Funktionen, mit der Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{G}(\overline{A})}$ versehen, ist ein Banachraum.
Für $0 < \theta < 1$ wird der Raum $A^{[\theta]}$ wie folgt definiert:

$$A^{[\theta]} := \{a \in \Sigma\left(\overline{A}\right) \mid \exists\, g \in \mathcal{G}\left(\overline{A}\right)\ :\ g'(\theta) = a\}.$$

$A^{[\theta]}$ sei mit folgender Norm versehen:

$$\|a\|^{[\theta]} := \inf \left\{ \|g\|_{\mathcal{G}(\overline{A})} \,\middle|\, g \in \mathcal{G}\left(\overline{A}\right),\, g'(\theta) = a \right\}, \qquad a \in A^{[\theta]}.$$

$A^{[\theta]}$ ist ein Interpolationsraum von $\overline{A}$ für $0 < \theta < 1$.

1.3 Eigenschaften von $A_{[\theta]}$ und $A^{[\theta]}$

Im folgenden Lemma werden einige wichtige Eigenschaften der komplexen Interpolationsmethoden festgehalten.

Lemma 1.3.1 *Sei* (A_0, A_1) *ein Interpolationspaar von Banachräumen, und sei* $0 < \theta < 1$.
Dann gilt

(i) $\Delta\left(\overline{A}\right)$ *ist dicht in* $A_{[\theta]}$.

(ii)

$$\begin{aligned}(A_0, A_1)_{[\theta]} &= (A_1, A_0)_{[1-\theta]}\\ (A_0, A_1)^{[\theta]} &= (A_1, A_0)^{[1-\theta]}.\end{aligned}$$

(iii) *Sei* A_j^0 *der Abschluß von* $\Delta\left(\overline{A}\right)$ *in* A_j *für* $j = 0, 1$. *Dann gilt*

$$\begin{aligned}(A_0, A_1)_{[\theta]} &= (A_0^0, A_1)_{[\theta]} = (A_0, A_1^0)_{[\theta]} = (A_1^0, A_0^0)_{[\theta]},\\ (A_0, A_1)^{[\theta]} &= (A_0^0, A_1)^{[\theta]} = (A_0, A_1^0)^{[\theta]} = (A_1^0, A_0^0)^{[\theta]}.\end{aligned}$$

Beweis: siehe [Ca], [BL].

Lemma 1.3.1,(iii) bedeutet, daß die Voraussetzung „$\Delta\left(\overline{A}\right)$ sei dicht in A_0 und A_1“ meist keine wesentliche Einschränkung ist.

Die beiden Interpolationsmethoden liefern im allgemeinen nicht die gleichen Interpolationsräume. Ein Beispiel hierfür steht bei A. P. Calderón ([Ca]). Es besteht aber dennoch ein enger Zusammenhang zwischen ihnen:

Lemma 1.3.2 *Mit den Bezeichnungen von oben gilt*

$$(A_0, A_1)_{[\theta]} \subset (A_0, A_1)^{[\theta]}, \quad \|a\|_{[\theta]} = \|a\|^{[\theta]} \quad \forall a \in A_{[\theta]}.$$

Dieses Ergebnis geht auf J. Bergh zurück ([Be]).

Lemma 1.3.3 *Sei* (A_0, A_1) *ein Interpolationspaar von Banachräumen, bei dem* A_0 *oder* A_1 *reflexiv ist, und sei* $0 < \theta < 1$.
Dann gilt

(i) $A_{[\theta]} = A^{[\theta]}$

(ii) $A_{[\theta]}$ *ist reflexiv.*

Beweis: siehe [Ca].

Ein weiterer sehr wichtiger Zusammenhang zwischen den beiden Interpolationsmethoden geht aus folgendem Dualitätssatz hervor. Dabei wird der Dualraum eines Banachraumes X mit X' bezeichnet.

Satz 1.3.4 *Sei (A_0, A_1) ein Interpolationspaar von Banachräumen, bei dem $\Delta := \Delta\left(\overline{A}\right)$ dicht in A_0 und A_1 ist.*
Dann ist

$$(A_0, A_1)'_{[\theta]} = (A'_0, A'_1)^{[\theta]}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Beweis: siehe [Ca].

Hierzu einige Erläuterungen:
A_0 und A_1 enthalten Δ als dichte Teilmenge. Die Inklusionen sind stetig bezüglich der jeweiligen Normen. Daher kann man A'_0 und A'_1 (vermöge der Transponierten der Inklusionsabbildungen) als Teilräume von Δ' auffassen. Auf diese Weise wird (A'_0, A'_1) zum Interpolationspaar.

Der Durchschnitt $\Delta(A'_0, A'_1)$ besteht aus allen Elementen von Δ', die stetig bezüglich der Normen von A_0 und A_1 sind. Zwei Elemente $y_0 \in A'_0$ und $y_1 \in A'_1$ sind gleich in $\Sigma(A'_0, A'_1)$, wenn gilt

$$\langle x, y_0 \rangle_{A_0, A'_0} = \langle x, y_1 \rangle_{A_1, A'_1} \qquad \forall x \in \Delta.$$

Es gilt $\Delta(A_0, A_1)' = \Sigma(A'_0, A'_1)$ und $\Sigma(A_0, A_1)' = \Delta(A'_0, A'_1)$.

Der Interpolationsraum $(A')^{[\theta]} := (A'_0, A'_1)^{[\theta]} \subset \Sigma(A'_0, A'_1) = \Delta'$ besteht aus allen Elementen y von Δ', die bezüglich der Norm von $A_{[\theta]}$ auf Δ stetig sind. Da Δ dicht in $A_{[\theta]}$ ist, definiert ein solches Element y eindeutig ein Element von $(A_{[\theta]})'$. Die Dualität von $A_{[\theta]}$ und $(A')^{[\theta]}$ ist die Fortsetzung der Dualität von Δ und $\Sigma(A'_0, A'_1)$, d. h. für $x \in \Delta$ und $y \in (A')^{[\theta]}$, $y = y_0 + y_1$ mit $y_j \in A'_j$, $j = 0, 1$, gilt

$$\langle x, y \rangle_{A_{[\theta]}, (A')^{[\theta]}} = \langle x, y \rangle_{\Delta, \Sigma(A'_0, A'_1)} = \langle x, y_0 \rangle_{A_0, A'_0} + \langle x, y_1 \rangle_{A_1, A'_1}.$$

Der nächste Satz besagt, daß iterierte Interpolation, d. h. Interpolation zwischen zwei Interpolationsräumen desselben Interpolationspaares, die ursprünglichen dazwischenliegenden Interpolationsräume reproduziert (für die erste Interpolationsmethode).

Satz 1.3.5 *Sei (A_0, A_1) ein Interpolationspaar von Banachräumen. Setze*

$$X_j := (A_0, A_1)_{[\theta_j]}, \quad 0 \leq \theta_j \leq 1, \ j = 0, 1.$$

Dann ist (X_0, X_1) ein Interpolationspaar (enthalten in $A_0 + A_1$), und es gilt

$$(X_0, X_1)_{[\eta]} = (A_0, A_1)_{[\theta]}, \quad 0 \leq \eta \leq 1,$$

wobei $\theta = (1 - \eta)\theta_0 + \eta\,\theta_1$.

Beweis: siehe [Cw].

Ein Beispiel für komplexe Interpolationsräume sind die (kommutativen) L^p-Räume auf einem Maßraum. Es ist $L^p = (L^\infty, L^1)_{[\theta]}$ mit $\theta = \frac{1}{p}$. Diese Beziehung wird bei M. Leinert und M. Terp im nicht-kommutativen Fall als Definition für die L^p-Räume verwendet. Darauf wird im folgenden Abschnitt eingegangen. Details und Beweise finden sich in [Le].

2 Integration bezüglich eines Gewichtes

Sei $\mathcal{A}$ eine von Neumann-Algebra auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ und φ ein normales, treues, halbendliches Gewicht auf $\mathcal{A}$. Seien

$$\begin{aligned} N_\varphi &:= \{x \in \mathcal{A} \mid \varphi(x^*x) < \infty\}, \\ M_\varphi &:= \mathrm{Lin}\{x^*y \mid x, y \in N_\varphi\}. \end{aligned}$$

$\mathcal{H}_\varphi$ sei die Vervollständigung von N_φ bezüglich des Skalarprodukts

$$\langle x, y \rangle_{\mathcal{H}_\varphi} := \varphi(y^*x).$$

Es sei x_φ das Bild von $x \in N_\varphi$ unter der Inklusionsabbildung $N_\varphi \hookrightarrow \mathcal{H}_\varphi$. $J\Delta_\varphi^{\frac{1}{2}}$ sei die Polarzerlegung des Abschlusses des Involutionsoperators auf $N_\varphi \cap N_\varphi^*$ (als Operator in $\mathcal{H}_\varphi$). Mit L_x für $x \in \mathcal{A}$ werde der beschränkte Operator auf $\mathcal{H}_\varphi$ bezeichnet, der auf N_φ der Linksmultiplikation mit x entspricht.

2.1 Das Oberintegral

Für $y, z \in N_\varphi$ und $x \in \mathcal{A}$ sei

$$\varphi_{y^*z}(x) := \langle z_\varphi, JL_xJy_\varphi \rangle_{\mathcal{H}_\varphi}.$$

Die Abbildung $y^*z \mapsto \varphi_{y^*z}$, $y, z \in N_\varphi$, läßt sich zu einem linearen $*$-Isomorphismus von M_φ in das Prädual $\mathcal{A}_*$ von $\mathcal{A}$ fortsetzen, der positive Elemente auf positive abbildet.
Für $x = x^* \in M_\varphi$ gilt:

$$\|\varphi_x\| = \inf\{\varphi(y) + \varphi(z) \mid x = y - z;\ y, z \in M_\varphi^+\},$$

wobei $\|\varphi_x\|$ die Prädualnorm (Funktionalnorm) bezeichnet.

$D = D(\mathcal{H}, \varphi)$ sei der Vektorraum aller φ-beschränkten Vektoren. D liegt dicht in $\mathcal{H}$.

X sei der Vektorraum aller Sesquilinearformen auf $\mathcal{H}$, deren Definitionsbereich $D \times D$ umfaßt. $F \overset{D}{=} G$ für $F, G \in X$ bedeute $F(\xi, \eta) = G(\xi, \eta)\ \forall \xi, \eta \in D$.

Durch „$\stackrel{D}{=}$“ wird eine Äquivalenzrelation auf X definiert. $X/\stackrel{D}{=}$ mit der Topologie der punktweisen Konvergenz ist ein Hausdorffscher topologischer Vektorraum. Die kanonische Abbildung von $\mathcal{A}$ nach $X/\stackrel{D}{=}$, $x \mapsto [\langle x\cdot, \cdot\rangle_{\mathcal{H}}]$ ist injektiv und stetig.

Sei $t : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ eine Sesquilinearform mit Definitionsbereich $D(t) \times D(t)$. $t(u) := t(u, u)$.

$$\Theta(t) := \{t(u) \mid u \in D(t), \|u\| = 1\}.$$

Definition 2.1.1 t heißt *sektoriell*, wenn es ein reelles γ und ein $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ gibt, so daß

$$\Theta(t) \subset \{\xi \in \mathbb{C} \,:\, |\arg(\xi - \gamma)| \leq \theta\}.$$

Sei t sektoriell. Eine Folge $\{u_n\}$ von Vektoren aus $\mathcal{H}$ heißt *t-konvergent* (*gegen* $u \in \mathcal{H}$), (schreibe $u_n \stackrel{t}{\to} u$), wenn $u_n \in D(t), u_n \to u$ und $t(u_n - u_m) \to 0$ für $n, m \to \infty$. t heißt *abgeschlossen*, wenn aus $u_n \stackrel{t}{\to} u$ folgt: $u \in D(t)$ und $t(u_n - u) \to 0$ für $n \to \infty$.

Definition 2.1.2 Ein (nicht notwendig beschränkter) linearer Operator x in $\mathcal{H}$ heißt *zu $\mathcal{A}$ affiliiert*, wenn $xu = ux$ für alle unitären u aus $\mathcal{A}'$, der Kommutante von $\mathcal{A}$.

Sei x ein positiver selbstadjungierter Operator in $\mathcal{H}$, der zu $\mathcal{A}$ affiliiert ist. Die zu x gehörige abgeschlossene positive Form

$$(\xi, \eta) \mapsto \langle x^{\frac{1}{2}}\xi, x^{\frac{1}{2}}\eta\rangle_{\mathcal{H}}$$

für $\xi, \eta \in D(x^{\frac{1}{2}})$ wird wieder mit x bezeichnet. Es sei $\langle x\xi, \eta\rangle_{\mathcal{H}} := \langle x^{\frac{1}{2}}\xi, x^{\frac{1}{2}}\eta\rangle_{\mathcal{H}}$ für $\xi, \eta \in D(x^{\frac{1}{2}})$ und $\langle x\xi, \xi\rangle_{\mathcal{H}} := \infty$ für $\xi \notin D(x^{\frac{1}{2}})$.

Das Oberintegral $\overline{\varphi}(x)$ sei definiert durch

$$\overline{\varphi}(x) := \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(x_n) \,\middle|\, x_n \in M_{\varphi}^{+}, \sum_{n=1}^{\infty} x_n \geq x\right\},$$

wobei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n \geq x$ bedeute: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \langle x_n\xi, \xi\rangle_{\mathcal{H}} \geq \langle x\xi, \xi\rangle_{\mathcal{H}} \quad \forall \xi \in \mathcal{H}$.

Falls $\overline{\varphi}(x) < \infty$, so gilt

(i) $D \subset D(x^{\frac{1}{2}})$.

(ii) Es gibt $x_n \in M_\varphi^+$ mit $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ (punktweise als Formen) und $\overline{\varphi}(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi(x_n)$.

2.2 Definition von L_φ^1 und L_φ^p

Sei $L^1 = L_\varphi^1$ der Raum aller (Äquivalenzklassen von) Linearkombinationen von abgeschlossenen positiven Formen, die durch positive, selbstadjungierte, zu $\mathcal{A}$ affiliierte Operatoren x mit $\overline{\varphi}(x) < \infty$ definiert sind ($(\xi, \eta) \mapsto \langle x^{\frac{1}{2}}\xi, x^{\frac{1}{2}}\eta\rangle_{\mathcal{H}}$).
Für $x \in L_h^1$ (hermitesche Formen in L^1) sei

$$\|x\|_1 := \inf\{\overline{\varphi}(y) + \overline{\varphi}(z) \mid y, z \text{ affiliiert mit } \mathcal{A},\ y, z \geq 0,\ x \overset{D}{=} y - z\}.$$

Mit dieser Norm ist L_h^1 ein reeller Banachraum.
Die Abbildung $f^+ : (L^1)^+ \to (\mathcal{A}_*)^+$,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \mapsto \varphi_x := \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{x_n}$$

ist wohldefiniert und positiv linear. Ihre reell-lineare Fortsetzung ist ein isometrischer Isomorphismus von L_h^1 auf $(\mathcal{A}_*)_h$. Dieser kann $\mathbb{C}$-linear zu einem Isomorphismus $f : L^1 \to \mathcal{A}_*$ fortgesetzt werden. Die 1-Norm wird folgendermaßen definiert:

$$\|x\|_1 := \|f(x)\|_{\mathcal{A}_*} \qquad \text{für } x \in L^1.$$

Die Inklusionen von L^1 und $L^\infty := \mathcal{A}$ in $X/\overset{D}{=}$ sind stetig, deshalb läßt sich die Interpolationstheorie anwenden. Für $1 < p < \infty$ sei

$$L^p := (L^\infty, L^1)_{[\frac{1}{p}]}.$$

M. Leinert zeigt in [Le], daß seine L^p-Räume isomorph zu Terps V_p-Räumen in [Te] sind. M. Terp geht aus vom Raum L aller $x \in \mathcal{A}$, für die ein $\varphi_x \in \mathcal{A}_*$ existiert, so daß

$$\langle \varphi_x, z^* y\rangle := \varphi_x(z^* y) = \langle J(L_x)^* J y_\varphi, z_\varphi\rangle_{\mathcal{H}_\varphi} \qquad \forall\, y, z \in N_\varphi,$$

mit der Norm $\|x\|_L := \max\{\|\varphi_x\|, \|x\|\}$. Dann bettet sie $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}_*$ stetig in den Dualraum L' von L ein und erhält so ein Interpolationspaar $(\mathcal{A}, \mathcal{A}_*)$.
Sie setzt

$$V_p := (\mathcal{A}, \mathcal{A}_*)_{[\frac{1}{p}]}.$$

M. Leinert zeigt, daß $L = L^\infty \cap L^1$ und damit $V_p = L^p$.

Einige Ergebnisse von M. Terp werden in folgendem Satz zusammengestellt:

Satz 2.2.1 *Mit den Bezeichnungen von oben gilt*

(i) $M_\varphi \subset L = \{x \in \mathcal{A} \mid \exists\, \varphi_x \in \mathcal{A}_*,$ *so daß* $\langle \varphi_x, y\rangle = \langle \varphi_y, x\rangle \ \forall y \in M_\varphi\}$.

(ii) L *ist normdicht in* L^1.

(iii) *Zu* $x \in L$ *gibt es ein Netz* $(x_i)_{i \in I}$ *in* M_φ, *so daß*

$$\sup\{\|x_i\|_L \mid i \in I\} < \infty,$$

$$x_i \longrightarrow x \qquad \sigma\text{-schwach},$$

$$\|\varphi_{x_i} - \varphi_x\| \longrightarrow 0.$$

(iv) $\forall x, y \in L$ *gilt* $\langle \varphi_x, y\rangle = \langle \varphi_y, x\rangle$.

(v) *Sei* $x \in \mathcal{A}$. *Dann gilt*

$$x \in L \iff \exists\, C \geq 0, \text{ so daß } |\langle \varphi_y, x\rangle| \leq C\|y\| \quad \forall y \in M_\varphi.$$

Beweis: siehe [Te].

3 Der Hilbertraum L^2

Die Bezeichnungen in diesem Abschnitt werden vom vorhergehenden Abschnitt übernommen.

Zunächst wird gezeigt, daß die Dualität auf L^1 und L^∞ ein Skalarprodukt auf L definiert.

3.1 Das Skalarprodukt auf L

Lemma 3.1.1 *Seien $x, y \in M_\varphi$.*
Dann ist

$$\langle \varphi_x, y^* \rangle = \langle \Delta_\varphi^{\frac{1}{2}} x_\varphi, y_\varphi \rangle_{\mathcal{H}_\varphi},$$

also ist

$$\langle x, y \rangle_{\mathcal{H}_0} := \langle \varphi_x, y^* \rangle$$

ein Skalarprodukt auf M_φ.
Die Vervollständigung von M_φ bezüglich dieses Skalarprodukts werde mit $\mathcal{H}_0$ bezeichnet.

Beweis: Sei $x = \sum_{i=1}^{n} w_i^* v_i$ mit $v_i, w_i \in N_\varphi$ für $1 \leq i \leq n$. Für alle $u, v \in M_\varphi$ gilt (siehe [St], [SZ]):

$$J L_u J \, v_\varphi = L_v J \, u_\varphi,$$

daher folgt

$$\begin{aligned}
\langle \varphi_x, y^* \rangle &= \sum_{i=1}^{n} \langle J L_y J (v_i)_\varphi, (w_i)_\varphi \rangle_{\mathcal{H}_\varphi} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle L_{v_i} J y_\varphi, (w_i)_\varphi \rangle_{\mathcal{H}_\varphi} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle J y_\varphi, (L_{v_i})^* (w_i)_\varphi \rangle_{\mathcal{H}_\varphi} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle J y_\varphi, (v_i^* w_i)_\varphi \rangle_{\mathcal{H}_\varphi}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\langle Jy_\varphi, \left(\sum_{i=1}^n v_i^* w_i\right)_\varphi \right\rangle_{\mathcal{H}_\varphi} \\
&= \langle Jy_\varphi, x_\varphi^* \rangle_{\mathcal{H}_\varphi} \\
&= \left\langle Jy_\varphi, J\Delta_\varphi^{\frac{1}{2}} x_\varphi \right\rangle_{\mathcal{H}_\varphi} \\
&= \overline{\left\langle y_\varphi, \Delta_\varphi^{\frac{1}{2}} x_\varphi \right\rangle_{\mathcal{H}_\varphi}} \\
&= \left\langle \Delta_\varphi^{\frac{1}{2}} x_\varphi, y_\varphi \right\rangle_{\mathcal{H}_\varphi}.
\end{aligned}
$$

□

Lemma 3.1.2 *Seien $x, y \in L$. Setze*

$$\langle x, y \rangle_{\mathcal{H}} := \langle \varphi_x, y^* \rangle.$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$ ist ein Skalarprodukt auf L. Die Vervollständigung von L bezüglich dieses Skalarprodukts werde mit $\mathcal{H}$ bezeichnet.
Es gilt

$$\mathcal{H}_0 \cong \mathcal{H}$$

vermöge der Fortsetzung der Inklusion $M_\varphi \hookrightarrow L$. Dabei sei $\mathcal{H}_0$ wie in Lemma 3.1.1 definiert.

Beweis: $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$ ist offensichtlich eine Sesquilinearform, die auf M_φ mit $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}_0}$ übereinstimmt.
Seien $x, y \in L$ und $(x_i)_{i \in I}$, $(y_k)_{k \in K}$ zu x bzw. y gehörige Netze wie in Satz 2.2.1,(iii). Da $(y_k)_{k \in K}$ beschränkt ist in $\|\cdot\|_L$ und damit auch in $\|\cdot\|$ (der Norm von L^∞) und $\|\varphi_x - \varphi_{x_i}\| \to 0$, gilt

$$\langle \varphi_x - \varphi_{x_i}, y_k^* \rangle \longrightarrow 0$$

gleichmäßig in k. Ebenso gilt

$$\langle \varphi_x - \varphi_{x_i}, y^* \rangle \longrightarrow 0.$$

Da $y_k^* \longrightarrow y^*$ σ-schwach, folgt

$$\langle \varphi_x, y_k^* \rangle \quad \longrightarrow \quad \langle \varphi_x, y^* \rangle.$$

Daher konvergiert $\langle x_i, y_k\rangle_{\mathcal{H}}$ gegen $\langle x, y\rangle_{\mathcal{H}}$:

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle_{\mathcal{H}} - \langle x_i, y_k\rangle_{\mathcal{H}} &= \langle \varphi_x, y^*\rangle - \langle \varphi_{x_i}, y_k^*\rangle \\ &= \langle \varphi_x - \varphi_{x_i}, y^*\rangle + \langle \varphi_{x_i}, y^*\rangle - \langle \varphi_x, y_k^*\rangle + \langle \varphi_x - \varphi_{x_i}, y_k^*\rangle \\ &\longrightarrow 0 + \langle \varphi_x, y^*\rangle - \langle \varphi_x, y^*\rangle + 0 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Daraus folgt erstens, daß $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}}$ Hermitesch ist,

$$\langle x, y\rangle_{\mathcal{H}} \quad \longleftarrow \quad \langle x_i, y_k\rangle_{\mathcal{H}} = \overline{\langle y_k, x_i\rangle_{\mathcal{H}}} \quad \longrightarrow \quad \overline{\langle y, x\rangle_{\mathcal{H}}},$$

und zweitens, mit $x = y$, daß $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}}$ positiv semidefinit ist,

$$0 \leq \langle x_i, x_i\rangle_{\mathcal{H}} \longrightarrow \langle x, x\rangle_{\mathcal{H}} \geq 0.$$

Es bleibt zu zeigen, daß $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}}$ positiv definit ist.

Sei $\langle x, x\rangle_{\mathcal{H}} = 0$. Aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung (für positiv semidefinite Sesquilinearformen) folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \langle x, y^*\rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \langle \varphi_x, y\rangle \\ &= \langle \varphi_y, x\rangle \qquad \forall y \in L.\end{aligned}$$

Also ist x=0, denn die φ_y, $y \in L$, liegen dicht im Prädual. Falls also $x \neq 0$, so ist $0 \neq \langle x, x\rangle_{\mathcal{H}} \geq 0 \;\Rightarrow\; \langle x, x\rangle_{\mathcal{H}} > 0$.

Daher ist $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}}$ ein Skalarprodukt auf L, das auf $M_\varphi \subset L$ mit dem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}_0}$ übereinstimmt. M_φ liegt dicht in $\mathcal{H}$, da für $x \in L, (x_i)_{i\in I}$ (wie oben), x_i gegen x in $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ konvergiert:

$$\begin{aligned}\|x - x_i\|_{\mathcal{H}}^2 &= \langle \varphi_{(x-x_i)}, (x - x_i)^*\rangle \\ &= \langle \varphi_x - \varphi_{x_i}, x^* - x_i^*\rangle \longrightarrow 0,\end{aligned}$$

da die Menge $\{x^* - x_i^* \,|\, i \in I\}$ in der Norm beschränkt ist.

Also ist $\mathcal{H}$ isometrisch isomorph zu $\mathcal{H}_0$.

□

Lemma 3.1.3 *Die Involution ist eine isometrische Abbildung auf* $(L, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}})$ *und auf* $(L, \|\cdot\|_1)$.

Beweis: Seien $x, y \in L$.
Der erste Teil der Behauptung folgt aus der Gleichung

$$\begin{aligned} \langle x^*, y^* \rangle_{\mathcal{H}} &= \langle \varphi_{x^*}, y \rangle \\ &= \langle \varphi_y, x^* \rangle \\ &= \langle y, x \rangle_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Der zweite Teil ergibt sich daraus, daß

$$(\varphi_x)^* = \varphi_{x^*}$$

gilt und somit die Funktionalnormen übereinstimmen:

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{x^*}, y \rangle &= \langle x^*, y^* \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \langle y, x \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \overline{\langle x, y \rangle_{\mathcal{H}}} \\ &= \overline{\langle \varphi_x, y^* \rangle} \end{aligned}$$

für alle $y \in L$.

$M_\varphi \subset L$ ist σ-schwach dicht in L^∞.

$\Longrightarrow \quad \varphi_{x^*} = (\varphi_x)^*$

$\Longrightarrow \quad \|x^*\|_1 = \|\varphi_{x^*}\| = \|(\varphi_x)^*\| = \|\varphi_x\| = \|x\|_1.$

□

3.2 Interpolation zwischen einem Banachraum und seinem Dualraum

Im folgenden sei eine Involution auf einem komplexen Vektorraum (ohne multiplikative Struktur) eine konjugiert-lineare, selbstinverse Abbildung. Das nächste Lemma schließt also insbesondere den Fall einer isometrischen Involution ein.

Lemma 3.2.1 *Sei (A_0, A_1) ein Interpolationspaar von Banachräumen, bei dem der Durchschnitt $\Delta := A_0 \cap A_1$ dicht in A_0 und A_1 ist.*
$T : \Delta \to \Delta$ sei eine konjugiert-lineare, surjektive Abbildung, die isometrisch in

$\|\cdot\|_{A_0}$ *und* $\|\cdot\|_{A_1}$ *ist.*
Dann ist T *auch bezüglich der Normen von* $(A_0, A_1)_{[\theta]}$ *und* $(A_0, A_1)^{[\theta]}$ *isometrisch für* $0 < \theta < 1$.

Beweis: T läßt sich eindeutig zu einer konjugiert-linearen, isometrischen, surjektiven Abbildung auf A_0 und A_1 und damit auch auf $A_0 + A_1$ fortsetzen. Diese Abbildung wird wieder mit T bezeichnet.
Sie ist auf $A_0 + A_1$ wohldefiniert, denn seien $a_0, b_0 \in A_0$, $a_1, b_1 \in A_1$ und $a_0 + a_1 = b_0 + b_1$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad a_0 - b_0 &= b_1 - a_1 \in \Delta \\ \Longrightarrow \quad T(a_0 - b_0) &= T(b_1 - a_1) \in \Delta \\ \Longrightarrow \quad T(a_0) - T(b_0) &= T(b_1) - T(a_1) \\ \Longrightarrow \quad T(a_0) + T(a_1) &= T(b_0) + T(b_1). \end{aligned}$$

T ist isometrisch auf $A_0 + A_1$:
Sei $a \in A_0 + A_1$.

$$\begin{aligned} &\|T(a)\|_{A_0+A_1} \\ &= \inf\{\|a_0\|_{A_0} + \|a_1\|_{A_1} \mid T(a) = a_0 + a_1,\ a_0 \in A_0,\ a_1 \in A_1\} \\ &= \inf\{\|T^{-1}(a_0)\|_{A_0} + \|T^{-1}(a_1)\|_{A_1} \mid a = T^{-1}(a_0) + T^{-1}(a_1),\ a_j \in A_j\} \\ &\overset{T^{-1}\text{ surj.}}{=} \inf\{\|a_0\|_{A_0} + \|a_1\|_{A_1} \mid a = a_0 + a_1,\ a_j \in A_j\} \\ &= \|a\|_{A_0+A_1}. \end{aligned}$$

Die Surjektivität von T auf $A_0 + A_1$ folgt aus der Surjektivität auf A_0 und A_1.

Sei $S := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq Re\, z \leq 1\}$. Zu einer Funktion $f : S \longrightarrow A_0 + A_1$ sei $\overline{T}(f) : S \longrightarrow A_0 + A_1$ definiert durch

$$\overline{T}(f)(z) := T(f(\overline{z}))$$

und $\overline{T}^{-1}(f)$ durch

$$\overline{T}^{-1}(f)(z) := T^{-1}(f(\overline{z})).$$

Seien $\mathcal{F} := \mathcal{F}(A_0, A_1)$ und $\mathcal{G} := \mathcal{G}(A_0, A_1)$ wie in Abschnitt 1.2 definiert.
Seien $0 < \theta < 1$ und $a \in (A_0, A_1)_{[\theta]}$. $\overline{T}$ bildet

$$\mathcal{F}_a := \{f \in \mathcal{F}(A_0, A_1) \mid f(\theta) = a\}$$

bijektiv und isometrisch bezüglich der Norm von $\mathcal{F}(A_0, A_1)$ auf

$$\mathcal{F}_{T(a)} := \{g \in \mathcal{F}(A_0, A_1) \mid g(\theta) = T(a)\}$$

ab:
Sei $f \in \mathcal{F}_a$. $\overline{T}(f)$ ist offensichtlich wieder beschränkt und stetig. Die Funktionen $t \mapsto \overline{T}(f)(j + it)$, $j = 0, 1$, sind stetige Funktionen von $I\!R$ nach A_j, die gegen 0 konvergieren für $|t| \to \infty$.
$\overline{T}(f)$ ist analytisch in $S_0 = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < Re\, z < 1\}$, denn

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{T}(f)(z_1) - \overline{T}(f)(z_0)}{z_1 - z_0} &= \frac{T(f(\overline{z_1})) - T(f(\overline{z_0}))}{z_1 - z_0} \\
&= \frac{T(f(\overline{z_1}) - f(\overline{z_0}))}{z_1 - z_0} \\
&= T\left(\frac{f(\overline{z_1}) - f(\overline{z_0})}{\overline{z_1} - \overline{z_0}}\right) \\
\Longrightarrow \quad \lim_{z_1 \to z_0} \left(\frac{\overline{T}(f)(z_1) - \overline{T}(f)(z_0)}{z_1 - z_0}\right) &= \lim_{\overline{z_1} \to \overline{z_0}} T\left(\frac{f(\overline{z_1}) - f(\overline{z_0})}{\overline{z_1} - \overline{z_0}}\right) \\
&= T\left(\lim_{\overline{z_1} \to \overline{z_0}} \frac{f(\overline{z_1}) - f(\overline{z_0})}{\overline{z_1} - \overline{z_0}}\right) \\
&= T(f'(\overline{z_0})).
\end{aligned}$$

$\overline{T}$ ist eine Isometrie auf $\mathcal{F}(A_0, A_1)$ wegen

$$\begin{aligned}
\|\overline{T}(f)\|_{\mathcal{F}} &= \max\left(\sup_{t \in I\!R} \|\overline{T}(f)(it)\|_{A_0}, \sup_{t \in I\!R} \|\overline{T}(f)(1 + it)\|_{A_1}\right) \\
&= \max\left(\sup_{t \in I\!R} \|T(f(-it))\|_{A_0}, \sup_{t \in I\!R} \|T(f(1 - it))\|_{A_1}\right) \\
&= \max\left(\sup_{t \in I\!R} \|f(-it)\|_{A_0}, \sup_{t \in I\!R} \|f(1 - it)\|_{A_1}\right) \\
&= \|f\|_{\mathcal{F}}.
\end{aligned}$$

Analog kann man zeigen, daß $\overline{T}^{-1}(g)$, $g \in \mathcal{F}_{T(a)}$ in $\mathcal{F}(A_0, A_1)$ liegt und daß $\|g\|_{\mathcal{F}} = \left\|\overline{T}^{-1}(g)\right\|_{\mathcal{F}}$. Offensichtlich ist $\overline{T}^{-1}|_{\mathcal{F}_{T(a)}}$ die Umkehrabbildung von $\overline{T}|_{\mathcal{F}_a}$.
Daher gilt

$$\begin{aligned}
\|T(a)\|_{[\theta]} &= \inf\{\|g\|_{\mathcal{F}} \mid g \in \mathcal{F}_{T(a)}\} \\
&= \inf\{\|f\|_{\mathcal{F}} \mid f \in \mathcal{F}_a\} \\
&= \|a\|_{[\theta]}.
\end{aligned}$$

Sei nun $a \in (A_0, A_1)^{[\theta]}$. $\overline{T}$ bildet

$$\mathcal{G}_a := \{f \in \mathcal{G}(A_0, A_1) \mid f'(\theta) = a\}$$

bijektiv und isometrisch auf

$$\mathcal{G}_{T(a)} := \{g \in \mathcal{G}(A_0, A_1) \mid g'(\theta) = T(a)\}$$

ab:
Für $f \in \mathcal{G}_a$ und $g \in \mathcal{G}_{T(a)}$ gilt $\overline{T}(f), \overline{T}^{-1}(g) \in \mathcal{G}(A_0, A_1)$.

$$\begin{array}{rclcl} \overline{T}(f)'(\theta) &=& T(f'(\theta)) &=& T(a) \implies \overline{T}(f) \in \mathcal{G}_{T(a)} \\ \overline{T}^{-1}(g)'(\theta) &=& T^{-1}(g'(\theta)) &=& a \implies \overline{T}^{-1}(g) \in \mathcal{G}_a. \end{array}$$

$\overline{T}$ ist eine Isometrie auf $\mathcal{G}(A_0, A_1)$ wegen

$$\begin{aligned} &\|\overline{T}(f)\|_{\mathcal{G}} \\ &= \max\left(\sup_{t_1 \neq t_2 \in I\!R} \left\| \frac{\overline{T}(f)(it_1) - \overline{T}(f)(it_2)}{t_1 - t_2} \right\|_{A_0}, \sup_{t_1 \neq t_2 \in I\!R} \left\| \frac{\overline{T}(f)(1+it_1) - \overline{T}(f)(1+it_2)}{t_1 - t_2} \right\|_{A_1} \right) \\ &= \max\left(\sup_{t_1 \neq t_2 \in I\!R} \left\| T\left(\frac{f(-it_1) - f(-it_2)}{t_1 - t_2} \right) \right\|_{A_0}, \sup_{t_1 \neq t_2 \in I\!R} \left\| T\left(\frac{f(1-it_1) - f(1-it_2)}{t_1 - t_2} \right) \right\|_{A_1} \right) \\ &= \max\left(\sup_{t_1 \neq t_2 \in I\!R} \left\| \frac{f(i(-t_1)) - f(i(-t_2))}{(-t_1) - (-t_2)} \right\|_{A_0}, \sup_{t_1 \neq t_2 \in I\!R} \left\| \frac{f(1+i(-t_1)) - f(1+i(-t_2))}{(-t_1) - (-t_2)} \right\|_{A_1} \right) \\ &= \|f\|_{\mathcal{G}} \end{aligned}$$

für $f \in \mathcal{G}(A_0, A_1)$.

Offensichtlich ist $\overline{T}^{-1}|_{\mathcal{G}_{T(a)}}$ die Umkehrabbildung von $\overline{T}|_{\mathcal{G}_a}$. Daher gilt

$$\begin{aligned} \|T(a)\|^{[\theta]} &= \inf\{\|g\|_{\mathcal{G}} \mid g \in \mathcal{G}_{T(a)}\} \\ &= \inf\{\|f\|_{\mathcal{G}} \mid f \in \mathcal{G}_a\} \\ &= \|a\|^{[\theta]}. \end{aligned}$$

□

Lemma 3.2.2 *Sei (A_0, A_1) ein Interpolationspaar von Banachräumen. Es gebe ein $\theta_0 \in [0,1]$, so daß $(A_0, A_1)_{[\theta_0]}$ reflexiv ist.*
Dann gilt

(i) $(A_0, A_1)_{[\theta]}$ *ist reflexiv für* $0 < \theta < 1$.

(ii) $(A_0, A_1)_{[\theta]} = (A_0, A_1)^{[\theta]}$ *für* $0 < \theta < 1$.

Beweis: Sei $0 < \theta < 1$, $\theta \neq \theta_0$. Nach Satz 1.3.5 ist $(A_0, A_1)_{[\theta]}$ ein Interpolationsraum von $K := (A_0, A_1)_{[\theta_0]}$ und A_j, wobei $j = 0$, falls $\theta < \theta_0$ und $j = 1$, falls $\theta > \theta_0$. Ohne Einschränkung sei $\theta < \theta_0$. Mit $\eta = \theta/\theta_0$ gilt also

$$(A_0, A_1)_{[\theta]} = (A_0, K)_{[\eta]}.$$

Nach Lemma 1.3.3,(ii) ist daher $(A_0, A_1)_{[\theta]}$ reflexiv.

Nach Lemma 1.3.3,(i) gilt $(A_0, K)_{[\eta]} = (A_0, K)^{[\eta]}$. Da $(A_0, A_1)^{[\theta]}$ in $(A_0, K)^{[\eta]}$ enthalten ist (siehe [Ca]), folgt

$$(A_0, A_1)^{[\theta]} \subset (A_0, K)^{[\eta]} = (A_0, K)_{[\eta]} = (A_0, A_1)_{[\theta]}.$$

Mit Lemma 1.3.2 folgt Behauptung (ii) für $\theta \neq \theta_0$. Da alle Interpolationsräume $(A_0, A_1)_{[\theta]}$, $0 < \theta < 1$, reflexiv sind, kann man dasselbe Argument mit einem beliebigen $\theta_1 \neq \theta_0$ an Stelle von θ_0 wiederholen und erhält somit Behauptung (ii) auch für θ_0, falls $\theta_0 \neq 0, 1$.

□

Der folgende Satz liefert hinreichende Bedingungen dafür, daß erstens der mittlere Interpolationsraum ein Hilbertraum ist, zweitens die Interpolationsräume reflexiv sind und drittens der Interpolationsraum an der Stelle θ isomorph zum Dualraum des Interpolationsraums an der Stelle $1 - \theta$ ist. Diese Bedingungen werden von dem Interpolationspaar (L^∞, L^1) erfüllt, wie in Satz 3.3.2 gezeigt wird.

Satz 3.2.3 *Sei* (A_0, A_1) *ein Interpolationspaar von Banachräumen mit*

$$A_1' = A_0,$$

bei dem der Durchschnitt $\Delta := A_0 \cap A_1$ *dicht in* A_1 *ist.*
Für alle $x \in \Delta$ *gelte*

$$\|x\|_{A_1} = \sup\{\, |\langle x, y\rangle_{A_1,A_0}| \;:\; y \in \Delta, \|y\|_{A_0} \leq 1\}.$$

Zu einem linearen Funktional ψ *auf* Δ*, das stetig ist bezüglich der Normen von* A_0 *und* A_1*, gebe es ein* $z \in \Delta$ *mit*

$$\psi(x) = \langle x, z\rangle_{A_1,A_0} \qquad \forall x \in \Delta.$$

Auf Δ gebe es eine Involution $*$, so daß

$$\langle x, y\rangle_{\mathcal{H}} := \langle x, y^*\rangle_{A_1,A_0}, \qquad x, y \in \Delta,$$

ein Skalarprodukt auf Δ ist. $\mathcal{H}$ bezeichne die Vervollständigung von Δ bezüglich dieses Skalarprodukts.
Die Involution sei isometrisch in $\|\cdot\|_{A_0}, \|\cdot\|_{A_1}$ und $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$.
Dann ist

$$(A_0, A_1)_{[\frac{1}{2}]} \cong \mathcal{H}.$$

Weiter gilt für $0 < \theta < 1$:

$$\begin{array}{ll} (i) & (A_0, A_1)_{[\theta]} \text{ ist reflexiv,} \\ (ii) & (A_0, A_1)_{[\theta]} = (A_0, A_1)^{[\theta]}, \\ (iii) & (A_0, A_1)'_{[\theta]} = (A_0, A_1)_{[1-\theta]}. \end{array}$$

Bemerkungen:

1. Streng genommen müßte die letzte Behauptung $(A_0, A_1)'_{[\theta]} \cong (A_0, A_1)_{[1-\theta]}$ lauten. Im Beweis werden alle Räume als Teilräume des Dualraums von Δ betrachtet. In diesem Sinne besteht tatsächlich echte Gleichheit.

2. Es mag verwirren, daß der Hilbertraum $(A_0, A_1)_{[\frac{1}{2}]}$ gleich seinem Dualraum statt seinem konjugierten Dualraum ist. Das liegt daran, daß die Dualität auf $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ eine Fortsetzung der Dualität von A_1 und A_0 auf $\Delta \times \Delta$ ist.
Siehe dazu auch Abschnitt 5.1.

Beweis von Satz 3.2.3: Sei B_0 der Abschluß von Δ in A_0. Nach Lemma 1.3.1,(iii) gilt

$$(A_0, A_1)_{[\theta]} = (B_0, A_1)_{[\theta]}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Δ ist dicht in A_1 und B_0. Daher gilt nach Satz 1.3.4

$$(B_0, A_1)'_{[\theta]} = (B_0', A_1')^{[\theta]}, \quad 0 < \theta < 1,$$

wobei (B_0', A_1') wiederum ein Interpolationspaar ist. B_0' und A_1' sind beide stetig im Dualraum Δ' von Δ enthalten. Insbesondere ist $\Delta \subset A_1' \subset \Delta'$.

A_1 kann als Teilraum von $B_0' \subset \Delta'$ aufgefaßt werden, denn jedes $x \in A_1$ definiert ein Funktional $i_{A_1}(x)$ auf B_0 durch

$$i_{A_1}(x)(y) := \langle x, y\rangle_{A_1,A_0}, \quad y \in B_0.$$

Dies entspricht der kanonischen Einbettung von A_1 in A_1'', wobei nur die Einschränkungen der Funktionale von A_1'' auf den Teilraum B_0 von A_1' betrachtet werden.

Es wird nun gezeigt, daß die identifizierende Einbettung von A_1 in B_0' isometrisch ist und daß der Durchschnitt von A_1 und B_0 im ursprünglichen Interpolationspaar gleich dem Durchschnitt von B_0' und A_1' im dualen Interpolationspaar ist. Daraus folgt, daß die beiden Interpolationspaare dieselben Interpolationsräume liefern.
Die Einbettung $i_{A_1} : A_1 \hookrightarrow B_0'$ ist wegen

$$\begin{aligned} \|i_{A_1}(x)\|_{B_0'} &= \sup\{\, |\langle x, y\rangle_{A_1,A_0}| \;:\; y \in \Delta, \|y\|_{B_0} \leq 1\} \\ &= \|x\|_{A_1} \qquad \forall x \in \Delta \end{aligned}$$

isometrisch auf Δ und damit auf ganz A_1, denn i_{A_1} ist stetig. Die letzte Gleichung gilt nach Voraussetzung, da die Normen von B_0 und A_0 auf Δ gleich sind. Da die Involution isometrisch in der Norm von $\mathcal{H}$ ist, ergibt sich durch Polarisierung für das Skalarprodukt:

$$\begin{aligned} \langle x, y\rangle_{\mathcal{H}} &= \frac{1}{4}\left(\sum_{n=0}^{3} i^n \langle x + i^n y, x + i^n y\rangle_{\mathcal{H}}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\sum_{n=0}^{3} i^n \langle (x + i^n y)^*, (x + i^n y)^*\rangle_{\mathcal{H}}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\sum_{n=0}^{3} i^n \langle x^* + i^{-n} y^*, x^* + i^{-n} y^*\rangle_{\mathcal{H}}\right) \\ &= \overline{\frac{1}{4}\left(\sum_{n=0}^{3} i^{-n} \langle x^* + i^{-n} y^*, x^* + i^{-n} y^*\rangle_{\mathcal{H}}\right)} \\ &= \overline{\langle x^*, y^*\rangle}_{\mathcal{H}} \end{aligned}$$

für alle $x, y \in \Delta$.
Für $x \in \Delta$ stimmen daher die Funktionswerte von $i_{A_1}(x) \in B_0'$ und $x \in A_1'$ auf Δ überein, denn

$$\begin{aligned} \langle y, i_{A_1}(x)\rangle_{B_0,B_0'} &= \langle x, y\rangle_{A_1,A_0} &&= \langle x, y^*\rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \overline{\langle y^*, x\rangle}_{\mathcal{H}} &&= \langle y, x^*\rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \langle y, x\rangle_{A_1,A_0} && \forall y \in \Delta. \end{aligned}$$

Also ist $i_{A_1}(x) = x$ als Element von Δ' für alle $x \in \Delta \subset A_0 = A_1'$.

Der Durchschnitt der Dualräume A_1' und B_0' ist wiederum Δ, denn die Inklusion $\Delta \subset A_1' \cap B_0'$ wurde gerade gezeigt, und die umgekehrte Inklusion gilt ebenfalls:
Sei $y \in A_1' \cap B_0'$, dann gibt es nach Voraussetzung ein $z \in \Delta$ mit

$$\begin{aligned} \langle x, z\rangle_{A_1,A_1'} &= \langle x, y\rangle_{A_1,A_1'} \\ &= \langle x, y\rangle_{B_0,B_0'} \qquad \forall x \in \Delta. \end{aligned}$$

Das bedeutet $z = y$ als Element von Δ'. Somit gilt auch $A_1' \cap B_0' \subset \Delta$.
Für den Abschluß des Durchschnitts in B_0' folgt

$$\overline{\Delta}^{\|\cdot\|_{B_0'}} = A_1,$$

denn A_1 ist isometrisch in B_0' enthalten und Δ liegt dicht in A_1.
Daher gilt nun

$$\begin{aligned} (A_0, A_1)'_{[\theta]} &= (B_0, A_1)'_{[\theta]} \\ &= (B_0', A_1')^{[\theta]} \\ &= (A_1, A_0)^{[\theta]} \\ &= (A_0, A_1)^{[1-\theta]} \end{aligned} \tag{1}$$

für $0 < \theta < 1$.
Für $\theta = \frac{1}{2}$ folgt

$$(A_0, A_1)'_{[\frac{1}{2}]} = (A_0, A_1)^{[\frac{1}{2}]}.$$

$K := (A_0, A_1)_{[\frac{1}{2}]}$ ist nach [Be] in $(A_0, A_1)^{[\frac{1}{2}]} = K'$ enthalten, und die Normen stimmen überein, d. h. für $x \in K$ gilt $\|x\|_K = \|x\|_{K'}$.
Nach Lemma 3.2.1 gilt $\|x^*\|_K = \|x\|_K$ für alle $x \in \Delta$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \|x\|_{\mathcal{H}}^2 &= \langle x, x\rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \langle x, x^*\rangle_{A_1,A_0} \\ &= \langle x, x^*\rangle_{K,K'} \\ &\leq \|x\|_K \|x^*\|_{K'} \\ &= \|x\|_K \|x^*\|_K \\ &= \|x\|_K^2 \\ \Longrightarrow \quad \|x\|_{\mathcal{H}} &\leq \|x\|_K \end{aligned}$$

für alle $x \in \Delta$.
Die umgekehrte Ungleichung gilt ebenfalls:
Nach Lemma 1.3.1,(i) ist Δ dicht in K, folglich gilt

$$\begin{aligned} \|x\|_K = \|x\|_{K'} &= \sup\{\, |\langle y, x\rangle_{K,K'}| \;:\; \|y\|_K \le 1, y \in \Delta\} \\ &\le \sup\{\, |\langle y, x\rangle_{K,K'}| \;:\; \|y\|_{\mathcal{H}} \le 1, y \in \Delta\} \\ &= \sup\{\, |\langle y, x\rangle_{A_1,A_0}| \;:\; \|y\|_{\mathcal{H}} \le 1, y \in \Delta\} \\ &= \sup\{\, |\langle y, x^*\rangle_{\mathcal{H}}| \;:\; \|y\|_{\mathcal{H}} \le 1, y \in \Delta\} \\ &= \|x^*\|_{\mathcal{H}} \\ &= \|x\|_{\mathcal{H}} \end{aligned}$$

für alle $x \in \Delta$.
Also gilt $\|x\|_{\mathcal{H}} = \|x\|_K$ für alle $x \in \Delta$. Da Δ sowohl in $\mathcal{H}$ als auch in K dicht ist, folgt

$$(A_0, A_1)_{[\frac{1}{2}]} = K \cong \mathcal{H}.$$

Damit ist der erste Teil der Behauptung bewiesen.
$\mathcal{H}$ ist reflexiv. Daher sind nach Lemma 3.2.2 auch $(A_0, A_1)_{[\theta]}$, $0 < \theta < 1$, reflexiv, und es gilt

$$(A_0, A_1)_{[\theta]} = (A_0, A_1)^{[\theta]}.$$

Mit Gleichung (1) folgt

$$\begin{aligned} (A_0, A_1)'_{[\theta]} &= (A_0, A_1)^{[1-\theta]} \\ &= (A_0, A_1)_{[1-\theta]} \end{aligned}$$

für $0 < \theta < 1$.

□

Bemerkung: Wie man im Beweis sehen kann, ist der Isomorphismus zwischen $(A_0, A_1)_{[\frac{1}{2}]}$ und $\mathcal{H}$ die Fortsetzung der identischen Abbildung auf dem Durchschnitt Δ, der in beiden Räumen enthalten ist. Setzt man in Satz 3.2.3 zusätzlich voraus, daß $\mathcal{H}$ bereits in $A_0 + A_1$ enthalten ist, so gilt

$$(A_0, A_1)_{[\frac{1}{2}]} = \mathcal{H}.$$

3.3 Anwendung auf das Paar (L^∞, L^1)

Seien L und L^p, $1 \le p \le \infty$ wie in Abschnitt 2.2. Satz 3.2.3 wird nun auf das Interpolationspaar (L^∞, L^1) angewendet, um zu zeigen, daß L^2 ein Hilbertraum ist, daß L^p reflexiv ist für $1 < p < \infty$ und daß $(L^p)' \cong L^q$ für $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Lemma 3.3.1 *Zu einem linearen Funktional ψ auf L, das stetig ist bezüglich der Normen von L^1 und L^∞, gibt es ein $z \in L$, so daß*

$$\psi(x) = \langle \varphi_x, z \rangle \qquad \forall x \in L.$$

Beweis: L ist dicht in L^1, daher gibt es eine eindeutige Fortsetzung von ψ zu einem stetigen linearen Funktional auf L^1. Es gibt also ein $z \in L^\infty$ mit

$$\psi(x) = \langle \varphi_x, z \rangle \qquad \forall x \in L.$$

Da ψ stetig bezüglich der Norm von L^∞ ist, gibt es ein $C \ge 0$, so daß $|\langle \varphi_x, z \rangle| = |\psi(x)| \le C\|x\|$ $\forall x \in L$. Aus Satz 2.2.1,(v) folgt $z \in L$.

□

Satz 3.3.2 *Mit den Bezeichnungen von oben gilt*

- (i) *L^2 ist ein Hilbertraum,*
- (ii) *L^p ist reflexiv für $1 < p < \infty$,*
- (iii) *$(L^p)' \cong L^q$ für $1 < q, p < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

Beweis: Mit $A_0 = L^\infty$ und $A_1 = L^1$ sind alle Bedingungen von Satz 3.2.3 erfüllt: Es gilt

$$\left(L^1\right)' = L^\infty.$$

$\Delta = L$ ist dicht in L^1.
Sei $x \in \Delta$.

$$\begin{aligned} \|x\|_{A_1} &= \|\varphi_x\| \\ &= \sup\{\, |\langle \varphi_x, y \rangle| \,:\, y \in L^\infty,\ \|y\| \le 1\} \\ &= \sup\{\, |\langle \varphi_x, y \rangle| \,:\, y \in M_\varphi,\ \|y\| \le 1\} \\ &= \sup\{\, |\langle \varphi_x, y \rangle| \,:\, y \in \Delta,\ \|y\| \le 1\}, \end{aligned}$$

da $M_\varphi \subset L = \Delta$ und M_φ σ-schwach dicht in L^∞ ist.

Nach Lemma 3.3.1 gibt es zu einem linearen Funktional ψ auf Δ, das stetig ist bezüglich der Normen von A_0 und A_1 ein $z \in \Delta$ mit

$$\psi(x) = \langle x, z \rangle_{A_1, A_0} \qquad \forall x \in \Delta.$$

Für die Involution $*$ auf Δ ist

$$\langle x, y \rangle_{\mathcal{H}} := \langle x, y^* \rangle_{A_1, A_0}$$

ein Skalarprodukt nach Lemma 3.1.2.

Die Involution ist isometrisch in $\| \cdot \|_{A_1}$ und $\| \cdot \|_{\mathcal{H}}$ nach Lemma 3.1.3. Offensichtlich ist die Involution auch in der Norm von A_0 isometrisch.
Die Behauptungen folgen nun direkt aus Satz 3.2.3.

$\square$

Bemerkung: L^2 ist nach Lemma 3.1.2 und der Bemerkung nach Satz 3.2.3 gleich der Vervollständigung von M_φ (innerhalb von $L^\infty + L^1$) bezüglich des Skalarprodukts

$$\langle x, y \rangle_{\mathcal{H}_0} = \langle \Delta_\varphi^{\frac{1}{2}} x_\varphi, y_\varphi \rangle_{\mathcal{H}_\varphi}, \qquad x, y \in M_\varphi.$$

4 Interpolation mit dem konjugierten Dualraum

Von nun an bezeichne $\overline{X}$ den konjugierten Raum zu einem komplexen Vektorraum X, d. h. den Raum, der aus denselben Elementen wie X besteht und dessen skalare Multiplikation der Multiplikation mit der komplex-konjugierten Zahl entspricht. Die Elemente von $\overline{X}$ werden mit $\overline{x}$ bezeichnet, wobei $\overline{x} \in \overline{X}$ das $x \in X$ entsprechende Element sei.

Für einen topologischen komplexen Vektorraum X gilt $\overline{X}' = \overline{X'}$ vermöge der Zuordnung

$$\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle_{\overline{X}, \overline{X'}} := \overline{\langle x, y \rangle}_{X,X'} \,.$$

Sei (A_0, A_1) ein Interpolationspaar von Banachräumen, dann gilt

$$\begin{aligned} \overline{(A_0, A_1)_{[\theta]}} &= \left(\overline{A_0}, \overline{A_1}\right)_{[\theta]}, \\ \overline{(A_0, A_1)^{[\theta]}} &= \left(\overline{A_0}, \overline{A_1}\right)^{[\theta]}. \end{aligned}$$

Dies kann man analog zu Lemma 3.2.1 beweisen:
Zu einer Funktion $f : S \to A_0 + A_1$ sei $\overline{f}$ definiert durch $\overline{f}(z) := \overline{f(\overline{z})}$. Dies liefert isometrische Bijektionen zwischen $\mathcal{F}_a$ und $\mathcal{F}_{\overline{a}}$ bzw. $\mathcal{G}_a$ und $\mathcal{G}_{\overline{a}}$.

4.1 Übertragung von Satz 3.2.3 auf den konjugierten Fall

Analog zu Satz 3.2.3 erhält man den folgenden Satz zur Interpolation zwischen einem Banachraum und seinem konjugierten Dualraum.

Satz 4.1.1 *Sei (A_0, A_1) ein Interpolationspaar von Banachräumen mit*

$$\overline{A_1'} = A_0,$$

bei dem der Durchschnitt $\Delta := A_0 \cap A_1$ dicht in A_1 ist.
Für alle $x \in \Delta$ gelte

$$\|x\|_{A_1} = \sup\{ \, |\langle x, \overline{y} \rangle_{A_1, \overline{A_0}}| \; : \; y \in \Delta, \|y\|_{A_0} \le 1\}.$$

Zu einem linearen Funktional ψ auf $\overline{\Delta}$, das stetig ist bezüglich der Normen von $\overline{A_0}$ und $\overline{A_1}$, gebe es ein $z \in \Delta$ mit

$$\psi(\overline{x}) = \langle \overline{x}, z \rangle_{\overline{A_1}, A_0} \qquad \forall\, \overline{x} \in \overline{\Delta}.$$

Sei

$$\langle x, y \rangle_{\mathcal{H}} := \langle x, \overline{y} \rangle_{A_1, \overline{A_0}}, \qquad x, y \in \Delta,$$

ein Skalarprodukt auf Δ. $\mathcal{H}$ bezeichne die Vervollständigung von Δ bezüglich dieses Skalarprodukts.
Dann ist

$$(A_0, A_1)_{[\frac{1}{2}]} \cong \mathcal{H}.$$

Weiter gilt für $0 < \theta < 1$:

$$\begin{array}{ll} (i) & (A_0, A_1)_{[\theta]} \text{ ist reflexiv}, \\ (ii) & (A_0, A_1)_{[\theta]} = (A_0, A_1)^{[\theta]}, \\ (iii) & \overline{(A_0, A_1)'_{[\theta]}} = (A_0, A_1)_{[1-\theta]}. \end{array}$$

Beweis: Sei B_0 der Abschluß von Δ in A_0. Nach Lemma 1.3.1,(iii) gilt

$$(A_0, A_1)_{[\theta]} = (B_0, A_1)_{[\theta]}.$$

Δ ist dicht in A_1 und B_0. Daher gilt nach Satz 1.3.4

$$\overline{(B_0, A_1)'_{[\theta]}} = \left(\overline{B_0'}, \overline{A_1'}\right)^{[\theta]}, \quad 0 < \theta < 1.$$

A_1 kann als Teilraum von $\overline{B_0'} \subset \overline{\Delta'}$ aufgefaßt werden, denn jedes $x \in A_1$ definiert ein Funktional $i_{A_1}(x)$ auf $\overline{B_0}$ durch

$$i_{A_1}(x)(\overline{y}) = \langle x, \overline{y} \rangle_{A_1, \overline{A_0}}, \quad \overline{y} \in \overline{B_0}.$$

Die Einbettung $i_{A_1} : A_1 \hookrightarrow \overline{B_0'}$ ist wegen

$$\begin{aligned} \|i_{A_1}(x)\|_{\overline{B_0'}} &= \sup\{ |\langle x, \overline{y} \rangle_{A_1, \overline{A_0}}| \,:\, y \in \Delta, \|y\|_{B_0} \le 1\} \\ &= \|x\|_{A_1} \qquad\qquad \forall x \in \Delta \end{aligned}$$

isometrisch auf Δ und damit auf ganz A_1, denn i_{A_1} ist stetig. Die letzte Gleichung gilt nach Voraussetzung, da die Normen von B_0 und A_0 auf Δ gleich sind.

Für $x \in \Delta$ stimmen die Funktionswerte von $i_{A_1}(x) \in \overline{B_0'}$ und $x \in \overline{A_1'} = A_0$ auf $\overline{\Delta}$ überein, denn

$$\begin{aligned}
\langle \overline{y}, i_{A_1}(x)\rangle_{\overline{B_0},\overline{B_0'}} &= \langle x, \overline{y}\rangle_{A_1,\overline{A_0}} &&= \langle x, y\rangle_{\mathcal{H}} \\
&= \overline{\langle y, x\rangle_{\mathcal{H}}} &&= \overline{\langle y, \overline{x}\rangle_{A_1,\overline{A_0}}} \\
&= \langle \overline{y}, x\rangle_{\overline{A_1},A_0} && \forall y \in \Delta.
\end{aligned}$$

Also ist $i_{A_1}(x) = x$ als Element von $\overline{\Delta'}$ für alle $x \in \Delta \subset A_0 = \overline{A_1'}$. Der Durchschnitt der konjugierten Dualräume $\overline{A_1'}$ und $\overline{B_0'}$ ist wiederum Δ, denn es gilt einerseits $\Delta \subset \overline{A_1'} \cap \overline{B_0'}$.
Sei andererseits $\overline{y} \in \overline{A_1'} \cap \overline{B_0'}$, dann gibt es nach Voraussetzung ein $z \in \Delta$ mit

$$\begin{aligned}
\langle \overline{x}, z\rangle_{\overline{A_1},A_0} &= \langle \overline{x}, \overline{y}\rangle_{\overline{A_1},\overline{A_1'}} \\
&= \langle \overline{x}, \overline{y}\rangle_{\overline{B_0},\overline{B_0'}} \qquad \forall\, \overline{x} \in \overline{\Delta}.
\end{aligned}$$

Das bedeutet $z = \overline{y}$ als Element von $\overline{\Delta'}$. Somit gilt auch $\overline{A_1'} \cap \overline{B_0'} \subset \Delta$.

Der Abschluß des Durchschnitts Δ in $\overline{B_0'}$ ist gleich A_1, da A_1 isometrisch in $\overline{B_0'}$ enthalten ist und Δ dicht in A_1 liegt.
Daher gilt nun

$$\begin{aligned}
\overline{(A_0, A_1)'_{[\theta]}} &= \overline{(B_0, A_1)'_{[\theta]}} \\
&= \left(\overline{B_0'}, \overline{A_1'}\right)^{[\theta]} \\
&= (A_1, A_0)^{[\theta]} \\
&= (A_0, A_1)^{[1-\theta]} \qquad (2)
\end{aligned}$$

für $0 < \theta < 1$.
Für $\theta = \frac{1}{2}$ folgt

$$\overline{(A_0, A_1)'_{\left[\frac{1}{2}\right]}} = (A_0, A_1)^{\left[\frac{1}{2}\right]}.$$

$K := (A_0, A_1)_{\left[\frac{1}{2}\right]}$ ist nach [Be] in $(A_0, A_1)^{\left[\frac{1}{2}\right]} = \overline{K'}$ enthalten, und die Normen stimmen überein, d. h. für $x \in K$ gilt $\|x\|_K = \|x\|_{\overline{K'}}$.
Sei $x \in \Delta$.

$$\begin{aligned}
\|x\|^2_{\mathcal{H}} &= \langle x, x\rangle_{\mathcal{H}} \\
&= \langle x, \overline{x}\rangle_{A_1,\overline{A_0}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& & = \; & \langle x, \overline{x}\rangle_{K,K'} \\
& & \leq \; & \|x\|_K \|\overline{x}\|_{K'} \\
& & = \; & \|x\|_K \|x\|_{\overline{K'}} \\
& & = \; & \|x\|_K^2 \\
\Longrightarrow \quad & \|x\|_{\mathcal{H}} & \leq \; & \|x\|_K
\end{aligned}
$$

für alle $x \in \Delta$.
Umgekehrt gilt

$$
\begin{aligned}
\|x\|_K = \|x\|_{\overline{K'}} = \|\overline{x}\|_{K'} &= \sup\{\, |\langle y, \overline{x}\rangle_{K,K'}| \,:\, \|y\|_K \leq 1, y \in \Delta\} \\
&\leq \sup\{\, |\langle y, \overline{x}\rangle_{K,K'}| \,:\, \|y\|_{\mathcal{H}} \leq 1, y \in \Delta\} \\
&= \sup\{\, |\langle y, \overline{x}\rangle_{A_1,\overline{A_0}}| \,:\, \|y\|_{\mathcal{H}} \leq 1, y \in \Delta\} \\
&= \sup\{\, |\langle y, x\rangle_{\mathcal{H}}| \,:\, \|y\|_{\mathcal{H}} \leq 1, y \in \Delta\} \\
&= \|x\|_{\mathcal{H}}
\end{aligned}
$$

für alle $x \in \Delta$.
Daraus folgt $\|x\|_{\mathcal{H}} = \|x\|_K$ für alle $x \in \Delta$. Da Δ sowohl in $\mathcal{H}$ als auch in K dicht ist, folgt

$$(A_0, A_1)_{[\frac{1}{2}]} = K \cong \mathcal{H}.$$

Damit ist der erste Teil der Behauptung bewiesen.
$\mathcal{H}$ ist reflexiv. Daher sind nach Lemma 3.2.2 auch $(A_0, A_1)_{[\theta]}$, $0 < \theta < 1$, reflexiv, und es gilt

$$(A_0, A_1)_{[\theta]} = (A_0, A_1)^{[\theta]}.$$

Mit Gleichung (2) folgt

$$
\begin{aligned}
\overline{(A_0, A_1)'_{[\theta]}} &= (A_0, A_1)^{[1-\theta]} \\
&= (A_0, A_1)_{[1-\theta]}
\end{aligned}
$$

für $0 < \theta < 1$.

□

4.2 Anwendung auf Spezialfälle

Folgende Spezialfälle der Interpolation zwischen einem Banachraum und seinem konjugierten Dualraum wurden von U. Haagerup und G. Pisier in [HP] (für Operator-Hilberträume von Pisier in [Pi]) und von F. Watbled in [Wa] betrachtet:

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und X ein Banachraum. Sei eine stetige Inklusion $v : \mathcal{H} \to X$ mit dichtem Bild gegeben. Dann kann man $\overline{X'}$ vermöge der transponierten Abbildung $\overline{v'} : \overline{X'} \to \overline{\mathcal{H}'} = \mathcal{H}$ in $\mathcal{H}$ einbetten und erhält durch die Zusammensetzung eine Einbettung

$$v \circ \overline{v'} : \overline{X'} \to X.$$

Diese macht $\left(\overline{X'}, X\right)$ zum Interpolationspaar mit Durchschnitt $\overline{X'}$. Hierbei wird $\overline{X'}$ mit seinem Bild unter $v \circ \overline{v'}$ identifiziert und daher als Teilraum von X betrachtet.
Nach Definition des Interpolationspaares ist der Zusammenhang zwischen dem Skalarprodukt und der Dualität von X und X' gegeben durch

$$\langle x, y \rangle_{\mathcal{H}} = \langle x, \overline{y} \rangle_{X,X'}$$

für alle x, y aus dem Durchschnitt $\overline{X'}$.

Ebenso kann man den umgekehrten Fall betrachten:
Sei $v : X \to \mathcal{H}$ eine stetige Einbettung mit dichtem Bild, dann erhält man eine Einbettung

$$\overline{v'} \circ v : X \to \overline{X'}$$

und ein Interpolationspaar $\left(\overline{X'}, X\right)$ mit Durchschnitt X.

In beiden Fällen ist der mittlere Interpolationsraum der Hilbertraum $\mathcal{H}$. Diese Ergebnisse erhält man auch als Folge von Satz 4.1.1, wie in den folgenden beiden Korollaren gezeigt wird. Darüberhinaus erhält man – wie in Satz 4.1.1 – die Dualität der Interpolationsräume.

Korollar 4.2.1 *Mit obigen Definitionen und Bezeichnungen gilt für den Fall* $v : \mathcal{H} \to X$

$$\left(\overline{X'}, X\right)_{\left[\frac{1}{2}\right]} = \mathcal{H}.$$

Weiter gilt für $0 < \theta < 1$:

$$\overline{\left(\overline{X'}, X\right)'_{[\theta]}} = \left(\overline{X'}, X\right)_{[1-\theta]}.$$

Beweis: Zunächst wird gezeigt, daß der Durchschnitt $\overline{X'} \cap X = \overline{X'}$ dicht in X liegt. Dazu genügt es zu zeigen, daß $\overline{X'}$ dicht in $\mathcal{H}$ liegt. Sei $y \in \mathcal{H}$ mit $\langle x, y\rangle_{\mathcal{H}} = 0$ für alle $x \in \overline{X'}$. Dann ist

$$\langle y, \overline{x}\rangle_{X,X'} = \langle y, x\rangle_{\mathcal{H}} = 0$$

für alle $\overline{x} \in X'$. Daher ist $y = 0$. Das orthogonale Komplement von $\overline{X'}$ in $\mathcal{H}$ ist also $\{0\}$, folglich liegt $\overline{X'}$ dicht in $\mathcal{H}$.
Für $x \in \overline{X'}$ gilt offensichtlich

$$\|x\|_X = \sup\{\, |\langle x, \overline{y}\rangle_{X,X'}| \;:\; y \in \overline{X'}, \|y\|_{\overline{X'}} \le 1\}.$$

Zu einem linearen Funktional ψ auf X', das stetig ist bezüglich der Normen von X' und $\overline{X}$ gibt es ein $z \in \overline{X'}$, so daß

$$\psi(\overline{x}) = \langle \overline{x}, z\rangle_{\overline{X},\overline{X'}} \qquad \forall\, \overline{x} \in X',$$

denn hierfür genügt bereits die Voraussetzung der Stetigkeit in der Norm von $\overline{X}$.

Mit $A_1 = X$ und $A_0 = \overline{X'}$ sind alle Bedingungen von Satz 4.1.1 erfüllt. Das dortige Skalarprodukt stimmt mit dem Skalarprodukt von $\mathcal{H}$ überein. Die Behauptungen folgen aus Satz 4.1.1.
Da $\mathcal{H}$ in X enthalten ist, gilt hier nicht nur die Isomorphie, sondern die Gleichheit

$$\left(\overline{X'}, X\right)_{\left[\frac{1}{2}\right]} = \mathcal{H}.$$

□

Korollar 4.2.2 *Mit obigen Definitionen und Bezeichnungen gilt für den Fall $v : X \to \mathcal{H}$*

$$\left(\overline{X'}, X\right)_{\left[\frac{1}{2}\right]} = \mathcal{H}.$$

Weiter gilt für $0 < \theta < 1$:

$$\overline{\left(\overline{X'}, X\right)'_{[\theta]}} = \left(\overline{X'}, X\right)_{[1-\theta]}.$$

Beweis: Es bezeichne B den Abschluß von $X = \overline{X'} \cap X$ in $\overline{X'}$ und $\iota : B \hookrightarrow \overline{X'}$ die zugehörige Inklusion. Das Bild von $\mathcal{H} = \overline{\mathcal{H}'}$ unter $\overline{v'}$ liegt in B, denn $v(X)$ liegt dicht in $\mathcal{H}$ und $\overline{v'} \circ v(X)$ ist in B enthalten, nach Definition von B. $\left(\overline{v'}\right)^{-1}(B)$ ist abgeschlossen und enthält $v(X)$, also enthält es $\mathcal{H}$.

Sei $w : \mathcal{H} \to B$, so daß

$$\iota \circ w = \overline{v'}.$$

Die Abbildungen w und $\overline{v'}$ unterscheiden sich also nur im Bildbereich, der bei w der Abschluß des Bildes ist.

Aus dem Dualitätssatz 1.3.4 erhält man

$$\begin{aligned} \left(\overline{X'}, X\right)'_{\left[\frac{1}{2}\right]} &= (B, X)'_{\left[\frac{1}{2}\right]} \\ &= (B', X')^{\left[\frac{1}{2}\right]}. \end{aligned} \tag{3}$$

Das Interpolationspaar (B', X') ist dabei definiert über die Transponierte der Einbettung $w \circ v : X \to B$, also $v' \circ w' : B' \to X'$.

Betrachtet man nun die Einbettung $w : \mathcal{H} \to B$, so kann man darauf Korollar 4.2.1 anwenden. Man erhält dabei die Einbettung $w \circ \overline{w'} : \overline{B'} \to B$.

Wegen

$$\overline{v'} \circ \overline{w'} = \iota \circ w \circ \overline{w'}$$

ergibt sich also dasselbe Interpolationspaar wie durch Anwendung des Dualitätssatzes, bis auf Konjugation und Übergang zum Abschluß des Durchschnitts, denn die Einbettung ι macht gerade den „Unterschied“ zwischen $\overline{X'}$ und dem Abschluß B des Durchschnitts aus. Da dieser bei der Interpolation keine Rolle spielt, sind die Interpolationsräume des einen Paares gleich den konjugierten des anderen.

Aus Korollar 4.2.1 und Lemma 3.2.2 folgt

$$\left(\overline{B'}, \overline{X'}\right)_{\left[\frac{1}{2}\right]} = \left(\overline{B'}, \overline{X'}\right)^{\left[\frac{1}{2}\right]} = \mathcal{H}.$$

Daraus folgt zusammen mit (3), daß der konjugierte Dualraum von $\left(\overline{X'}, X\right)_{\left[\frac{1}{2}\right]}$ gleich $\mathcal{H}$ ist, also ist $\left(\overline{X'}, X\right)_{\left[\frac{1}{2}\right]}$ kanonisch isomorph zu $\mathcal{H}$. Die Gleichheit ergibt sich aus der zweiten Behauptung des Satzes.

Diese folgt aus

$$\overline{\left(\overline{X'}, X\right)'_{[\theta]}} = \overline{(B', X')^{[\theta]}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \overline{(B', X')_{[\theta]}} \\
&= (B', X')'_{[1-\theta]} \\
&= \left((B', X')^{[1-\theta]}\right)' \\
&= \left(\overline{X'}, X\right)''_{[1-\theta]} \qquad (4)
\end{aligned}
$$

für $0 < \theta < 1$. Die Gleichheit ist hier – wie in Satz 4.1.1 – in $B'' = (B' \cap X')'$, dem Dualraum des Durchschnitts des dualen Interpolationspaares, zu verstehen. $\overline{\left(\overline{X'}, X\right)'_{[\theta]}} = \left(\overline{X'}, X\right)''_{[1-\theta]}$ ist kanonisch isomorph zu $\left(\overline{X'}, X\right)_{[1-\theta]}$, da dieser Raum reflexiv ist. Die Räume sind sogar gleich. Dazu genügt es – in diesem Fall – zu zeigen, daß einer der Räume im anderen enthalten ist (denn alle Identifikationen der betrachteten Interpolationsräume basieren auf kanonischen Einbettungen):

$X \left(\subset \mathcal{H} \subset \overline{X'}\right)$ ist in $\overline{B'} \left(\subset \mathcal{H} \subset \overline{X'}\right)$ enthalten, denn zu $x \in X$ wird $\overline{z} \in \overline{B'}$,

$$\langle \overline{y}, \overline{z} \rangle_{\overline{B}, \overline{B'}} := \langle x, \overline{\iota}(\overline{y}) \rangle_{X, X'}, \quad \overline{y} \in \overline{B}$$

von der Einbettung $\overline{v'} \circ \overline{w'} : \overline{B'} \to \overline{X'}$ auf das Bild von x unter der Einbettung $\overline{v'} \circ v : X \to \overline{X'}$ abgebildet:

$$
\begin{aligned}
\langle y, \overline{w'}(\overline{z}) \rangle_{\mathcal{H}} &= \langle y, w'(z) \rangle_{\mathcal{H}, \mathcal{H}'} \\
&= \langle w(y), z \rangle_{B, B'} \\
&= \overline{\langle x, \overline{\iota} \circ \overline{w}(\overline{y}) \rangle}_{X, X'} \\
&= \overline{\langle x, v'(\overline{y}) \rangle}_{X, X'} \\
&= \overline{\langle v(x), \overline{y} \rangle}_{\mathcal{H}, \mathcal{H}'} \\
&= \overline{\langle v(x), y \rangle}_{\mathcal{H}} \\
&= \langle y, v(x) \rangle_{\mathcal{H}}
\end{aligned}
$$

für alle $y \in \mathcal{H}$.

Daraus folgt $\overline{w'}(\overline{z}) = v(x)$ in $\mathcal{H}$ und somit $\overline{v'} \circ \overline{w'}(\overline{z}) = \overline{v'} \circ v(x)$ in $\overline{X'}$.

Die Inklusion von X nach $\overline{B'}$ ist normverkleinernd, denn es gilt

$$
\begin{aligned}
\|x\|_X &= \sup\{ |\langle x, y \rangle_{X, X'}| \, : \, y \in X', \, \|y\|_{X'} \leq 1\} \\
&\geq \sup\{ |\langle x, \overline{\iota}(y) \rangle_{X, X'}| \, : \, y \in \overline{B}, \, \|y\|_{\overline{B}} \leq 1\} \\
&= \sup\{ |\langle y, \overline{z} \rangle_{\overline{B}, \overline{B'}}| \, : \, y \in \overline{B}, \, \|y\|_{\overline{B}} \leq 1\} \\
&= \|\overline{z}\|_{\overline{B'}}.
\end{aligned}
$$

Somit gilt $\mathcal{F}\left(\overline{X'}, X\right) \subset \mathcal{F}\left(\overline{X'}, \overline{B'}\right)$.
Daher folgt

$$\begin{aligned}\left(\overline{X'}, X\right)_{[\theta]} &\subset \left(\overline{X'}, \overline{B'}\right)_{[\theta]}\\ &= \left(\overline{B'}, \overline{X'}\right)_{[1-\theta]}\\ &\overset{(4)}{=} \left(\overline{X'}, X\right)''_{[\theta]}.\end{aligned}$$

□

Bemerkung: Nach Lemma 3.2.2 sind die Interpolationsräume in den letzten beiden Korollaren wiederum reflexiv, und beide Interpolationsmethoden liefern dieselben Interpolationsräume.

5 Ergänzungen

In Satz 4.1.1 sind die Rollen von A_1 und B_0, dem Abschluß des Durchschnitts in A_0, symmetrisch, was in der Formulierung der Behauptung allerdings nicht deutlich wird. Beide Räume sind Teilräume des konjugierten Dualraums des jeweils anderen. Andererseits muß diese Dualität nicht explizit vorausgesetzt werden, es genügt, die Existenz eines Skalarprodukts anzunehmen, das gewisse Norm-Bedingungen erfüllt. Weiterhin ist die Voraussetzung der Dichtigkeit von Δ in A_1 stärker als benötigt, da der Übergang zum Abschluß des Durchschnitts die Interpolationsräume nicht verändert.

Schwächere Bedingungen könnten für konkrete Anwendungen interessant sein. Präzisiert wird dies in dem folgenden Satz.

5.1 Symmetrische Version von Satz 4.1.1

Satz 5.1.1 *Sei (A_0, A_1) ein Interpolationspaar von Banachräumen mit Durchschnitt Δ.*
Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, der Δ als dichte Teilmenge enthält.
Es gelte

$$\begin{aligned} \|x\|_{A_1} &= \sup\{|\langle x, y\rangle_{\mathcal{H}}| \,:\, y \in \Delta, \|y\|_{A_0} \leq 1\}, \\ \|x\|_{A_0} &= \sup\{|\langle x, y\rangle_{\mathcal{H}}| \,:\, y \in \Delta, \|y\|_{A_1} \leq 1\}, \end{aligned}$$

für alle $x \in \Delta$.

Zu einem linearen Funktional ψ auf Δ, das stetig ist bezüglich der Normen von A_0 und A_1, gebe es ein $z \in \Delta$ mit

$$\psi(x) = \langle x, z\rangle_{\mathcal{H}} \qquad \forall\, x \in \Delta.$$

Dann ist

$$(A_0, A_1)_{[\frac{1}{2}]} \cong \mathcal{H}.$$

Weiter gilt für $0 < \theta < 1$:

$$\overline{(A_0, A_1)'_{[\theta]}} = (A_0, A_1)_{[1-\theta]}.$$

Beweis: Sei B_j der Abschluß von Δ in A_j, $j = 0, 1$. Dann läßt sich B_0 in $\overline{B_1'}$ einbetten vermöge der stetigen Fortsetzung der Dualität

$$\langle x, \overline{y} \rangle_{B_1, B_1'} := \langle x, y \rangle_{\mathcal{H}} \qquad \forall x, y \in \Delta.$$

Diese Einbettung ist isometrisch wegen der Bedingung an die Norm von A_0. Ebenso kann man B_1 in $\overline{B_0'}$ einbetten. B_1 und $\overline{B_1'}$ sind also beide in $\overline{\Delta'} = \overline{B_0'} + \overline{B_1'}$ enthalten und bilden daher ein Interpolationspaar, dessen Durchschnitt wieder Δ ist, wegen der Voraussetzung an die stetigen Funktionale. Der Abschluß von Δ in $\overline{B_1'}$ ist gleich B_0. Daraus folgt

$$\begin{aligned} (A_0, A_1)_{[\theta]} &= (B_0, B_1)_{[\theta]} \\ &= \left(\overline{B_1'}, B_1 \right)_{[\theta]}, \qquad 0 < \theta < 1. \end{aligned}$$

Das Paar $\left(\overline{B_1'}, B_1 \right)$ erfüllt alle Bedingungen von Satz 4.1.1, da die Normen von A_0, B_0 und $\overline{B_1'}$ bzw. A_1, B_1 und $\overline{B_0'}$ auf Δ übereinstimmen.

□

Bemerkungen:

1. Im vorangegangenen Beweis kann man – wegen der Symmetrie von A_0 und A_1 – ebenso mit dem Interpolationspaar $\left(\overline{B_0'}, B_0 \right)$ argumentieren.

2. Satz 5.1.1 umfaßt auch Satz 3.2.3. Wendet man Satz 5.1.1 auf die Situation in Satz 3.2.3 an, so wird implizit ausgenutzt, daß es einen (linearen!) isometrischen Isomorphismus $I : B_0 \to \overline{B_0}$ gibt:

$$I(y) := \overline{y^*}, \quad y \in \Delta,$$

wobei B_0 wieder den Abschluß von Δ in A_0 bezeichnet. Im Beweis wird dieser Teilraum des Dualraums von A_1 also „künstlich“ in einen Teilraum des konjugierten Dualraums von A_1 umgewandelt.

5.2 Abschwächung der Bedingung an die Dualräume

Eine interessante Frage ist, inwieweit man sich in Satz 5.1.1 von der Voraussetzung an die bezüglich beider Normen stetigen Funktionale auf Δ lösen kann. Dabei könnte man – wie in Korollar 4.2.2 – ausnutzen, daß es genügt zu zeigen, daß der Dualraum des mittleren Interpolationsraums ein Hilbertraum ist, um zu beweisen, daß der mittlere Interpolationsraum selbst ein Hilbertraum ist.

Diese Idee wird im folgenden Satz verwendet, der beispielsweise auf das Interpolationspaar $(C_0(\mathbb{R}), L^1(\mathbb{R}))$ angewendet werden kann. Dabei bezeichne $C_0(\mathbb{R})$ den Raum aller im Unendlichen verschwindenden stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$ mit der Supremumsnorm.

Satz 5.2.1 *Sei (A_0, A_1) ein Interpolationspaar von Banachräumen mit Durchschnitt Δ. Sei B_j der Abschluß von Δ in A_j, $j = 0, 1$.*
Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, der stetig in $B_0 + B_1$ enthalten ist und der Δ als dichte Teilmenge enthält.
Es gelte

$$\begin{aligned} \|x\|_{A_1} &= \sup\{\, |\langle x, y\rangle_{\mathcal{H}}| \;:\; y \in \Delta, \|y\|_{A_0} \leq 1\}, \\ \|x\|_{A_0} &= \sup\{\, |\langle x, y\rangle_{\mathcal{H}}| \;:\; y \in \Delta, \|y\|_{A_1} \leq 1\} \end{aligned}$$

für alle $x \in \Delta$.
Der Durchschnitt Δ_d des dualen Interpolationspaares ist in $\mathcal{H}' = \overline{\mathcal{H}}$ enthalten (siehe (6) im Beweis).
Es sei

$$|\langle x, y\rangle_{\overline{\mathcal{H}}}| \leq \|x\|_{B_0'} \|y\|_{B_1'} \tag{5}$$

für alle $x, y \in \Delta_d$.
Dann ist

$$(A_0, A_1)_{[\frac{1}{2}]} = \mathcal{H}.$$

Weiter gilt für $0 < \theta < 1$:

$$\overline{(A_0, A_1)'_{[\theta]}} \cong (A_0, A_1)_{[1-\theta]}.$$

Bemerkung: Definitionsgemäß ist ein Interpolationsraum in der Summe des Interpolationspaares enthalten und enthält dessen Durchschnitt. Daher ist die Bedingung

$$\Delta \subset \mathcal{H} \subset B_0 + B_1$$

auch notwendig dafür, daß der mittlere Interpolationsraum gleich $\mathcal{H}$ ist.

Beweis von Satz 5.2.1:

Zunächst einige Vorbemerkungen:
Der Durchschnitt Δ ist dicht in B_0+B_1, denn seien $x=x_0+x_1\in B_0+B_1$, $\varepsilon>0$ und $y_0,y_1\in\Delta$ mit $\|x_0-y_0\|_{B_0}<\frac{\varepsilon}{2}$ und $\|x_1-y_1\|_{B_1}<\frac{\varepsilon}{2}$. Solche y_j existieren, da Δ dicht in B_j ist für $j=0,1$. Es gilt $y:=y_0+y_1\in\Delta$, da Δ ein Teilraum von B_0+B_1 ist.
Es folgt

$$\begin{aligned}\|x-y\|_{B_0+B_1} &= \|x_0-y_0+x_1-y_1\|_{B_0+B_1}\\ &\leq \|x_0-y_0\|_{B_0}+\|x_1-y_1\|_{B_1} < \varepsilon.\end{aligned}$$

$\mathcal{H}$ enthält Δ und ist deshalb ebenfalls dicht in B_0+B_1. Durch Transposition erhält man mit den üblichen Identifikationen

$$\Delta_d=(B_0+B_1)'\subset\mathcal{H}'=\overline{\mathcal{H}}\subset\overline{B_0}+\overline{B_1}. \tag{6}$$

Die Gleichung $\Delta_d=(B_0+B_1)'$ gilt allgemein (siehe [BL] oder [Ca]).
Für das Skalarprodukt folgt

$$\langle x,y\rangle_{\overline{\mathcal{H}}}=\langle x,\overline{y}\rangle_{\overline{B_0}+\overline{B_1},\overline{\Delta_d}}$$

für alle $x,y\in\Delta_d$.
Wie in Satz 5.1.1 ist – wegen der Norm-Bedingungen – $\overline{\Delta}$ isometrisch bezüglich der Normen von $\overline{B_1}$ bzw. $\overline{B_0}$ in B_0' bzw. B_1' enthalten. Also ist $\overline{\Delta}$ im Durchschnitt Δ_d enthalten.
Nun wird gezeigt, daß das duale Paar (B_0',B_1') alle Bedingungen von Satz 5.1.1 erfüllt.
Da $\overline{\Delta}$ dicht in $\overline{B_0}$ liegt, folgt

$$\begin{aligned}\|x\|_{B_0'} &= \|\overline{x}\|_{\overline{B_0'}}\\ &= \sup\{\,|\langle y,\overline{x}\rangle_{\overline{B_0},\overline{B_0'}}| \;:\; y\in\overline{\Delta},\|y\|_{\overline{B_0}}\leq 1\}\\ &= \sup\{\,|\langle y,\overline{x}\rangle_{\overline{B_0}+\overline{B_1},\overline{\Delta_d}}| \;:\; y\in\overline{\Delta},\|y\|_{\overline{B_0}}\leq 1\}\\ &= \sup\{\,|\langle y,x\rangle_{\overline{\mathcal{H}}}| \;:\; y\in\overline{\Delta},\|y\|_{\overline{B_0}}\leq 1\}\\ &= \sup\{\,|\langle y,x\rangle_{\overline{\mathcal{H}}}| \;:\; y\in\overline{\Delta},\|y\|_{B_1'}\leq 1\}\\ &\leq \sup\{\,|\langle y,x\rangle_{\overline{\mathcal{H}}}| \;:\; y\in\Delta_d,\|y\|_{B_1'}\leq 1\}\end{aligned}$$

für alle $x\in\Delta_d$.

Analog folgt

$$\|x\|_{B_1'} \leq \sup\{\, |\langle y, x\rangle_{\overline{\mathcal{H}}}| \;:\; y \in \Delta_d, \|y\|_{B_0'} \leq 1\} \qquad \forall x \in \Delta_d.$$

Aus (5) folgt die umgekehrte Ungleichung, also insgesamt

$$\begin{aligned} \|x\|_{B_0'} &= \sup\{\, |\langle y, x\rangle_{\overline{\mathcal{H}}}| \;:\; y \in \Delta_d, \|y\|_{B_1'} \leq 1\} \\ \|x\|_{B_1'} &= \sup\{\, |\langle y, x\rangle_{\overline{\mathcal{H}}}| \;:\; y \in \Delta_d, \|y\|_{B_0'} \leq 1\} \end{aligned}$$

für alle $x \in \Delta_d$.

Sei ψ ein lineares Funktional auf Δ_d, das stetig ist bezüglich der Normen von B_0' und B_1'. Dann ist ψ (eingeschränkt auf $\overline{\Delta}$) auch ein stetiges Funktional auf $\overline{\Delta}$ bezüglich der Normen von $\overline{B_1}$ und $\overline{B_0}$, denn $\overline{\Delta} \subset \Delta_d$ isometrisch bezüglich der jeweiligen Normen. Nach Definition des dualen Interpolationspaares gibt es zu einem solchen Funktional ψ ein $z \in \Delta_d$ mit

$$\psi(x) = \langle x, \overline{z}\rangle_{\overline{B_0}+\overline{B_1},\, \overline{\Delta_d}} \qquad \forall\, x \in \overline{\Delta}.$$

Diese Gleichung gilt auch für alle $x \in \Delta_d$, da $\overline{\Delta}$ bezüglich der Norm von $\overline{B_0}+\overline{B_1}$ dicht in Δ_d liegt und ψ in dieser Norm stetig ist:

$$\begin{aligned} |\psi(x)| &\leq |\psi(x_0)| + |\psi(x_1)| \\ &\leq C_0\|x_0\|_{\overline{B_0}} + C_1\|x_1\|_{\overline{B_1}} \\ &\leq \max(C_0, C_1)(\|x_0\|_{\overline{B_0}} + \|x_1\|_{\overline{B_1}}) \end{aligned}$$

für $x \in \Delta_d$ und $x_j \in \overline{B_j}$, $j = 0, 1$, mit $x = x_0 + x_1$, wobei C_j Beschränktheits-Konstanten für ψ bezüglich der Normen von $\overline{B_j}$ seien.
Daher gilt für alle $x \in \Delta_d$

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \langle x, \overline{z}\rangle_{\overline{B_0}+\overline{B_1},\, \overline{\Delta_d}} \\ &= \langle x, z\rangle_{\overline{\mathcal{H}}}\,. \end{aligned}$$

(B_0', B_1') erfüllt also alle Bedingungen von Satz 5.1.1. Es folgt

$$(B_0', B_1')^{[\frac{1}{2}]} = (B_0', B_1')_{[\frac{1}{2}]} \cong \overline{\mathcal{H}}.$$

Daher ist der Dualraum von $(A_0, A_1)_{[\frac{1}{2}]}$ ein Hilbertraum, der isomorph zu $\overline{\mathcal{H}}$ ist.
Somit ist

$$(A_0, A_1)_{[\frac{1}{2}]} \cong \mathcal{H}.$$

Es gilt hier sogar Gleichheit, da $\mathcal{H} \subset B_0 + B_1 \subset A_0 + A_1$ und alle Isomorphismen den Durchschnitt Δ identisch auf sich abbilden (im Sinne der obigen Identifikationen).

Die zweite Behauptung des Satzes folgt aus

$$\begin{aligned}
\overline{(A_0, A_1)'_{[\theta]}} &= \overline{(B'_0, B'_1)^{[\theta]}} \\
&= \overline{(B'_0, B'_1)_{[\theta]}} \\
&= (B'_0, B'_1)'_{[1-\theta]} \\
&= \left((B'_0, B'_1)^{[1-\theta]}\right)' \\
&= (A_0, A_1)''_{[1-\theta]} \\
&\cong (A_0, A_1)_{[1-\theta]},
\end{aligned}$$

für $0 < \theta < 1$, da $(A_0, A_1)_{[1-\theta]}$ reflexiv ist.

$\square$

In Satz 4.1.1 und Satz 5.1.1 gilt jeweils Δ_d, der Durchschnitt des dualen Interpolationspaares, ist gleich $\overline{\Delta}$. Im letzten Satz kann Δ_d echt größer als $\overline{\Delta}$ sein, wie man am Beispiel $(C_0(I\!R), L^1(I\!R))$ sieht. Δ besteht hier ausschließlich aus stetigen Funktionen, da dies bereits für $C_0(I\!R)$ zutrifft. Δ_d hingegen besteht aus allen wesentlich beschränkten L^1-Funktionen, denn jede solche definiert ein stetiges Funktional auf $C_0(I\!R)$ und auf $L^1(I\!R)$.

Literatur

[Be] J. Bergh, *On the Relation Between the Two Complex Methods of Interpolation,* Ind. Univ. Math. Journal 28, (1979), no. 5, 775–778.

[BL] J. Bergh, J. Löfström, *Interpolation Spaces,* Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York, 1976.

[Ca] A. P. Calderón, *Intermediate Spaces and Interpolation, the Complex Method,* Studia Math. 24 (1964), 113–190.

[Cw] M. Cwikel, *Complex Interpolation, a Discrete Definition and Reiteration,* Ind. Univ. Math. Journal 27, (1978), 1005–1009.

[Di] J. Dixmier, *Formes linéaires sur un anneau d'opérateurs,* Bull. Soc. Math. France 81 (1953), 9–39.

[Ha] U. Haagerup, *L^p-Spaces Associated with an Arbitrary von Neumann-Algebra,* Colloques internationaux du CNRS 274, Editions du CNRS, Paris, 1979, 175–184.

[Hi] M. Hilsum, *Les espaces L^p d'une algèbre de von Neumann définis par la dérivée spatiale,* J. Funct. Anal. 40 (1981), 151–169.

[HP] U. Haagerup, G. Pisier, *Factorization of analytic functions with values in non-commutative L^1-spaces and applications,* Can. J. Math., Vol. XLI, No. 5, 1989, pp. 882–906.

[Le] M. Leinert, *Integration with Respect to a Weight,* Int. J. Math. 2 (1991), no. 2, 177–182.

[Pi] G. Pisier, *The Operator Hilbert Space OH, Complex Interpolation and Tensor Norms,* Mem. Amer. Math. Soc. (wird erscheinen)

[St] S. Strătilă, *Modular Theory in Operator Algebras,* Abacus Press, Turnbridge Wells, 1981.

[SZ] S. Strătilă, L. Zsidó, *Lectures on von Neumann Algebras,* Abacus Press, Turnbridge Wells, 1979.

[Ta] M. Takesaki, *Theory of Operator Algebras I,* Springer-Verlag, New York – Heidelberg – Berlin, 1979.

[Te] M. Terp, *Interpolation Spaces between a von Neumann-Algebra and its Predual,* J. Operator Theory 8 (1982), 327–360.

[Tr] H. Triebel, *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators,* North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1978.

[Wa] F. Watbled, *Interpolation complexe d'un espace de Banach et de son antidual,* C. R. Acad. Sci. Paris, t. 321, Série I, p. 1437–1440, 1995.