Beispielberechnung

1. Berechne β für das betrachtete Ion und dessen Energie

$$\beta = \frac{v}{c} = \sqrt{\frac{2 \cdot E}{m_i \cdot c^2}}$$

(solange noch nicht-relativistisch gerechnet werden darf)

$m_i = m_a \cdot 1822.9 \cdot m_e$

m_a - atomare Massenzahl des Ions
m_e - 0.511 MeV/c²

$$\Rightarrow \quad \beta = \sqrt{\frac{2 \cdot E}{m_a \cdot 1822.9 \cdot 0.511}}; \qquad [E] = \text{MeV}$$

$$\beta = 0.046336081 \cdot \sqrt{\frac{E}{m_a}}$$

dabei ist $E_s = \sqrt{\frac{E}{m_a}}$ gerade die spezifische Energie des Ions!

Allgemein gilt also:

$$\beta = q \cdot \sqrt{E_s}; \quad [E_s] = \text{MeV/u}$$

$$q = 0.0463$$

D.h.:	UNILAC:		β = 0.156	(E_s = 11.4 MeV/u)
		bzw.	β = 0.154	(E_s = 11.1 MeV/u nach Dreifoliendetektor)
	HLI:		β = 0.055	(E_s = 1.4 MeV/u)

2. Berechne maximalen Energieübertrag auf die Elektronen

$$T_{max} = 2 \cdot m_e \cdot v^2$$
$$= 2 \cdot m_e \cdot \beta^2 \cdot c^2 \qquad m_e = 0.511\ \text{MeV}/c^2$$
$$= 2 \cdot 0.511 \cdot \beta^2$$

$$T_{max} = 1.022 \cdot \beta^2$$

$$[T_{max}] = \text{MeV}$$

D.h. UNILAC: $T_{max} = 0.02487$ MeV (11.4 MeV/u)
bzw. $T_{max} = 0.02424$ MeV (11.1 MeV/u)

HLI: $T_{max} = 0.00392$ MeV (1.4 MeV/u)

3. Berechne R_{max}

$$R_{max}\ \frac{5.2 \cdot 10^{-4}}{\rho} \cdot \left(T_{max} \cdot 10^{6}\right)^{\alpha}$$

$$\alpha = \begin{cases} 1.079, \text{ falls } \beta \leq 0.03 \\ 1.667, \text{ falls } \beta > 0.03 \end{cases}$$

Anm: $\beta = 0.03 \Leftrightarrow E_s = 0.42$ MeV/u

$[T_{max}]$ = MeV
$[R_{max}]$ = nm
$[\rho]$ = g/cm³

D.h. UNILAC: $R_{max} = (1/\rho) \cdot 5.2 \cdot 10^{-4} \cdot (0.02424 \cdot 10^{6})^{1.667}$

CaF_2: R_{max} = 3331 nm

HLI: CaF_2: R_{max} = 108 nm

4. Berechne Zeff

$$Z_{eff} = Z \cdot \left(1 - e^{-\frac{v}{v_0} \cdot Z^{-2/3}}\right)$$

Z - Ordnungszahl des Projektils
v_0 - Bohrgeschwindigkeit ($v_0 = 2.1847 \cdot 10^8$ cm/s)
v - Geschwindigkeit des Projektils

Ersetze v durch $\beta \cdot c$:

$$Z_{eff} = Z \cdot \left(1 - e^{-\frac{\beta \cdot c}{v_0} \cdot Z^{-2/3}}\right)$$

und schreibe b := c/v_0. Es ergibt sich: b ≈ 136. Bei "Waligorski" findet sich b ≈ 125. Da es mir nicht ohne weiteres möglich ist zu entscheiden, welcher der beiden Werte besser ist, verwende ich im folgenden deren Mittelwert (macht allerdings wohl kaum viel aus).

$$Z_{eff} = Z \cdot \left(1 - e^{-130.5 \cdot Z^{-2/3}}\right)$$

5. Es fehlt nur noch N_e

Die Elektronendichte (relevanter (!) Elektronen) N_e ist die letzte fehlende Größe. Zu dieser hat man keinen einfachen Zugang. Dies ist aber auch nicht nötig, da man die gesamte eingeschossene Energie kennt. Man kann das Ergebnis also so normieren, daß sich insgesamt gerade der bekannte Energieverlust ergibt. (Man kann also umgekehrt hier auch noch das N_e bestimmen!).

6. Alles in D einsetzen

Zu diesem Zweck möchte ich die ursprüngliche Formel etwas umformen:

$$D = \frac{N_e}{\beta^2} \cdot Z_{eff}^{\;2} \cdot \frac{e^4}{m_e \cdot c^2} \cdot \frac{1}{\alpha \cdot r^2} \cdot \left(1 - \frac{r}{R_{\max}}\right)^{1/\alpha}$$

$$\frac{e^4}{m\cdot c^2} = \frac{(4.8032\cdot 10^{10})^4\, esu^4}{0.511\cdot 10^6\, eV\cdot 1.602\cdot 10^{-12}\, erg/eV} \approx 6.50188\cdot 10^{-32}\,\frac{esu^4}{erg}$$

$[r] = [R_{max}] = cm$
$[N_e] = 1/cm^3$
$[D] = erg/g$

Vgl. zunächst Ergebnisse, die ich auf obige Weise erhalte mit Literaturangaben [S90]:

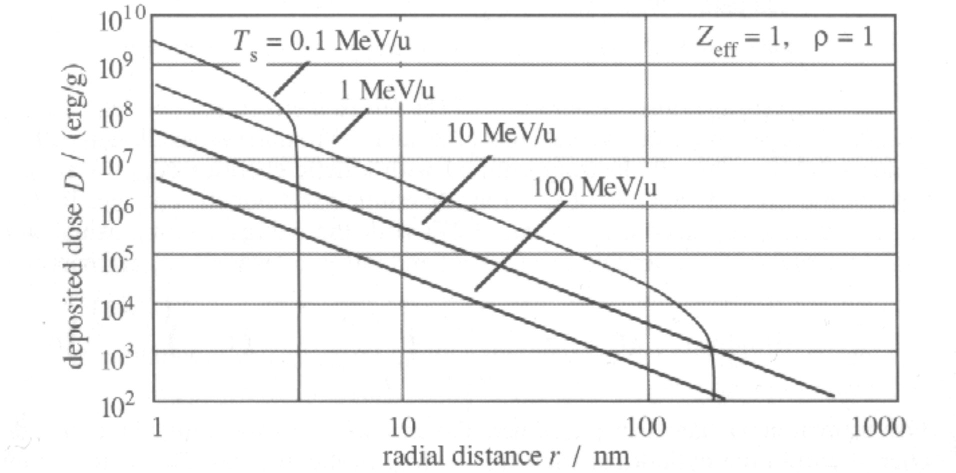

Figure 3-24 *Radial dose distribution*. Deposited dose D as function of distance r from ion path for different specific energies T_s of the ion, for $Z_{eff} = 1$, $\rho = 1$, $N_e = 2\cdot 10^{23}$.

Diese Ergebniss läßt sich exakt reproduzieren, was an einem Beispiel belegt werden soll: